ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ С УПРАВЛЕНИЕМ В ПОЛУКРУГЕ

А.П. Маштаков

(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
Ярославская область, Переславский район, с. Веськово)

E-mail address: alexey.mashtakov@gmail.com

Рассматривается модель машины на плоскости, в которой машина имеет два параллельных колеса, равноудаленных от центра. Оба колеса имеют независимые приводы, которые могут вращаться вперед и назад, так что соответствующее качение колес происходит без проскальзывания. Конфигурация системы описывается тройкой $q = (x, y, \theta) \in \mathbb{M} = \mathbb{R}^2 \times S^1$, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — центральная точка, а $\theta \in S^1$ — угол ориентации машины, совпадающий с направлением колес. Конфигурационное пространство $\mathbb{M}$ образует группу Ли $\mathrm{SE}(2)$ — группу движений плоскости. Машина имеет два управления: акселератор u_1 и рулевое колесо u_2. Рассматривается модель машины, способной двигаться вперед $u_1 \geq 0$ и поворачивать на месте.

Динамика задается управляемой системой [1]

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (x, y, \theta) = q \in \mathrm{SE}(2) = \mathbb{M}, \\ u_1^2 + u_2^2 \leq 1,\ u_1 \geq 0. \end{array} \tag{1}$$

Исследуется задача быстродействия системой (1). По заданным граничным условиям q_0, $q_1 \in \mathbb{M}$ требуется найти управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ такие, что соответствующая траектория $\gamma : [0, T] \to \mathbb{M}$ переводит систему из начального состояния q_0 в конечное состояние q_1 за минимальное время

$$\gamma(0) = q_0, \quad \gamma(T) = q_1, \qquad T \to \min. \tag{2}$$

В данной постановке управления u_i принадлежат классу $L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, а соответствующие траектории γ являются липшицевыми кривыми на $\mathbb{M}$.

Оптимальные траектории задачи (1)–(2) используются в обработке изображений для поиска выделяющихся кривых. В частности, такие траектории используются в анализе медицинских изображений при поиске сосудов на фото сетчатки глаза человека. Задача представляет интерес в геометрической теории управления, как модельный пример, в котором множество значений управляющих параметров содержит ноль на границе.

В работе изучен вопрос управляемости и существования оптимальных траекторий. На основе анализа динамики гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина получено описание экстремальных управлений и траекторий. Найден явный вид экстремальных управлений и траекторий. Частично исследован вопрос оптимальности экстремалей. Построена двусторонняя оценка времени разреза. Описана структура оптимального синтеза.

References

[1] R. Duits, S.P.L. Meesters, J.-M. Mirebeau, J.M. Portegies, Optimal Paths for Variants of the 2D and 3D Reeds–Shepp Car with Applications in Image Analysis// JMIV, **60** (2018) 816–848.