Субриманова задача Картана

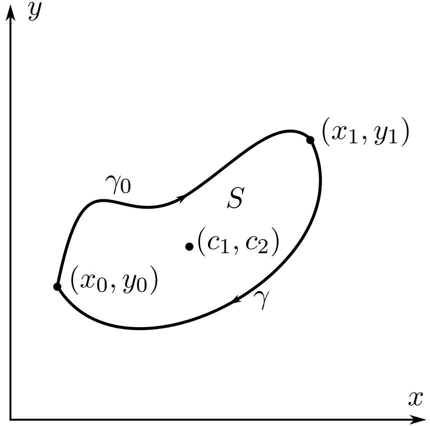
Исполнитель: Сбоев Д.А.
Руководитель: Сачков Ю.Л.

«Современные методы теории информации, оптимизации и управления»

Направление «Геометрическая теория управления»

Университет «Сириус», Сочи-2020

Постановка задачи



Постановка задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}y \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \left.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \vec{0}, \quad \left.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix}\right|_{t=t_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad \mathscr{J} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_1} \left(u_1^2 + u_2^2\right)\, dt \to \min .$$

Мотивировка исследования

Группа Картана является простейшей нильпотентной свободной группой глубины 3.
Субриманова задача на данной группе – нильпотентная аппроксимация таких задач как

- качение твердых тел без прокручивания и проскальзывания,
- движение мобильного робота с двумя прицепами,
- движение электрического заряда в магнитном поле.

История задачи

Субриманова задача на группе Картана возникла как обобщение задачи Дидоны с заданным центром масс.
На данный момент ведутся активные исследования в данном направлении.

- Ю.Л. Сачков, Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, 2003,
- Ю.Л. Сачков, Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны, 2004,
- Ю.Л. Сачков, Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, 2005,
- Ю.Л. Сачков, Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, 2005,

История задачи

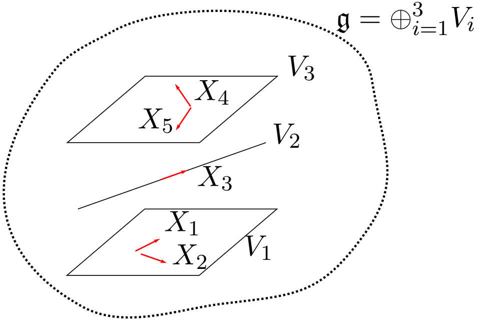
- Ю.Л. Сачков, Сопряженные точки в обобщенной задаче Дидоны, 2020,
- Yu.L. Sachkov, Conjugate time in sub-Riemannian problem on Cartan group, 2020
- V. Berestovskii, I. Zubareva, Extremals of a left-invariant sub-Finsler quasimetric on the Cartan group, 2020
- A. Ardentov, E. Le Donne, Yu. Sachkov, A sub-Fincler problem on the Cartan group, 2018,
- A. Ardentov, E. Le Donne, Yu. Sachkov, A sub-Fincler geodesics on the Cartan group, 2018.

Полученные результаты

Управляемость

Доказана глобальная управляемость системы.

Стратификация и вектор роста распределения



Полученные результаты

Анормальные траектории и анормальное множество

Анормальные траектории параметрически задаются следующим образом:

$$\begin{cases} x = t\cos\theta, \\ y = t\sin\theta, \\ z = 0, \\ v = \frac{t^3}{6}\sin\theta, \\ w = -\frac{t^3}{6}\cos\theta. \end{cases}$$

При этом анормальное множество является аналитическим 2-мерным многообразием в $\mathbb{R}^5$. Неявное уравнения анормального множества имеет вид

$$\begin{cases} z = 0, \\ 6v - y(x^2+y^2) = 0, \\ 6w + x(x^2+y^2) = 0. \end{cases}$$

Полученные результаты

Анормальные траектории и анормальные множества

Было доказано, что анормальные траектории не являются строго анормальными.

Проекции нормальных траекторий на (x, y)

Было доказано, что проекции нормальных траекторий удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = C_1 \cos\theta, \\ y' = C_1 \sin\theta, \\ \theta'' = C_1 h_4 \cos\theta + C_1 h_5 \sin\theta, \\ h_4' = 0,\ h_5' = 0. \end{cases}$$

Решениями такой системы, как известно, являются эластики Эйлера.

Полученные результаты

Восстановление групповой структуры

По алгебре Ли была восстановлена групповая операция такая, что поля X_i являются левоинвариантными.
Для групп Карно на $\mathbb{R}^n$ известно, что

$$x \circ y = \mathrm{exp}\big(\mathrm{Log}(y)\big)(x).$$

Исходя из этого, мы получаем следующую операцию $\circ$ умножения в группе:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ x_4 + y_4 + \frac{1}{2}\left(y_1 x_1 + x_1^2 + y_2 x_2 + x_2^2\right) y_2 + x_1 y_3 \\ x_5 + y_5 - \frac{1}{2}(y_1 x_1 + x_1^2 + y_2 x_2 + x_2^2) y_1 + x_2 y_3 \end{pmatrix}.$$

Полученные результаты

Численные результаты

Были изучены функции p_1^z, p_1^V (Ю.Л. Сачков, Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, 2006) и написаны функции для приближенного вычисления.

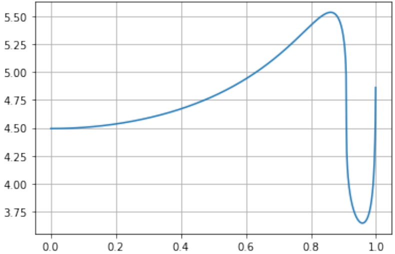


Рис.: График $k \to p_1^z(k)$

Полученные результаты

Численные результаты

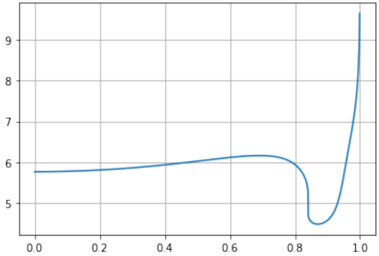


Рис.: График $k \to p_1^V(k)$

Полученные результаты

Численные результаты

Корни уравнения $p_1^V = p_1^z$ были численно вычислены и получены следующие результаты:

$$k_1 = 0.835373469303704, \quad k_2 = 0.9089085567811611.$$

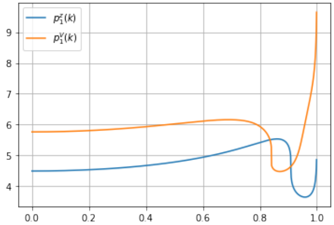


Рис.: График $k \to p_1^z, p_1^V$

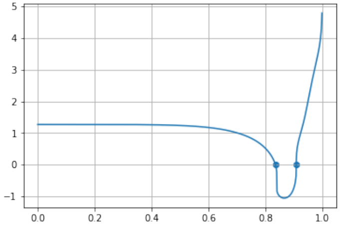


Рис.: Нули функции $k \to p_1^V - p_1^z$

Полученные результаты

Численные результаты

Было вычислено время разреза:

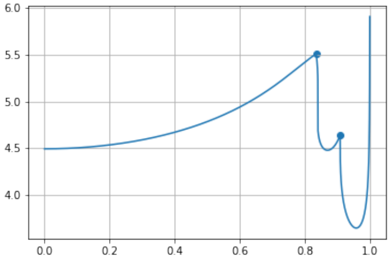


Рис.: График $k \to \min\left\{p_1^V(k), p_1^z(k)\right\}$ с точками k_1, k_2

Планы

- Построение проекций субримановой сферы.

Спасибо за внимание!