Исследование задачи Ридса-Шеппа методами геометрической теории управления

Исполнитель: Кузьмин С.С.
Руководитель: Ардентов А.А.

«Современные методы теории информации, оптимизации и управления»

Направление «Геометрическая теория управления»

Университет «Сириус», Сочи-2020

Постановка задачи

Проект посвящён рассмотрению задачи быстродействия ($T \to \min$) на группе движения плоскости:

$$\mathrm{SE}(2) = \{q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta\}$$

со следующей управляемой системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases}$$

и краевыми условиями:

$$\begin{cases} q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \theta_0), \\ q(T) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1). \end{cases}$$

Дополнительно накладываются ограничения на управление $u = (u_1, u_2)$:

$$|u_1| = 1, \qquad |u_2| \leq \frac{1}{R}, \qquad R > 0.$$

Мотивировка исследования

Построение оптимальных траекторий и соответствующих им управлений для задачи Ридса-Шеппа хорошо изучено и является решённой задачей. Однако, интерес вызывает изучение данной задачи методами геометрической задачи управления, в частности, с использованием принципа максимума Понтрягина и исследования получаемой из него гамильтоной системы и фазового портрета.

История задачи

- В 1889 году Марков рассмотрел родственную задачу, в которой возможно всего два варианта: дуга окружности и отрезок прямой либо две дуги окружностей. А. А. Марков. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах, *Сообщ. Харьков. матем. общ.* 2-я сер., 1:2 (1889), с. 250–276.
- В 1957 году Дубинс рассмотрел аналогичную модель, в которой фиксирован конечный угол. L. E. Dubins. *On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents, American Journal of Math.*, 79:3 (1957), pp. 497–516.
- Первое решение этой задачи получено в работе J. A. Reeds III, L. A. Shepp. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards, *Pacific J. Math.*, 145:2 (1990), pp. 367–393. Оптимальная траектория может состоять из 48 вариантов конкатенации дуг окружностей и отрезков прямых линий.
- В работе H. J. Sussmann, G. Tang. Shortest paths for the Reeds-Shepp car: a worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control, Report SYCON-91-10, *SYCON*, 1991, 72 pp. показано, что достаточно рассмотреть только 46 вариантов.

Полученные результаты

- Показана глобальная управляемость управляемой системы
- Исследован фазовый портрет вертикальной подсистемы гамильтоновой системы, получаемой из принципа максимума Понтрягина
- Найдены экстремальные траектории с помощью фазового портрета
- Изучены дискретные и непрерывные симметрии задачи
- Условие задачи редуцировано по непрерывным симметриям

Исследование глобальной управляемости

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2,$$

$$X_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Под *управляемой системой* $\mathcal{F}$ на многообразии M будем понимать любое множество векторных полей $\mathcal{F} \subset \mathrm{Vec}(M)$:

$$\mathcal{F} = \{u_1 X_1 + u_2 X_2\}.$$

Исследование глобальной управляемости

Теорема (Рашевский-Чжоу)

Пусть $\mathcal{F} \subset \mathrm{Vec}(M)$*, многообразие* M *связно, и*

$$\mathrm{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q(M), \qquad q \in M.$$

Тогда $\mathcal{O}_q = M$ *для любой* $q \in M$*.*

Система $\mathcal{F} \subset \mathrm{Vec}(M)$, удовлетворяющая этому свойству, называется *вполне неголономной* (*системой полного ранга*).

Следствие (Ранговое условие управляемости)

Если многообразме M *связно, а система* $\mathcal{F} \subset \mathrm{Vec}(M)$ *симметрична и вполне неголономна, то она управляема на* M*.*

Исследование глобальной управляемости

$$\mathrm{Lie}_q(X_1, X_2) = \mathrm{span}(X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q), [X_1, [X_1, X_2]](q), \dots).$$

$$X_1(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3(q) = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(X_1(q), X_2(q), X_3(q)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0.$$

$X_1(q)$, $X_2(q)$ и $X_3(q)$ - линейно-независимые векторы $\Rightarrow \mathrm{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_qM$.

Система симметрична $\mathcal{F} = -\mathcal{F}$, следовательно, имеет место глобальная управляемость.

Принцип максимума Понтрягина

$$H(p,q,u) = \langle p, u_1X_1(q) + u_2X_2(q)\rangle = u_1(p_1\cos\theta + p_2\sin\theta) + u_2p_3,$$

$$\begin{cases} \dot p_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dot p_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ \dot p_3 = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = u_1(p_1\sin\theta - p_2\cos\theta). \end{cases}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, для экстремальных траекторий управление $u = (u_1, u_2)$ необходимо выбрать таким, чтобы:

$$\max_{u\in U} H(p(t), \bar q(t), u(t)) = H(p(t), \bar q(t), \bar u(t)),$$

где $\bar u(t)$ - экстремальное управление, а $\bar q(t)$ - закон движения по экстремальной траектории.

Экстремальное управление

Траектории будут экстремальными при следующем выборе управлений (u_1, u_2):

$$\begin{cases} u_1(t) = \operatorname{sgn}_1(p_1(t)\cos\theta(t) + p_2(t)\sin\theta(t)), \\ u_2(t) = \dfrac{1}{R}\operatorname{sgn}_2(p_3(t)), \end{cases}$$

где функции $\operatorname{sgn}_1(x)$ и $\operatorname{sgn}_2(x)$ определяются следующим образом:

$$\operatorname{sgn}_1(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ \{-1, 1\}, & x = 0. \end{cases} \qquad \operatorname{sgn}_2(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ [-1, 1], & x = 0. \end{cases}$$

Фазовый портрет

Введём переменную $\theta' = \theta - \bar{\theta}$, где $\bar{\theta}$ определяется из условия $p_1 \sin\theta - p_2 \cos\theta = 0$, то есть $\bar{\theta} = \operatorname{arctg} \dfrac{p_2}{p_1}$.

$$\begin{cases} \dot{\theta}' = u_2, \\ \dot{p}_3 = u_1 \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \sin\theta' = u_1 p \sin\theta', \\ u_1 = \operatorname{sgn}_1(\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \cos\theta') = \operatorname{sgn}_1(p \cos\theta'), \\ u_2 = \dfrac{1}{R} \operatorname{sgn}_2(p_3), \end{cases}$$

где $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$.

Фазовый портрет

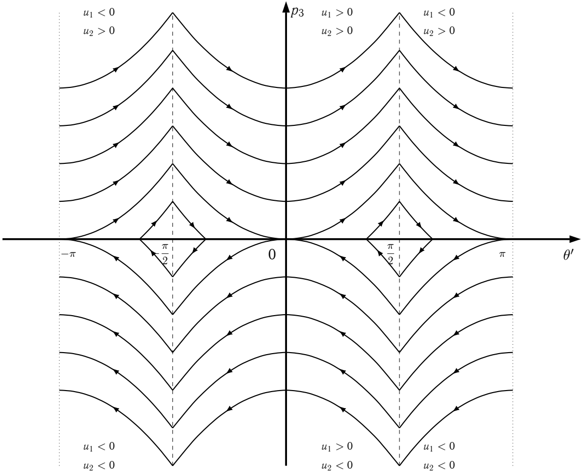

Рисунок 1: Фазовый портрет вертикальной подсистемы гамильтоновой системы на плоскости (θ', p_3) для случая $p \neq 0$.

Экстремальные траектории

1). Начальная точка лежит в области
$\{(\theta', p_3) | \theta' \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), |p_3| < pR(1 - \cos\theta')\}$:

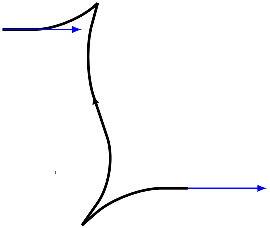

Рисунок 2: Экстремальная траектория на полном периоде $T = 4\varphi R$ для случая *1)*.

Траектория состоит из одинаковых кусочков дуг окружностей радиуса R. Период движения равен $T = 4\varphi R$, при этом происходят смещения координат $\Delta x = -4R(1 - \cos\varphi)\sin\varphi$ и $\Delta y = 4R(1 - \cos\varphi)\cos\varphi$.

Экстремальные траектории

2). Начальная точка лежит на кривой
$\{(\theta', p_3) | \theta' \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), |p_3| = pR(1 - \cos\theta')\}$:

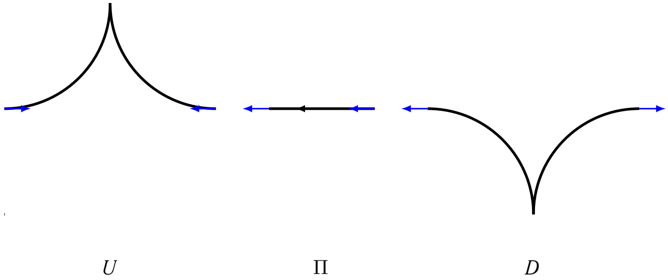

Рисунок 3: Составные элементы U, Π, D экстремальных траектории для случая *2)*.

Экстремальные траектории

3). Начальная точка лежит в области
$\{(\theta', p_3) | \theta' \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), |p_3| > pR(1 - \cos\theta')\}$:

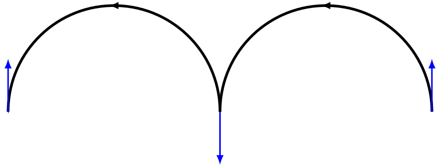

Рисунок 4: Экстремальная траектория для случая *3)*.

4). Также нужно рассмотреть отдельно случай, когда $p_1 = p_2 = p = 0$.

Дискретные симметрии задачи

- ε_1: Отражение относительно оси p_3 $\circ$ Инверсия времени: $(\theta', p_3, t) \longrightarrow (-\theta', p_3, -t)$.
- ε_2: Отражение относительно оси θ' $\circ$ Инверсия времени: $(\theta', p_3, t) \longrightarrow (\theta', -p_3, -t)$.
- ε_3: Отражение относительно оси $\theta' = \dfrac{\pi}{2}$ $\circ$ Инверсия времени: $\left(\theta' - \dfrac{\pi}{2}, p_3, t\right) \longrightarrow \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta', p_3, -t\right)$.
- ε_4: Инверсия относительно точки $(0,0)$: $(\theta', p_3, t) \longrightarrow (-\theta', -p_3, t)$.
- ε_5: Инверсия относительно точки $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$: $\left(\theta' - \dfrac{\pi}{2}, p_3, t\right) \longrightarrow \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta', -p_3, t\right)$.
- ε_6: Отражение относительно оси θ' $\circ$ Инверсия времени $\circ$ Параллельный перенос по θ' на $-\pi$: $(\theta', p_3, t) \longrightarrow (\theta' - \pi, -p_3, -t)$.
- ε_7: Параллельный перенос по θ' на $-\pi$: $(\theta', p_3, t) \longrightarrow (\theta' - \pi, p_3, t)$.

Дискретные симметрии задачи

Пусть $\varepsilon_0 = \mathrm{Id}$. Рассмотрим множество преобразований $G = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7\}$. Покажем, что $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j$ также принадлежит множеству G. Закон композиции преобразований из G в таблицу с учётом 2π-периодичности фазового портрета и экстремальных управлений.

ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7
ε_1	ε_0	ε_4	ε_7	ε_2	ε_6	ε_5	ε_3
ε_2	ε_4	ε_0	ε_5	ε_1	ε_3	ε_7	ε_6
ε_3	ε_7	ε_5	ε_0	ε_6	ε_2	ε_4	ε_1
ε_4	ε_2	ε_1	ε_6	ε_0	ε_7	ε_3	ε_5
ε_5	ε_6	ε_3	ε_2	ε_7	ε_0	ε_1	ε_4
ε_6	ε_5	ε_7	ε_4	ε_3	ε_1	ε_0	ε_2
ε_7	ε_3	ε_6	ε_1	ε_5	ε_4	ε_2	ε_0

Итак, множество G замкнуто относительно композиции преобразований.

Непрерывные симметрии задачи

1). Параллельный перенос системы координат на вектор $\Delta\vec{r} = (a, b)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2). Поворот вокруг начала системы координат на угол φ *против часовой стрелки*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \theta' = \theta - \varphi.$$

3). Изменение пространственного и временного масштаба:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}, \;\; u_1'(t') = u_1(t), \;\; u_2'(t') = \frac{1}{\mu} u_2(t).$$

Редуцирование условий задачи

Используя непрерывные симметрии можно уменьшить число независимых параметров с 7 $(x_0, y_0, \theta_0, x_1, y_1, \theta_1, R)$ до 3: (x_1, y_1, θ_1).

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{R}(x - x_0)\cos\theta_0 + \dfrac{1}{R}(y - y_0)\sin\theta_0, \\ y' = -\dfrac{1}{R}(x - x_0)\sin\theta_0 + \dfrac{1}{R}(y - y_0)\cos\theta_0, \\ \theta' = \theta - \theta_0, \\ t' = \dfrac{1}{R}t. \end{cases}$$

Редуцирование условий задачи

После редуцирования задача переписывается таким образом:

$$\begin{cases} \dot{x}' = u_1' \cos\theta, \\ \dot{y}' = u_1' \sin\theta, \\ \dot{\theta}' = u_2', \\ q'(0) = q_0' = (0,0,0), \\ q'(T') = q_1' = (x_1', y_1', \theta_1'), \\ |u_1'| = 1, \qquad |u_2'| \le 1, \\ T' \longrightarrow \min. \end{cases}$$

Редуцирование условий задачи

Чтобы теперь получить решение исходной задачи, нужно применить к решению редуцированной задачи обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = Rx'\cos\theta_0 - Ry'\sin\theta_0 + x_0, \\ y = Rx'\sin\theta_0 + Ry'\cos\theta_0 + y_0, \\ \theta = \theta' + \theta_0, \\ t = Rt'. \end{cases}$$

Оптимальное управление для исходной постановки задачи получается из постановки редуцированной задачи следующим образом:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_1'(t'), \\ u_2(t) = \dfrac{1}{R}u_2'(t'). \end{cases}$$

Научная новизна

Оптимальные траектории и оптимальное управление для задачи Ридса-Шеппа известно. Новизна нашего исследования заключается в новом подходе к отысканию экстремальных траекторий на основе примененеия принципа максимума Понтрягина и исследования фазового портрета вертикальной подсистемы гамильтоновой системы.

Планы

- Исследовать найденные траектории на оптимальность
- Исследовать множество достижимости за определённое время
- Описать множество оптимальных управлений
- Описать оптимальный синтез задачи

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!