Субриманова задача на группе SE(2)

Исполнитель: Юхновец И. В.
Руководитель: Сачков Ю. Л.

«Современные методы теории информации, оптимизации и управления»

Направление «Геометрическая теория управления»

Университет «Сириус», Сочи-2020

Постановка задачи

В общей постановке управляемая система имеет вид:

$$\begin{aligned} &q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2_{x,y} \times \mathbb{S}^1_\theta = M; \\ &(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; \\ &q(0) = q_0;\ q(t_1) = q_1. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2 = u_1^2 + u_2^2$.

Постановка задачи

В рамках задачи на оптимальность требуется минимизировать функционал

$$l = \int\limits_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2}\, dt$$

Функционал приводится к виду: $l = \int\limits_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min$

Свойства задачи

Данная задача обладает следующими свойствами:

- Нелинейная задача оптимального управления;
- Субриманова;
- Левоинвариантна по группе Ли $SE(2)$.

Мотивировка исследования

- В субримановой геометрии очень важна задача о структуре субримановых сфер и их особенностей.
- Исследование в определенной степени носит учебный характер;
- Перспективная цель работы — построение явной стратификации Уитни субримановой сферы на группе $\mathrm{SE}(2)$.
- В области управления движением космических аппаратов очень широко используются методы математической теории оптимального управления, поэтому там применимы полученные знания и навыки;
- Изученные разделы представляют очень большой интерес.

История задачи

- Аграчёв А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления — 2005.
- Сачков Ю. Л. Введение в геометрическую теорию управления — М., URSS, 2020.
- I. Moiseev, Yu. Sachkov. Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 380-399.
- Yu. Sachkov. Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 1018-1039.
- Yu. Sachkov. Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 17 (2011), 293-321.

Исследование глобальной управляемости

Система может быть приведена к виду:

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} u_1 \cos\theta \\ u_1 \sin\theta \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), \tag{2}$$

поэтому $f_1(q) = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial y}; \quad f_2(q) = \dfrac{\partial}{\partial \theta}.$

Система $\mathscr{F} = \{u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q) \mid u \in \mathbb{R}^2\} \subset \operatorname{Vec}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1\right)$ симметрична: $\mathscr{F} = -\mathscr{F}$. Поэтому $A_{q_0} = O_{q_0}$.

1-я скобка Ли:

$$[V_1, V_2] = -\frac{dV_1}{dq} V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

То есть $f_3(q) = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial x} - \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial y}.$

Исследование глобальной управляемости

2-я скобка Ли:

$$[V_1, V_3] = \frac{dV_3}{dq}V_1 - \frac{dV_1}{dq}V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Дальнейшее вычисление коммутаторов уже необязательно, т.к. мы заполнили линейное пространство. Можем записать:

$$\mathrm{Lie}_q(\mathscr{F}) = \mathrm{span}(f_1(q), f_2(q), f_3(q)) = T_q(M). \tag{3}$$

По теореме Рашевского-Чжоу, система $\mathscr{F}$ вполне неголономна. Тогда, согласно теореме рангового условия управляемости, система $\mathscr{F}$ глобально управляема на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Конструктивное доказательство управляемости

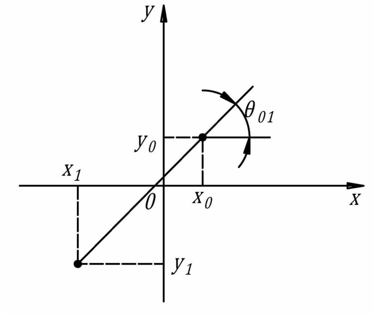


Рис. 1. Перемещение точки.

Конструктивное доказательство управляемости

1. Поворот на месте:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
u_2 &= \operatorname{sign}(\theta_{01} - \theta_0)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
&x = \text{const} = x_0 \\
&y = \text{const} = y_0 \\
&\theta \text{ изменяется: } \theta_0 \to \theta_{01}
\end{aligned}
$$

2. Движение:

$$
u_1 = \begin{cases} \operatorname{sign}(x_1 - x_0), & \text{если } x_1 \neq x_0; \\ \operatorname{sign}(y_1 - y_0), & \text{если } x_1 = x_0; \end{cases}
$$

$$
u_2 = 0
$$

Во всех случаях $\theta = \text{const} = \theta_{01}$, а x и y – изменяются:

$$
\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.
$$

3. Поворот на месте.

Гамильтонова система

Гамильтонова система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \{u_1 h_1 + u_2 h_2, h_1\} = u_2\{h_2, h_1\} = -u_2 h_3 \\ \dot{h}_2 = u_1\{h_1, h_2\} = u_1 h_3 \\ \dot{h}_3 = u_1\{h_1, h_3\} + u_2\{h_2, h_3\} = u_2 h_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases}$$

В нормальном случае $\nu = -1$, поэтому $h_u^{-1}(p, q) = \sum\limits_i u_i h_i - \frac{1}{2}\sum\limits_i u_i^2$. Доказано, что
$h_u^{-1} \to \max$, когда $u_i = h_i(p, q)$. Тогда введём

$$h_u^{-1}(p, q) = \frac{1}{2}\sum_i h_i^2 =: H(p, q). \tag{4}$$

Гамильтонова система

В соответствии с этим система преобразуется

$$\begin{cases} \dot{h_1} = -h_2 h_3 \\ \dot{h_2} = h_1 h_3 \\ \dot{h_3} = h_2 h_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = h_1 \cos\theta \\ \dot{y} = h_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} = h_2 \end{cases} \tag{5}$$

Первые интегралы:

$$\Phi_1 = h_1^2 + h_2^2 = \mathrm{const}; \tag{6-а}$$

$$\Phi_2 = h_3^2 - h_2^2 = \mathrm{const}; \tag{6-б}$$

$$\Phi_3 = a = \mathrm{const}. \tag{6-в}$$

Доказательство интегрируемости по Лиувиллю

По теореме Лиувилля, чтобы система была интегрируема в квадратурах, необходимо выполнение следующих условий:

$$\{\Phi_1; \Phi_2\} = 0 \quad \{\Phi_1; \Phi_3\} = 0 \quad \{\Phi_2; \Phi_3\} = 0$$

$$\left| \frac{D\left(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\right)}{D\left(a, b, c\right)} \right| \neq 0$$

В данной системе все условия выполнены. Поэтому она является интегрируемой в квадратурах в соответствии с теоремой Лиувилля.

Решение системы

Рассмотрим вертикальную подсистему:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3 \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3 \\ \dot{h}_3 = h_2 h_1 \end{cases} \tag{7}$$

Следующие соотношения уже были получены ранее:

$$h_1^2 + h_2^2 = 1; \quad \begin{matrix} h_1 = \cos\alpha \\ h_2 = \sin\alpha \end{matrix} \Rightarrow \dot{h}_1 = -\sin\alpha \cdot \dot{\alpha} \Rightarrow h_3 = \dot{\alpha} \Rightarrow$$

$$\ddot{\alpha} = h_1 \cdot h_2; \quad \ddot{\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Пусть $\gamma = 2\alpha + \pi$. Тогда $\dot{\gamma} = 2\dot{\alpha}$; $\ddot{\gamma} = \sin 2\alpha = -\sin\gamma$. Мы получили известное уравнение маятника $\ddot{\gamma} + \sin\gamma = 0$.

Решение системы

Обозначим $m^2 := \dfrac{\dot{\gamma}_0^2 + 4\sin^2\dfrac{\gamma_0}{2}}{4}$. Тогда получим:

$$\dot{\gamma} = \pm 2\sqrt{m^2 - \sin^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Необходимо разделить два случая: А) $m^2 > 1$ и Б) $m^2 \leq 1$. Запишем решения для каждого из них.

Решение системы

А) $m^2 > 1$.

$$\begin{cases} h_1 = s_2 \mathrm{sn}\left(mt; \dfrac{1}{m}\right) \\ h_2 = -\mathrm{cn}\left(mt; \dfrac{1}{m}\right) \\ h_3 = s_2 m \cdot \mathrm{dn}\left(mt; \dfrac{1}{m}\right) \end{cases} \tag{8}$$

Б) $m^2 \leq 1$.

$$\begin{cases} h_1 = s_1 m \cdot \mathrm{sn}\left(t; m\right) \\ h_2 = -s_1 \mathrm{dn}\left(t; m\right) \\ h_3 = m \cdot \mathrm{cn}\left(t; m\right) \end{cases} \tag{9}$$

Здесь и далее $\mathrm{cn}, \mathrm{sn}, \mathrm{dn}$ - эллиптические функции Якоби.

Построение субримановых сфер

Ещё раз запишем гамильтонову систему:

$$\begin{cases} \dot{h_1} = -h_2 h_3 \\ \dot{h_2} = h_1 h_3 \\ \dot{h_3} = h_2 h_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = h_1 \cos\theta \\ \dot{y} = h_1 \sin\theta \\ \dot{\theta} = h_2 \end{cases}$$

Параметрические уравнения частей субримановых сфер получаются при интегрировании правой половины системы при подставлении в них результатов (9) и (8). Каждый из случаев (9) и (8) подразделяется на два: $s_1 = \pm 1$ и $s_2 = \pm 1$ соответственно. Поэтому субриманова сфера оказывается склеенной из 4-х частей.

Параметрические уравнения

А) Поверхности C_1 $(m^2 < 1)$:

$$\begin{cases} x_t = \dfrac{s_1}{k} \cdot \left[\mathrm{cn}\varphi(\mathrm{dn}\varphi - \mathrm{dn}\varphi_t) + \mathrm{sn}\varphi(t + \mathrm{E}(\varphi) - \mathrm{E}(\varphi_t))\right]; \\ y_t = \dfrac{1}{k} \cdot \left[\mathrm{sn}\varphi(\mathrm{dn}\varphi - \mathrm{dn}\varphi_t) - \mathrm{cn}\varphi(t + \mathrm{E}(\varphi) - \mathrm{E}(\varphi_t))\right]; \\ \theta_t = s_1 \cdot (\mathrm{am}\varphi - \mathrm{am}\varphi_t); \end{cases} \tag{10}$$

где $\varphi_t = \varphi + t$.

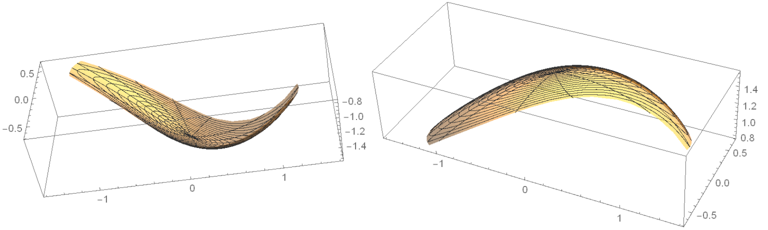


Рис. 2. Поверхности C_1.

Параметрические уравнения

Б) Поверхности C_2 $(m^2 > 1)$:

$$\begin{cases} x_t = s_2 \cdot k \cdot \left[\mathrm{dn}\psi(\mathrm{cn}\psi - \mathrm{cn}\psi_t) + \mathrm{sn}\psi \left(\dfrac{t}{k} + \mathrm{E}(\psi) - \mathrm{E}(\psi_t)\right)\right]; \\ y_t = s_2 \cdot \left[k^2\mathrm{sn}\psi(\mathrm{cn}\psi - \mathrm{cn}\psi_t) - \mathrm{dn}\psi \left(\dfrac{t}{k} + \mathrm{E}(\psi) - \mathrm{E}\right)\right]; \\ \cos\theta_t = k^2 \cdot \mathrm{sn}\psi\mathrm{sn}\psi_t + \mathrm{dn}\psi\mathrm{dn}\psi_t; \\ \sin\theta_t = k \cdot (\mathrm{sn}\psi\mathrm{dn}\psi_t - \mathrm{dn}\psi\mathrm{sn}\psi_t), \end{cases} \tag{11}$$

где $\psi = \dfrac{\varphi}{k}$; $\psi_t = \dfrac{\varphi_t}{k}$.

Построение субримановых сфер

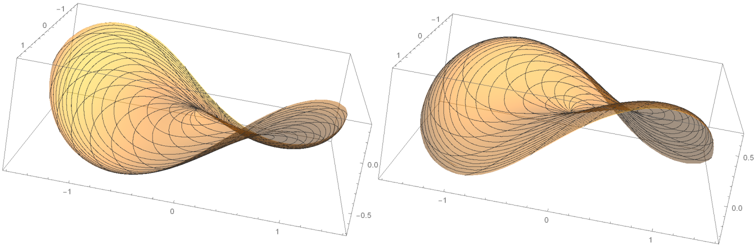
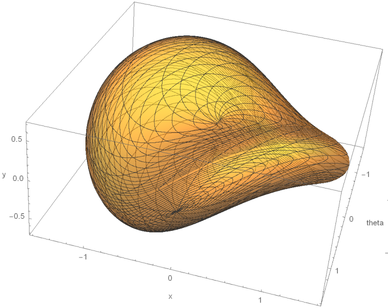
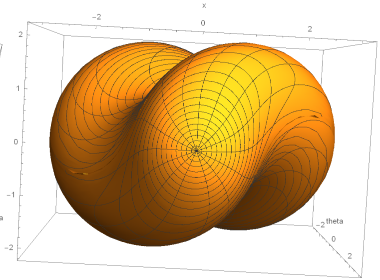


Рис. 3. Поверхности C_2.

Построение субримановых сфер

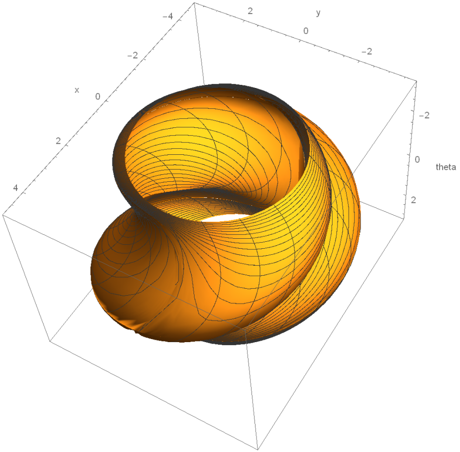
Рис. 4а-б. Субримановы сферы радиусов $\dfrac{\pi}{2}$ и π.





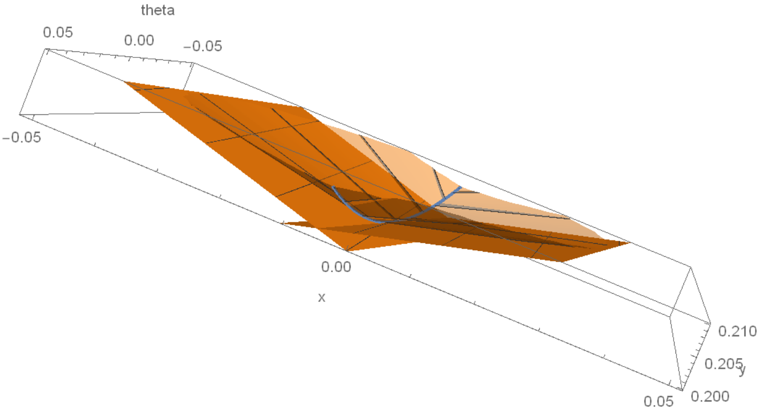
Построение субримановых сфер

Рис. 5. Субриманова сфера радиуса $\dfrac{3\pi}{2}$.



Построение субримановых сфер

Рис. 6. Касательные плоскости к СР сфере в точке на линии излома (сфера радиуса $\frac{\pi}{2}$).



Построение субримановых сфер

Рис. 7. Аналитическое выражение для производной $X_t'(k)$.

Out[192]=

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\,(-1+k^2)\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}}\Bigg(-4\,k^2\,\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{Sin}[a]^2-2\,k^4\,\mathrm{Cos}[a]^3\,\mathrm{Sin}[a]^2+2\,k^4\,\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{Sin}[a]^4-4\,\mathrm{EllipticE}[a,k^2]\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}+4\,k^2\,\mathrm{EllipticE}[a,k^2]\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}+4\,\mathrm{EllipticE}\left[\mathrm{JacobiAmplitude}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right],k^2\right]\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}-\\
&4\,k^2\,\mathrm{EllipticE}\left[\mathrm{JacobiAmplitude}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right],k^2\right]\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}+2\,\mathrm{EllipticF}[a,k^2]\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}-2\,k^2\,\mathrm{EllipticF}[a,k^2]\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}-\\
&2\,\mathrm{EllipticF}\left[\mathrm{JacobiAmplitude}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right],k^2\right]\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}+2\,k^2\,\mathrm{EllipticF}\left[\mathrm{JacobiAmplitude}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right],k^2\right]\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}+2\,k^2\,\mathrm{JacobiCD}[\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2]\,\mathrm{Sin}[a]^2\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}-\\
&2\,k^4\,\mathrm{JacobiCD}[\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2]\,\mathrm{Sin}[a]^2\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\mathrm{Sin}^2[a]+k^4\,\mathrm{Sin}[a]\,\mathrm{Sin}[2\,a]\,\mathrm{Sin}^2[a]-2\,k^2\,\mathrm{Cos}[a]^2\,\mathrm{EllipticE}\left[\mathrm{JacobiAmplitude}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right],k^2\right]\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}-\\
&2\,\mathrm{Cos}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}+2\,k^2\,\mathrm{Cos}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}-2\,k\,t\,\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{JacobiCD}[\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2]\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}-\\
&2\,k^2\,\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{EllipticE}[a,k^2]\,\mathrm{JacobiCD}[\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2]\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}+2\,k^2\,\mathrm{Cos}[a]^2\,\mathrm{JacobiSC}[\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2]\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}+k\,t\,\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{Sin}[2\,a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}+\\
&k^2\,\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{EllipticE}[a,k^2]\,\mathrm{Sin}[2\,a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}+k^2\,\mathrm{EllipticE}\left[\mathrm{JacobiAmplitude}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right],k^2\right]\mathrm{JacobiCD}[\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\mathrm{Sin}[2\,a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}+\\
&k^2\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\mathrm{Sin}[2\,a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}+\mathrm{JacobiCN}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right]\Bigg(2\,k^2\,\mathrm{JacobiSN}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right]\sqrt{1-k^2\,\mathrm{JacobiSN}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right]^2}\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}+\\
&\quad k^4\,\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{Sin}[a]\,\mathrm{Sin}[2\,a]+2\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}-2\,k^2\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}-2\,k^2\,\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{JacobiSC}[\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2]\,\mathrm{Sin}[a]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}\Bigg)+\\
&\mathrm{JacobiDN}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right]\Bigg(-2\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{JacobiSN}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right]^2}\,\mathrm{Sin}[a]\left(k^2\,\mathrm{Cos}[a]\,\mathrm{Sin}[a]-\mathrm{EllipticE}[a,k^2]\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}+\mathrm{EllipticE}\left[\mathrm{JacobiAmplitude}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right],k^2\right]\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\right)-\\
&\quad 2\,k^2\,\mathrm{JacobiCD}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right]\mathrm{JacobiSN}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right]^2\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}[a]^2}\,\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}+\\
&\quad \mathrm{JacobiSN}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right]\left(-\sqrt{4-2\,k^2+2\,k^2\,\mathrm{Cos}[2\,a]}\,\mathrm{EllipticE}[a,k^2]+\sqrt{4-2\,k^2+2\,k^2\,\mathrm{Cos}[2\,a]}\,\mathrm{EllipticE}\left[\mathrm{JacobiAmplitude}\left[\frac{t}{k}+\mathrm{EllipticF}[a,k^2],k^2\right],k^2\right]+k^2\,\mathrm{Sin}[2\,a]\right)\sqrt{1-k^2\,\mathrm{Sin}^2[a]}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

Научная новизна

Данная задача преимущественно является учебной, поэтому принципиально новых научных результатов достигнуто не было. Однако стоит отметить, что интегрируемость гамильтоновой системы в квадратурах, её решение в эллиптических функциях Якоби и построение субримановых сфер изложено в данной работе в доступной форме, что может помочь изучающим геометрическую теорию управления.

Планы

Основным направлением дальнейшего развития работы является изучение субримановых сфер (в том числе построение явной стратификации Уитни субримановой сферы на группе $\mathrm{SE}(2)$), анализ их особенностей, а также применение полученных результатов для решения задач оптимального управления.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!