

# Sub-Riemannian minimizers, spheres and cut loci (Lecture 9)

Yuri Sachkov

Program Systems Institute  
Russian Academy of Sciences  
Pereslavl-Zalessky, Russia  
yusachkov@gmail.com

«Geometric control theory, sub-Riemannian geometry, and their applications»

Lecture course in Steklov Mathematical Institute, Moscow

15 November 2022

8. *Нет ни быка, ни человека:*

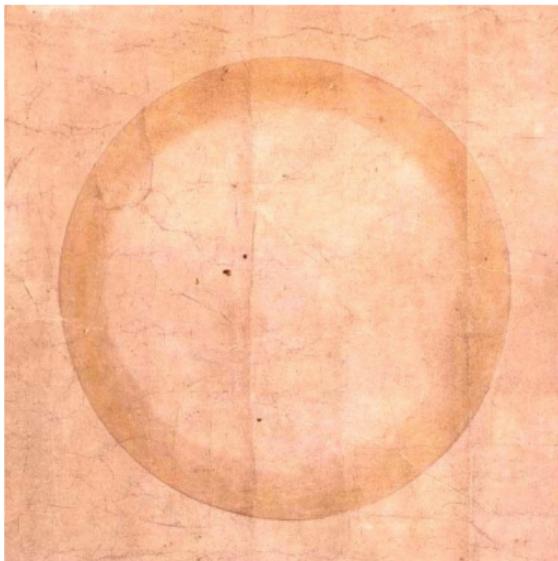
Нет ничего — ни хлыста, ни привязи; ни человека, ни быка:

Разве можно объять взором просторы небес?

В пылающей печи не найти никаких снежинок:

Когда положение дел таково, проявляется дух древнего мастера.

*Пу-мин, “Десять рисунков о пастухе и быке”*



## Напоминание: план предыдущей лекции

1. Задача Эйлера об эластиках

## План этой лекции

1. Субримановы структуры, кратчайшие, сферы
2. Субриманова задача на группе евклидовых движений плоскости
3. Субриманова задача на группе гиперболических движений плоскости
4. Субриманова задача на группе Энгеля
5. Открытые вопросы

## Основные определения

- гладкое многообразие  $M$ ,
- распределение  $\Delta = \{\Delta_q \subset T_q M \mid q \in M\}$ ,  $\dim \Delta_q \equiv \text{const}$ ,
- скалярное произведение в  $\Delta$ :

$$g = \{g_q \text{ — скалярное произведение в } \Delta_q \mid q \in M\}$$

- CR многообразие  $(M, \Delta, g)$ , CR структура  $(\Delta, g)$  на  $M$
- горизонтальная (допустимая) кривая  $q \in \text{Lip}([0, t_1], M)$ :

$$\dot{q}(t) \in \Delta_{q(t)} \text{ для п.в. } t \in [0, t_1],$$

- длина  $l(q(\cdot)) = \int_0^{t_1} (g(\dot{q}(t), \dot{q}(t)))^{1/2} dt$ ,
- CR расстояние  $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(\cdot) \text{ гориз. кривая, } q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$ ,

- CP кратчайшая  $q(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ : горизонтальная кривая т.ч.  
 $l(q(\cdot)) = d(q(0), q(t_1))$ ,
- сфера  $S_R(q_0) = \{q \in M \mid d(q, q_0) = R\}$ ,  
 шар  $B_R(q_0) = \{q \in M \mid d(q, q_0) \leq R\}$ ,
- геодезическая: горизонтальная кривая, малые дуги которой — кратчайшие,
- время разреза вдоль геодезической  $q(t)$ :

$$t_{\text{cut}}(q(\cdot)) = \sup\{t > 0 \mid q(s), s \in [0, t], \text{ кратчайшая } \},$$

- точка разреза  $q(t_1)$ ,  $t_1 = t_{\text{cut}}(q(\cdot))$ ,
- множество разреза  $\text{Cut}_{q_0} = \{q_1 \in M \mid q_1 \text{ т. разреза для нек-рой геодез. } q(\cdot),$   
 $q(0) = q_0\}$

- первое сопряженное время вдоль геодезической  $q(t)$ :

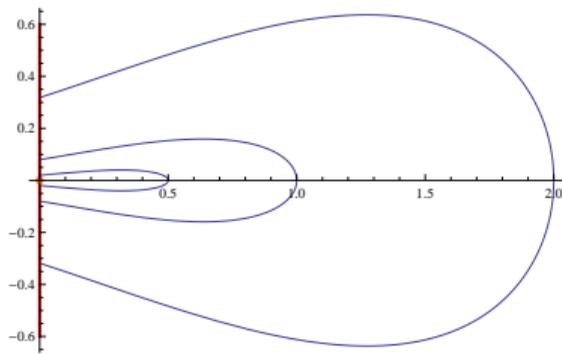
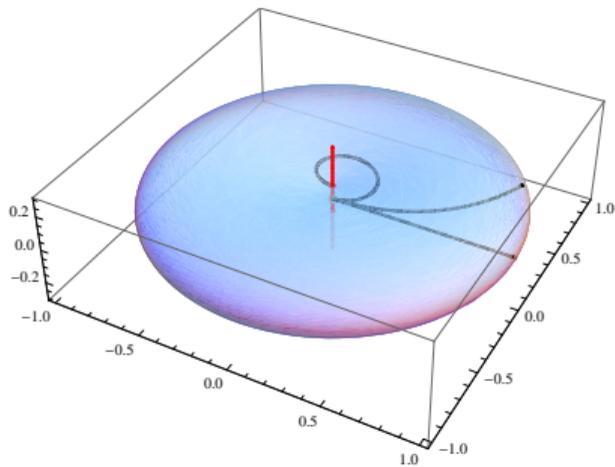
$$t_{\text{conj}}^1(q(\cdot)) = \sup\{t > 0 \mid q(s), s \in [0, t], \text{ локально оптимальна } \},$$

- $q(\cdot)$  локально оптимальна, если  $\exists$  окрестность  $O \supset \{q(t)\}$  т.ч.  $q(\cdot)$  — кратчайшая на  $(O, \Delta|_O, g|_O)$ ,
- первая сопряженная точка вдоль геодезической  $q(t)$ :  
 $q(t_1), t_1 = t_{\text{conj}}^1(q(\cdot))$ ,
- первая каустика:

$$\text{Conj}_{q_0} = \{q_1 \in M \mid q_1 \text{ первая сопряженная т. для нек-рой геодез. } q(\cdot), q(0) = q_0\}.$$

## Пример: Группа Гейзенберга

- $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
- $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad x = a, \quad y = b, \quad z = c - ab/2$
- $\Delta_q = \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$



## Задача оптимального управления

- СР многообразие  $(M, \Delta, g)$
- Ортонормированный репер:

$$\Delta_q = \text{span}(X_1(q), \dots, X_k(q)), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}, \quad i, k = 1, \dots, k,$$

- Кратчайшие  $q(t)$  — решения задачи

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i(q), \quad q \in M, \quad u_i \in \mathbb{R},$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \left( \sum_{i=1}^k u_i^2(t) \right)^{1/2} dt \rightarrow \min$$

$$\Leftrightarrow J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt \rightarrow \min.$$

## Существование решений

### Теорема 1 (Рашевский-Чжоу)

Пусть  $M$  связно и для всех  $q \in M$

$$\text{span}(X_i(q), [X_i, X_j](q), [[X_i, X_j], X_l](q), \dots) = T_q M. \quad (1)$$

Тогда для  $\forall q_0, q_1 \in M \exists$  горизонтальная кривая  $q(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , т.ч.  $q(0) = q_0$ ,  $q(t_1) = q_1$ .

Далее условие полного ранга (1) предполагается выполненным.

### Теорема 2 (Филиппов)

Соединяющая точки  $q_0, q_1 \in M$  кратчайшая существует, если выполнено одно из условий:

- $q_1$  достаточно близко к  $q_0$ ,
- шары  $B_R(q_0)$  компактны,
- $(\Delta, g)$  левоинвариантна на группе Ли  $M$ .

## Принцип максимума Понтрягина

- $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle$ ,  $\lambda \in T^*M$ .

### Теорема 3 (Понтрягин)

Если  $q(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , — кратчайшая, соответствующая управлению  $u(t)$ , то  $\exists \lambda \in \text{Lip}([0, t_1], T^*M)$ ,  $\lambda(t) \in T_{q(t)}^*M$ , т.ч.:

(1) либо  $\dot{\lambda}(t) = \vec{H}(\lambda(t))$ ,  $H(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k h_i^2(\lambda)$ ,  $u_i(t) = h_i(\lambda(t))$ ,

(2) либо  $h_1(\lambda(t)) = \dots = h_k(\lambda(t)) \equiv 0$ ,  $\dot{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) \vec{h}_i(\lambda(t))$ .

(1)  $\Rightarrow$   $\lambda(t)$  нормальная экстремаль,  $q(t)$  нормальная экстремальная траектория,

(2)  $\Rightarrow$   $\lambda(t)$  аномальная экстремаль,  $q(t)$  аномальная экстремальная траектория.

## Оптимальность нормальных геодезических

- $q(t)$  — нормальная экстремальная траектория  $\Rightarrow$   
 $q(t)$  — геодезическая (усиленное условие Лежандра)
- $\lambda(t)$  — нормальная экстремаль  $\Rightarrow$   
 $\lambda(t) = e^{t\bar{H}}(\lambda_0), \quad H(\lambda(t)) \equiv \text{const}$
- $\lambda_0 \in C = \{H(\lambda) \equiv 1/2\} \cap T_{q_0}^* M$
- Экспоненциальное отображение  $\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ ,  
 $\text{Exp}(\lambda, t) = q(t) = \pi \circ e^{t\bar{H}}(\lambda)$ .
- $q_1$  — точка Максвелла на геодезической  $q(t)$ :  
 $\exists \tilde{q}(t) \neq q(t), \tilde{q}(0) = q(0), \tilde{q}(t_1) = q(t_1) = q_1$ .

### Теорема 4

*Пусть  $q(t) = \text{Exp}(\lambda, t)$  — строго нормальная геодезическая. Если  $t_1$  — время разреза, то  $q(t_1)$  — первая точка Максвелла или первая сопряженная точка.*

## Гладкость сфер

### Теорема 5

Если  $\Delta_{q_0} \neq T_{q_0}M$ , то любая сфера  $S_R(q_0)$  не является гладким многообразием (если  $S_R(q_0) \neq \emptyset$ ).

### Теорема 6

Пусть  $q_1 \in S_R(q_0)$ . Предположим, что:

- (1)  $q_1$  соединяется с  $q_0$  единственной норм. кратчайшей  $q(t)$ ,
- (2)  $q_1$  не является сопряженной точкой вдоль  $q(t)$ .

Тогда  $S_R(q_0)$  — гладкое многообразие в окрестности точки  $q_1$ .

### Следствие 1

Причины точек разреза и особенностей сфер:

- (1) аномальные кратчайшие,
- (2) точки Максвелла,
- (3) сопряженные точки.

## Группа евклидовых движений плоскости

$$\text{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1 \right\}$$

$$X_1(q) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$M = \text{SE}(2), \quad \Delta = \text{span}(X_1, X_2), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

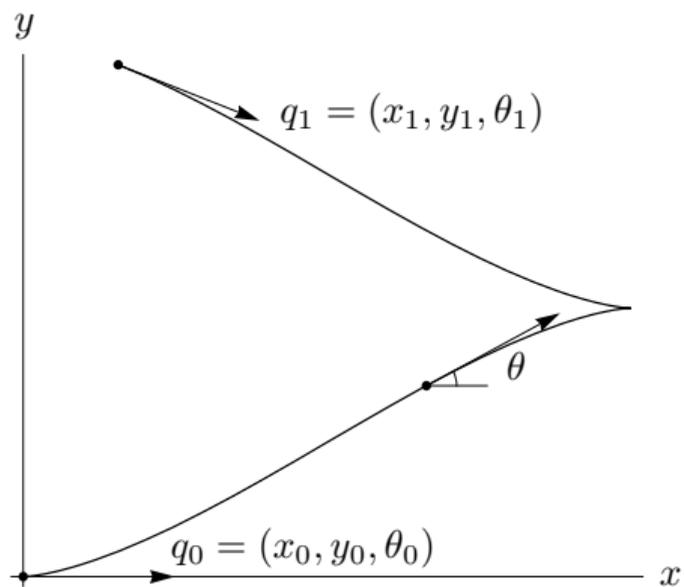
$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y, \theta) \in \text{SE}(2), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ q(0) = q_0 = \text{Id} = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

## Контактная субриманова структура на $SE(2)$

- $X_3 = [X_1, X_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$
- $\text{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)) = T_q M \Rightarrow$  полная управляемость
- Вектор роста  $(2, 3) \Rightarrow$  контактное распределение
- Инварианты А.А.Аграчева:  $\kappa = \chi$
- Единственная левоинвариантная контактная субриманова структура на  $SE(2)$ , с точностью до растяжений и локальных изометрий

## Задача об оптимальном движении мобильного робота на плоскости



$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

## Принцип максимума Понтрягина

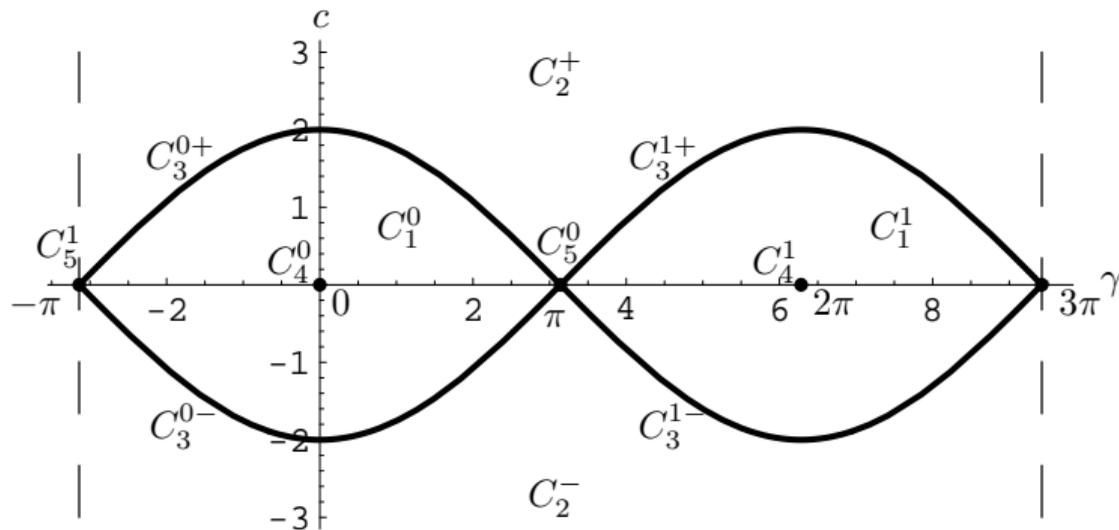
- Анормальные экстремальные траектории постоянны.
- Нормальные экстремали:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c, & \dot{c} &= -\sin \gamma, & (\gamma, c) &\in C \cong (2S^1_\gamma) \times \mathbb{R}_c, \\ \dot{x} &= \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta, & \dot{y} &= \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta, & \dot{\theta} &= -\cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

- Интеграл энергии  $E = \frac{c^2}{2} - \cos \gamma \in [-1, +\infty)$
- $\gamma(t)$ ,  $c(t)$ ,  $q(t)$ : параметризация функциями Якоби sn, cn, dn, E.

## Разбиение фазового цилиндра маятника $C = \cup_{i=1}^5 C_i$

- $C_1 = \{\lambda \in C \mid E \in (-1, 1)\} \Rightarrow$  колебания маятника,
- $C_2 = \{\lambda \in C \mid E \in (1, +\infty)\} \Rightarrow$  вращения маятника,
- $C_3 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c \neq 0\} \Rightarrow$  критическое движение,
- $C_4 = \{\lambda \in C \mid E = -1\} \Rightarrow$  устойчивое равновесие,
- $C_5 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c = 0\} \Rightarrow$  неуст. равновесие

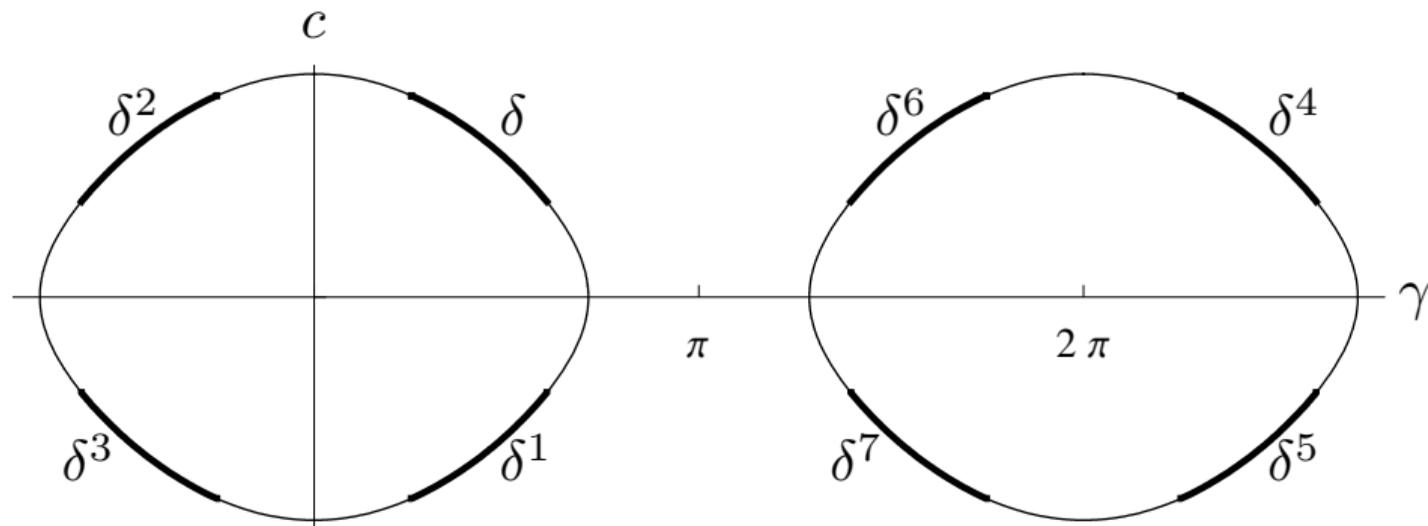


Отражения  $\varepsilon^i$  в фазовом цилиндре маятника  $\ddot{\gamma} = -\sin \gamma$

- $\varepsilon^i : C \rightarrow C$ ,  $\varepsilon_*^i \vec{H}_V = \pm \vec{H}_V$ ,  $\vec{H}_V = c \frac{\partial}{\partial \gamma} - \sin \gamma \frac{\partial}{\partial c} \in \text{Vec } C$ ,
- Группа симметрий параллелепипеда

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

- Действие отражений  $\varepsilon^i : \delta \mapsto \delta^i$  на траектории маятника:



## Первое время Максвелла, соответствующее симметриям

Симметрии экспоненциального отображения:

$$\text{Exp} \circ \varepsilon^i(\lambda, t) = \varepsilon^i \circ \text{Exp}(\lambda, t), \quad (\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon^i \in G.$$

$$t_{\text{Max}}(\lambda) = \min\{t > 0 \mid \exists \varepsilon^i \in G : \varepsilon^i(\lambda, t) \neq (\lambda, t), \quad \text{Exp} \circ \varepsilon^i(\lambda, t) = \text{Exp}(\lambda, t)\}$$

### Теорема 7

- $E = -1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = \pi,$
  - $E \in (-1, 1) \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2K(k), \quad k = \sqrt{(E+1)/2},$
  - $E = 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = +\infty,$
  - $E > 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2kp_1(k), \quad k = \sqrt{2/(E+1)},$
- $$p_1(k) = \min\{p > 0 \mid \text{cn}(p, k)(E(p, k) - p) - \text{dn}(p, k) \text{sn}(p, k) = 0\}.$$

## Оценки первого сопряженного времени

### Теорема 8

- $E \in [-1, 1] \Rightarrow t_{\text{conj}}^1(\lambda) = +\infty,$
- $E > 1 \Rightarrow t_{\text{conj}}^1(\lambda) \in [t_{\text{Max}}(\lambda), 4kK],$
- $\forall \lambda \in \mathcal{C} \quad t_{\text{conj}}^1(\lambda) \geq t_{\text{Max}}(\lambda).$

Метод доказательства:

Гомотопическая инвариантность индекса Маслова (количества сопряженных точек)

## Глобальная структура экспоненциального отображения

- $\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ = N \rightarrow M$ : неоптим. геодез. при  $t > t_{\text{Max}}(\lambda)$ ,
- $\widehat{N} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \leq t(\lambda)\}$ ,  $\widehat{M} = M \setminus \{q_0\}$ ,  
 $\text{Exp} : \widehat{N} \rightarrow \widehat{M}$  сюръективно, не инъективно (т. Максвелла),
- $\widetilde{M} = \{q \in M \mid \varepsilon^i(q) \neq q\} =$   
 $= \{q \in M \mid \sin \theta \neq 0, R_i(q) \neq 0\} = \cup_{i=1}^8 M_i$ ,  
 $\widetilde{N} = \text{Exp}^{-1}(\widetilde{M}) =$   
 $= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{Max}}(\lambda), \sin(\gamma_{t/2}/2) \neq 0\} = \cup_{i=1}^8 D_i$ ,  
 $\text{Exp} : \widetilde{N} \rightarrow \widetilde{M}$ : нет т. Максвелла и сопряженных точек.

### Теорема 9

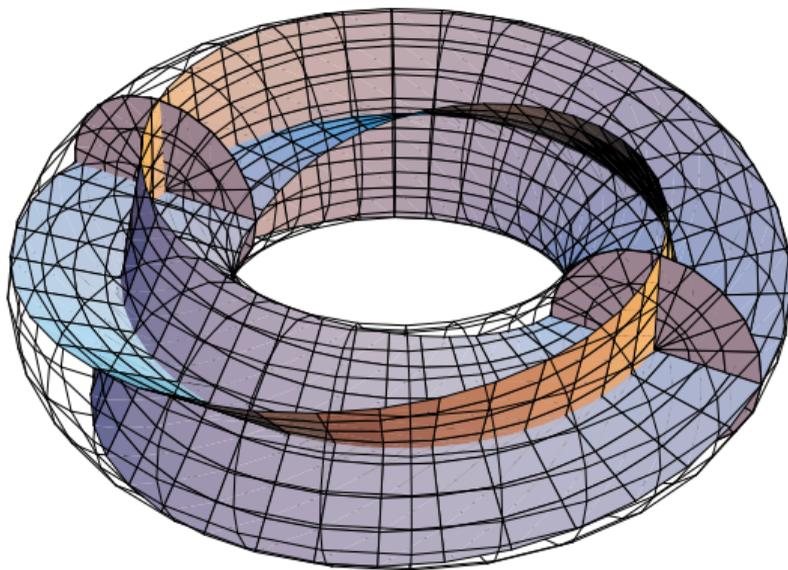
$\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$  — диффеоморфизм,  $i = 1, \dots, 8$ .

$\text{Exp} : \widetilde{N} \rightarrow \widetilde{M}$  — диффеоморфизм.

## Диффеоморфные стратификации и множество разреза

- $\text{Cut}, \text{Max} \subset M' = \widehat{M} \setminus \widetilde{M} = \{q \in M \mid \sin \theta R_1(q) R_2(q) = 0\}$ ,
- $N' = \widehat{N} \setminus \widetilde{N}$ ,
- $\text{Exp} : N' \rightarrow M'$ ,
- Стратификации:  $N' = \sqcup_{i=1}^{58} N'_i$ ,  $M' = \cup_{i=1}^{58} M'_i$ ,
- $\text{Exp} : N'_i \rightarrow M'_i$  — диффеоморфизм,  $i = 1, \dots, 58$
- $\text{Max} = \cup \{M'_i \mid \exists M'_j = M'_i, j \neq i\}$ ,
- $\text{Cut} = \text{Max} \cup (\text{Cut} \cap \text{Conj})$ ,
- $\text{Cut} = \text{Cut}_{\text{loc}} \cup \text{Cut}_{\text{glob}}$ ,
- $\text{Cut}_{\text{glob}} = \{q \in M \mid \theta = \pi\}$ ,  $d(q_0, \text{Cut}_{\text{glob}}) = \pi$ ,
- $\text{Cut}_{\text{loc}} \subset \{R_2 = 0\}$ ,  $\text{cl}(\text{Cut}_{\text{loc}}) \ni q_0$ ,
- $\text{Cut}_{\text{loc}} = \{q \in M \mid \theta \in (-\pi, \pi), R_2 = 0, |R_1| > R_1^1(|\theta|)\}$ ,  
 $R_1 = y \cos \frac{\theta}{2} - x \sin \frac{\theta}{2}$ ,  $R_2 = x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2}$ ,  
 $R_1^1(\theta) = 2(p_1(k) - E(p_1(k), k))$ ,  
 $k = k_1(\theta)$  — обратная функция к  $\theta = k \text{sn}(p_1(k), k)$ .

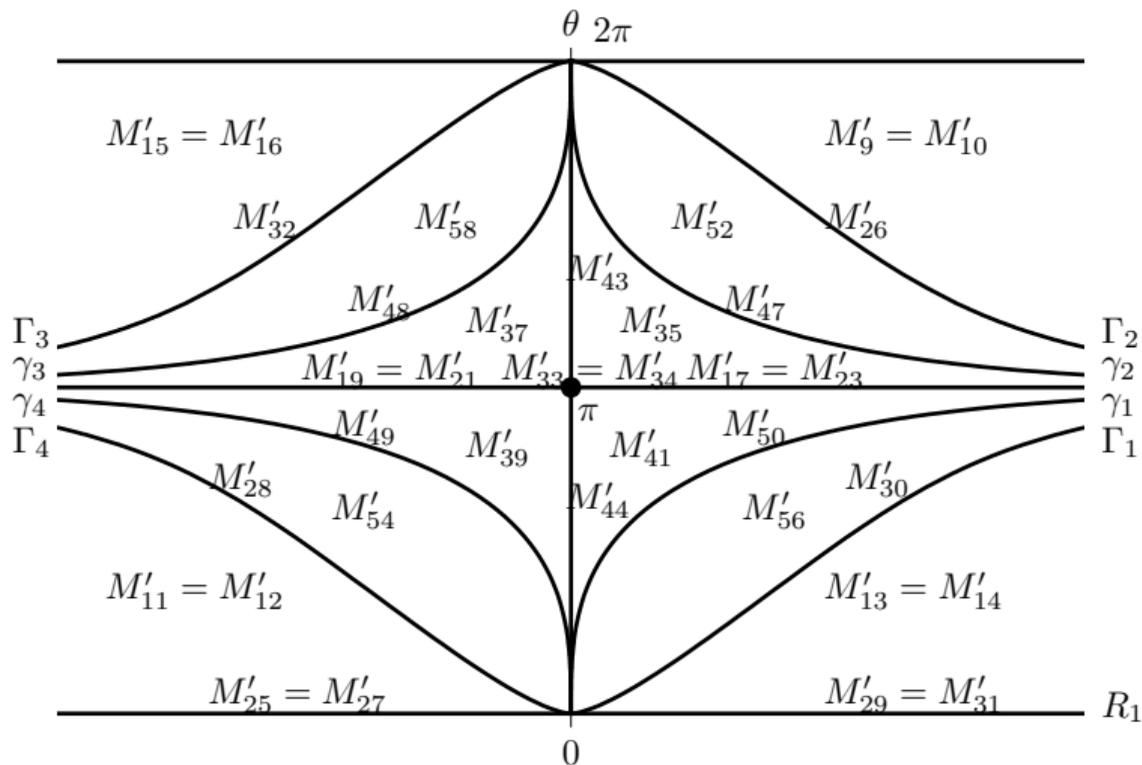
Множество  $M' \supset \text{Cut} \supset \text{Max}$



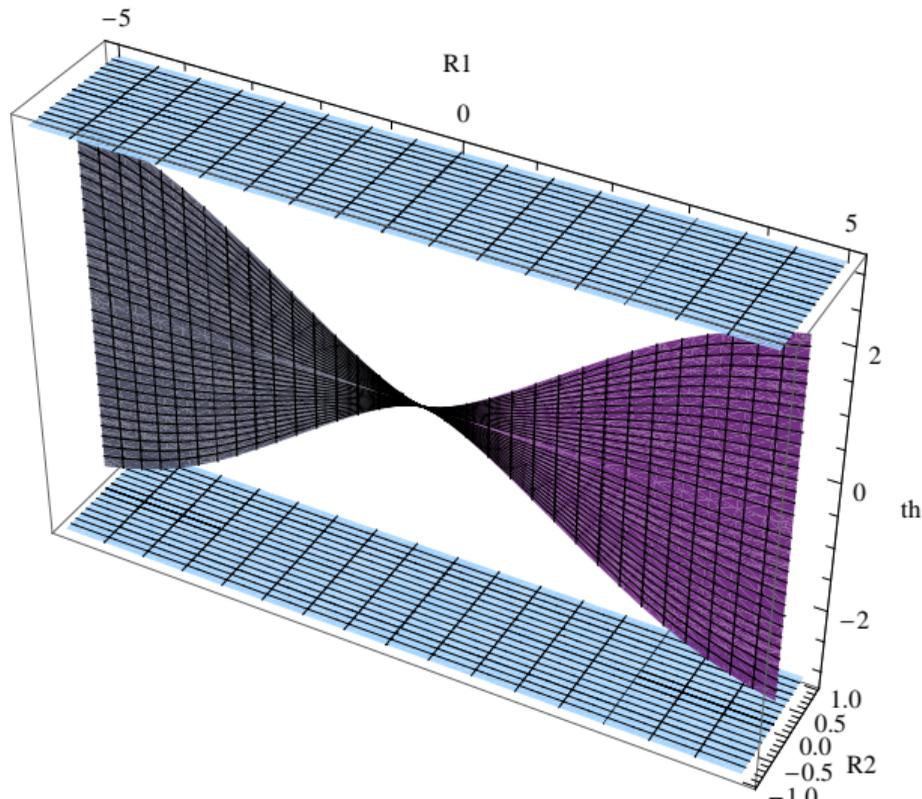
Множество разреза:  
глобальное расположение



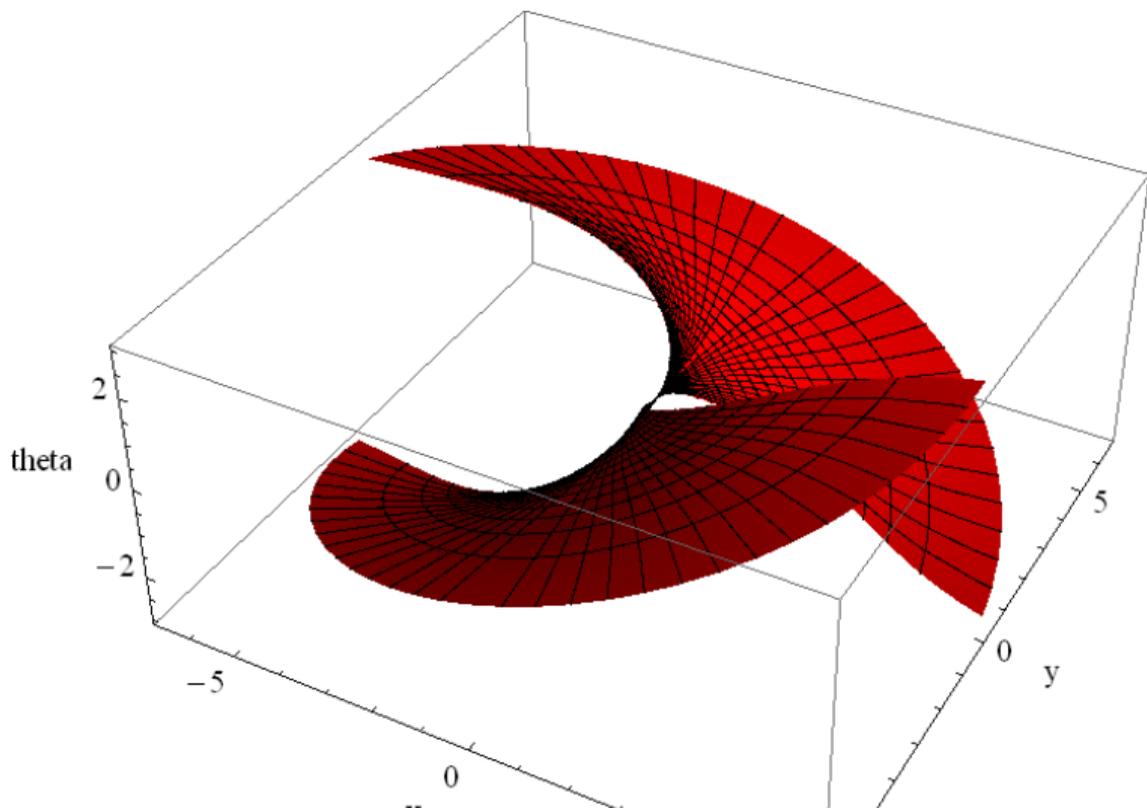
# Стратификация ленты Мебиуса $R_2(q) = 0$



# Множество разреза в выпрямляющих координатах $(R_1, R_2, \theta)$



Локальная компонента множества разреза  
в исходных координатах  $(x, y, \theta)$



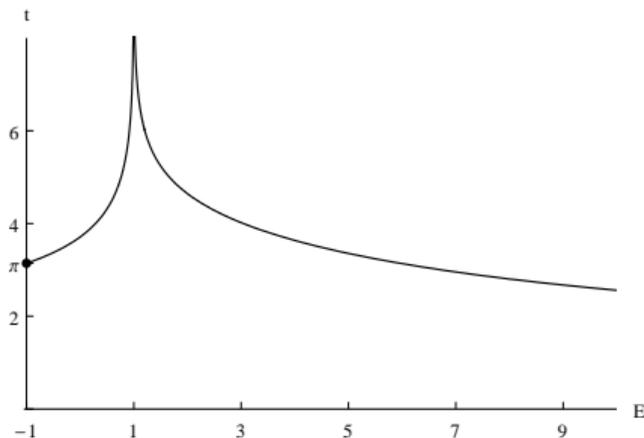
Оптимальный синтез в задаче  
 $q(0) = q_1, q(t_1) = q_0 = (0, 0, 0)$

- $q_1 \in \hat{M} = M \setminus \{q_0\}$
- $\text{Exp} : \hat{N} \rightarrow \hat{M}$  сюръективно
- $\text{Exp}^{-1}(q) = \begin{cases} \{(\lambda, t)\}, & \text{если } q \in \hat{M} \setminus \text{Max}, \\ \{(\lambda', t) \neq (\lambda'', t)\}, & \text{если } q \in \text{Max} \end{cases}$
- $\text{Exp}^{-1}(q_1) = (\lambda, t), \quad \lambda = (\gamma, c) \in (2S^1) \times \mathbb{R}, t > 0$
- $\ddot{\gamma}_s = -\sin \gamma_s, (\gamma_0, \dot{\gamma}_0) = (\gamma, c), s \in [0, t]$
- $u_1(q_1) = -\sin(\gamma_t/2), u_2(q_1) = \cos(\gamma_t/2)$
- оптимальный синтез  $q_1 \mapsto (u_1, u_2)$  двузначен на  $\text{Max}$ , однозначен на  $\hat{M} \setminus \text{Max}$ .

## Время разреза

### Теорема 10

- $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}(\lambda)$ ,  $\lambda \in C$ ,
- $t_{\text{cut}} \circ \varepsilon^i = t_{\text{cut}}$ ,  $\varepsilon^i \in G$ ,
- $\vec{H}_V t_{\text{cut}} = 0$ ,
- $t_{\text{cut}} : C \rightarrow (0, +\infty]$  непрерывна,  $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm 1}$  гладкая.



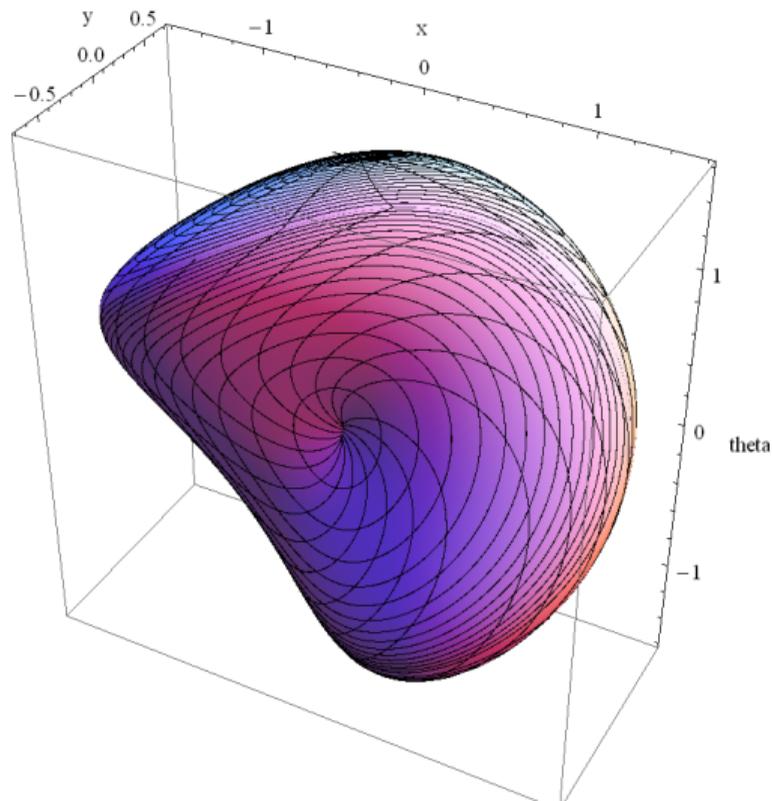
## Субримановы сферы

- $R \in (0, \pi) \Rightarrow S_R \cong S^2$ ,
- $R = \pi \Rightarrow S_R \cong S^2 / \{N = S\}$ ,
- $R > \pi \Rightarrow S_R \cong T^2$ .

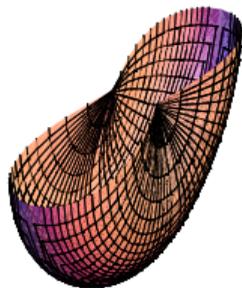
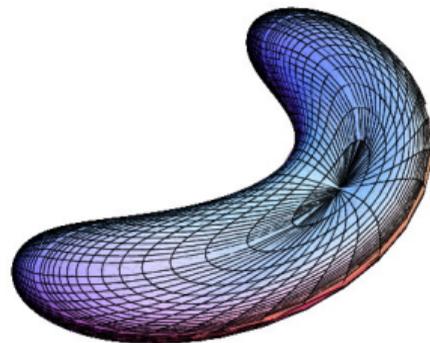
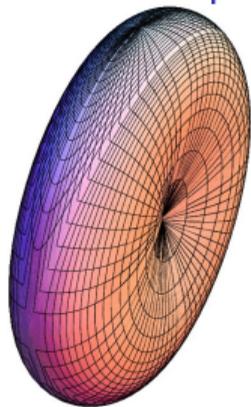
Особенности сфер:

$$S_R \cap \text{Cut} = (S_R \cap \text{Max}) \cup (S_R \cap \text{Cut} \cap \text{Conj}).$$

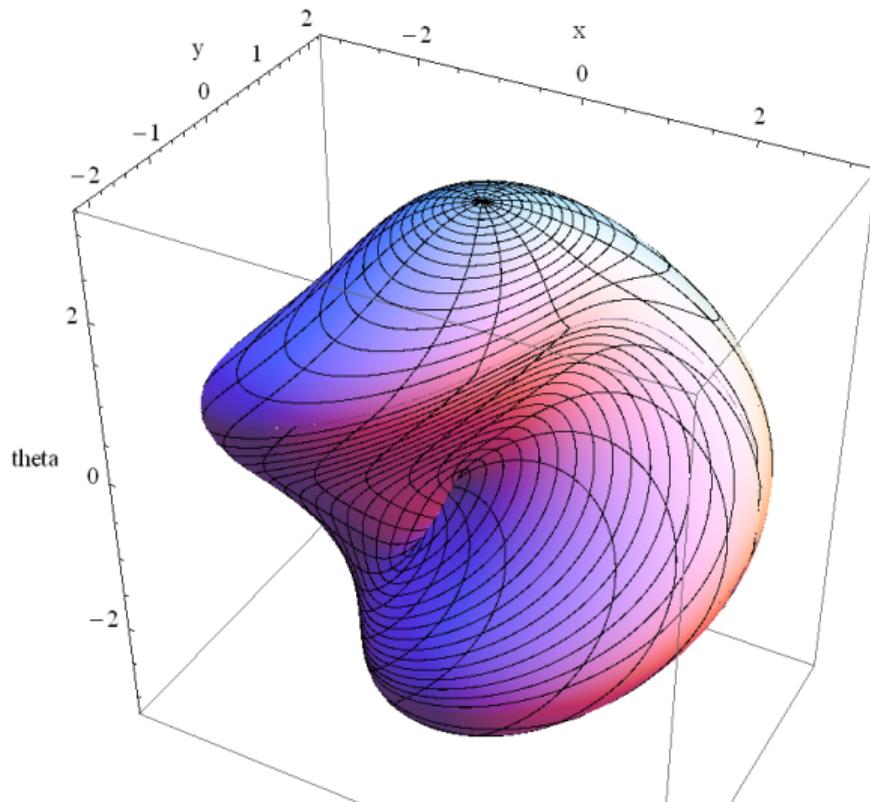
Субриманова сфера радиуса  $< \pi$   
в исходных координатах  $(x, y, \theta)$



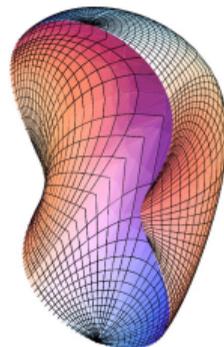
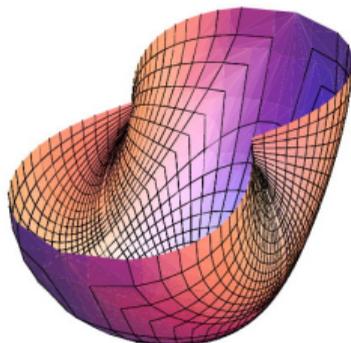
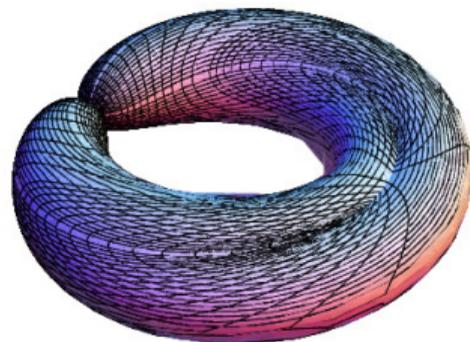
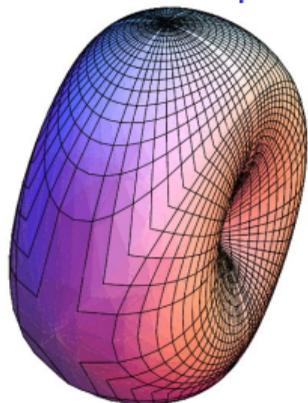
Субриманова сфера радиуса  $< \pi$   
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, \theta)$



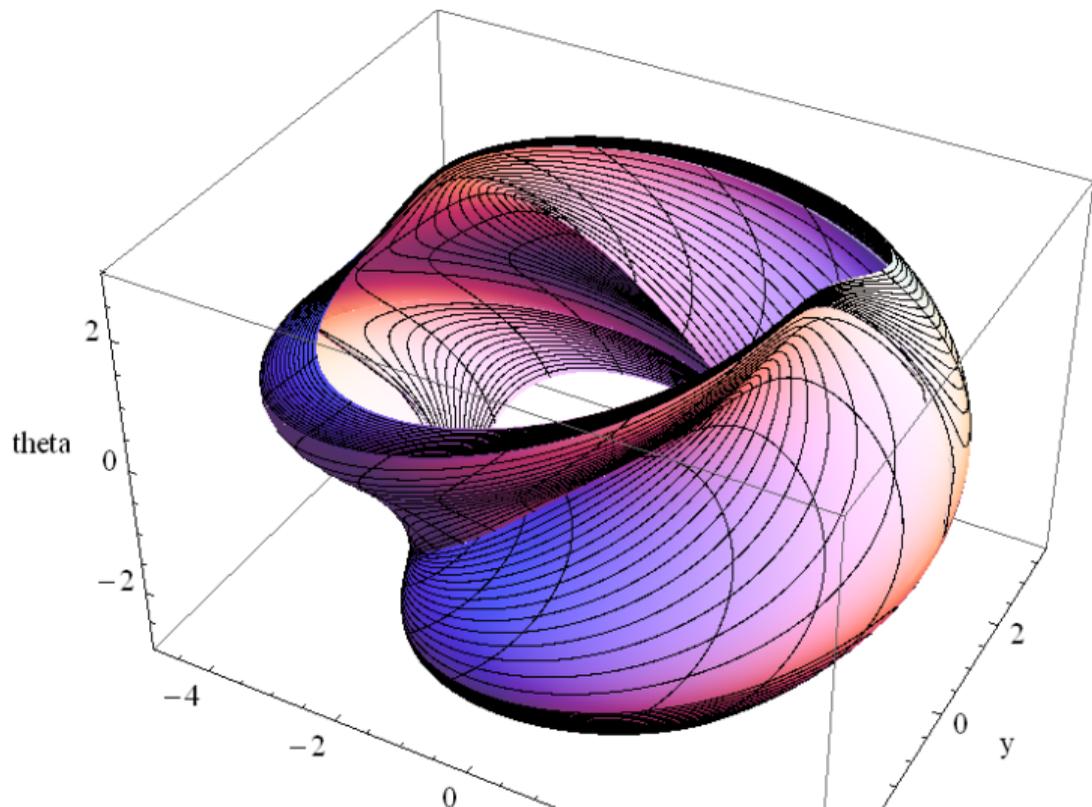
Субриманова сфера радиуса  $\pi$   
в исходных координатах  $(x, y, \theta)$



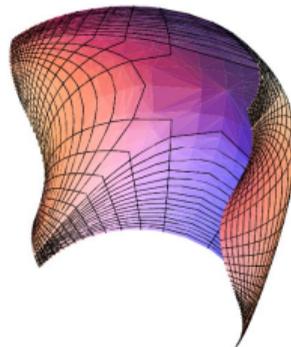
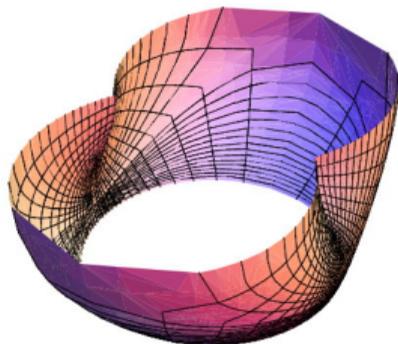
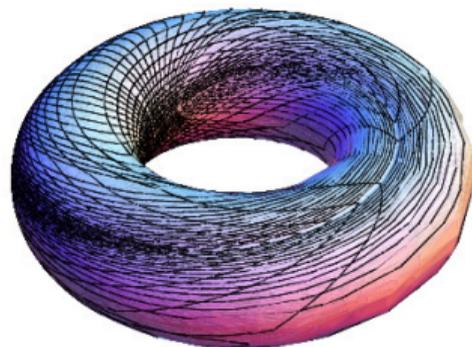
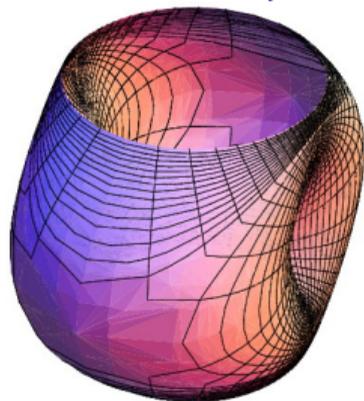
Субриманова сфера радиуса  $\pi$   
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, \theta)$



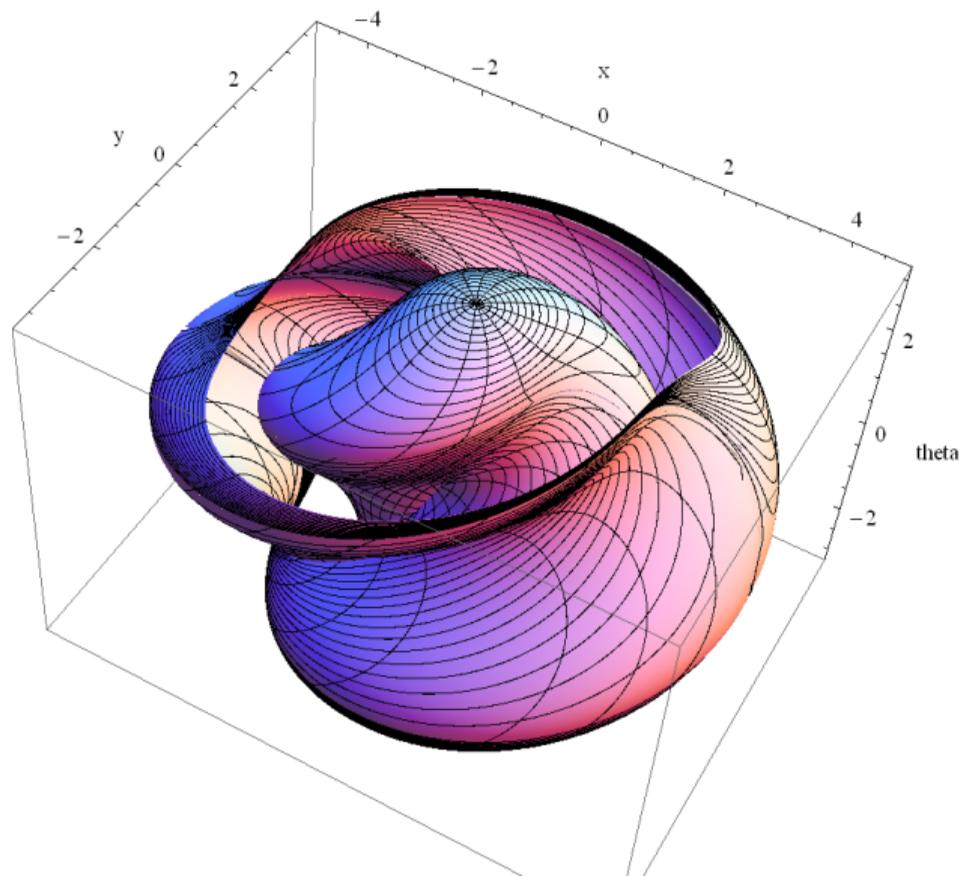
Субриманова сфера радиуса  $> \pi$   
в исходных координатах  $(x, y, \theta)$



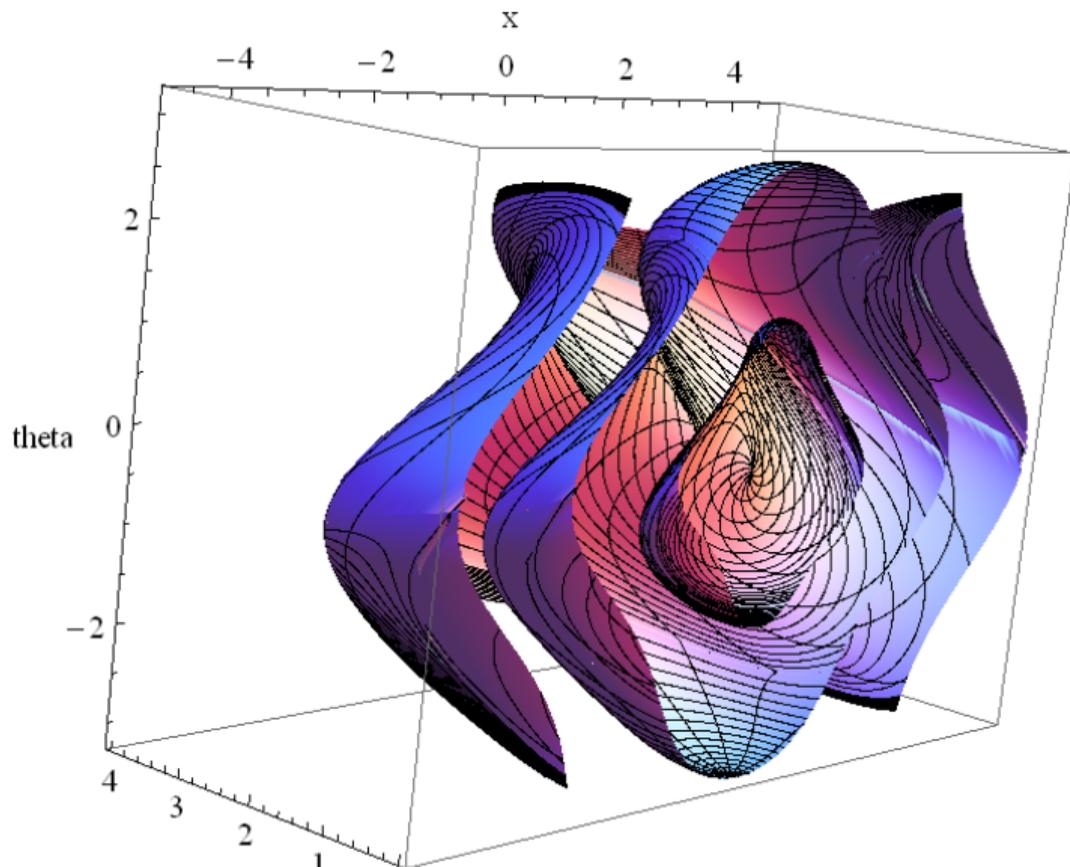
Субриманова сфера радиуса  $> \pi$   
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, \theta)$



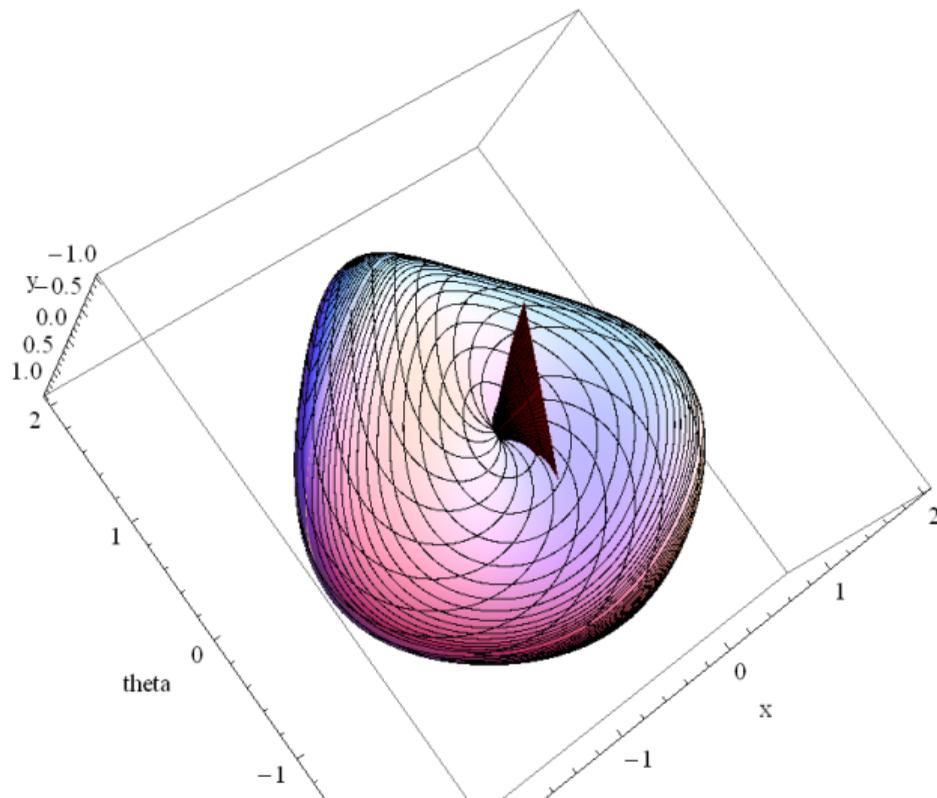
# Матрешка сфер радиуса $\pi$ и $> \pi$



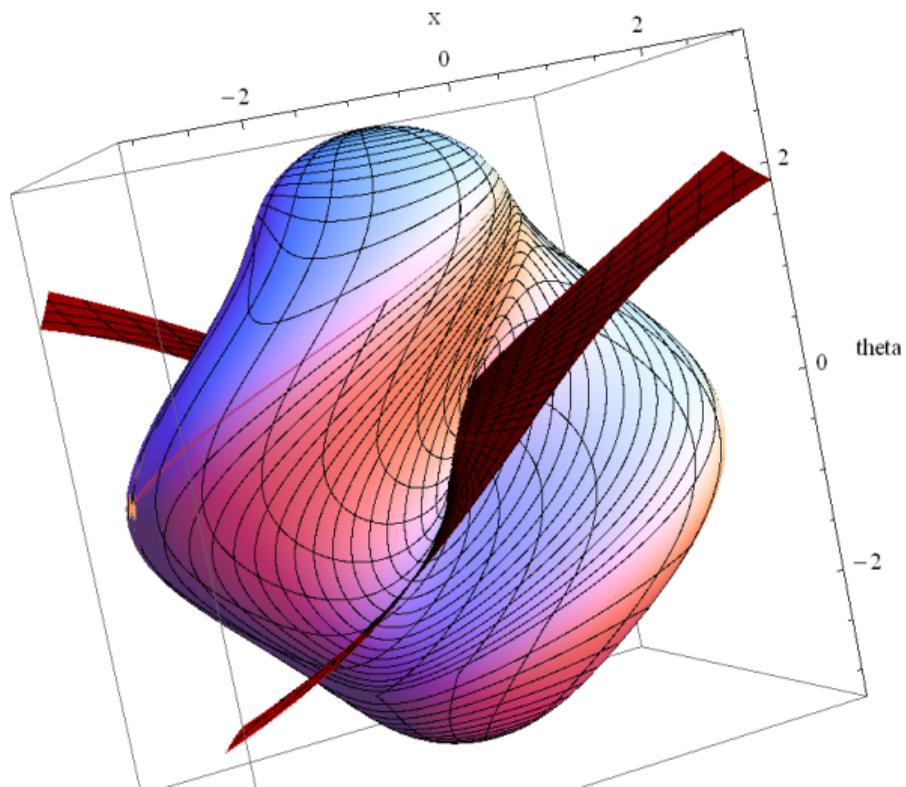
Матрешка полусфер радиуса  $\langle \pi, \pi \text{ и } > \pi$



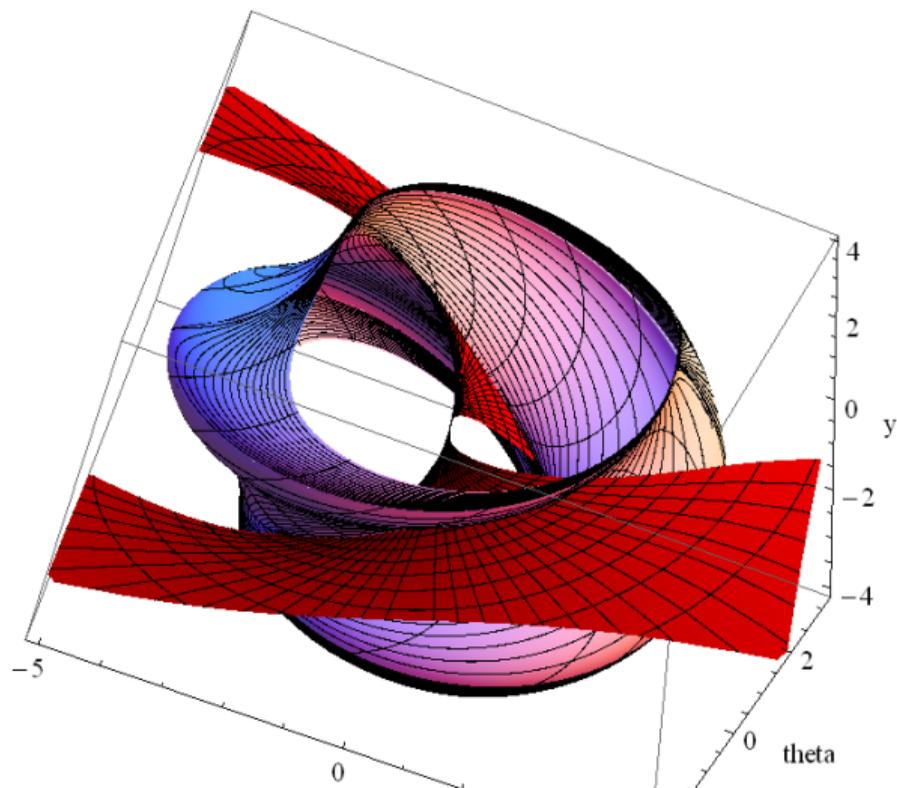
Субриманова сфера радиуса  $< \pi$   
и множество разреза



Субриманова сфера радиуса  $\pi$   
и множество разреза



Субриманова сфера радиуса  $> \pi$   
и множество разреза



## Группа гиперболических движений плоскости

$$\text{SH}(2) = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} \text{ch } z & \text{sh } z & x \\ \text{sh } z & \text{ch } z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$X_1(q) = \text{ch } z \frac{\partial}{\partial x} + \text{sh } z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$M = \text{SH}(2), \quad \Delta = \text{span}(X_1, X_2), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y, \theta) \in \text{SH}(2), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0 = \text{Id} = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

## Контактная субриманова структура на $\text{SH}(2)$

- $X_3 = [X_1, X_2] = -\text{sh } z \frac{\partial}{\partial x} - \text{ch } z \frac{\partial}{\partial y}$
- $\text{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)) = T_q M \Rightarrow$  полная управляемость
- Вектор роста  $(2, 3) \Rightarrow$  контактное распределение
- Инварианты А.А.Аграчева:  $\kappa = -\chi$
- Единственная левоинвариантная контактная субриманова структура на  $\text{SH}(2)$ , с точностью до растяжений и локальных изометрий

## Принцип максимума Понтрягина

- Анормальные экстремальные траектории постоянны.
- Нормальные экстремали:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c, & \dot{c} &= -\sin \gamma, & (\gamma, c) &\in C \cong (2S^1_\gamma) \times \mathbb{R}_c, \\ \dot{x} &= \cos \frac{\gamma}{2} \operatorname{ch} z, & \dot{y} &= \cos \frac{\gamma}{2} \operatorname{sh} z, & \dot{z} &= \sin \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

- $\gamma(t), c(t), q(t)$ : параметризация функциями Якоби  $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}, E$
- Группа симметрий  $\operatorname{Exp}$ :

$$G = \{\operatorname{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\}.$$

## Первое время Максвелла и сопряженные времена

### Теорема 11

- $E = -1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2\pi,$
- $E \in (-1, 1) \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 4K(k), k = \sqrt{(E+1)/2},$
- $E = 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = +\infty,$
- $E > 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 4kK(k), k = \sqrt{2/(E+1)}.$

### Теорема 12

- $t_{\text{Max}}^n(\lambda) \leq t_{\text{conj}}^1{}^n(\lambda) \leq t_{\text{Max}}^{n+1}(\lambda)$  для любых  $\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$
- Справедливо обобщение теоремы Ролля: *между последовательными точками Максвелла заключена одна сопряженная точка.*

## Глобальная структура экспоненциального отображения

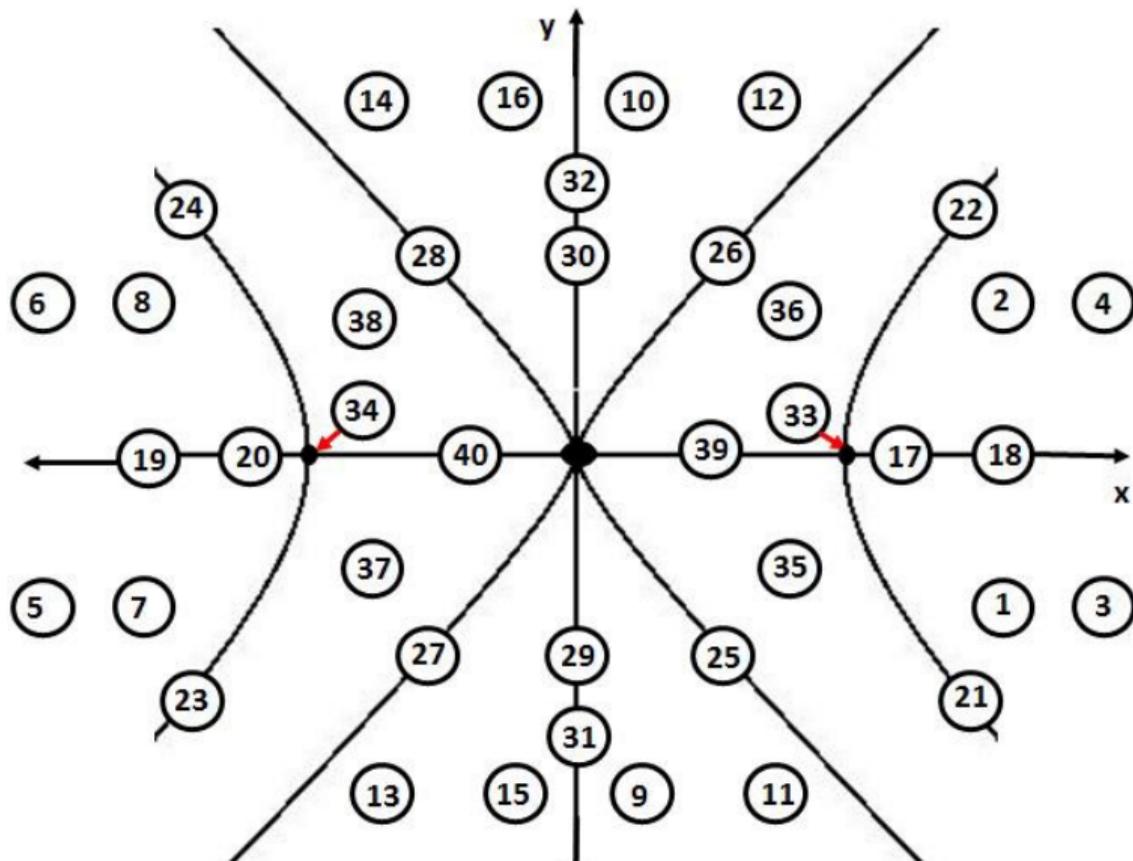
Диффеоморфные стратификации в прообразе и образе  $\text{Exp}$ :

- $\hat{N} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \leq t_{\text{Max}}(\lambda)\} =$   
 $= \cup_{i=1}^2 D_i \cup (\cup_{i=1}^{40} N'_i),$
- $\hat{M} = M \setminus \{q_0\} =$   
 $= \cup_{i=1}^2 M_i \cup (\cup_{i=1}^{40} M'_i).$

### Теорема 13

- $\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$  — диффеоморфизм,  $i = 1, 2.$
- $\text{Exp} : N'_i \rightarrow M'_i$  — диффеоморфизм,  $i = 1, \dots, 40.$

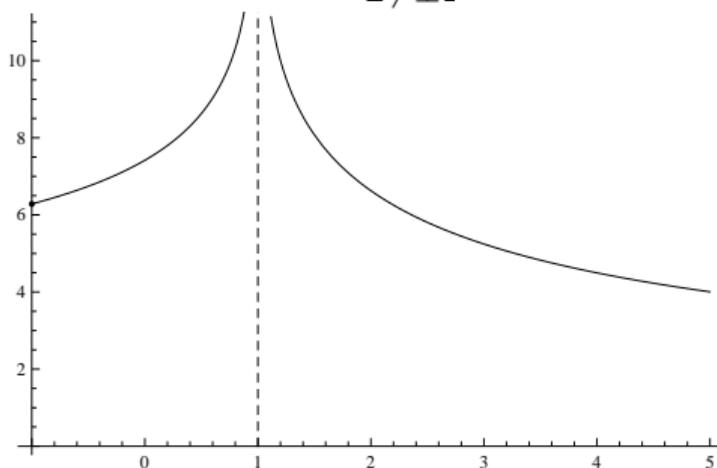
Стратификация плоскости  $M' = \{z = 0\}$



## Время разреза

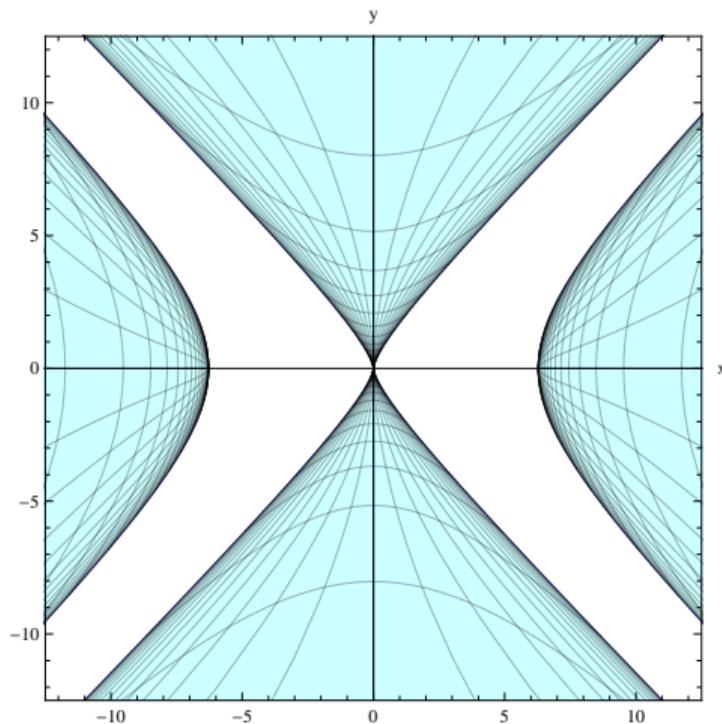
### Теорема 14

- $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}(\lambda)$ ,  $\lambda \in C$ ,
- $t_{\text{cut}} \circ \varepsilon^i = t_{\text{cut}}$ ,  $\varepsilon^i \in G$ ,
- $\vec{H}_V t_{\text{cut}} = 0$ ,
- $t_{\text{cut}} : C \rightarrow (0, +\infty]$  непрерывна,  $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm 1}$  гладкая.



## Множество разреза

- $\text{Cut} = \text{Max} \cup (\text{Cut} \cap \text{Conj}) = \text{Cut}_{\text{loc}} \cup \text{Cut}_{\text{glob}}$ ,
- $\text{cl}(\text{Cut}_{\text{loc}}) \ni q_0, d(q_0, \text{Cut}_{\text{glob}}) = 2\pi$ ,
- $\text{Cut} \subset \{z = 0\}$ .

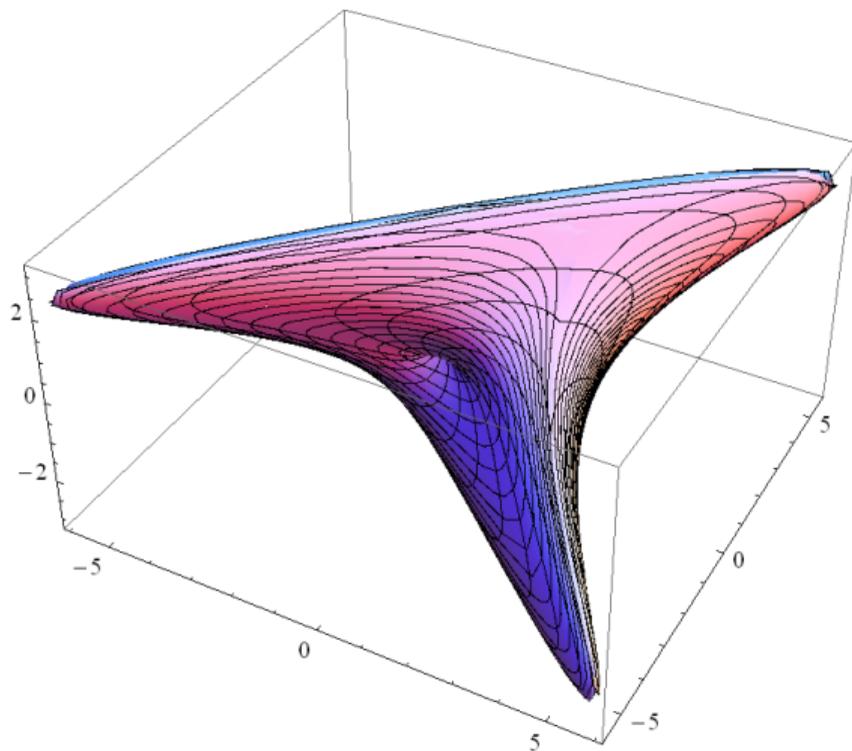


## Субримановы сферы

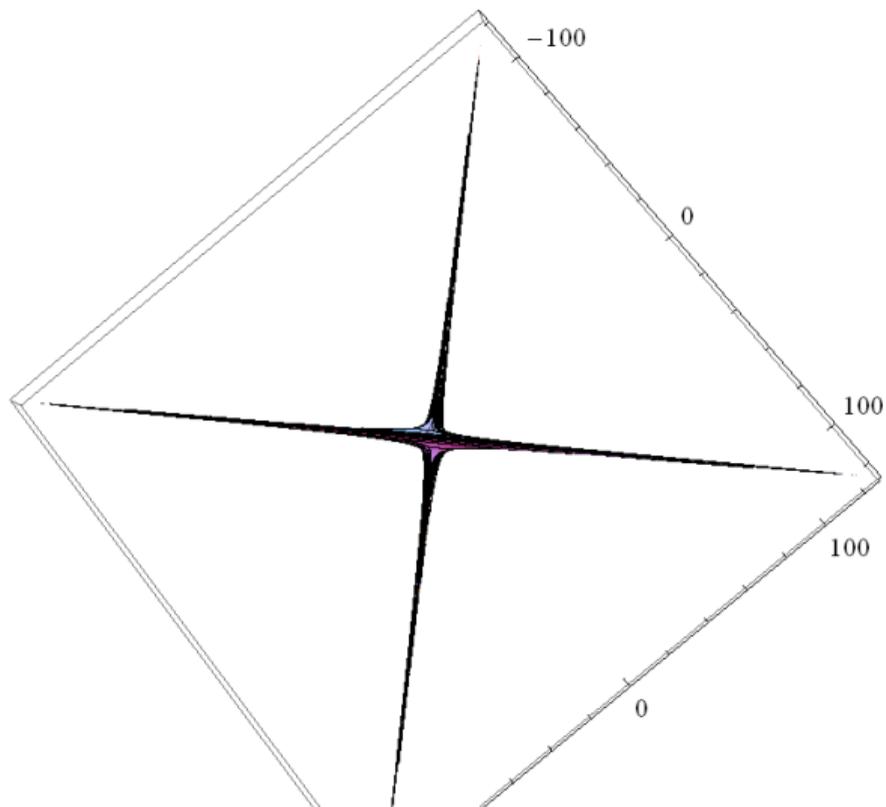
- $R > 0 \Rightarrow S_R \cong S^2$ ,
- Особенности сфер:

$$S_R \cap \text{Cut} = (S_R \cap \text{Max}) \cup (S_R \cap \text{Cut} \cap \text{Conj}).$$

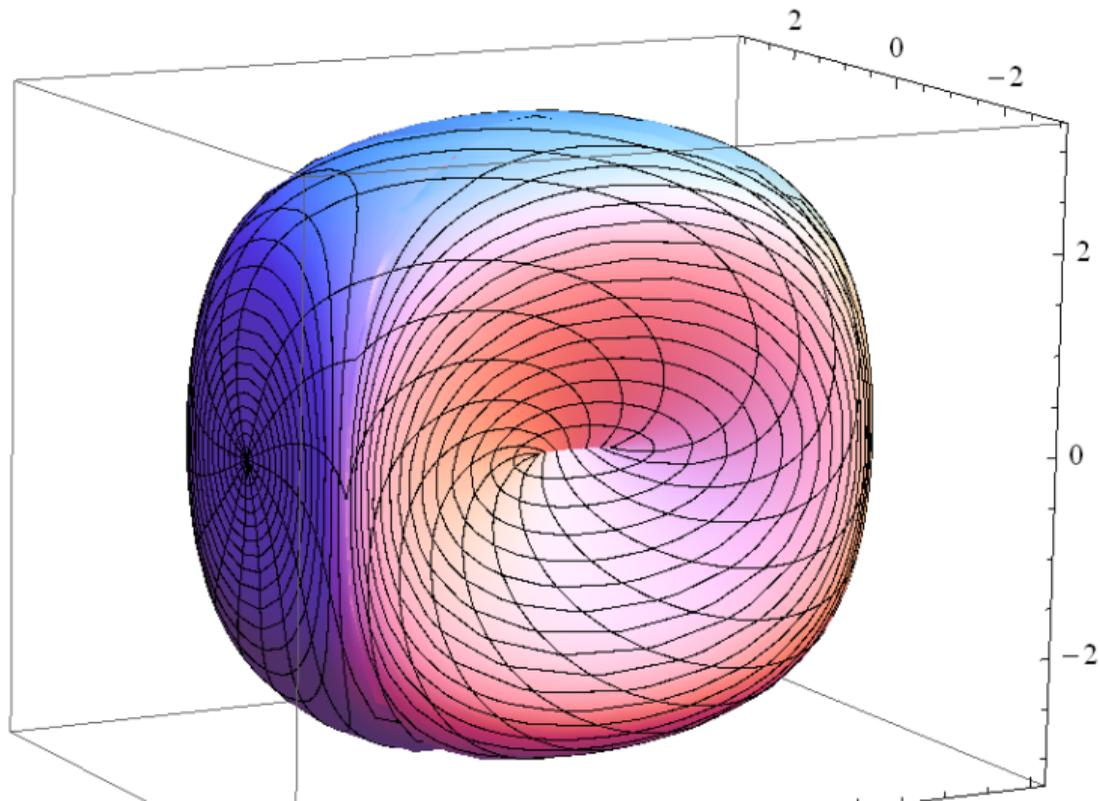
Субриманова сфера радиуса  $< 2\pi$   
в исходных координатах  $(x, y, z)$



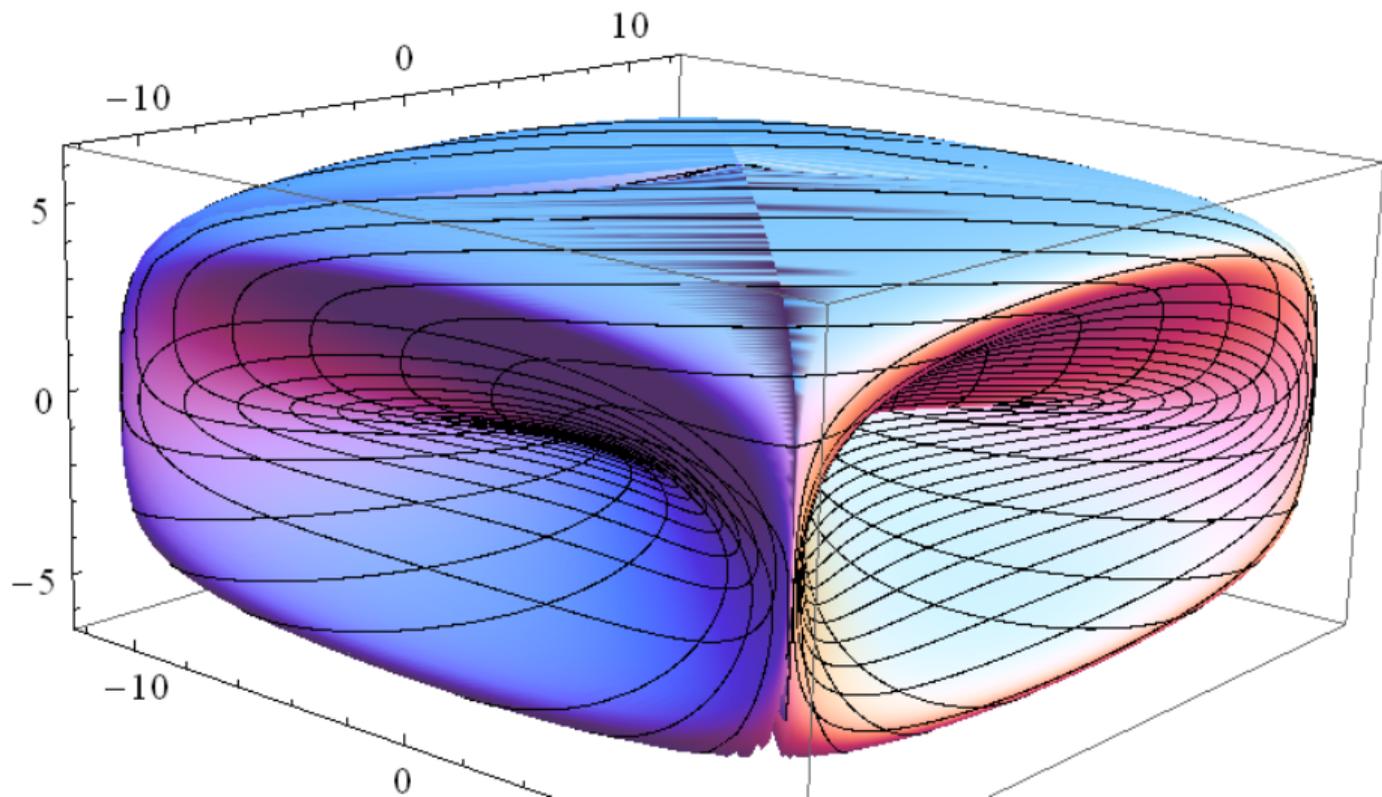
Субриманова сфера радиуса  $2\pi$   
в исходных координатах  $(x, y, z)$



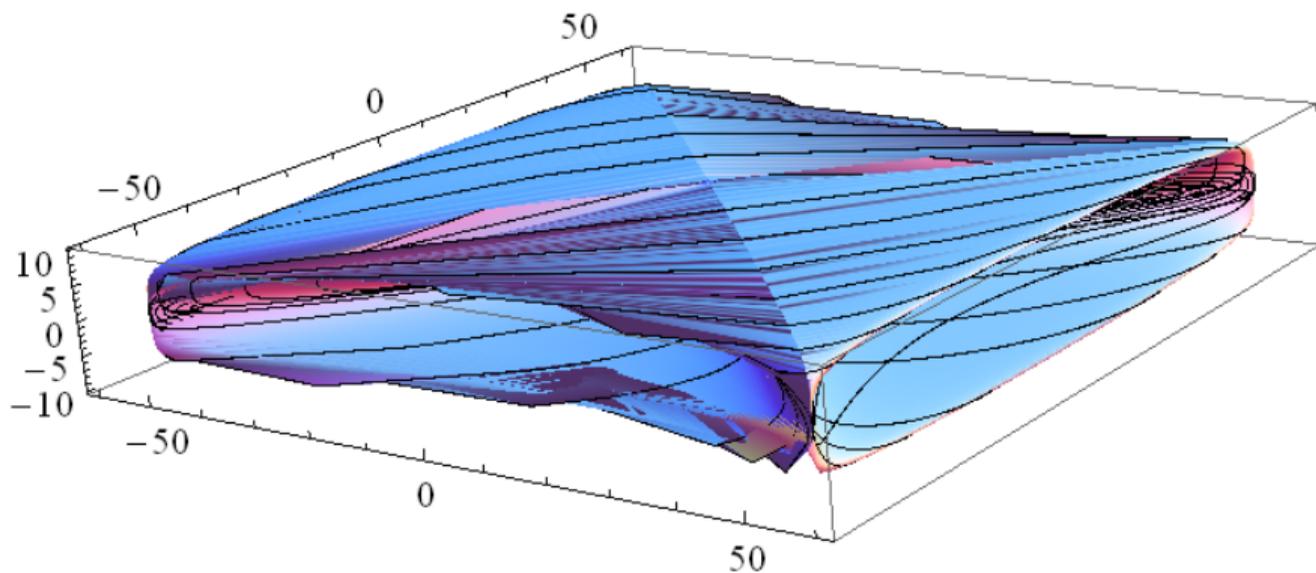
Субриманова сфера радиуса  $< 2\pi$   
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, z)$



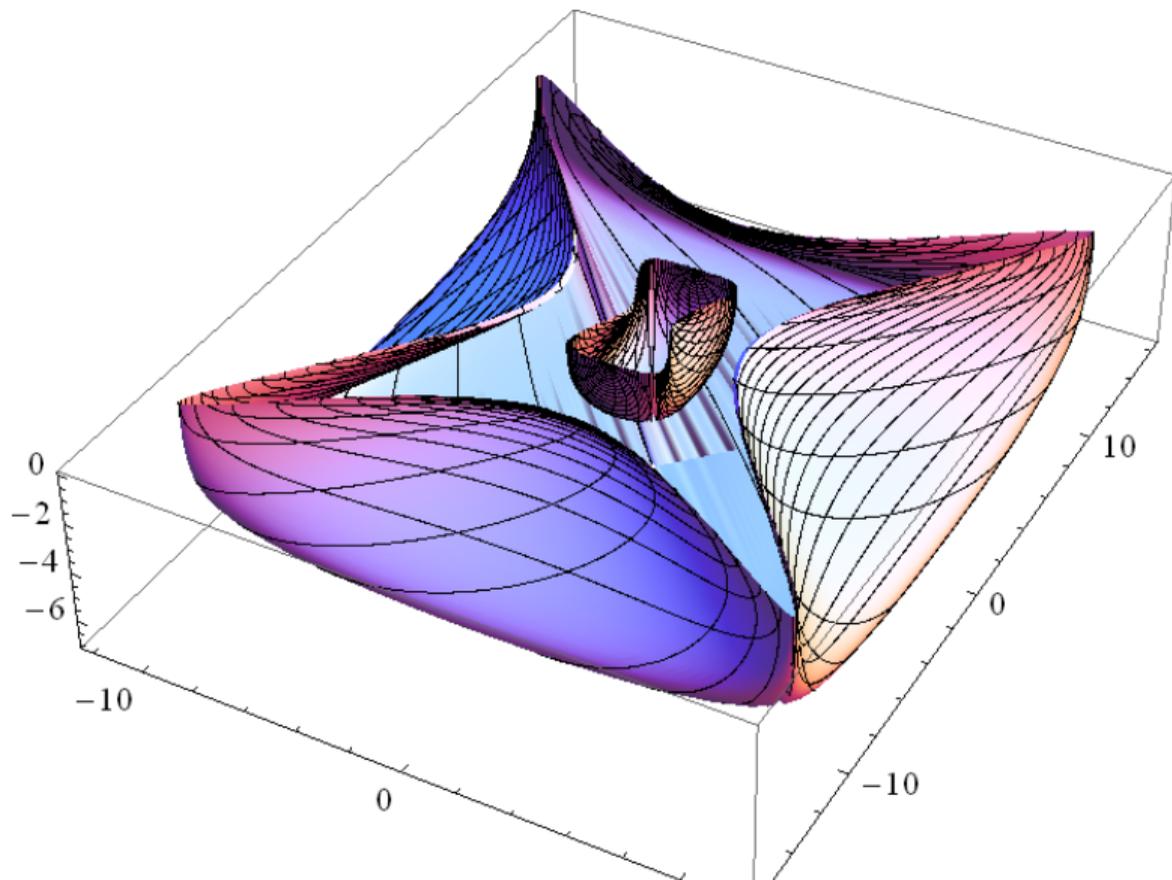
Субриманова сфера радиуса  $2\pi$   
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, z)$



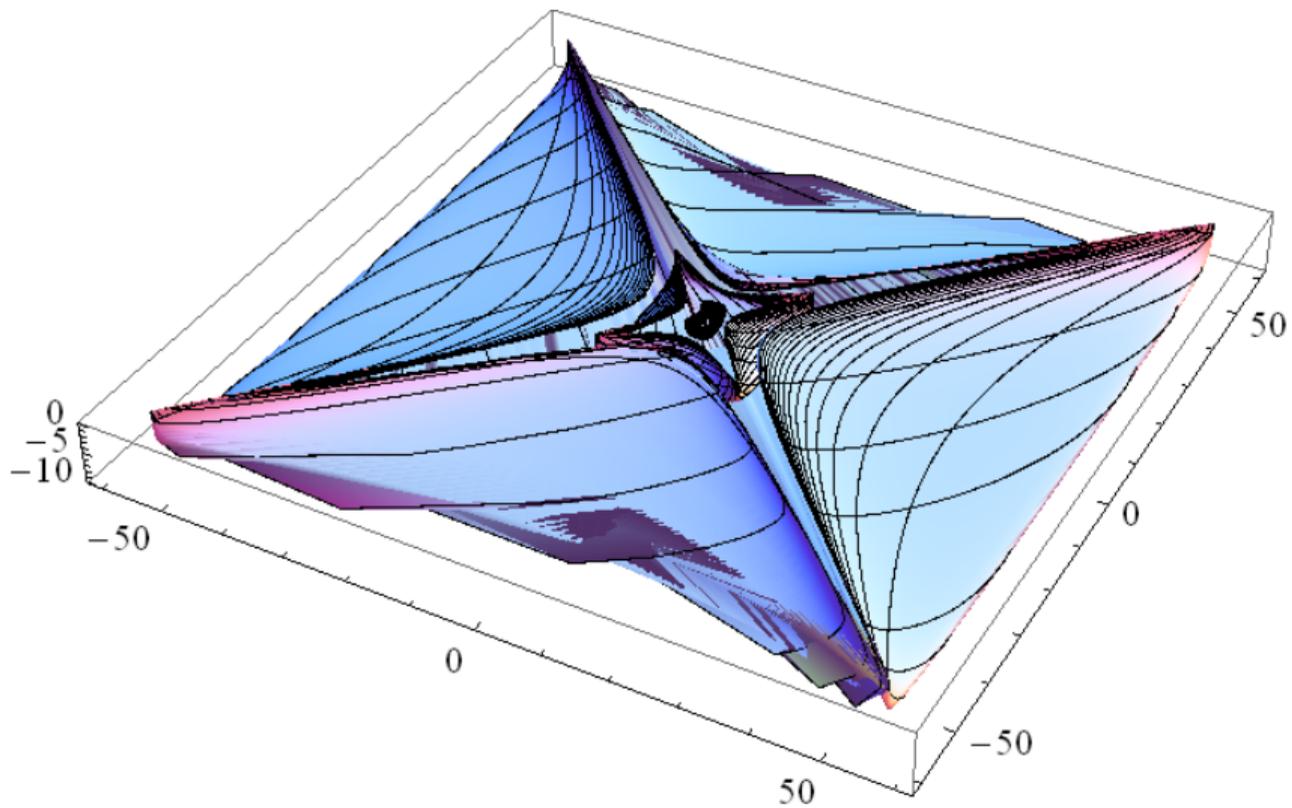
Субриманова сфера радиуса  $> 2\pi$   
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, z)$



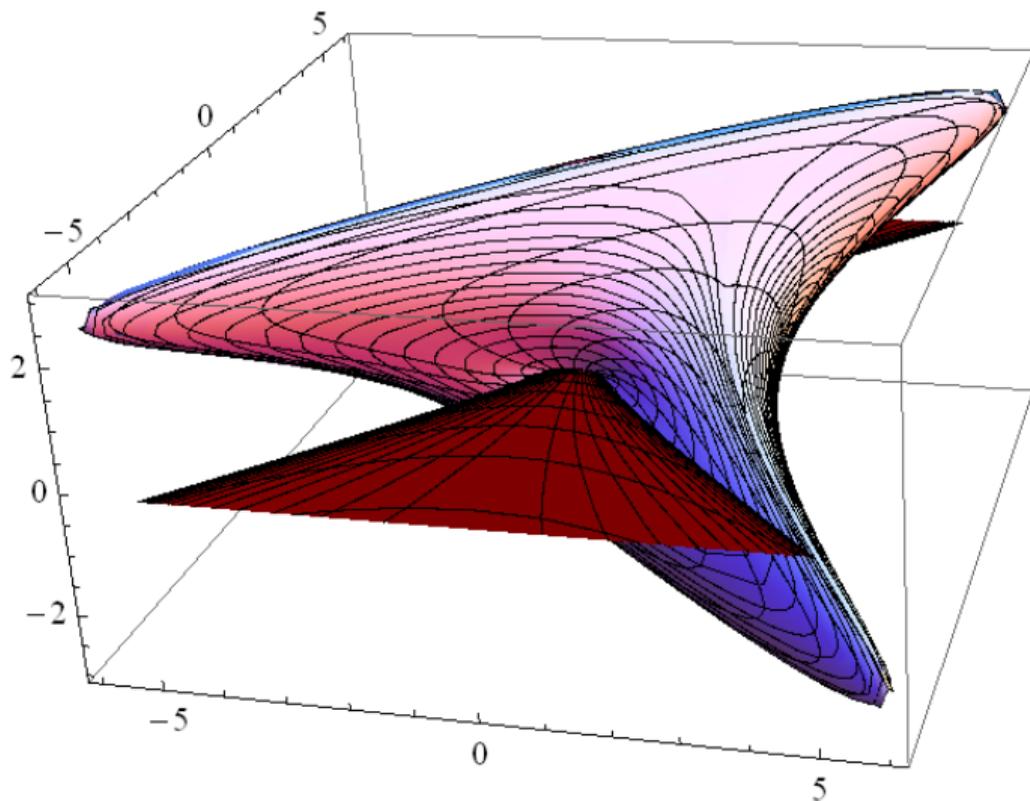
# Матрешка полусфер радиуса $\pi$ и $2\pi$



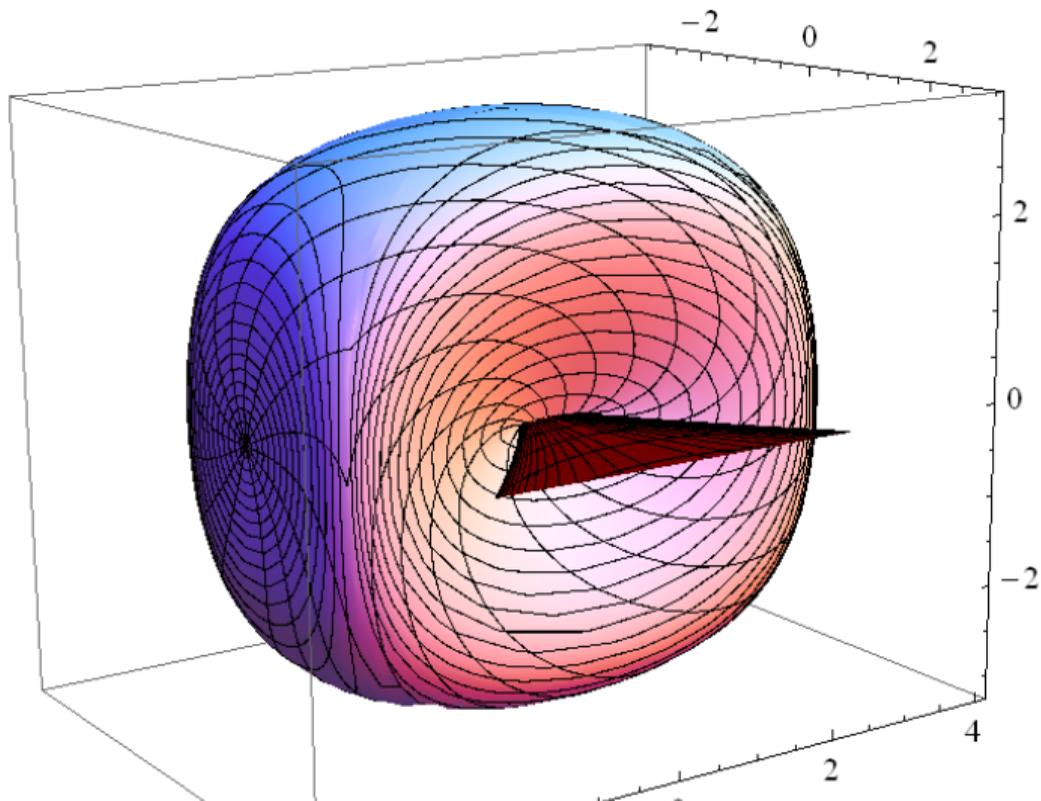
# Матрешка полусфер радиуса $\pi$ , $2\pi$ и $3\pi$



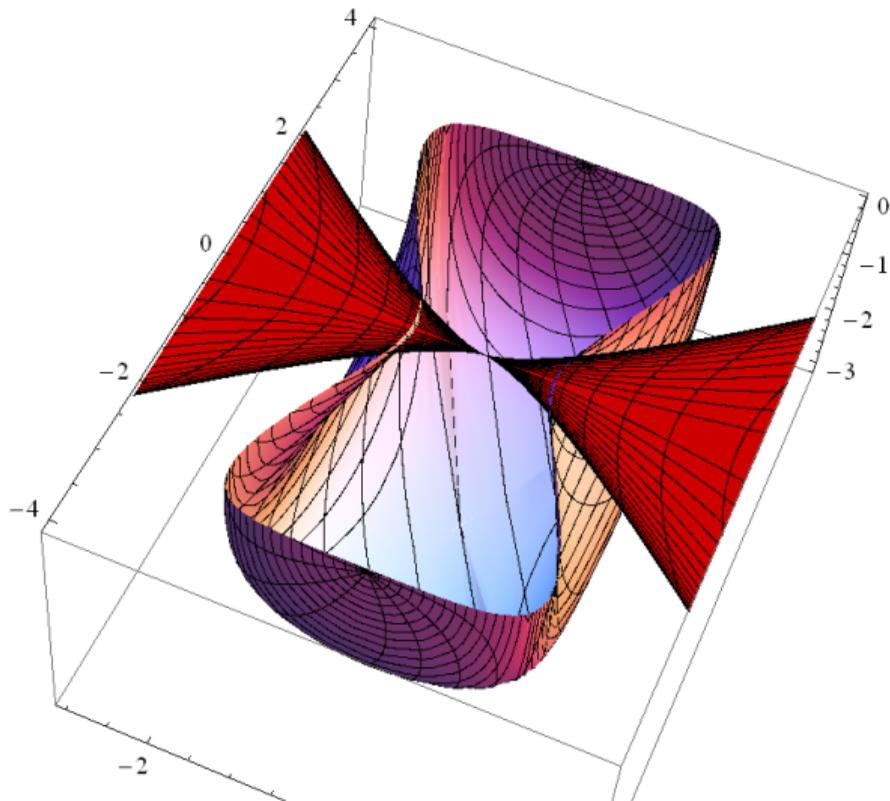
Сфера радиуса  $\pi$  и множество разреза  
в исходных координатах  $(x, y, z)$



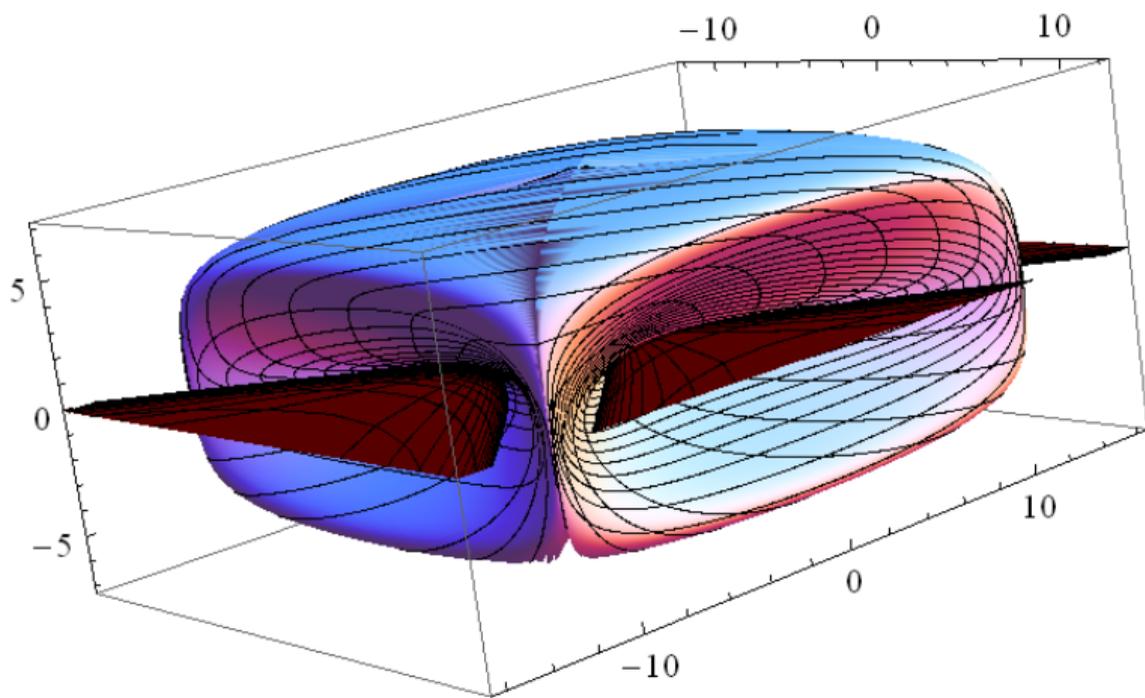
Сфера радиуса  $\pi$  и множество разреза  
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, z)$



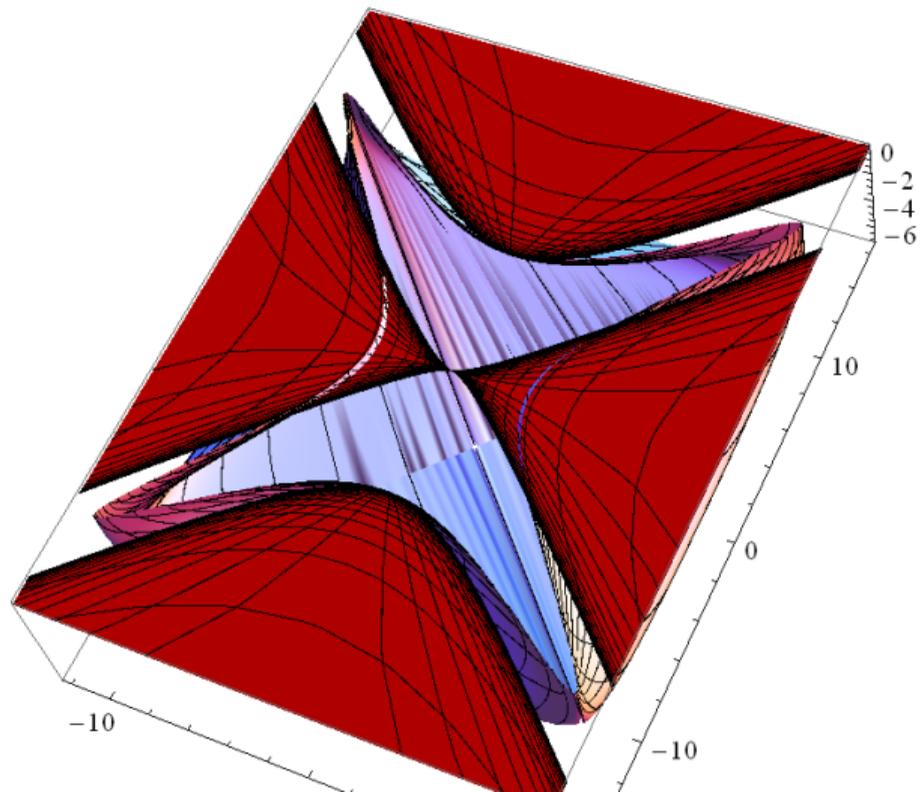
Полуфера радиуса  $\pi$  и множество разреза  
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, z)$



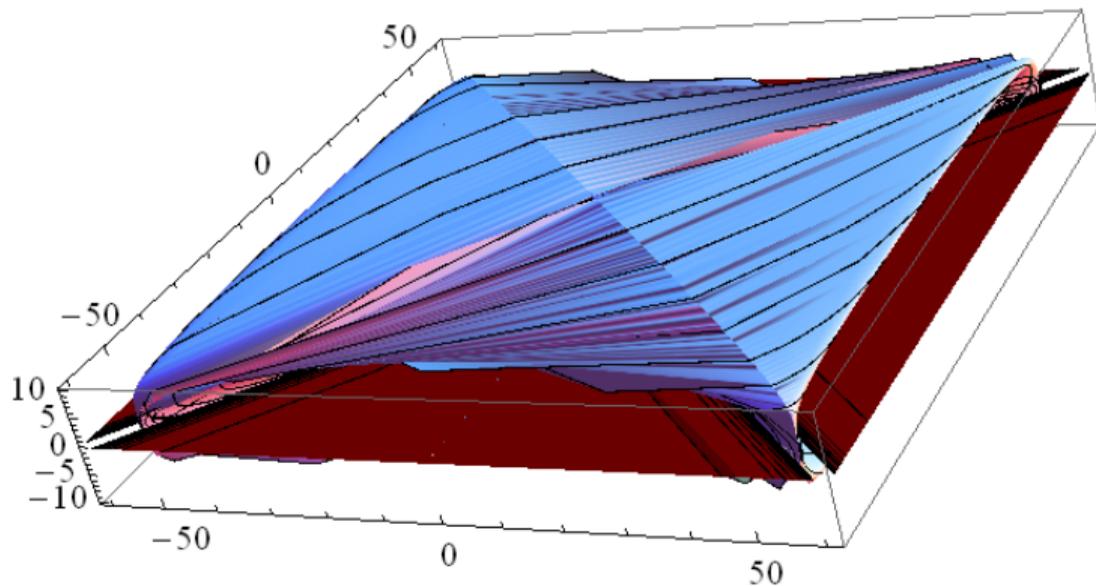
Сфера радиуса  $2\pi$  и множество разреза  
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, z)$



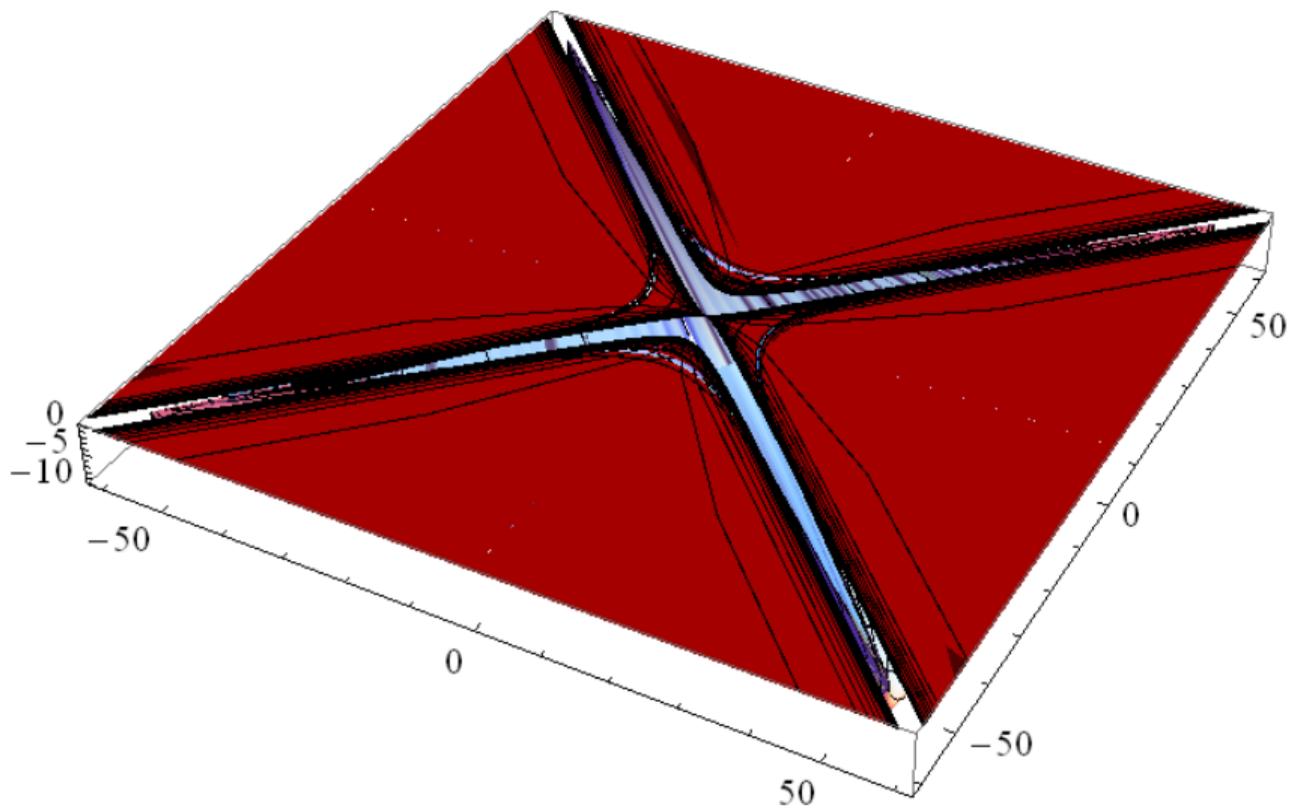
Полуфера радиуса  $2\pi$  и множество разреза  
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, z)$



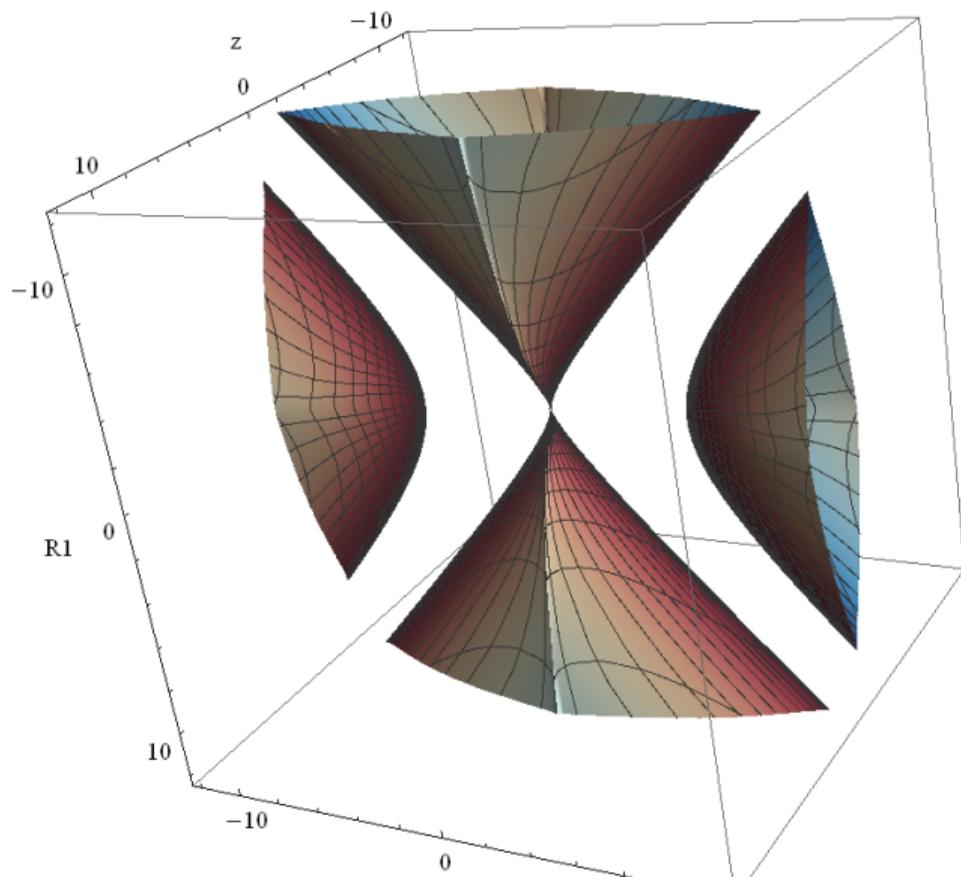
Сфера радиуса  $3\pi$  и множество разреза  
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, z)$



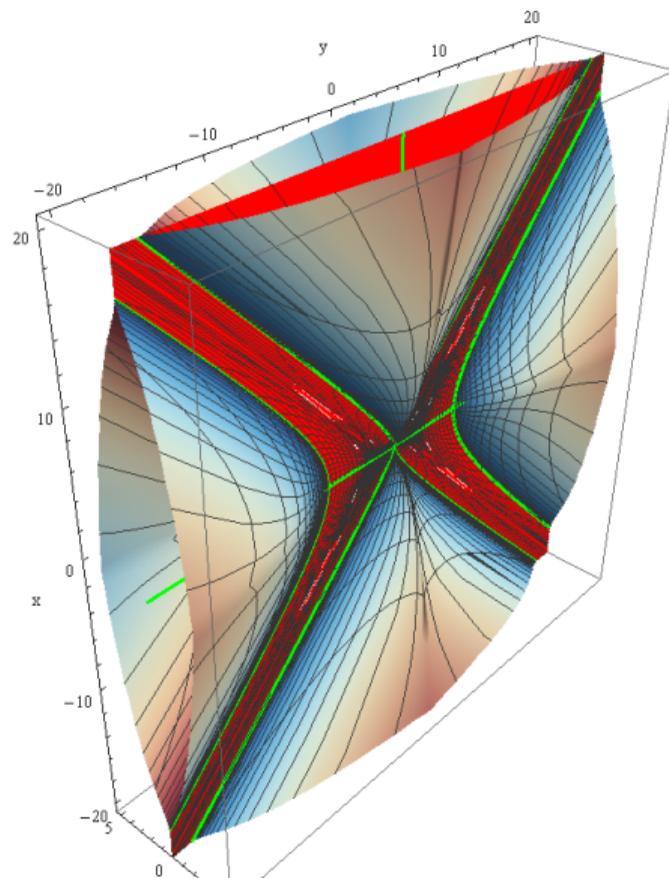
Полуфера радиуса  $3\pi$  и множество разреза  
в выпрямляющих координатах  $(R_1, R_2, z)$



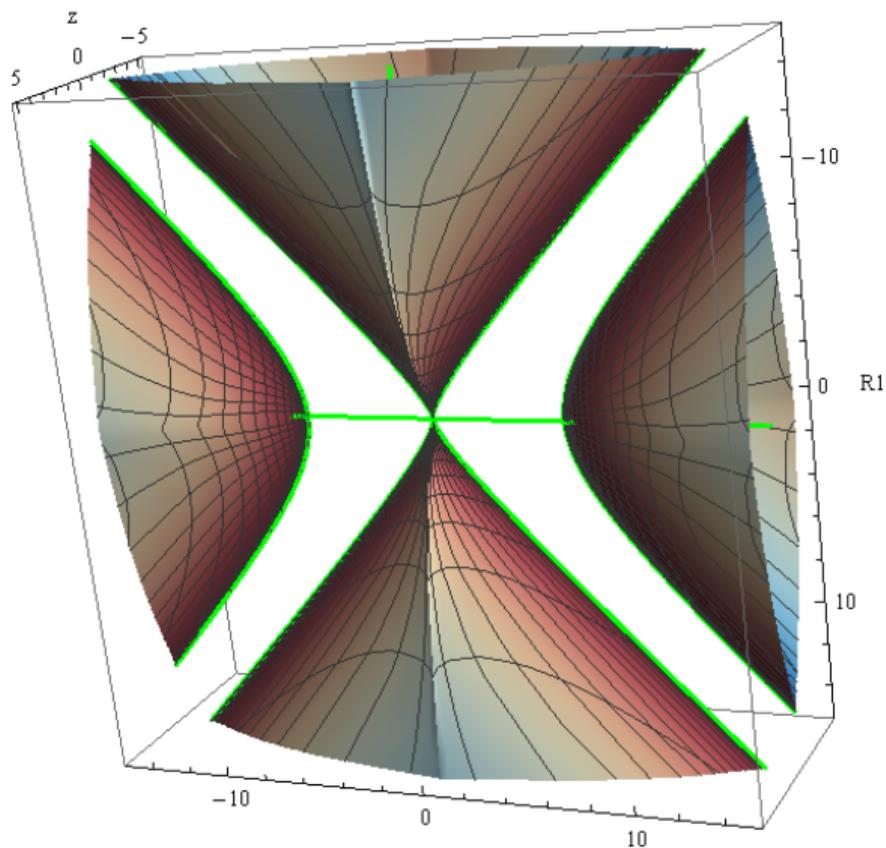
## Первая каустика



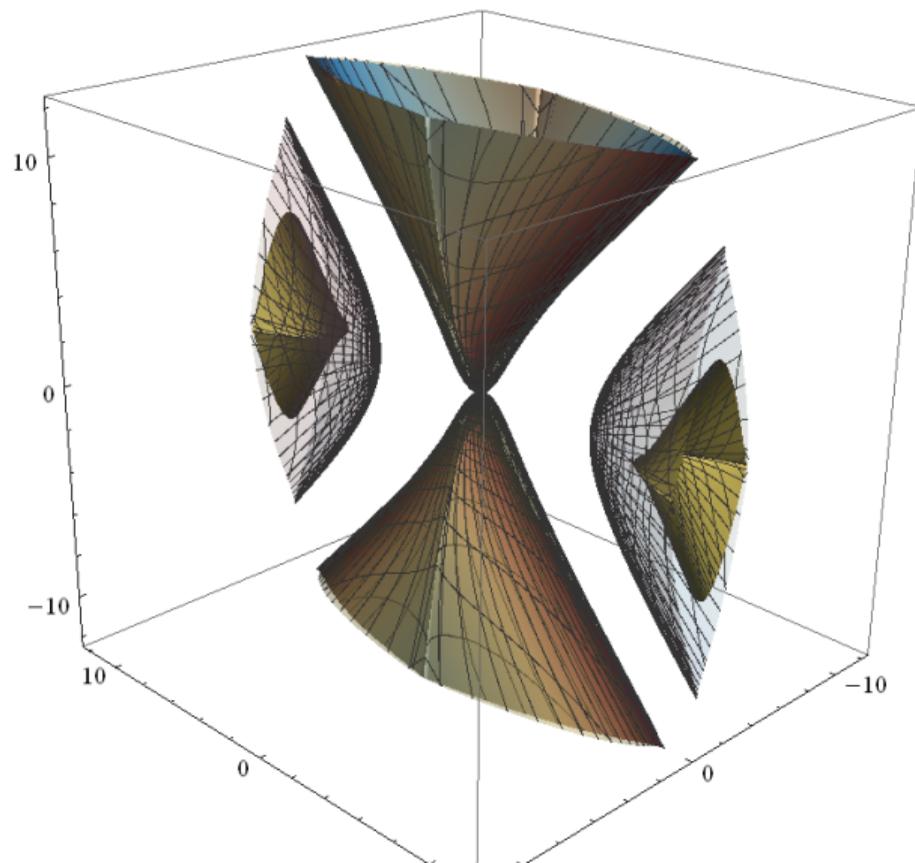
## Первая каустика и множество разреза



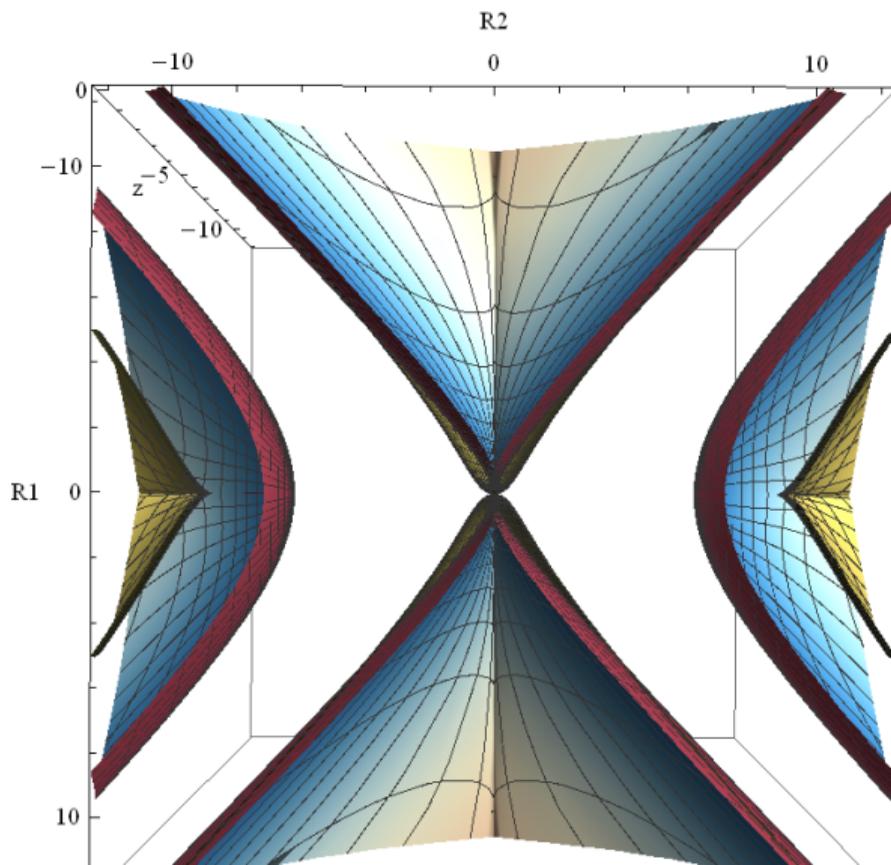
## Ребра возврата первой каустики



## Первая и вторая каустики



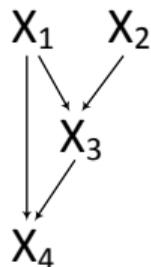
## Первая и вторая каустики в разрезе



## Группа Энгеля

$$M = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} 1 & y & z & v \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$X_1(q) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$



$$X_3 = [X_1, X_2],$$

$$X_4 = [X_1, X_3], \quad [X_2, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_4] = 0.$$

Нильпотентная CP структура с вектором роста  $(2, 3, 4)$ , единственна с точностью до растяжений

## Принцип максимума Понтрягина

- Анормальные траектории:  $e^{tX_2}$  ( $[X_2, \Delta^2] = 0$ )
- Нормальные экстремали:

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -\alpha \sin \theta, \quad \dot{\alpha} = 0,$$

$$\dot{q} = -\sin \theta X_1(q) + \cos \theta X_2(q),$$

$$\lambda = (\theta, c, \alpha) \in C = T_{q_0}^* M \cap \{H = 1/2\} = S_\theta^1 \times \mathbb{R}_{c, \alpha}^2.$$

- Интеграл энергии  $E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos \theta \in [-|\alpha|, +\infty)$ .
- $\theta(t), c(t), q(t)$ : параметризация функциями Якоби.
- $\theta = \pi n, c = 0 \Rightarrow \dot{q} = \pm X_2(q), \Rightarrow$  анормальные траектории нестрого анормальны.

## Симметрии и первое время Максвелла

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} \cong (\mathbb{Z}_2)^3.$$

### Теорема 15

- $E = -\pm \alpha \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = +\infty,$
- $|E| < |\alpha| > 0 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = \frac{2p_1(k)}{\sqrt{|\alpha|}}, k = \sqrt{(E + |\alpha|)/(2|\alpha|)},$
- $E > |\alpha| > 0 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2kK(k), k = \sqrt{2|\alpha|/(E + |\alpha|)},$
- $\alpha = 0, E > 0 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = \frac{\sqrt{2}\pi}{E},$

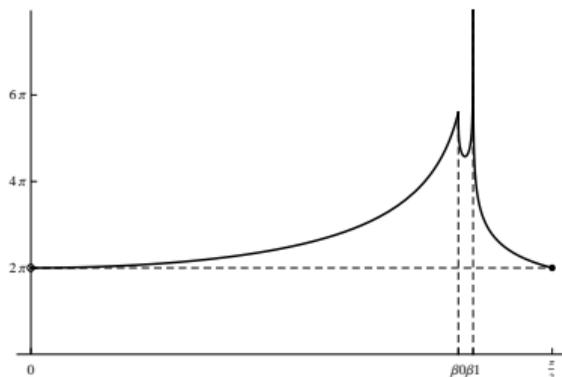
$$p_1(k) = \min\{p > 0 \mid \text{cn}(p, k)(E(p, k) - p) - \text{dn}(p, k) \text{sn}(p, k) = 0$$

или  $p = 2K(k)\}$ .

## Сопряженное время и время разреза

### Теорема 16

- $t_{\text{conj}}^1(\lambda) \geq t_{\text{Max}}(\lambda), \lambda \in C,$
- $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}(\lambda), \lambda \in C,$
- $t_{\text{cut}} \circ \varepsilon^i = t_{\text{cut}}, \varepsilon^i \in G,$
- $\vec{H}_V t_{\text{cut}} = 0,$
- $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm \alpha}$  непрерывна,  $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm \alpha}, E_0$  гладкая,  
 $E_0 = 2k_0^2 - 1, 2E(k_0) - K(k_0) = 0, k_0 = 0.9089 \dots$



## Глобальная структура экспоненциального отображения и множество разреза

- $\tilde{N} = \{(\lambda, t) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}_+ \mid t < t_{\text{Max}}(\lambda), \sin(\gamma_{t/2}) \neq 0\} = \cup_{i=1}^4 D_i,$
- $\tilde{M} = \text{Exp}^{-1}(\tilde{N}) = \{xz \neq 0\} = \cup_{i=1}^4 M_i.$

### Теорема 17

$\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$  — диффеоморфизм,  $i = 1, \dots, 4.$

$$\text{Cut} \subset M' = M \setminus \tilde{M} = \{q \in \mathbb{R}^4 \mid \text{mod } xz = 0\}.$$

Дальнейшие полученные результаты:

- Диффеоморфные стратификации  $M', N' = \hat{N} \setminus \tilde{N},$
- Структура  $\text{Exp} : N' \rightarrow M'.$
- Структура  $\text{Cut}.$

## Сфера $S = S_1(q_0)$

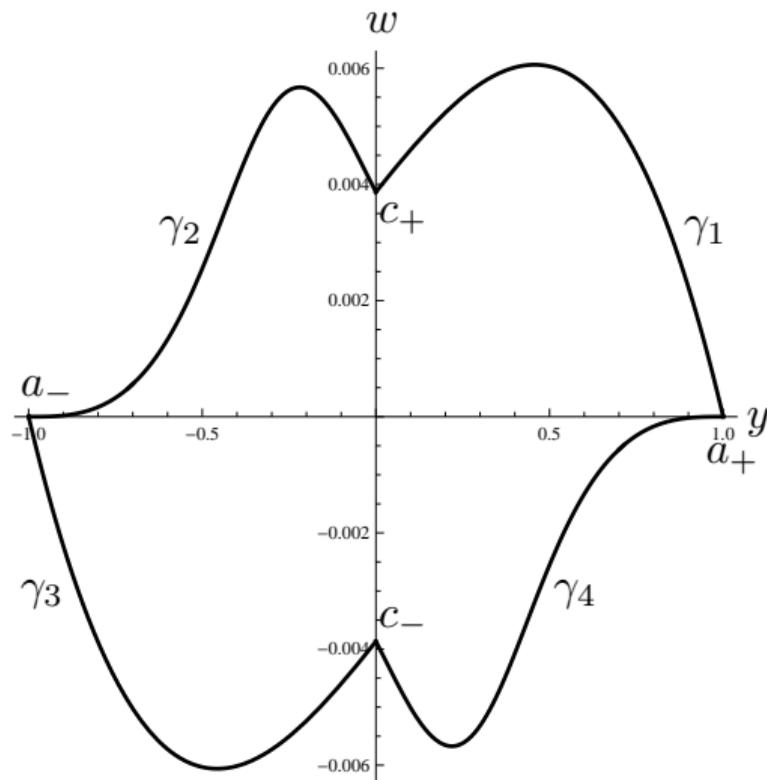
### Теорема 18

- $\widehat{S} = S \cap \{x = z = 0\}$  есть замкнутая непрерывная кривая, охватывающая начало координат,
- $\widehat{S} \cap \{yw \neq 0\} = \cup_{i=1}^4 \gamma_i$  гладкие кривые ( $w = v - y^3/6$ ),
- $\widehat{S} \cap \text{Abnorm} = \{a_-, a_+\}$ ,  $\widehat{S} \cap \text{Conj} = \{c_-, c_+\}$ ,
- $\widehat{S}$  негладкая, липшицева в окрестности точек  $a_{\pm}$  и  $c_{\pm}$ ,
- в окрестности точки  $a_+$  пересечение  $\widehat{S} \cap \{w < 0\}$  есть график плоской функции

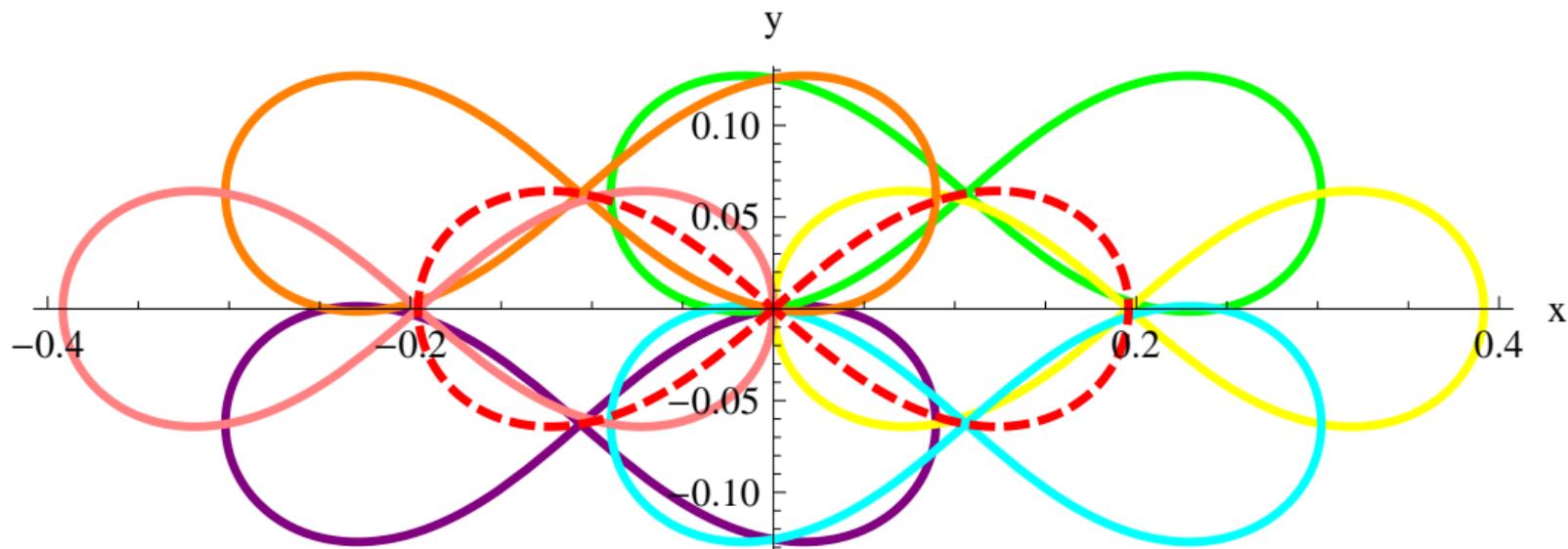
$$w = w_2(y) = -\frac{Y^3}{6} + CY^3 e^{-\frac{2}{Y}}(1 + o(1)), \quad Y = \frac{1-y}{2},$$

- $\widehat{S}$  несубаналитична в окрестности точек  $a_{\pm}$ , поэтому и сфера  $S$  несубаналитична.

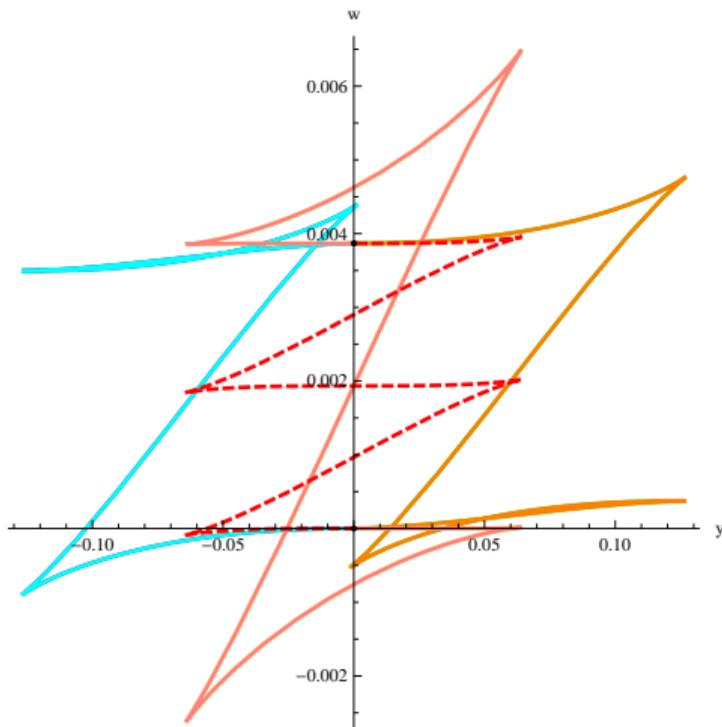
Пересечение  $\widehat{S} = S \cap \{x = z = 0\}$



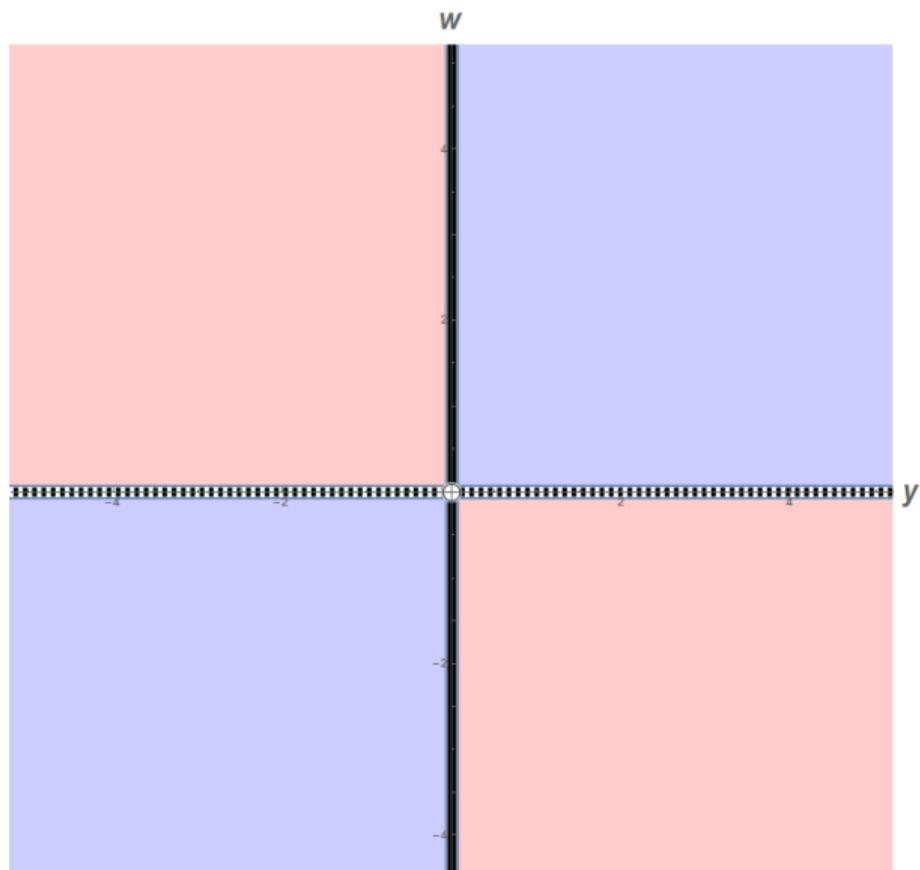
Однопараметрическое семейство кратчайших, приходящих в сопряженную точку  $c_{\pm}$  на сфере, проекция на  $(x, y)$



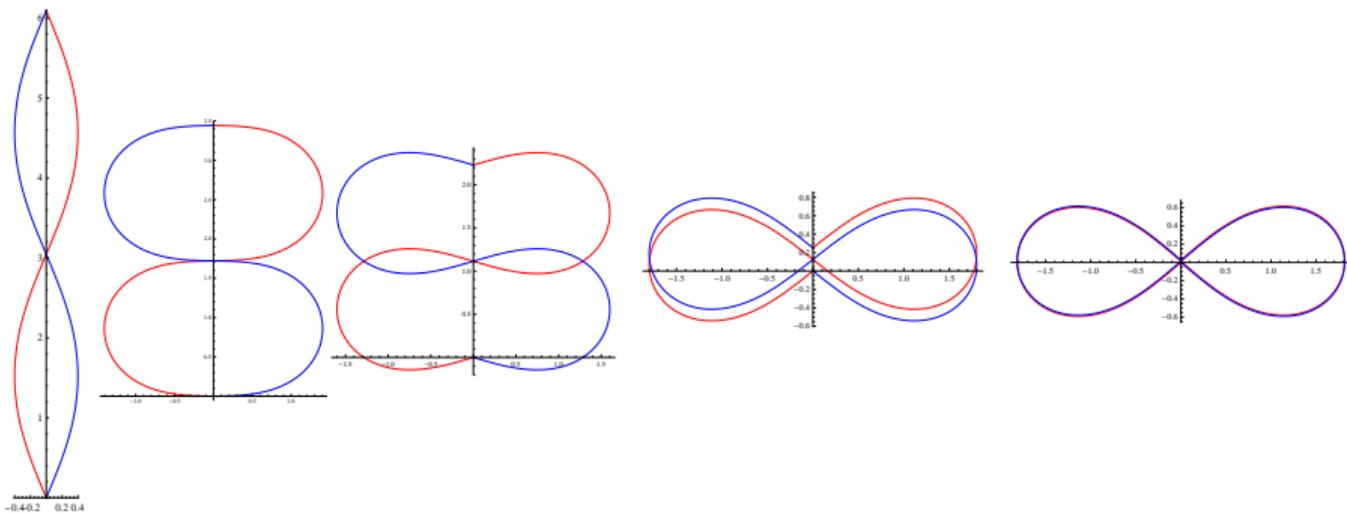
Однопараметрическое семейство кратчайших, приходящих в сопряженную точку  $c_{\pm}$  на сфере, проекция на  $(y, w)$



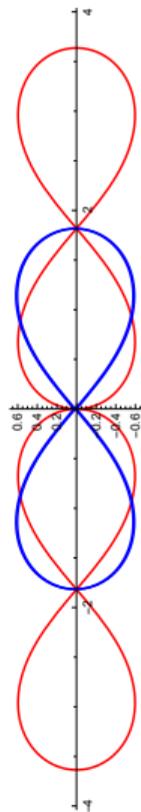
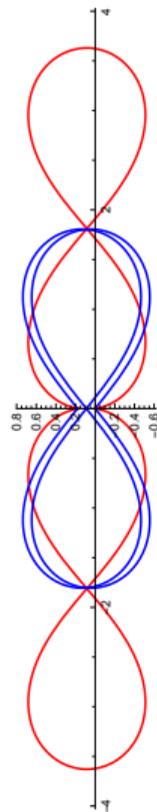
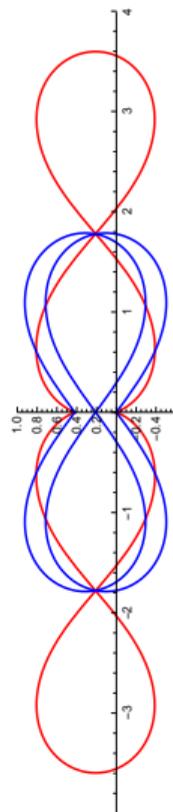
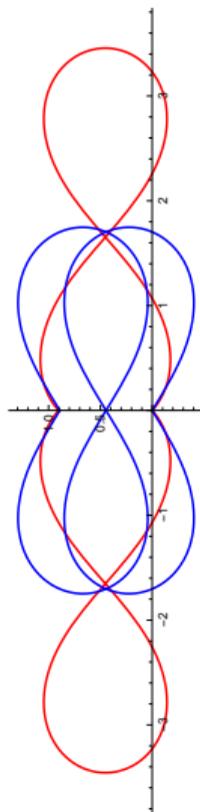
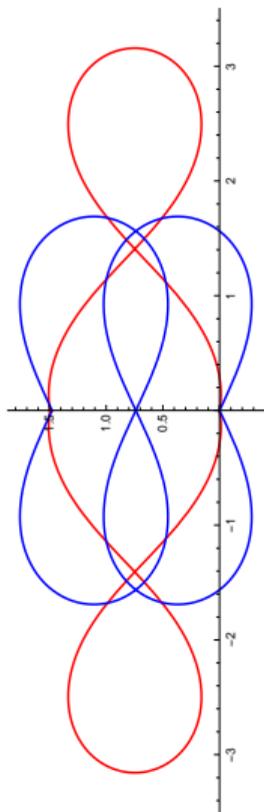
$$\text{Cut} \cap \{x = z = 0\}$$



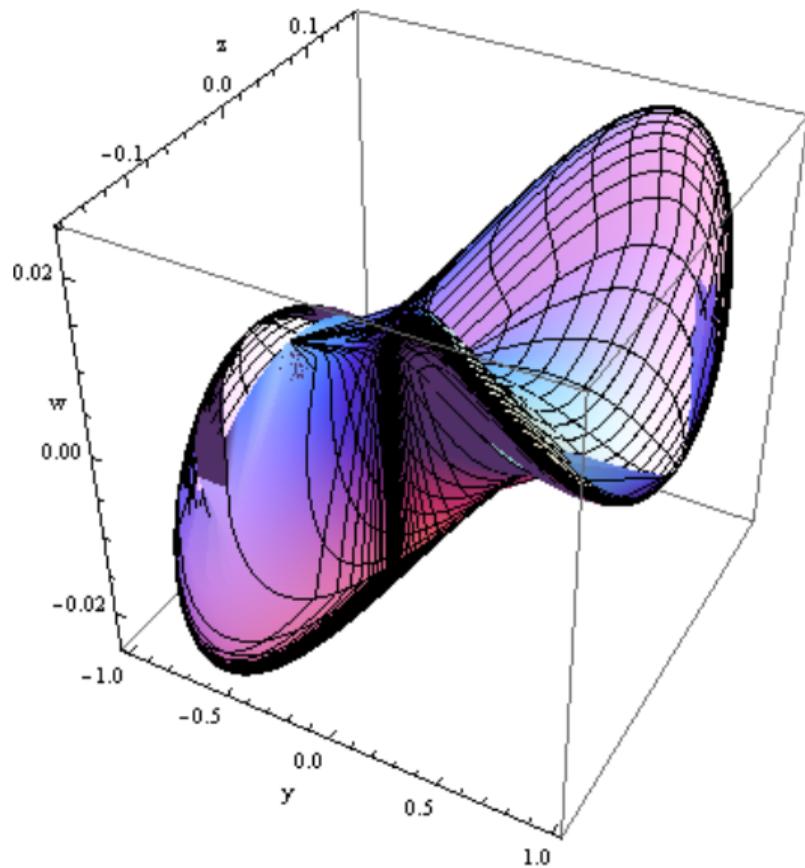
# Эластики, порождающие $\text{Max}_1 \cap \{x = z = 0\}$



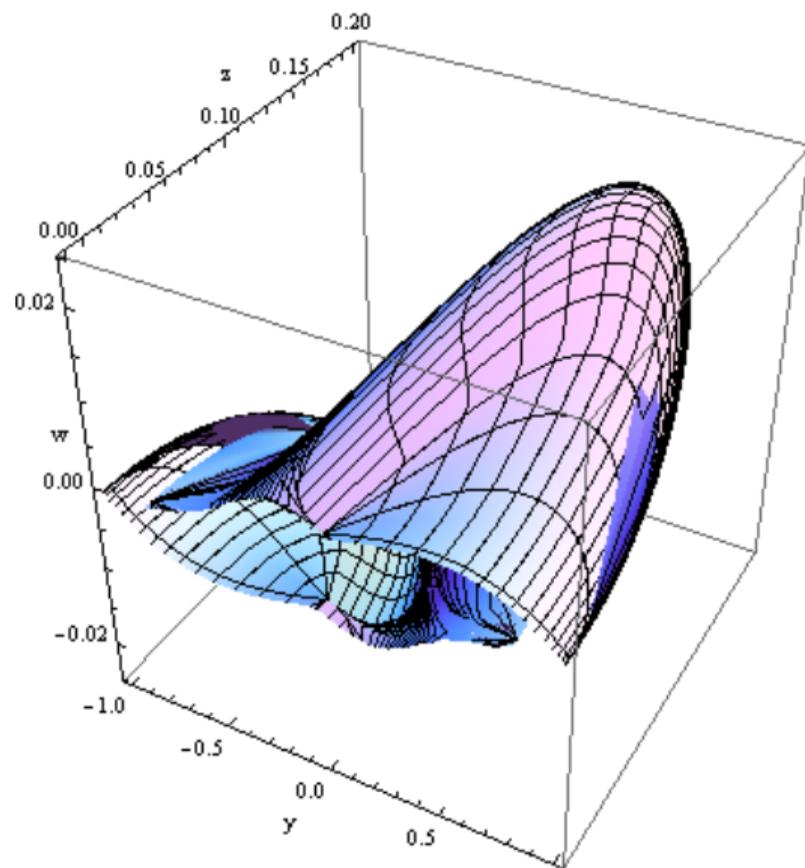
# Эластики, порождающие $\text{Max}_2 \cap \{x = z = 0\}$



Сфера  $S \cap \{x = 0\}$



Полусфера  $S \cap \{x = 0, z > 0\}$



## Публикации

1. Yu. Sachkov, I. Moiseev, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 380–399.
2. Yu. Sachkov, Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 1018–1039.
3. Yu. Sachkov, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 17 (2011), 293–321.
4. Y.A. Butt, Yu. Sachkov, A.I. Bhatti, Parametrization of Extremal Trajectories in Sub-Riemannian Problem on Group of Motions of Pseudo Euclidean Plane, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 20 (2014), No. 3 (July), 341–364.

## Публикации

5. Y.A.Butt, Yu. Sachkov, A.I. Bhatti, Maxwell Strata and Conjugate Points in the Sub-Riemannian Problem on the Lie Group  $SH(2)$ , *Journal of Dynamical and Control Systems*, 22 (2016), 747–770
6. Y.A.Butt, Yu. Sachkov, A.I. Bhatti, Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group  $SH(2)$ , *Journal of Dynamical and Control Systems*, 23 (2017), 155–195
7. Ардентов А.А., Сачков Ю.Л., Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля, *Мат. сборник* (2011), Т. 202, No. 11, С. 31-54.
8. A.Ardentov, Yu. Sachkov, Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group, *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 195, No. 3, December, 2013, 369–390.
9. A.Ardentov, Yu. Sachkov, Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 21 (2015), 958–988.
10. ...

## Вопросы и планы

- Нильпотентная задача на группе Энгеля:
  - особенности сферы,
- Субримановы задачи с вектором роста  $(2, 3, 4)$ :
  - асимптотика экспоненциального отображения,
  - Conj,
  - Cut,
  - особенности малых сфер,
- Левоинвариантные субримановы и римановы задачи на трехмерных группах Ли:
  - $SO(3)$ ,
  - $SL(2)$ .
- Левоинвариантные субримановы и римановы задачи на группах Ли:
  - конструкция симметрий Exp по симметриям  $\vec{H}_v$ ,
  - $\vec{H}_v t_{\text{cut}} = 0$ ,
  - диффеоморфные стратификации.