

# Характеристика инерциальных свойств круговых сегментов

Исполнитель: Д. А. Панин, И. И. Шпаковская

Руководитель: Е. Ф. Сачкова

«Современные методы теории информации, оптимизации и управления»

Направление «Геометрическая теория управления»

Университет «Сириус», Сочи-2020

## Постановка задачи

Основная цель проекта :

- Построение кругового сегмента по заданной величине хорды и площади;
- Получение зависимости эллипса инерции кругового сегмента от величины хорды и площади сечения. А также исследование сопротивления балки при поперечном изгибе для различных круговых сечений.

## История задачи

- ▶ Г. Галилей. Сила, необходимая для разрыва каната, пропорциональна площади сечения каната и не зависит от его длины;
- ▶ Р. Гук. Закон упругости;
- ▶ Э. Мариотт. Принимает во внимание упругие свойства материала;
- ▶ Я. Бернулли. Уравнений равновесия при изгибе балок. Прямоугольная эластика;
- ▶ Л. Эйлер. Упругие линии;
- ▶ Ш. Кулон. Формула для момента сопротивления;

## Постановка задачи

Нильпотентная управляемая система:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \\ x(0) &= 0, x(T) = x^1, x \in \mathbb{R}^8, u \in \mathbb{R}^2, \\ L &= \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4} \frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6} \frac{\partial}{\partial x_8}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6} \frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4} \frac{\partial}{\partial x_7}. \end{aligned} \quad (2)$$

Найти экстремальные круговые траектории (ПМП). Найти решение в классе круговых управлений.

## Постановка задачи

Решение из принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned}u_1(t, \psi) &= -(p_2 \cos |p_3|t + (\text{sign } p_3)p_1 \sin |p_3|t), \\u_2(t, \psi) &= p_2 \cos |p_3|t - (\text{sign } p_3)p_1 \sin |p_3|t, \\x_i &= x_i(t, \psi), \quad i = 1..8 \\ \psi &= (p_1, p_2, p_3), \quad p_1^2 + p_2^2 \neq 0, \quad p_3 \neq 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Необходимо найти компоненты траекторий  $x_i(t)$ ,  $i = 1..8$  через заданные граничные условия в  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned}x_1(T) &= a_1, \quad x_2(T) = a_2, \quad x_3(T) = a_3; \\G &: (a_1, a_2, a_3) \rightarrow \{x_i(t, a_1, a_2, a_3), i = 1, \dots, 8\}\end{aligned}\tag{4}$$

## Решение

Граничные условия  $x(T)$  содержат следующую информацию о геометрических характеристиках пластины  $D$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3(T) = S, \\ x_4(T) - \frac{1}{6}x_2(x_1^2 + x_2^2) = M_{x_2}, \\ x_5(T) + \frac{1}{6}x_1(x_1^2 + x_2^2) = M_{x_1}, \\ 2x_6(T) - \frac{1}{12}a_1^3a_2 = J_{x_2}, \\ 2x_8(T) - \frac{1}{12}a_1a_2^3 = J_{x_1}, \\ x_7(T) = K_{x_1x_2}, \\ x_{1c} = \frac{M_{x_1}}{S}, \\ x_{2c} = \frac{M_{x_2}}{S}. \end{array} \right.$$

где  $S$  – площадь,  $M$  – статический момент,  $J$  – момент инерции,  $K$  – центробежный момент,

## Решение

Круговые траектории замечают график функции трех переменных.

Проекция 8-мерной круговой траектории есть траектория задачи Дидоны:

$x_i(x_1, x_2, x_3), i = 4, \dots, 8$

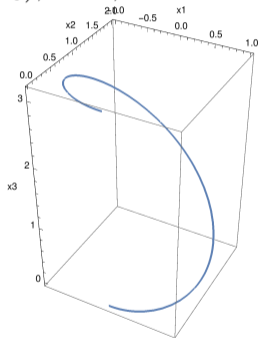


Рис.: Кривая  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$

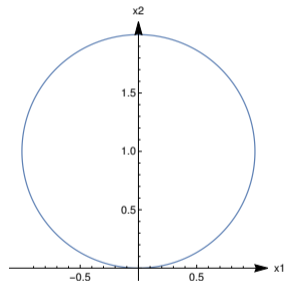


Рис.:  $(x_1(t), x_2(t))$

## Решение

Установлена зависимость сопряженного вектора  $\psi = (p_1, p_2, p_3)$  через граничные условия  $(x_1(T), x_2(T), x_3(T)) = \{(a_1, a_2, a_3) : a_3 > 0, \}$ :

$$\psi = \left[ \frac{\bar{t}}{2T} (a_2 \operatorname{ctg} \frac{\bar{t}}{2} - a_1), -\frac{\bar{t}}{2T} (a_1 \operatorname{ctg} \frac{\bar{t}}{2} + a_2), \frac{\bar{t}}{T} \right], \quad (5)$$

где  $\bar{t}$  удовлетворяет следующему трансцендентному уравнению:

$$f(\bar{t}) = -\frac{8a_3}{r^2} + \frac{\bar{t} - \sin \bar{t}}{\sin^2 \frac{\bar{t}}{2}} = 0. \quad (6)$$

Если  $r = 0$ , то  $\bar{t} = 2\pi$ .

Эти выражения были получены из предположения, что  $p_3 > 0$ .



## График функции $f(\bar{t})$

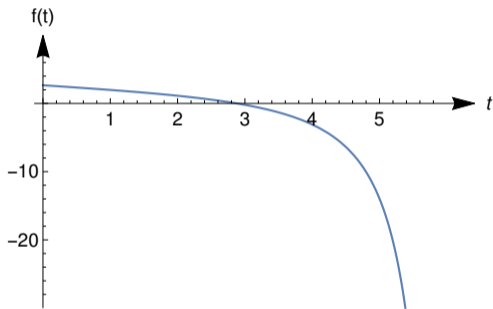


Рис.: График функции  $f(\bar{t})$  при  $a_3 = r = 3$

$$a_3 = S > 0,$$

$$f(\bar{t}) = -\frac{8a_3}{r^2} + \frac{\bar{t} - \sin \bar{t}}{\sin^2 \frac{\bar{t}}{2}}.$$

$$r^2 = 8a_3 \frac{\sin^2 \frac{\bar{t}}{2}}{\bar{t} - \sin \bar{t}}.$$

Заметим, что

$$\text{при } \bar{t} \rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty$$

$$\text{при } \bar{t} \rightarrow 2\pi \quad r \rightarrow 0$$

## Эллипс инерции при заданных граничных условиях $(a_1, a_2, a_3)$

$$J_{x_1} \bar{x}_1^2 - 2K_{x_1 x_2} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + J_{x_2} \bar{x}_2^2 = 1 \quad (7)$$

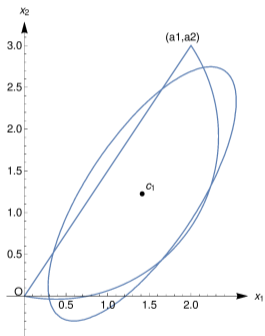


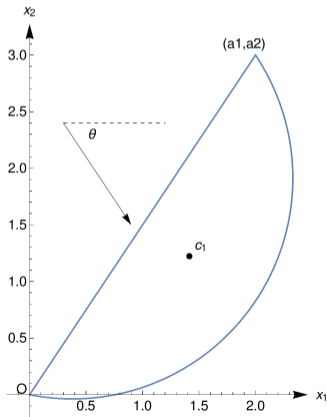
Рис.: График сегмента и эллипса инерции при  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = \pi, T = \pi$

Рис.: Эллипс инерции при разных параметрах

## Момент инерции кругового сегмента

Преобразования момента инерции при повороте осей:

$$J(\theta) = J_1 \cos^2 \theta - 2K_{12} \sin \theta \cos \theta + J_2 \sin^2 \theta, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (8)$$



Найдено значение функции при экстремальном значении  $\theta$ :

$$J_{max} = \frac{J_1 + J_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_1 - J_2}{2}\right)^2 + K_{12}^2} \quad (9)$$

$$\theta_{max} = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{2K_{12}}{J_1 - J_2} \right] \quad (10)$$

## Момент сопротивления кругового сегмента

Момент сопротивления относительно оси  $OX_1$ , могут быть определены по формуле:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \begin{cases} \frac{2 \sin(\bar{t}(a_2)/2)}{a_2} I_1(a_2, \text{ctg}(\bar{t}(a_2)/2)), & (\bar{t} \in (\pi, 2\pi]), \\ \frac{2}{a_2} I_1(a_2, \text{ctg}(\bar{t}(a_2)/2)), & (\bar{t} \in (0, \pi]), \end{cases} \quad (11)$$

где  $y_{max}$  – наибольшее расстояние точек сечения от оси  $OX_1$ . В силу симметрии задачи относительно поворота, рассмотрим частный случай  $a_1 = 0, a_2 \neq 0, a_3 > 0$ .

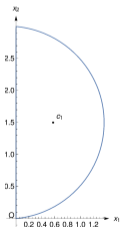


Рис.:  $a_1 = 0, a_2 \neq 0$

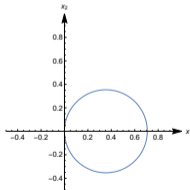


Рис.:  $a_1 = 0, a_2 = 0$

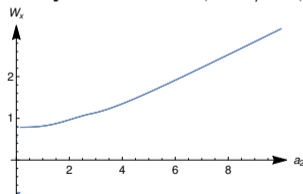


Рис.: Момент сопротивления от  $a_2$

## Пример компоненты траектории

$$\begin{aligned}x_8(t) = & \frac{1}{192p_3^4} (12p_1^4 p_3 t - 8p_1^4 \sin(2p_3 t) + p_1^4 \sin(4p_3 t) - 8p_1^3 p_2 \cos(3p_3 t) + \\& + 4p_1^3 p_2 \cos(4p_3 t) - 52p_1^3 p_2 + 72p_1^2 p_2^2 p_3 t - 72p_1^2 p_2^2 \sin(p_3 t) - 24p_1^2 p_2^2 \sin(2p_3 t) + \\& + 24p_1^2 p_2^2 \sin(3p_3 t) - 6p_1^2 p_2^2 \sin(4p_3 t) + 8p_1 p_2 (9p_1^2 + 13p_2^2) \cos(p_3 t) - \\& - 16p_1 p_2 (p_1^2 + 4p_2^2) \cos(2p_3 t) + 24p_1 p_2^3 \cos(3p_3 t) - 4p_1 p_2^3 \cos(4p_3 t) - 60p_1 p_2^3 + \\& + 60p_2^4 p_3 t - 104p_2^4 \sin(p_3 t) + 32p_2^4 \sin(2p_3 t) - 8p_2^4 \sin(3p_3 t) + p_2^4 \sin(4p_3 t))\end{aligned}$$

## Итоги работы

- ▶ Найдены решения  $x(t, \psi) = 0$ ;
- ▶ Определен вектор  $\psi(a_1, a_2, a_3)$ ;
- ▶ В системе Wolfram Mathematica реализована функция для расчета координаты центра тяжести и моментов инерции по заданному начальному вектору  $(a_1, a_2, a_3)$ ;
- ▶ В системе Wolfram Mathematica реализована функция для расчета и построения эллипса инерции по заданному начальному вектору  $(a_1, a_2, a_3)$ ;
- ▶ Установлены зависимости момента сопротивления балки в зависимости от  $(a_1, a_2, a_3)$ .

Рассмотреть формулу Эйлера для определения критической нагрузки:

$$P = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l^2}, \quad (12)$$

где  $P$  – теоретической нагрузки (Эйлера нагрузка), при которой происходит потеря устойчивости стержня;  $E$  – модуль продольной упругости материала стержня;  $J_{min}$  – минимальный момент инерции его поперечного сечения;  $l$  – рабочая длина стержня

## Список литературы

- ▶ Сачкова Е.Ф. Механическая интерпретация  $(2, 3, 5, 8)$ -задачи // Презентация доклада, <http://control.botik.ru/>.
- ▶ Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. —М.:Физматлит, 2005, 391 с.
- ▶ Александров, А.Д. Математика: её содержание, методы и значение (том 1) / А.Д. Александров, А.Н. Колмогоров, М.А. Лаврентьев. - М.:, 1956. - 292 с.
- ▶ Е.Ф. Сачкова, "Решение задачи управления для нильпотентной системы Дифференциальные уравнения, 2008, том 44, № 12, с. 1704–1707.
- ▶ Ю.Л. Сачков, Е.Ф. Сачкова, "Вырожденные аномальные траектории в субримановой задаче с вектором роста  $(2,3,5,8)$  Дифференц. уравнения, 53:3 (2017), 362–374.
- ▶ Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - 10-е издание, перераб. и доп. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. - 592 с.
- ▶ Yu.L.Sachkov, E.F.Sachkova, Symmetries and Parameterization of Abnormal Extremals in the Sub-Riemannian Problem with the Growth Vector  $(2; 3; 5; 8)$ , //Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 15 (2019), 4: 577 – 585.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!