НТУ «Сириус»
Образовательный модуль «Современные методы теории информации, оптимизации и управления»
19.07–08.08.2021
Направление «Геометрическая теория управления»

Описание проектов

Содержание

1 Сублоренцева задача на группе Гейзенберга 2

2 Задача быстродействия на группе движений плоскости с управлением в секторе 3

3 Субриманова сфера на группе Энгеля 4

4 Задачи быстродействия на группе Гейзенберга с управлением в полукруге 5

5 Задачи быстродействия на группе вращений трехмерного пространства с управлением в полукруге 6

6 Задачи быстродействия на специальной линейной группе с управлением в полукруге 7

7 Построение оптимального синтеза в задаче Маркова-Дубинса 8

8 Моделирование парковки робота с прицепом без препятствий 9

9 Исследование нормальных экстремалей в субримановой задаче для колесного робота с прицепом 10

10 Инерциальные свойства параболических сегментов 11

11 Фигурное катание 14

1 Сублоренцева задача на группе Гейзенберга

(Сачков Ю.Л.)

Рассмотрите задачу оптимального управления

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u_1^2 - u_2^2 = 1, \quad u_1 > 0,$$
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z},$$
$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \qquad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1),$$
$$t_1 \to \max.$$

1. Исследуйте глобальную управляемость управляемой системы.
2. Выпишите принцип максимума Понтрягина.
3. Найдите анормальные траектории.
4. Выпишите гамильтонову систему ПМП для нормальных траекторий.
5. Параметризуйте нормальные экстремальные траектории.
6. Опишите множество достижимости $\mathcal{A}$ управляемой системы из точки q_0.
7. Для каждой точки $q_1 \in \mathcal{A}$, опишите оптимальную траекторию, соединяющие точки q_0 и q_1.

Литература: [1, 2].

2 Задача быстродействия на группе движений плоскости с управлением в секторе

(Сачков Ю.Л.)

Пусть $\alpha \in (0, \pi/2)$. Рассмотрите задачу оптимального управления

$$
\begin{aligned}
&\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1,\\
&u_1 = r\cos\varphi, \quad u_2 = r\sin\varphi, \qquad r \in [0,1], \quad \varphi \in [-\alpha, \alpha],\\
&X_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta},\\
&q(0) = q_0 = (0,0,0), \qquad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1),\\
&t_1 \to \min.
\end{aligned}
$$

1. Исследуйте глобальную управляемость управляемой системы.
2. Выпишите принцип максимума Понтрягина.
3. Найдите анормальные траектории.
4. Выпишите гамильтонову систему ПМП для нормальных траекторий.
5. Нарисуйте фазовый портрет вертикальной подсистемы нормальной гамильтоновой системы.
6. Параметризуйте нормальные экстремальные траектории.

Литература: [1, 2].

3 Субриманова сфера на группе Энгеля

(Сачков Ю.Л.)

Пусть $S \subset \mathbb{R}^4_{x,y,z,v}$ — единичная субриманова сфера на группе Энгеля [3], и

$$\widetilde{S} = S \cap \{x = z = 0\}$$

ее сечение.

1. Изучите параметризацию кривой $\widetilde{S}$ [3].
2. Нарисуйте кривую $\widetilde{S}$ в системе компьютерной математики.
3. Исследуйте монотонность функций, задающих гладкие куски кривой $\widetilde{S}$.
4. Получите точные и приближенные оценки области, ограниченной кривой $\widetilde{S}$ с помощью прямоугольников на плоскости yv, центрированных в начале координат, со сторами, параллельными осям координат.

Литература: [3].

4 Задачи быстродействия на группе Гейзенберга с управлением в полукруге

(Маштаков А.П.)

Рассмотрите задачу оптимального управления

$$
\begin{aligned}
&\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1, \quad u_1 \geqslant 0,\\
&X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z},\\
&q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \qquad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1),\\
&t_1 \to \min .
\end{aligned}
$$

1. Исследуйте глобальную управляемость управляемой системы.
2. Опишите множество достижимости $\mathcal{A}$ управляемой системы из точки q_0.
3. Выпишите принцип максимума Понтрягина.
4. Найдите анормальные траектории.
5. Выпишите гамильтонову систему ПМП для нормальных траекторий.
6. Исследуйте интегрируемость гамильтоновой системы ПМП по Лиувиллю
7. Параметризуйте нормальные экстремальные траектории.
8. Для каждой точки $q_1 \in \mathcal{A}$, опишите оптимальную траекторию, соединяющую точки q_0 и q_1

5 Задачи быстродействия на группе вращений трехмерного пространства с управлением в полукруге

(Маштаков А.П.)

Рассмотрите задачу оптимального управления

$$
\begin{aligned}
&\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q = (x, y, z) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\\
&u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1, \quad u_1 \geqslant 0,\\
&X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} - \sec x \sin z \frac{\partial}{\partial y} + \tan x \sin z \frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial z},\\
&q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \qquad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1),\\
&t_1 \to \min .
\end{aligned}
$$

1. Исследуйте глобальную управляемость управляемой системы.
2. Опишите множество достижимости $\mathcal{A}$ управляемой системы из точки q_0.
3. Выпишите принцип максимума Понтрягина.
4. Найдите анормальные траектории.
5. Выпишите гамильтонову систему ПМП для нормальных траекторий.
6. Исследуйте интегрируемость гамильтоновой системы ПМП по Лиувиллю
7. Параметризуйте нормальные экстремальные траектории.
8. Для каждой точки $q_1 \in \mathcal{A}$, опишите оптимальную траекторию, соединяющую точки q_0 и q_1

6 Задачи быстродействия на специальной линейной группе с управлением в полукруге

(Маштаков А.П.)

Рассмотрите задачу оптимального управления

$$
\begin{aligned}
&\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\\
&u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1, \quad u_1 \geqslant 0,\\
&X_1 = \operatorname{ch} z \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sh} x \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial z},\\
&q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \qquad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1),\\
&t_1 \to \min.
\end{aligned}
$$

1. Исследуйте глобальную управляемость управляемой системы.
2. Опишите множество достижимости $\mathcal{A}$ управляемой системы из точки q_0.
3. Выпишите принцип максимума Понтрягина.
4. Найдите анормальные траектории.
5. Выпишите гамильтонову систему ПМП для нормальных траекторий.
6. Исследуйте интегрируемость гамильтоновой системы ПМП по Лиувиллю
7. Параметризуйте нормальные экстремальные траектории.
8. Для каждой точки $q_1 \in \mathcal{A}$, опишите оптимальную траекторию, соединяющую точки q_0 и q_1

7 Построение оптимального синтеза в задаче Маркова-Дубинса

(Ардентов А.А.)

Рассмотрите задачу быстродействия ($T \to \min$) на группе движения плоскости

$$\mathrm{SE}(2) = \{q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta\}$$

со следующей управляемой системой:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \cos\theta, \\
\dot{y} &= \sin\theta, \\
\dot{\theta} &= u,
\end{aligned}$$

и краевыми условиями:

$$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \theta_0), \qquad q(T) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1).$$

Управление ограничено:

$$|u| \leqslant \frac{1}{R}, \qquad R > 0.$$

1. Исследуйте решение этой задачи, полученное Лестером Дубинсом в 1957 году [4].

2. Для каждого из 6 типов движений, описанных Дубинсом, опишите набор граничных условий q_0, q_1, которые соединяются этим путём оптимально.

3. При фиксированном q_0 постройте множества $S_{q_0}(T)$, содержащие все такие точки q_1, для которых существует оптимальный путь из q_0 в q_1 за время T, при различных фиксированных значениях T.

4. Постройте разбиение $S_{q_0}(T)$ на 6 подмножеств (и их всевозможных пересечений) согласно типам оптимальных траекторий.

5. Опишите множества Максвелла, т.е. точки с решениями кратности от 2 до 6.

8 Моделирование парковки робота с прицепом без препятствий

(Ардентов А.А.)

Рассмотрите следующую задачу управления роботом с прицепом:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\vartheta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\vartheta, \\ \dot{\vartheta} = u_2, \\ \dot{\varphi} = -\frac{1}{l_t}(u_1 \sin\varphi + u_2(l_t + l_r \cos\varphi)). \end{cases}$$
$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0.$$
$$x(T) = x_1, \quad y(T) = y_1, \quad \theta(T) = \theta_1, \quad \varphi(T) = \varphi_1.$$

при свободном конечном времени T.

1. Исследуйте управляемость соответствующей системы через теорему Рашевского-Чжоу.

2. Конструктивно постройте алгоритм парковки робота с прицепом из произвольного положения в произвольное при $l_r = 0$.

3. Запрограммируйте построенный алгоритм и включите его в интерфейс, визуализирующий соответствующую парковку при входных значениях:
$$x_0, y_0, \theta_0, \varphi_0, x_1, y_1, \theta_1, \varphi_1, l_t.$$

4. Уточните конструктивный алгоритм парковки для произвольного
$$l_r \geqslant 0.$$

5. Расширьте функционал интерфейса парковки добавлением входного параметра $l_r \geqslant 0$ и интегрируйте в него уточненный алгоритм парковки.

9 Исследование нормальных экстремалей в субримановой задаче для колесного робота с прицепом

(Ардентов А.А.)

Рассмотрите следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{q} = v_1 X_1 + \omega X_2, \quad q \in M, \quad u = (v_1, \omega) \in \mathbb{R}^2,$$

с граничными условиями

$$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \vartheta_0, \varphi_0), \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, \vartheta_1, \varphi_1),$$

и функционалом качества

$$\int_0^{t_1} \sqrt{v_1^2 + \mu^2 \omega^2} dt \to \min .$$

где $u = (v_1, \omega)$ – вектор управлений, а X_1 и X_2 — векторные поля вида

$$X_1 = \left(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0, -\frac{\sin\varphi}{l_t} \right)^T, \quad X_2 = \left(0, 0, 1, -\frac{l_r \cos\varphi}{l_t} - 1 \right)^T.$$

1. Примените принцип максимума Понтрягина для описания нормальной гамильтоновой системы.
2. Исследуйте интегрируемость по Лиувиллю нормальной гамильтоновой системы в случае $l_r = 0$ через отображение Пуанкаре.
3. Численно постройте экстремальные траектории движения робота с прицепом при различных значениях l_r, l_t.
4. Исследуйте интегрируемость по Лиувиллю нормальной гамильтоновой системы в общем случае при произвольных l_r, l_t.

10 Инерциальные свойства параболических сегментов

(Сачкова Е.Ф.)

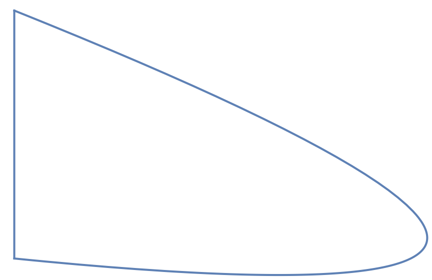

Рис. 1: Параболический сегмент

10.1 Цель проекта

1. Использование фундаментальных исследований субримановой $(2, 3, 5, 8)$-задачи для создания технологии восстановления параболического профиля однородной балки по частично заданным характеристикам профиля и построения его эллипса инерции.

2. Создание метода исследования прочности восстановленной балки.

3. Создание метода исследования вращательных свойств восстановленного параболического сегмента.

4. Создание интерактивного программного инструмента для восстановления частично заданного профиля балки и анализа прочности восстановленной балки; для сравнения прочности балок с равновеликими профилями; для вычисления угловых скоростей вращения восстановленного параболического сегмента.

10.2 Задача 1: «Прочность балок с сечениями в виде параболических сегментов»

Построить сечение однородной балки в форме параболического сегмента, у которого известны только длина хорды γ_0, площадь S и статический момент M относительно оси, перпендикулярной к хорде γ_0, а параболическая граница γ неизвестна. Далее, балку с полученным сечением подвергнуть (теоретическому) нагружению силой, изгибающей ее. Рассмотреть случай чистого прямого изгиба. Указать направления минимальной и максимальной прочности. Вычислить максимальный момент сопротивления построенного сечения при изгибе.

10.3 Задача 2: «Вращательные свойства параболических сегментов»

Построить однородную пластину, имеющую форму параболического сегмента, у которого известны только длина хорды γ_0, площадь S, статический момент M относительно оси, перпендикулярной к хорде γ_0, а параболическая граница γ неизвестна. Вычислить максимальную и минимальную угловые скорости вращения восстановленного сегмента при заданной постоянной кинетической энергии и найти соответствующие оси вращения, проходящие через начало координат; через центр тяжести.

10.4 Восстановление параболического сегмента

1. Вычислить в символьном виде с помощью системы компьютерной математики Mathematica параметрические уравнения параболических траекторий
$$x(t,p) = (x_1(t,p), \ldots, x_8(t,p)),$$
являющихся решениями следующей задачи Коши [2]:

   управляемая система с вектором роста распределения $(2,3,5,8)$:
$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_8) \in \mathbb{R}^8,$$
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_8},$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7},$$
   экстремальные параболические линейные управления:
$$u_1(t,p) = -p_2 - \frac{p_4}{p_3}(p_1 p_4 - p_2 p_3)t,$$
$$u_2(t,p) = p_1 + (p_1 p_4 - p_2 p_3)t,$$
   где $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, $p_1^2 + p_2^2 > 0$, $p_3 p_4 \neq 0$,

   начальное условие
$$x(0) = x^0 = 0.$$

2. Решение двухточечной граничной задачи (см. [6]):
   заданы величины $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, a_5, моделирующие соответственно длину хорды γ_0, площадь сегмента S и статический момент M_1 относительно оси Ox_1;

граничная точка в задаче управления принимает вид:

$$T > 0 \quad \text{задано,}$$
$$x(T,p) = x^1 = (0, a_2, a_3, x_4^1, a_5, x_6^1, x_7^1, x_8^1).$$

Найти выражения для неизвестных компонент граничной точки x^1 в виде $x_i^1 = x_i(T, p(a_2, a_3, a_5, T)) = a_i$, $i = 4, 6, 7, 8$.

Написать в системе Mathematica процедуру построения положительно ориентированной границы параболического сегмента $\gamma\gamma_0^+$.

3. Варьируя ординату центра тяжести $c_2 = a5/a3$, нарисовать последовательность равновеликих сегментов, опирающихся на одну и ту же хорду, их центральные эллипсы инерции.

10.5 Исследование Задачи 1

1. Написать в системе Mathematica процедуру вычисления наиболее и наименее прочных на изгиб балки направлений.
2. Сделать переход к ортогональному собственному базису, центр тяжести сечения поместить в начало координат. Нарисовать сечение в новом базисе так, чтобы наибольшая ось центрального эллипса инерции лежала на вертикальной оси.
3. Найти наибольшее расстояние от горизонтальной оси сечения до точек его границы $\gamma\gamma_0$, лежащей в положительной полуплоскости.
4. Вычислить максимальный момент сопротивления при изгибе W_{max}, рассмотрев прямой чистый изгиб.
5. Создать в системе Mathematica интерактивный инструмент для построения параболического профиля балки и вычисления момента сопротивления при изгибе по неполным данным о профиле. Сравнить прочность равновеликих профилей в зависимости от ординаты центра тяжести.

10.6 Исследование Задачи 2

1. Написать в системе Mathematica процедуру вычисления осей инерции f_1, f_2 сегмента в точке O и главных моментов инерции сегмента относительно осей инерции f_1, f_2 соответственно. То же — в центре тяжести.
2. Вычислить максимальную и минимальную угловые скорости вращения при заданной постоянной кинетической энергии $E = 1/2$ относительно полюса O; центра тяжести.
3. Нарисовать с помощью системы Mathematica сегмент, эллипсы инерции, оси инерции в точке O; в центре тяжести. Сделать анимацию вращательного движения.

11 Фигурное катание

(Ефремов К.С.)

Задача проекта состоит в разработке управляющей программы Мобильного Робота(МР) для движения вдоль сложных траекторий. Критерием оценки выполнения задачи является точность следования вдоль траектории.

Для работы с роботом потребуется ноутбук/ПК с Bluetooth устройством. Необходимый пакет программ для ПК:

1. Программа для расчета и генерации траектории Matlab, Wolfram Matematica, Maple и т.д
2. Программа для передачи файла управления на робот (Она уже готова и написана на языке c# в IDE Visual Studio 2019)
3. Программа для работы с устройством управления робота (Keil 5)

Для выполнения задачи необходимо:

1. Построить график нужной траектории
2. Рассчитать угловые скорости колес МР.
3. Загрузить данные в систему управления МР.
4. Запустить выполнение задачи

Литература: [14].

Список литературы

[1] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. – М.: Физматлит, 2005. http://control.botik.ru/

[2] Ю.Л. Сачков, Введение в геометрическую теорию управления, URSS, 2021, http://control.botik.ru/

[3] A. A. Ardentov, Yu.L. Sachkov, Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 21 (2015), 958–988, http://control.botik.ru/

[4] Dubins L.E., On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents, American Journal of Mathematics, 1957, Vol. 79, No. 3, pp. 497–516.

[5] J.-P. Laumond, Nonholonomic Motion Planning for Mobile Robots: Tutorial Notes, LAAS-CNRS, Toulouse, 1998.

[6] Сачкова Е.Ф., Сачков Ю.Л., Панин Д.А. Приложение субримановой задачи с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ к задаче об упругости однородной балки // (http://control.botik.ru/)

[7] Yu.L.Sachkov, E.F.Sachkova, Symmetries and Parameterization of Abnormal Extremals in the Sub-Riemannian Problem with the Growth Vector (2; 3; 5; 8), //Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 15 (2019), 4: 577 – 585.

[8] Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова, Структура анормальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ // Математический сборник, 2020, Том 211, № 10, с. 112 – 138.

[9] Математика, ее содержание, методы и значение. Под ред. Александрова А.Д., Колмогорова А.Н., Лаврентьева М.А. М.: Изд. Академии наук СССР, 1956; т.1 - 296с.

[10] Геккелер И.В. Статика упругого тела: Пер. с нем. под ред. А. И. Лурье. Изд. 2-е, стереотипное.— М.: КомКнига, 2005. — 288 с.

[11] В.И.Арнольд Математические методы классической механики. — М.: Наука. 1989.

[12] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Учеб. для вузов.– 10-е издание, перераб. и доп.–М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 1999.– 599с.

[13] Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 2 изд., перераб.и дополн.— М.: Изд-во МГУ, 2000. — 719 с.

[14] Методические указания: URL: https://disk.yandex.ru/i/98BCJ4SFkmK3KA