Качение шара по плоскости

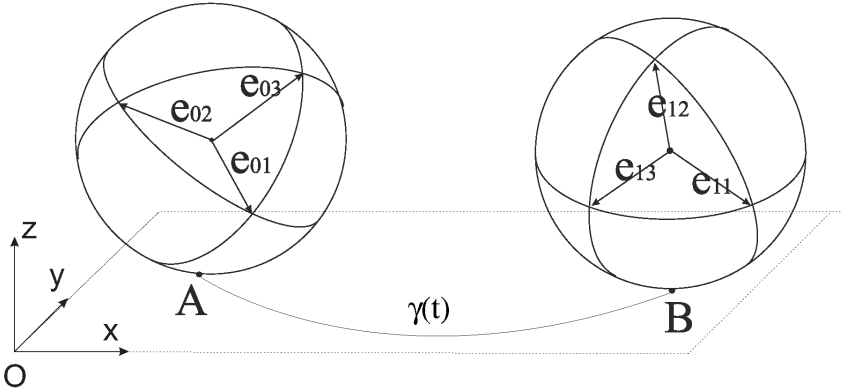
Исполнитель: Матросов С.В.
Руководитель: Маштаков А.П.

«Современные методы теории информации, оптимизации и управления»

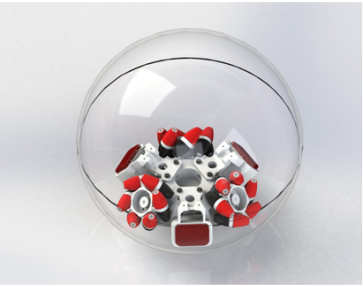
Направление «Геометрическая теория управления»

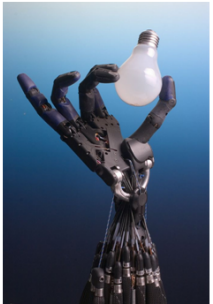
Университет «Сириус», Сочи-2020

Постановка задачи



Мотивация





История задачи

1983 J.M. Hammersley: постановка задачи о качении шара по плоскости.

1986 A.M. Arthur, G.R.Walsh: интегрируемость гамильтоновой системы ПМП.

1990 Z.Li, J. Canny: управляемость системы.

1993 V. Jurdjevic:

- проекции экстремальных кривых $(x(t), y(t))$ — эластики Эйлера,
- описание различных качественных типов экстремальных траекторий,
- дифференциальные уравнения на углы Эйлера;

2010 Ю. Л. Сачков:

- непрерывные и дискретные симметрии;
- неподвижные точки симметрий (точки Максвелла);
- необходимое условие оптимальности: верхняя оценка времени разреза.

2011 А. П. Маштаков, Ю. Л. Сачков:

- явная параметризация экстремальных траекторий;
- асимптотика экстремальных траекторий времени Максвелла при качении сферы по синусоидам малой амплитуды.

Полученные результаты

В ходе работы были получены:

1. Математическая постановка задачи
2. Показана управляемость системы
3. Получены аналитические выражения для экстремального управления

Математическая постановка задачи

Уравнение для угловой скорости:

$$\vec{\omega} = \frac{[\vec{r} \times \vec{u}]}{r^2}$$

Положим длину $\vec{r}$ равной единице и запишем получившееся уравнение в координатах:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$$
$$\vec{r} = (0, 0, -1)$$
$$\vec{\omega} = [\vec{r} \times \vec{u}] = (u_2, -u_1, 0)$$

Кватернион:

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

Кватернион вращения:

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{n}\sin\frac{\theta}{2} \in S^3$$

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1$$

Описание поворотов при помощи кватернионов:

$$\vec{\rho} = q\vec{\rho'}q^{-1}$$

Связь кватерниона вращения с угловой скоростью:

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\vec{\omega}q$$

Задача оптимального управления

Управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1, \\ \dot{y} = u_2, \\ \dot{q}_0 = \frac{1}{2}\left(q_2 u_1 - q_1 u_2\right), \\ \dot{q}_1 = \frac{1}{2}\left(q_3 u_1 + q_0 u_2\right), \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{2}\left(-q_0 u_1 + q_3 u_2\right), \\ \dot{q}_3 = \frac{1}{2}\left(-q_1 u_1 - q_2 u_2\right), \end{cases} \qquad \begin{aligned} &(x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ &q \in S^3. \end{aligned}$$

Критерий оптимальности:

$$l = \int\limits_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \to \min$$

Граничные условия:

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad g_i \in \mathbb{R}^2 \times S^3$$

Управляемость системы

Управляемая система $\mathscr{F} = \{\, u_1 X_1 + u_2 X_2 \mid u \in \mathbb{R}^2 \,\}$

Векторные поля:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \big(1, \quad 0, \quad q_2/2, \quad q_3/2, \quad -q_0/2, \quad -q_1/2\big) \\
X_2 &= \big(0, \quad 1, \quad -q_1/2, \quad q_0/2, \quad q_3/2, \quad -q_2/2\big) \\
X_3 &= \big(0, \quad 0, \quad -q_3/2, \quad q_2/2, \quad -q_1/2, \quad q_0/2\big) = [X_1, X_2] \\
X_4 &= \big(0, \quad 0, \quad q_1/2, \quad -q_0/2, \quad -q_3/2, \quad q_2/2\big) = [X_1, X_3] \\
X_5 &= \big(0, \quad 0, \quad q_2/2, \quad q_3/2, \quad -q_0/2, \quad -q_1/2\big) = [X_2, X_3]
\end{aligned}
$$

Соберем векторные поля в матрицу: $Y = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]^T$

$$Y = \begin{bmatrix} 1, & 0, & q_2/2, & -q_3/2, & -q_0/2, & q_1/2 \\ 0, & 1, & -q_1/2, & q_0/2, & -q_3/2, & q_2/2 \\ 0, & 0, & -q_3/2, & q_2/2, & -q_1/2, & q_0/2 \\ 0, & 0, & q_1/2, & -q_0/2, & -q_3/2, & q_2/2 \\ 0, & 0, & q_2/2, & q_3/2, & -q_0/2, & -q_1/2 \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что:

$$\mathrm{rank}(Y) = 5 \quad \Rightarrow \quad \forall g \in \mathbb{R}^2 \times S^3 : \quad Lie_g(\mathscr{F}) = T_g(\mathbb{R}^2 \times S^3)$$

Управляемость системы

В силу теоремы Рашевского-Чжоу:

$$\mathscr{O}_g = \mathbb{R}^2 \times S^3$$

Т.к. $\mathscr{F} = -\mathscr{F}$, то в силу следствия теоремы Рашевского-Чжоу:

$$\mathscr{A}_g = \mathbb{R}^2 \times S^3$$

Теорема

Система $\mathscr{F}$ вполне управляема

Оптимальное управление

Будем оптимизировать функционал действия:

$$J = \int\limits_0^{t_1} \frac{u_1^2(t) + u_2^2(t)}{2} dt$$

Можно показать, что он эквивалентен функционалу длины кривой:

$$l = \int\limits_0^{t_1} \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt$$

Принцип максимума Понтрягина (ПМП)

Линейные гамильтонианы:

$$h_i = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad \lambda \in T^*(\mathbb{R}^2 \times S^3),\ i = 1, \ldots, 5$$

Тогда гамильтониан ПМП записывается в виде:

$$h_u^\nu(\lambda) = u_1 h_1 + u_2 h_2 + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2)$$

Анормальный случай ПМП

Условие максимума:

$$u_1 h_1 + u_2 h_2 \to \max \quad \Rightarrow \quad h_1 = 0, h_2 = 0$$

Гамильтонова система в анормальном случае:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -u_2 h_3 \\ \dot{h}_2 = u_1 h_3 \\ \dot{h}_3 = u_1 h_4 + u_2 h_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_4 = -u_1 h_3 \\ \dot{h}_5 = -u_2 h_3 \\ \dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2 \end{cases}$$

Теорема

Анормальные экстремали соответствуют качению шара вдоль прямых линий:

$$u_1 h_4 + u_2 h_5 = 0, \quad h_4 = const, \quad h_5 = const$$

Нормальный случай ПМП

Условие максимума:

$$u_1 h_1 + u_2 h_2 + \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right) \to \max \quad \Rightarrow \quad u_1 = h_1, u_2 = h_2$$

Гамильтонова система в нормальном случае:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3 \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3 \\ \dot{h}_3 = h_1 h_4 + h_2 h_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_4 = -h_1 h_3 \\ \dot{h}_5 = -h_2 h_3 \\ \dot{q} = h_1 X_1 + h_2 X_2 \end{cases}$$

Были найдены следующие интегралы движения:

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\left(h_1^2 + h_2^2\right) \\
H_{rot} &= h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 \\
v_1 &= h_1 - h_5 \\
v_2 &= h_2 + h_4
\end{aligned}
$$

При помощи указанных выше интегралов движения систему можно свести к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = h_3 \\ \dot{h}_3 = -\sin\theta \\ \dot{g} = \cos(\alpha - \theta)X_1 + \sin(\alpha - \theta)X_2 \end{cases}$$

Где:

$\alpha = \arctan\dfrac{v_2}{v_1}$ – задает курс качения шара

θ – задает отклонение от курса

Интегрирование вертикальной подсистемы

Вертикальная подсистема совпадает с уравнением математического маятника
Траектории маятника можно разделить на 5 категорий:

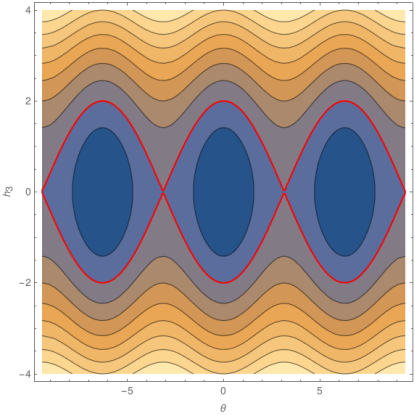
$$C_1 = \left\{ (\theta, h_3) \mid \frac{h_3^2}{2} - \cos\theta < 1 \right\}$$

$$C_2 = \left\{ (\theta, h_3) \mid \frac{h_3^2}{2} - \cos\theta > 1 \right\}$$

$$C_3 = \left\{ (\theta, h_3) \mid \frac{h_3^2}{2} - \cos\theta = 1 \right\}$$

$$C_4 = \{ (\theta, h_3) \mid \theta = 0,\ h_3 = 0 \}$$

$$C_5 = \{ (\theta, h_3) \mid \theta = \pi,\ h_3 = 0 \}$$



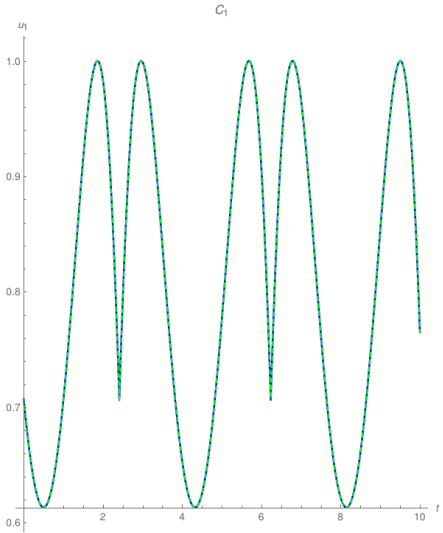
Управления системы можно выразить следующим образом:

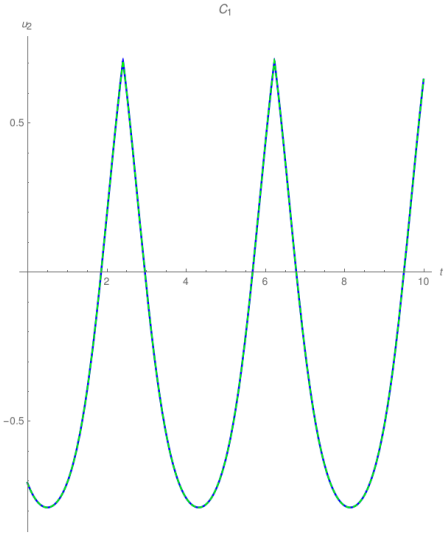
$$u_1 = \cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta$$
$$u_2 = \sin(\alpha - \theta) = \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta$$

Для различных областей получаем разные выражения для $\cos\theta$:

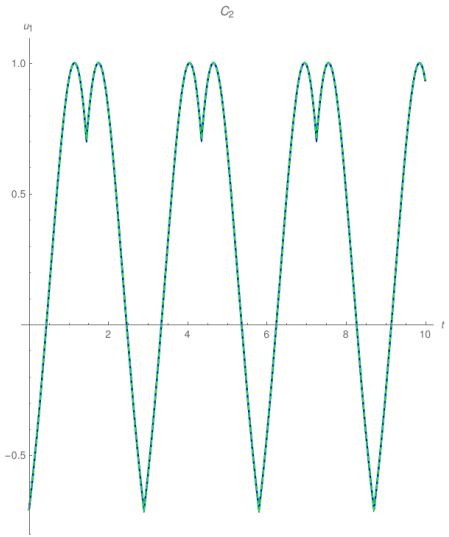
$$\begin{aligned}
C_1: &\quad \cos\theta = dn^2(\phi_0 + t, k_0) - k_0^2 sn^2(\phi_0 + t, k_0) \\
C_2: &\quad \cos\theta = cn^2\left(\frac{\phi_0 + t}{k_0}, k_0\right) - sn^2\left(\frac{\phi_0 + t}{k_0}, k_0\right) \\
C_3: &\quad \cos\theta = 1 - 2\tanh^2(\phi_0 + t) \\
C_4: &\quad \cos\theta = 1 \\
C_5: &\quad \cos\theta = -1
\end{aligned}$$

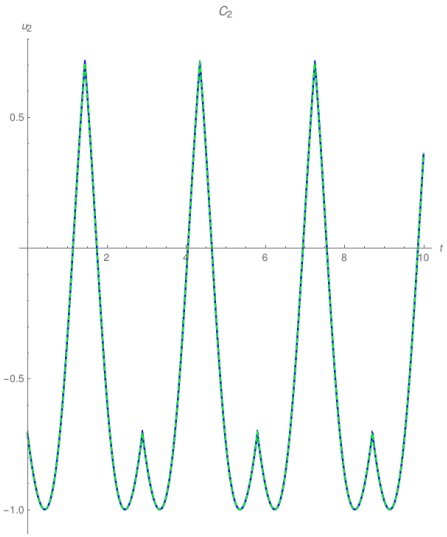
Экстремальное управление для C_1



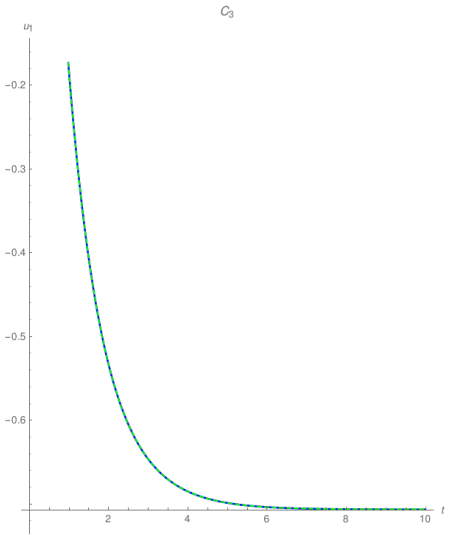


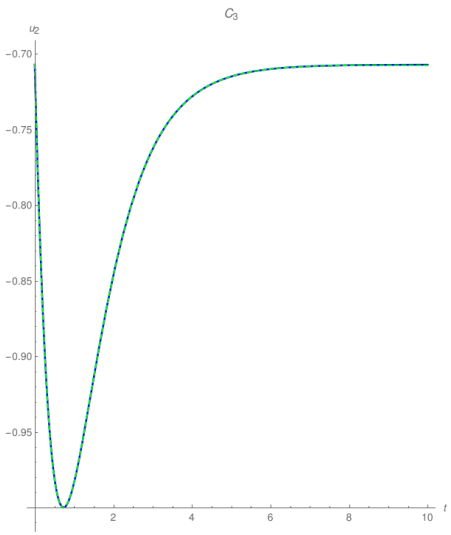
Экстремальное управление для C_2



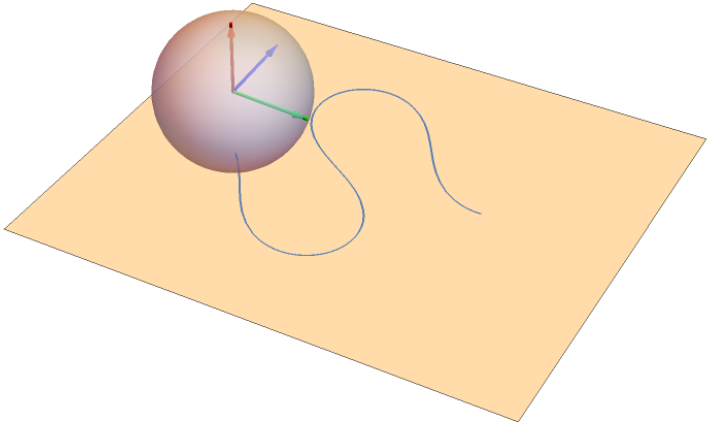


Экстремальное управление для C_3

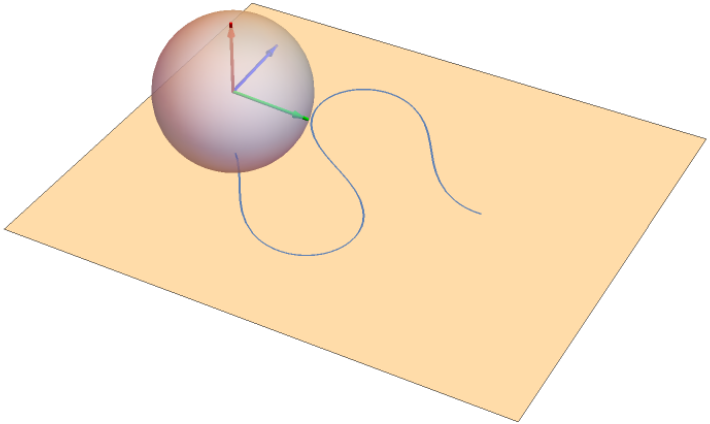




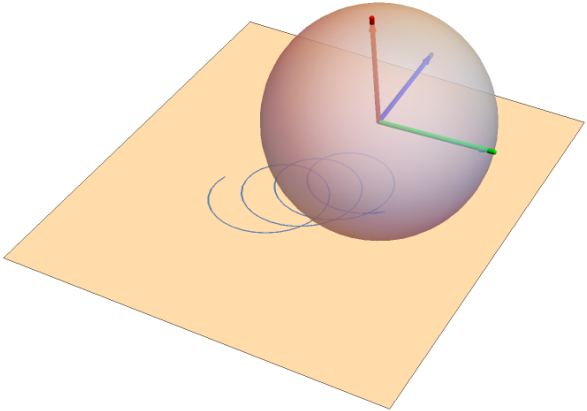
Качение для C_1



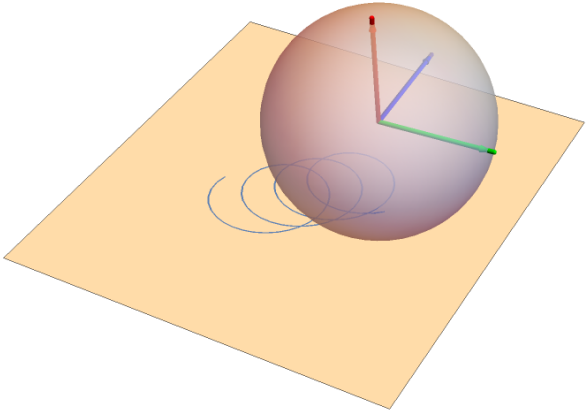
Качение для C_1



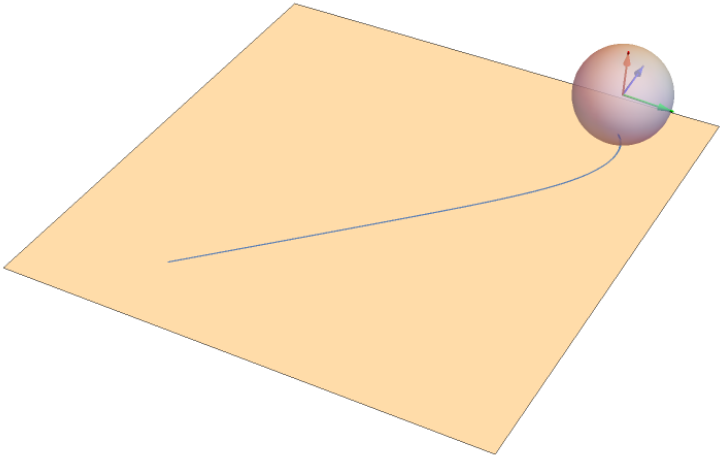
Качение для C_2



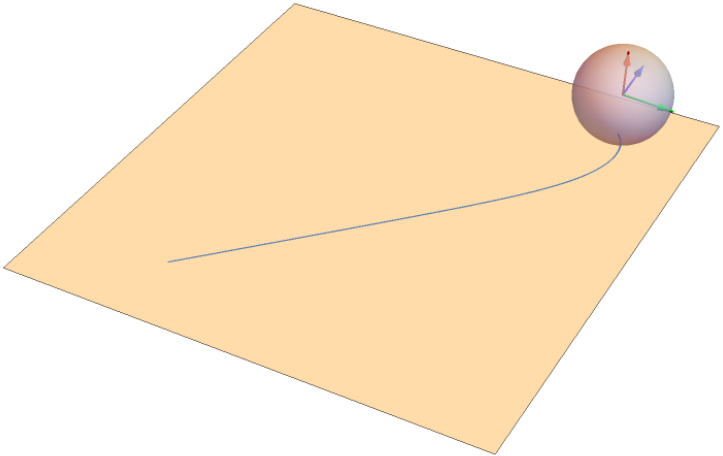
Качение для C_2



Качение для C_3



Качение для C_3



Научная новизна

Найден еще один интеграл движения:

$$W = h_2 h_4 - h_1 h_5 - \frac{h_3^2}{2}$$

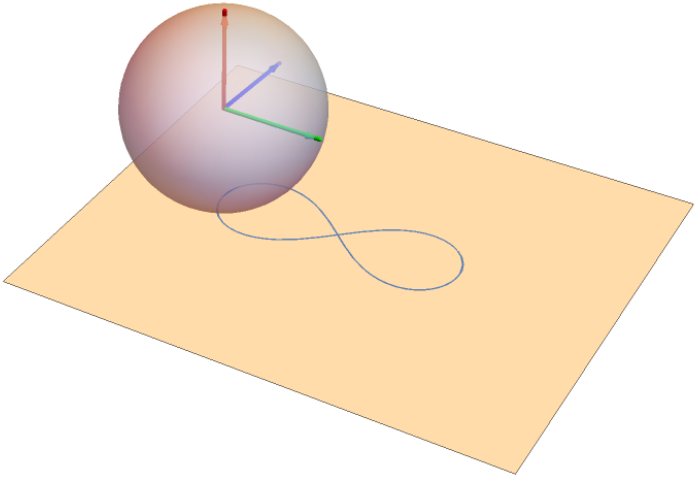
При этом:

$$\dot{h}_3 = h_1 h_4 + h_2 h_5$$

Тогда:

$$\ddot{h}_3 = -h_3(h_1^2 + h_2^2 + [h_2 h_4 - h_1 h_5]) = -h_3(H + W + \frac{h_3^2}{2})$$

Планы

1. Интегрирование горизонтальной части гамильтониана ПМП (в частности поиск явного вида кватерниона вращения)
2. Исследование симметрий задачи, поиск точек Максвелла, исследование сопряженных точек, определение времени разреза
3. Оптимальный синтез

Спасибо за внимание!