

Субриманова задача для колесного робота с прицепом

Исполнитель: Артемова Е.М.

Руководитель: Ардентов А.А.

«Современные методы теории информации, оптимизации и управления»

Направление «Геометрическая теория управления»

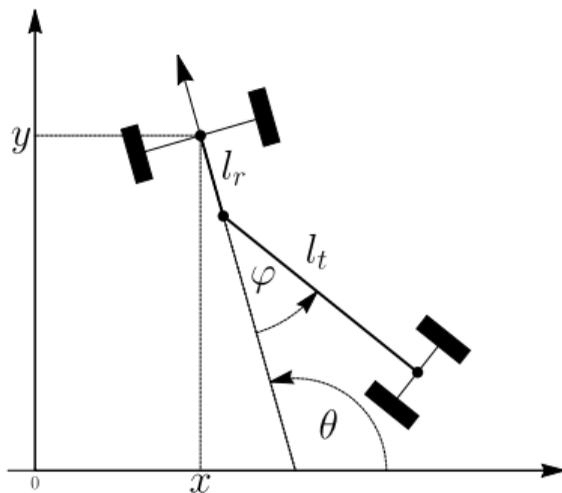
Университет «Сириус», Сочи-2020

Постановка задачи

Положение робота и прицепа задает $q = (x, y, \vartheta, \varphi) \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\vartheta^1 \times S_\varphi^1$.

$$\int_0^T \sqrt{v_1^2 + \omega^2} dt \rightarrow \min,$$

где v_1, ω — линейная и угловая скорости.



l_r и l_t — расстояние от центра робота и прицепа до точки связи.

Актуальность исследования

Одной из проблем современной мобильной робототехники является нахождение таких управлений, чтобы реализовалась оптимальная траектория движения робота. Задача о нахождении оптимальных траектории для мобильного робота с прицепом в настоящее время остается не исследованной.

История задачи

Трёхмерная субриманова задача на группе движения плоскости $SE(2)$ была полностью решена Ю.Л. Сачковым^{1 2 3}.

Четырёхмерная субриманова задача была решена А.А. Ардентовым и Ю.Л. Сачковым в работах 2011⁴ – 2018 года.

Задача об оптимальном управлении роботом с прицепом исследовалась на основе нильпотентной аппроксимации в работах А.А. Ардентова, А.П. Маштакова^{5 6}.

¹Maxwell strata in sub-riemannian problem on the group of motions of a plane, 2009

²Conjugate and cut time in the sub-riemannian problem on the group of motions of a plane, 2009

³Cut locus and optimal synthesis in the sub-riemannian problem on the group of motions of a plane, 2010

⁴Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля, 2011

⁵Управление мобильным роботом с прицепом на основе нильпотентной аппроксимации, 2020

⁶Controlling of a Mobile Robot with a Trailer and Its Nilpotent Approximation, 2016

Полученные результаты: вывод управляемой системы

Движение центра масс робота описывается уравнениями

$$\dot{x} = v_1 \cos \vartheta + v_2 \sin \vartheta$$

$$\dot{y} = v_1 \sin \vartheta - v_2 \cos \vartheta$$

$$\dot{\vartheta} = \omega.$$

Здесь (v_1, v_2) — компоненты линейной скорости робота, ω — угловая скорость робота. Неголономные ограничения:

$$v_2 = 0, \quad v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi + \omega l_r \cos \varphi + l_t(\dot{\varphi} + \omega) = 0.$$

Система уравнений с учетом ограничений

$$\dot{x} = v_1 \cos \vartheta, \quad \dot{y} = v_1 \sin \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = \omega$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{l_t}(v_1 \sin \varphi + \omega(l_t + l_r \cos \varphi)).$$

Полученные результаты: постановка задачи оптимального управления

Управляемая система

$$\dot{q} = v_1 X_1 + \omega X_2,$$

где X_1, X_2 — векторные поля вида

$$X_1 = \left(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0, -\frac{\sin \varphi}{l_t} \right)^T, \quad X_2 = \left(0, 0, 1, -\frac{l_r \cos \varphi}{l_t} - 1 \right)^T.$$

Граничные условия

$$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \vartheta_0, \varphi_0), \quad q(T) = q_T = (x_T, y_T, \vartheta_T, \varphi_T).$$

Функционал качества

$$I = \int_0^T \sqrt{v_1^2 + \omega^2} dt \rightarrow \min.$$

Полученные результаты: непрерывные симметрии

- ▶ группа движения плоскости:

$$(x_0, y_0, \vartheta_0, \varphi_0) \mapsto (0, 0, 0, \varphi_0)$$

- ▶ растяжения плоскости:

$$(x, y, \vartheta, \varphi, v_1, \omega, l_t, l_r) \mapsto (\mu x, \mu y, \vartheta, \varphi, \mu v_1, \omega, \mu l_t, \mu l_r)$$

при $\mu = \frac{1}{l_t}$ получаем

$$(x, y, \vartheta, \varphi, v_1, \omega, l_t, l_r) \mapsto \left(\frac{x}{l_t}, \frac{y}{l_t}, \vartheta, \varphi, \frac{v_1}{l_t}, \omega, 1, \frac{l_r}{l_t} \right)$$

Полученные результаты: управляемость

Коммутаторы векторных полей X_1 и X_2 :

$$X_3 = [X_1, X_2] = \left(\sin \vartheta, -\cos \vartheta, 0, \frac{-l_r - l_t \cos \varphi}{l_t^2} \right)^T,$$

$$X_4 = [X_1, X_3] = \left(0, 0, 0, \frac{-l_t - l_r \cos \varphi}{l_t^3} \right)^T.$$

Определитель $\det(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{-l_t - l_r \cos \varphi}{l_t^3} \neq 0$ при условии

$$\cos \varphi \neq -\frac{l_t}{l_r}.$$

Далее будем полагать параметры l_t и l_r такими что

$$l_t > l_r.$$

Полученные результаты: принцип максимума Понтрягина

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что задача минимизации субримановой длины

$$l = \int_0^T \sqrt{v_1^2 + \omega^2} dt \rightarrow \min .$$

равносильна задаче минимизации действия

$$\int_0^T \frac{v_1^2 + \omega^2}{2} dt \rightarrow \min$$

Применим принцип максимума Понтрягина. Введем вектор сопряженных переменных $p = (\nu, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ и функцию Гамильтона вида

$$H = \frac{\nu}{2}(v_1^2 + \omega^2) + \psi_1 v_1 \cos \vartheta + \psi_2 v_1 \sin \vartheta + \psi_3 \omega - \frac{\psi_4}{l_t}(v_1 \sin \varphi + \omega(l_t + l_r \cos \varphi)).$$

Полученные результаты: гамильтонова система ПМП

Уравнения для сопряженных переменных

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

$$\dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \psi_1 v_1 \sin \vartheta - \psi_2 v_1 \cos \vartheta,$$

$$\dot{\psi}_4 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\psi_4}{I_t} (v_1 \cos \varphi - l_r \omega \sin \varphi).$$

Из первых двух уравнений следует, что $\psi_1 = C_1 = \cos \alpha = \text{const}$ и $\psi_2 = C_2 = \sin \alpha = \text{const}$.

Полученные результаты: аномальный случай ПМП

Исследуем аномальный случай $\nu = 0$. Из условия максимума

$$\max_{v_1, \omega} H = \mathcal{H}$$

следует

$$\psi_1 \cos \vartheta + \psi_2 \sin \vartheta - \frac{\psi_4}{l_t} \sin \varphi = 0,$$

$$\psi_3 - \frac{\psi_4}{l_t} (l_t + l_r \cos \varphi) = 0.$$

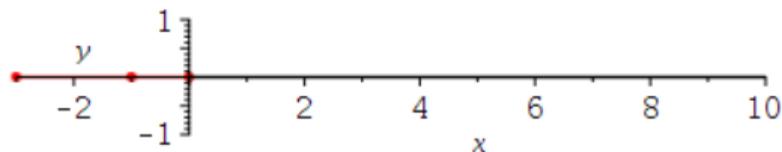
Далее рассматриваем нетривиальные управления $v_1^2 + \omega^2 = 1$.

Полученные результаты: аномальный случай ПМП

1. $\sin \varphi \equiv 0$, следовательно $v_1 = \pm 1$, $\omega = 0$ и $\varphi = \pm\pi$, тогда экстремальная траектория

$$x = \pm t, \quad y = y_0 = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 = 0, \quad \varphi = \pm\pi n.$$

$$t = 0.$$



Полученные результаты: аномальный случай ПМП

1. $\sin \varphi \equiv 0$, следовательно $v_1 = \pm 1$, $\omega = 0$ и $\varphi = \pm\pi$, тогда экстремальная траектория

$$x = \pm t, \quad y = y_0 = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 = 0, \quad \varphi = \pm\pi n.$$

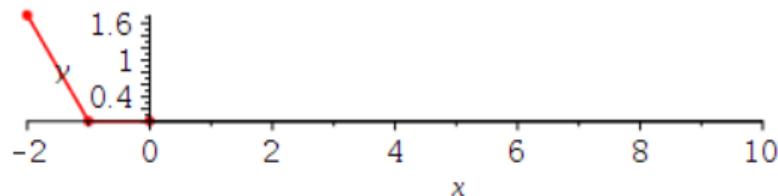
Полученные результаты: аномальный случай ПМП

2. $\sin(\alpha - \vartheta) \equiv 0$, следовательно $v_1 = \pm 1$, $\omega = 0$ и $\alpha - \vartheta = \pm\pi$, тогда экстремальная траектория

$$x = \pm t, \quad y = y_0 = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 = 0, \quad \varphi = \arctan \left(2e^{\frac{C_\varphi+t}{l_t}} \left(e^{\frac{2(C_\varphi+t)}{l_t}} - 1 \right)^{-1} \right),$$

где C_φ определяется из условия $\varphi(0) = \varphi_0$

$$t = 0.$$



Полученные результаты: аномальный случай ПМП

2. $\sin(\alpha - \vartheta) \equiv 0$, следовательно $v_1 = \pm 1$, $\omega = 0$ и $\alpha - \vartheta = \pm\pi$, тогда экстремальная траектория

$$x = \pm t, \quad y = y_0 = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 = 0, \quad \varphi = \arctan \left(2e^{\frac{C_\varphi+t}{l_t}} \left(e^{\frac{2(C_\varphi+t)}{l_t}} - 1 \right)^{-1} \right),$$

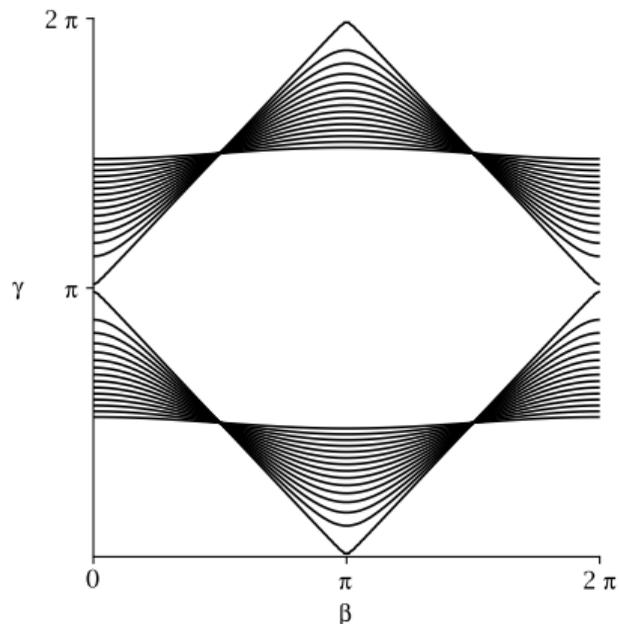
где C_φ определяется из условия $\varphi(0) = \varphi_0$

Полученные результаты: аномальный случай ПМП

3. $\sin(\alpha - \vartheta) \sin \varphi \neq 0$ и выполняется соотношение

$$l_t \cos \gamma + l_r \cos \beta = 0, \quad \beta = \alpha - \vartheta, \quad \gamma = \beta - \varphi.$$

Возможные траектории на плоскости (β, γ) при $l_t = 1, l_r \in (0, 1)$.



Полученные результаты: аномальный случай ПМП

Продифференцировав $l_t \cos \gamma + l_r \cos \beta = 0$ получим выражения для скоростей

$$v_1 = \frac{l_r \cos \gamma}{\sqrt{l_r^2 \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}}, \quad \omega = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{l_r^2 \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}},$$

где $\sqrt{l_r^2 \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma} \neq 0$. Выразив из выражения $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$, перейдем к уравнениям

$$\dot{\beta} = -\sqrt{\frac{l_t^2 - l_r^2 \cos^2 \beta}{l_t^2 + l_r^2(l_r^2 - 1) \cos^2 \beta}},$$
$$\frac{dx}{d\beta} = \frac{l_r^2 \cos \beta \cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{l_t^2 - l_r^2 \cos^2 \beta}}, \quad \frac{dy}{d\beta} = \frac{l_r^2 \cos \beta \sin(\alpha - \beta)}{\sqrt{l_t^2 - l_r^2 \cos^2 \beta}}$$

Полученные результаты: аномальный случай ПМП

Решение для $x(\beta)$ и $y(\beta)$ может быть записано явно в эллиптических функциях

$$x(\beta) = -\frac{1}{2(l_r^2 - 1)(2l_t^2 + 2l_r^2(l_r^2 - 1) \cos^2 \beta)} (2k_0 \cos \alpha (E(\beta, k_1)(l_t^2 + (l_r^2 - 1)l_r^2) - l_t^2 F(\beta, k_1)) + \sqrt{2} \sin \alpha (l_r^2(1 - l_r^2) \cos 2\alpha + ((l_r^2 - 1)l_r^2 + 2l_t^2)(k_0 - 1))) + x_0(\beta_0),$$

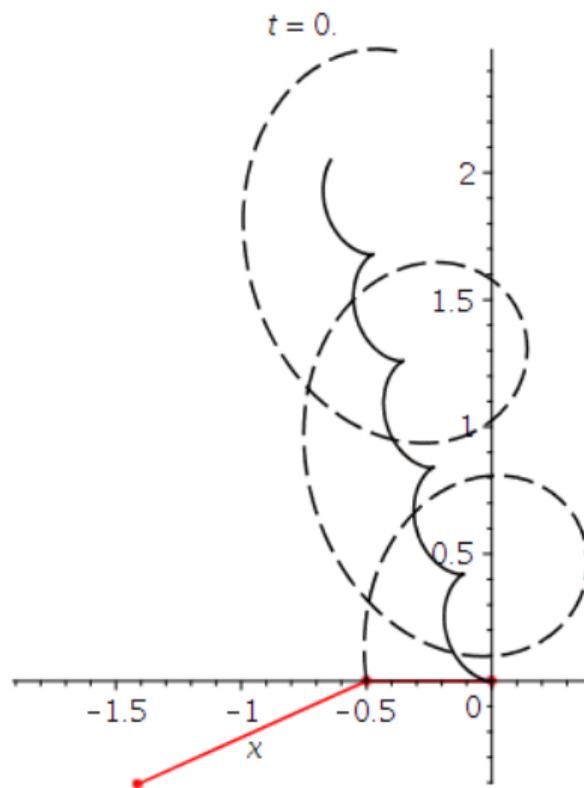
$$y(\beta) = -\frac{1}{2(l_r^2 - 1)(2l_t^2 + 2l_r^2(l_r^2 - 1) \cos^2 \beta)} (2k_0 \sin \alpha (E(\beta, k_1)(l_t^2 + (l_r^2 - 1)l_r^2) - l_t^2 F(\beta, k_1)) - \sqrt{2} \cos \alpha (l_r^2(1 - l_r^2) \cos 2\alpha + ((l_r^2 - 1)l_r^2 + 2l_t^2)(k_0 - 1))) + y_0(\beta_0),$$

где

$$k_0 = \sqrt{\frac{2l_t^2 + 2l_r^2(l_r^2 - 1) \cos^2 \beta}{(l_r^2 - 1)l_r^2 + l_t^2}}, \quad k_1 = \frac{(l_r^2 - 1)l_r^2}{(l_r^2 - 1)l_r^2 + l_t^2} < 0.$$

Полученные результаты: аномальный случай ПМП

Пример траектории при $l_t = 1$, $l_r = \frac{1}{2}$



Полученные результаты: аномальный случай ПМП

Пример траектории при $l_t = 1$, $l_r = \frac{1}{2}$

Полученные результаты: аномальный случай ПМП

Случай $l_r = 0$, тогда аномальная траектория

$$x = x_0 = 0, \quad y = y_0 = 0, \quad \vartheta = \pm t, \quad \varphi = \mp t.$$

Полученные результаты: нормальный случай ПМП

Рассмотрим $\nu = -1$. Перейдем к переменным $h_i = \langle (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), X_i \rangle$ ($i = 1, \dots, 4$). Вертикальная подсистема гамильтоновой системы

$$\dot{h}_1 = -\omega h_3$$

$$\dot{h}_2 = \nu_1 h_3$$

$$\dot{h}_3 = \frac{l_r(h_1\omega + h_4\nu_1) \cos \varphi - h_4\omega l_r^2 \sin \varphi + l_t(h_1\omega + h_4\nu_1)}{l_t + l_r \cos \varphi}$$

$$\dot{h}_4 = \frac{h_4\nu_1(l_r + l_t \cos \varphi)}{l_t(l_t + l_r \cos \varphi)}$$

с функцией Гамильтона

$$H = \frac{\nu}{2}(\nu_1^2 + \omega^2) + \nu_1 h_1 + \omega h_2.$$

Из условия максимума на H следует

$$\nu_1 = h_1, \quad \omega = h_2.$$

Полученные результаты: нормальный случай ПМП

Рассмотрим частный случай $l_r = 0$, тогда полная гамильтонова система запишутся в виде (в силу симметрии положим $l_t = 1$)

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -h_2 h_3, & \dot{h}_2 &= h_1 h_3, \\ \dot{h}_3 &= h_1 h_2 + h_4 h_1, & \dot{h}_4 &= h_4 h_1 \cos \varphi, \\ \dot{x} &= h_1 \cos \vartheta, & \dot{y} &= h_1 \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= h_2, & \dot{\varphi} &= -(h_1 \sin \varphi + h_2). \end{aligned}$$

Полученные результаты: нормальный случай ПМП

Рассматриваемая система помимо гамильтониана допускает еще два интеграла

$$(h_3 - h_4 \cos \varphi) \sin \vartheta + \cos \vartheta (\cos \alpha - h_4 \sin \varphi) = C_1 = \text{const}$$

$$(h_4 \cos \varphi - h_3) \cos \vartheta - \sin \vartheta (h_4 \sin \varphi - \cos \alpha) = C_2 = \text{const.}$$

Перейдем к новым переменным

$$h_1 = \cos \alpha, \quad h_2 = \sin \alpha.$$

Также из интегралов выразим h_3, h_4

$$h_3 = \frac{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha + \varphi) - 2C_1 \cos(\varphi + \vartheta) - 2C_2 \sin(\varphi + \vartheta)}{2 \sin \varphi}$$

$$h_4 = \frac{\cos \alpha - C_1 \cos \vartheta - C_2 \sin \vartheta}{\sin \varphi}.$$

Полученные результаты: нормальный случай ПМП

Рассмотрим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, тогда уравнения для α и φ

$$\dot{\alpha} = \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{\sin \varphi}, \quad \dot{\varphi} = -(\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha)$$

отделяются от уравнений для x , y , ϑ . Также эти уравнения допускают еще один интеграл

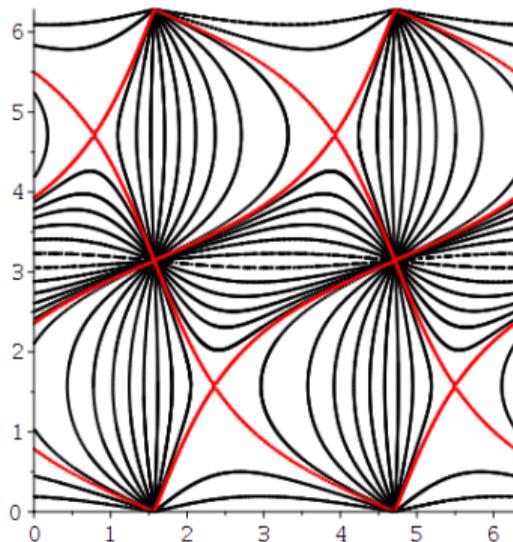
$$C = \frac{-\sin \varphi \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \varphi},$$

и инвариантны относительно следующих замен переменных

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \alpha + \pi, \quad t \rightarrow -t, \\ \alpha &\rightarrow \pi - \alpha, \quad \varphi \rightarrow \pi + \varphi. \end{aligned}$$

Полученные результаты: нормальный случай ПМП

Фазовый портрет системы на плоскости (α, φ)

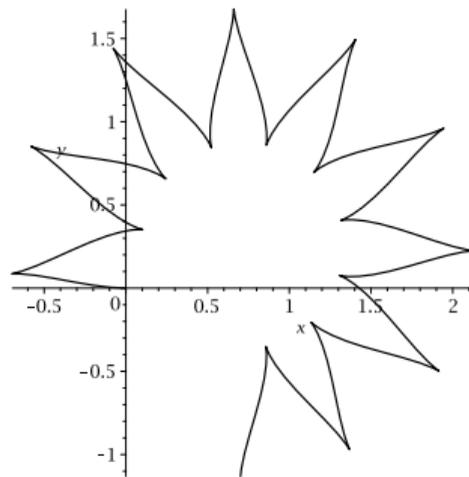
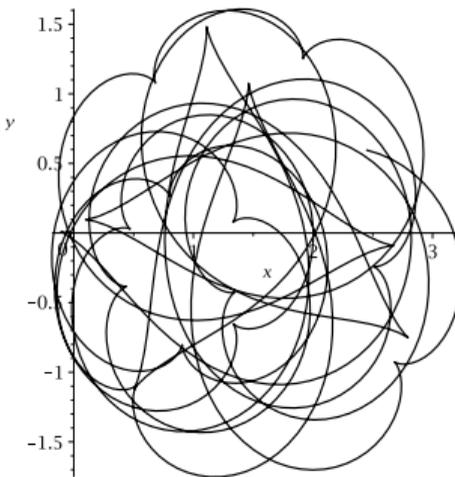
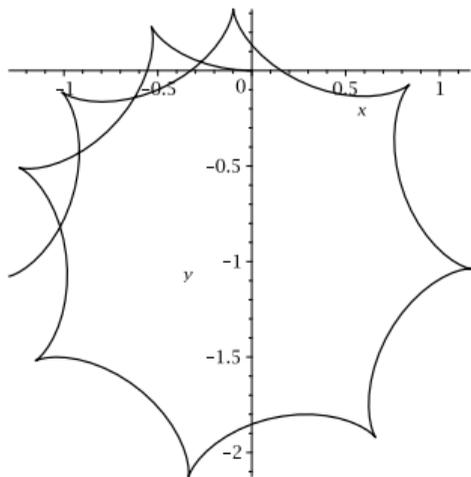


Уравнение для сепаратрисы

$$\pm\sqrt{2} \sin \varphi = -\sin \varphi \sin \alpha + \cos \alpha.$$

Полученные результаты: нормальный случай ПМП

Траектории центра масс робота на плоскости (x, y) для разных начальных α и φ



Полученные результаты: нормальный случай ПМП

Пример траектории на плоскости (x, y)

Полученные результаты: нормальный случай ПМП

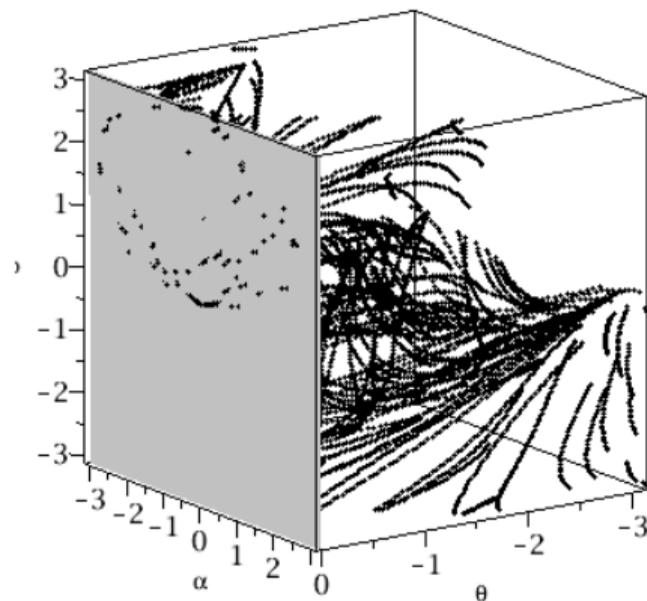
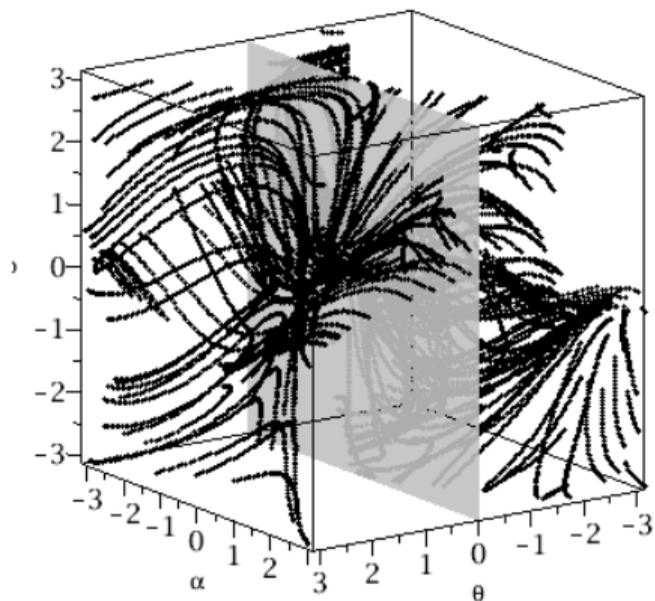
Для общего случая $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ необходимо рассматривать систему из трех уравнений вида

$$\dot{\alpha} = \frac{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha + \varphi) - 2C_1 \cos(\varphi + \vartheta) - 2C_2 \sin(\varphi + \vartheta)}{2 \sin \varphi},$$
$$\dot{\varphi} = -\cos \alpha \sin \varphi - \sin \alpha, \quad \dot{\vartheta} = \sin \alpha$$

Для исследования этой системы построим отображение Пуанкаре с секущей $\vartheta = 0$.

Полученные результаты: нормальный случай ПМП

Пример отображения Пуанкаре



1. Были получены экстремальные траектории в аномальном случае.

Гипотеза: траектория на плоскости (x, y) для аномального случая есть геодезическая движения робота без точек перегиба, точка связки движется по эластике без точек перегиба.

2. В частном случае $I_r = 0$ был рассмотрен нормальный случай:

- ▶ Найден дополнительный интеграл на нулевом уровне интегралов $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Гипотеза: получается обобщение геодезических для субримановой задачи на $SE(2)$, намотанных на окружности.

- ▶ Для общего случая $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ численно построено отображение Пуанкаре.

Гипотеза: существование хаоса в случае $I_r = 0$.

Планы

1. Получить явную зависимость формул для x , y от φ_0 для аномального случая.
2. Получить явный вид экстремалей для нормального случая при $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.
Исследовать полученные траектории на оптимальность.
3. Доказать сформулированные гипотезы.
4. Подробнее исследовать случай $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.
5. Рассмотреть нормальный случай для произвольного $I_r \neq 0$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!