Моделирование зрительной коры головного мозга

Исполнитель: Галяев И.А.
Руководитель: Маштаков А.П.

«Современные методы теории информации, оптимизации и управления»

Направление «Геометрическая теория управления»

Университет «Сириус», Сочи-2020

Постановка задачи

Рассматривается управляемая система

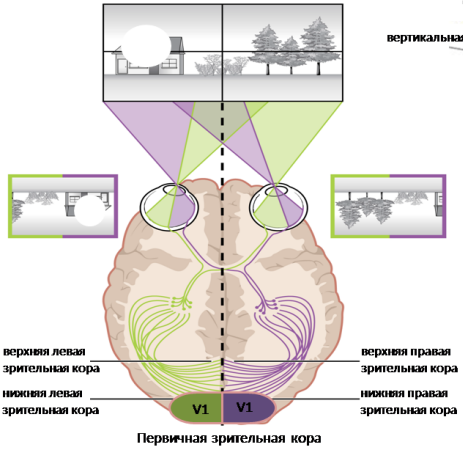
$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_1 k, \\ \dot{k} = u_2, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &(x, y, \theta, k) \in SE(2) \times \mathbb{R}, \\ &(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

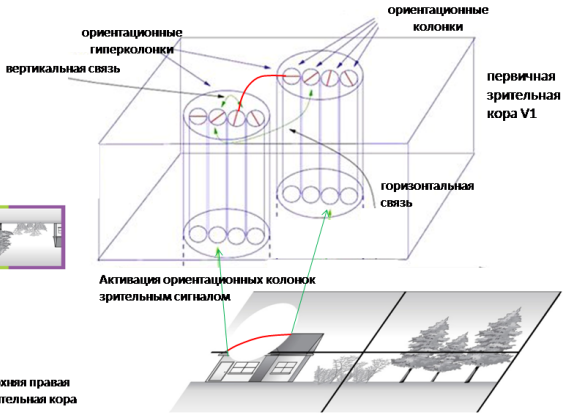
Для траектории $\gamma(t)$, соответствующей управлению $\big(u_1(t),\ u_2(t)\big)$ за время $T > 0$, определим функционал качества — субриманову длину этой траектории:

$$l(\gamma) = \int\limits_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}\, dt.$$

Для заданных граничных условий $\gamma(0) = (0, 0, 0, k_0)$, $\gamma(T) = (x_1, y_1, \theta_1, k_1)$, требуется найти траекторию, имеющую минимальную субриманову длину.

Мотивация исследования





Уточнение модели Петито-Читти-Сарти: добавление параметра кривизны при анализе контуров изображений.

История задачи

Субримановы структуры в нейрогеометрии зрения:

- J. Petitot, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure, 2003. (Группа Гейзенберга)
- G. Citti and A. Sarti, A Cortical Based Model of Perceptual Completion in the Roto-Translation Space, 2006. (Группа $SE(2)$)
- J. Petitot, Neuromathematics of Vision, 2014. (Группа Энгеля).
- Обсуждение с G. Citti на конференции Geometry, PDE's and Lie Groups in Image Analysis, Eindhoven, 2016. (Четырехмерное расширение группы $SE(2)$.)

Полученные результаты

Теорема

- Система вполне управляема.

Доказывалась управляемость с помощью теоремы Рашевского-Чжоу. Первые два условия выполнялись по постановке задачи, оставалось найти скобки Ли, которые будут удовлетворять ранговому условию. Оказалось, что:

$$det \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \\ k & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 1$$

Анормальный случай $\nu = 0$

Полученная система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{k} = u_2, \\ a\cos\theta + b\sin\theta = 0, \\ h_4 = -a\sin\theta + b\cos\theta = const. \end{cases}$$

Выбирая угол $\theta = 0$, получаем значения $a = 0, b = const \neq 0$. Выбирая натуральную параметризацию геодезических, получаем $u_2 = \pm 1$.

Теорема

- Анормальные геодезические имеют вид $(0, 0, 0, t)$.

Нормальный случай $\nu = -1$

$$\begin{cases} h_1 = a\cos\theta + b\sin\theta + ck, \\ h_2 = d, \\ h_3 = -c, \\ h_4 = -a\sin\theta + b\cos\theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{a} = 0, \\ \dot{b} = 0, \\ \dot{c} = -((b^2 - a^2)\cos\theta\sin\theta + ab(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - ack\sin\theta + bck\cos\theta), \\ \dot{d} = -(c^2k + ac\cos\theta + bc\sin\theta), \\ \dot{x} = (a\cos\theta + b\sin\theta + ck)\cos\theta, \\ \dot{y} = (a\cos\theta + b\sin\theta + ck)\sin\theta, \\ \dot{\theta} = (a\cos\theta + b\sin\theta + ck)k, \\ \dot{k} = d. \end{cases}$$

Нормальный случай $\nu = -1$

$$\begin{cases} \dot{h_1} = -h_2 h_3, \\ \dot{h_2} = h_1 h_3, \\ \dot{h_3} = h_1 h_4, \\ \dot{h_4} = -k h_1 (k h_3 + 1), \\ \dot{k} = h_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = h_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = h_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = h_1 k. \end{cases}$$

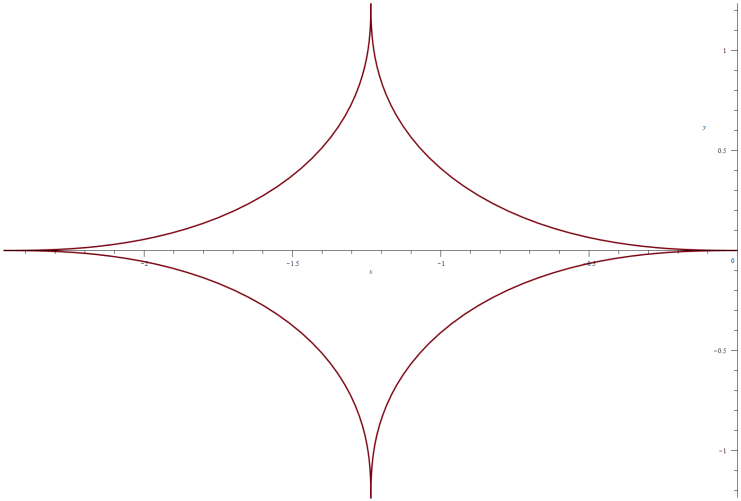
Система 5 независимых переменных имеет 3 первых интеграла a, b, H. Но формульно через h_i и k было найдено всего 2:

1) $H = h_1^2 + h_2^2 = const$

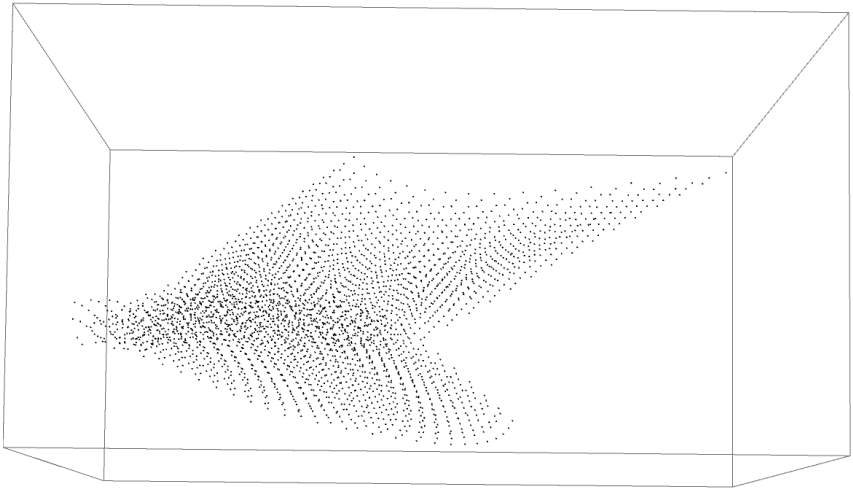
2) $a^2 + b^2 = h_1^2 + 2h_1 h_3 k + h_3^2 k^2 + h_4^2 = const$

Интегрируемость системы установить не удалось, т.к. не был найден еще один первый интеграл. Поэтому далее было проведено численное исследование системы на наличие хаоса.

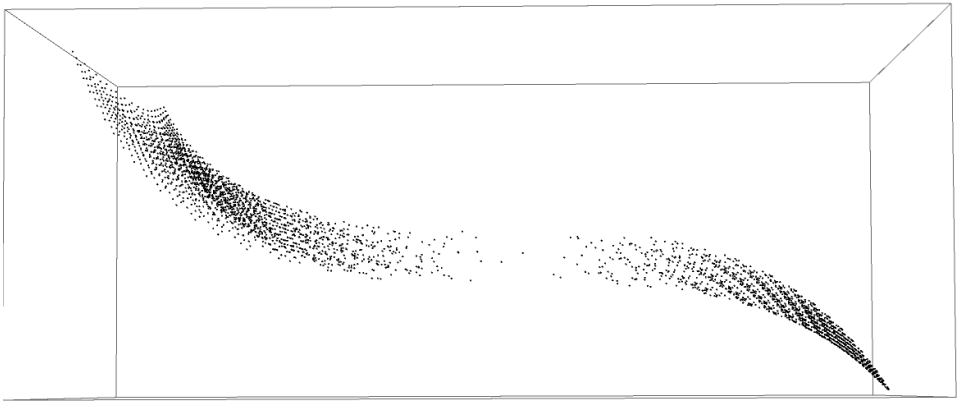
Метод Пуанкаре: замкнутая траектория



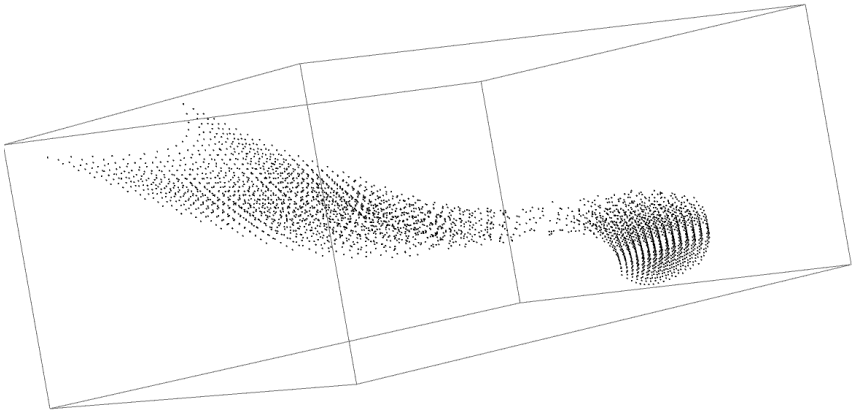
Метод Пуанкаре: вариация начальных условий



Численное исследование хаоса



Численное исследование хаоса



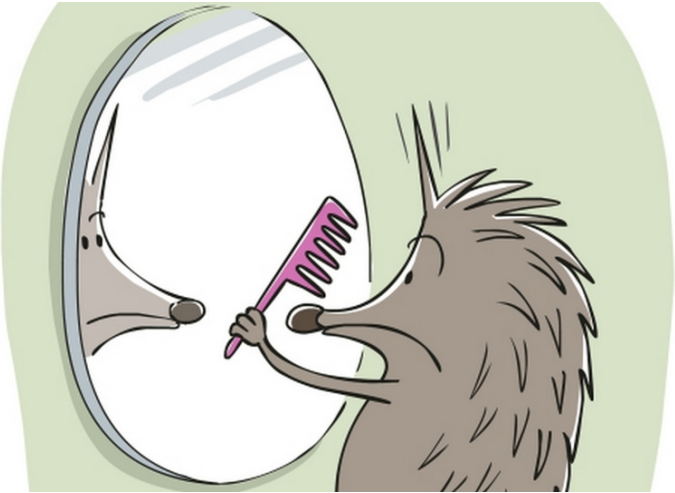
Наблюдение: конечные точки траекторий, близких к замкнутым, заполняют трехмерную область в пространстве (x, y, k), $\theta = 0$.

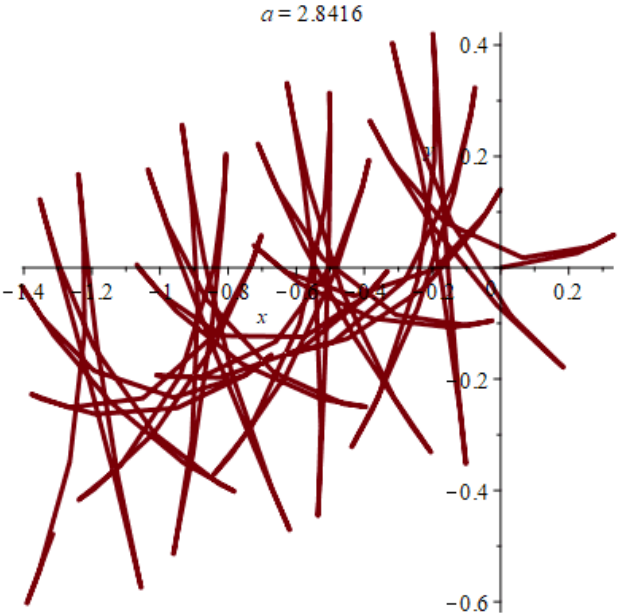
Вывод: в системе наблюдается хаотическое поведение.

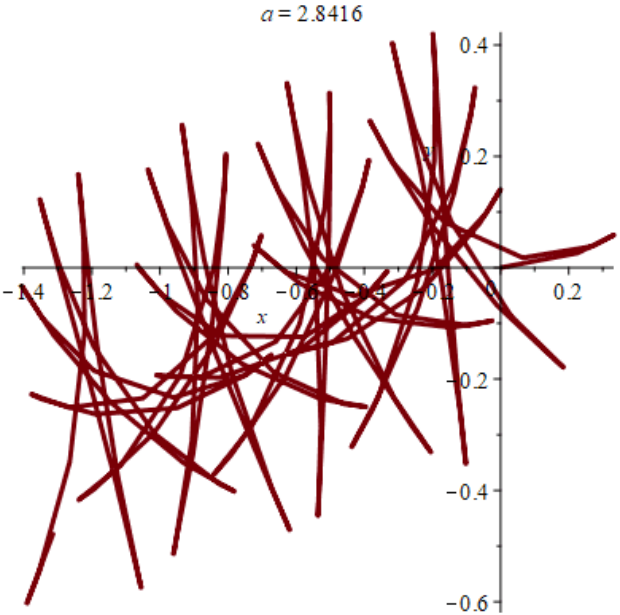
Планы

Продолжение рассмотрения системы:

- Более детальный анализ хаотического движения.
- Построить более наглядный график для определения хаоса путём сокращения размерности модели, используя найденные первые интегралы.
- Применение исследованных траекторий для обработки изображений.
- Исследование родственной модели (с фазой и частотой).




a = 2.8416
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−1.4
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
x


$a = 2.8416$
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−1.4
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
x

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!