Исследование задачи Маркова - Дубинса методами геометрической теории управления

Исполнитель: Дюков В. А.
Руководитель: Ардентов А. А.

«Современные методы теории информации, оптимизации и управления»
Направление «Геометрическая теория управления»

Университет «Сириус», Сочи - 2020

Постановка задачи

Рассмотрим задачу быстродействия ($T \to min$) на группе движения плоскости

$$SE(2) = \{q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta\}$$

со следующей управляемой системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\theta, \\ \dot{y} = \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u. \end{cases}$$

и краевыми условиями:

$$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \theta_0),$$
$$q(T) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1).$$

Управление ограничено:

$$|u| \leq \frac{1}{R}, R > 0.$$

Требуется найти экстремальное и оптимальное управление, используя подходы геометрической теории управления.

Мотивировка исследования

Оптимальные траектории и оптимальное управление задачи Маркова - Дубинса хорошо изучены. Тем не менее, данная задача вызывает исследовательский интерес и по сей день (например, см. [1]). В частности, было бы интересно найти симметрии задачи на основе фазового портрета вертикальной подсистемы гамильтоновой системы и с их помощью описать оптимальные траектории, оптимальное управление и в конечном итоге оптимальный синтез. Несмотря на то, что задача в известной мере является учебной, выявленные новым способом закономерности носят общий характер, а сам способ может найти применение и в других - более сложных - задачах геометрической теории управления.

[1] C.Kaya. Markov-Dubins path via optimal control theory. Computational Optimization and Applications. 68. 719-747. 10.1007/s10589-017-9923-8, 2017.

История задачи

Еще в 1957 г. американец Л. Дубинс опубликовал работу [2] о линии кратчайшей длины с ограниченным радиусом кривизны, соединяющей две точки на плоскости с заданным направлением выхода из первой точки и заданным направлением входа во вторую. Результаты оказались полезными при исследовании объектов с ограниченным радиусом разворота и постоянной по величине скоростью передвижения. Близкую задачу в 1889 г. решал российский математик А. Марков в работе [3], посвященной проблемам прокладки железных дорог. Машина Маркова отличается от машины Дубинса тем, что направление входа в конечную точку не задано. Модель Дубинса применяется при управлении колесными роботами, для диспетчерских расчетов в гражданской авиации и др.

[2] L. E. Dubins. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. American Journal of Mathematics, 79: 497-516, 1957.

[3] A.A. Markov. A few examples of solving special problems on the largest and smallest values. The communications of the Kharkov mathematical society, series 2, volume 1, issue 2, 250-276, 1889 (in Russian).

Приложения задачи Дубинса

Практические применения задачи Дубинса довольно обширны: рассмотрены оптимальные траектории беспилотных летательных аппаратов, выполняющих наблюдение за несколькими наземными целями ([4]), создан приближенный алгоритм, решающий задачу коммивояжера ([5]), решена задача Дубинса при движении с препятствиями ([6]), изучено движение автомобилеподобного неголономного робота в режиме реального времени ([7]).

[4] Zhang Xing et al. A Memetic Algorithm for Path Planning of Curvature-constrained UAVs Performing Surveillance of Multiple Ground Targets. Chinese Journal of Aeronautics, 2014.

[5] Le Ny et al. On the Dubins Traveling Salesman Problem. IEEE Trans. Automat. Contr. 57. 265-270, 2012.

[6] Dongxiao Yang, Didong Li, Huafei Sun. 2D Dubins Path in Environments with Obstacle. Mathematical Problems in Engineering, 1-6, 2013.

[7] Chao Yong, E.J. Barth. Real-time Dynamic Path Planning for Dubins' Nonholonomic Robot. 2418 - 2423, 2007.

Непрерывные симметрии задачи Маркова - Дубинса

Пространство состояний задачи $SE(2)$ является группой движений плоскости. Для группы движений плоскости характерны некоторые симметрии, а именно:

$$S_{\phi}(x, y, \theta) = (x\cos\phi - y\sin\phi, x\sin\phi + y\cos\phi, \theta + \phi),$$

$$S_{a,b}(x, y, \theta) = (x + a, y + b, \theta),$$

$$S_{a,b,\phi}(x, y, \theta) = ((x + a)\cos\phi - (y + b)\sin\phi, (x + a)\sin\phi + (y + b)\cos\phi, \theta + \phi),$$

$$S_{P}(x, y, \theta) = (\frac{x}{P}, \frac{y}{P}, \theta).$$

Редуцирование условия задачи по непрерывным симметриям

В результате преобразований $S_R S_{-x_0,-y_0,-\theta_0}$, примененных к q_0 и q_1, получим:

$$\widetilde{x_0} = 0, \widetilde{y_0} = 0, \widetilde{\theta_0} = 0,$$

$$\widetilde{x_1} = ((x_1 - x_0)\cos\theta_0 - (y_1 - y_0)\sin\theta_0)R^{-1},$$

$$\widetilde{y_1} = ((x_1 - x_0)\sin\theta_0 + (y_1 - y_0)\cos\theta_0)R^{-1},$$

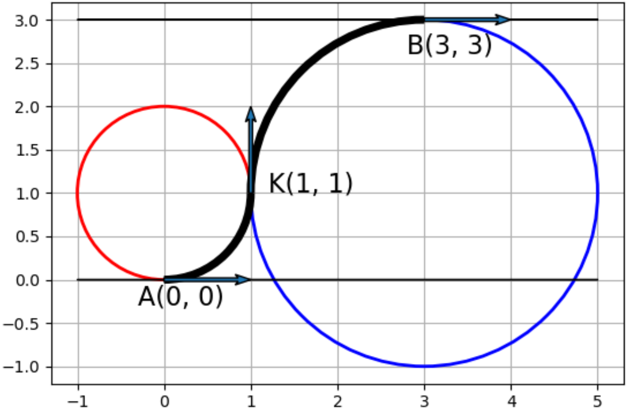
$$\widetilde{\theta_1} = \theta_1 - \theta_0,$$

$$|u| \leq 1$$

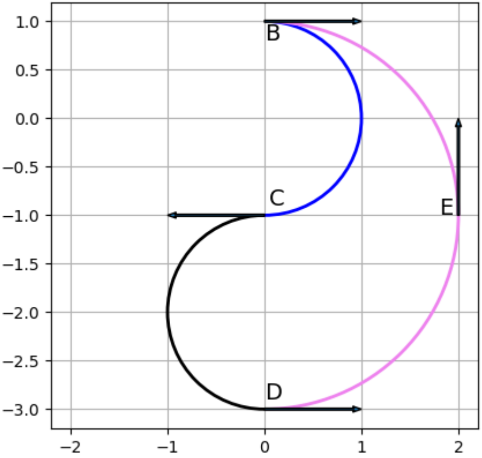
Переобозначив параметры ($\widetilde{a} \to a$), получаем задачу, зависящую от 3 параметров:

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\theta, \\ \dot{y} = \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u, \\ q(0) = q_0 = (0,0,0), \\ q(T) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), \\ |u| \leq 1 \end{cases}$$

Глобальная управляемость управляемой системы



Глобальная управляемость управляемой системы



Принцип максимума Понтрягина

Для задачи быстродействия укороченный гамильтониан системы имеет вид:

$$H = \psi_1 \cos\theta + \psi_2 \sin\theta + \psi_3 u = \text{const},$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 - сопряженные координаты. Система дифференциальных уравнений для сопряженных координат выглядит следующим образом:

$$\dot{\psi}_1 = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = 0,$$

$$\dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin\theta - \psi_2 \cos\theta,$$

откуда следует:

$$\psi_1 = C_1 = \text{const},$$

$$\psi_2 = C_2 = \text{const},$$

$$\dot{\psi}_3 = C_1 \sin\theta - C_2 \cos\theta.$$

Принцип максимума Понтрягина

Для удобства дальнейшего изложения перейдем к полярным координатам:

$$C_1 = \rho \cos \phi,$$

$$C_2 = \rho \sin \phi,$$

и перепишем уравнение для H следующим образом:

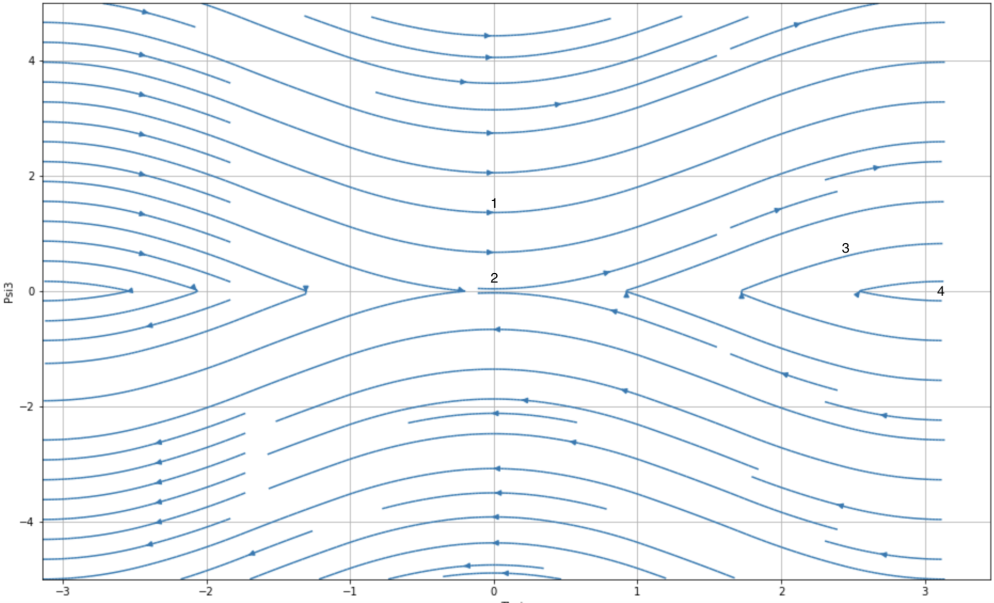
$$H = \rho \cos(\theta - \phi) + u\psi_3$$

$$\max_u H = \rho \cos(\theta - \phi) + \max_u (u\psi_3) \Rightarrow u = \operatorname{sgn}(\psi_3)$$

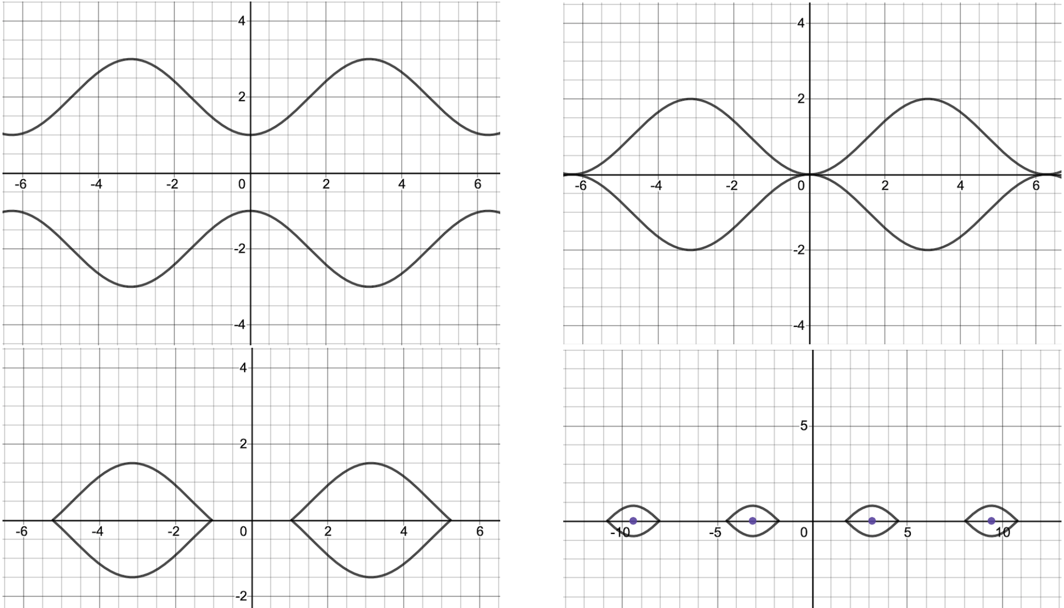
$$H = |\psi_3| + \rho \cos(\theta - \phi)$$

$$\psi_3 = \begin{cases} H - \rho \cos(\theta - \phi), \psi_3 \geq 0 \\ -(H - \rho \cos(\theta - \phi), \psi_3 < 0 \end{cases}$$

Фазовый портрет системы $(C_2 = 0, C_1 = 1)$



Семейства экстремальных фазовых траекторий



Дискретные симметрии

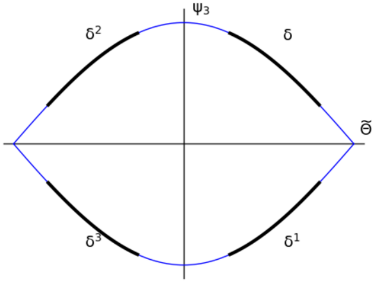
В данной задаче 4 типа дискретных симметрий:

$$\varepsilon_0 : (\widetilde{\theta}, \psi_3) \to (\widetilde{\theta}, \psi_3),$$
$$\varepsilon_1 : (\widetilde{\theta}, \psi_3) \to (\widetilde{\theta}, -\psi_3),$$
$$\varepsilon_2 : (\widetilde{\theta}, \psi_3) \to (-\widetilde{\theta}, \psi_3),$$
$$\varepsilon_3 : (\widetilde{\theta}, \psi_3) \to (-\widetilde{\theta}, -\psi_3).$$

Очевидно, первая представляет собой тождественное преобразование, вторая - осевая симметрия относительно оси ψ_3, третья - осевая симметрия относительно оси $\widetilde{\theta}$, четвертая - центральная симметрия (композиция второй и третьей). Пусть $t \in [0, T]$. С точки зрения смены управления и обращения времени данные преобразования симметрии действуют так:

$$\varepsilon_0 : u(t) \to u(t),$$
$$\varepsilon_1 : u(t) \to -u(T-t),$$
$$\varepsilon_2 : u(t) \to u(T-t),$$
$$\varepsilon_3 : u(t) \to -u(t).$$

Дискретные симметрии



$$\varepsilon_0 : \delta \to \delta,$$

$$\varepsilon_1 : \delta \to \delta^1,$$

$$\varepsilon_2 : \delta \to \delta^2,$$

$$\varepsilon_3 : \delta \to \delta^3.$$

Полученные результаты

1) Уменьшено число неизвестных параметров путем анализа непрерывных симметрий задачи
2) Конструктивно показана глобальная управляемость управляемой системы
3) Найдены экстремальные траектории с помощью принципа максимума Понтрягина и исследования фазового портрета вертикальной подсистемы гамильтоновой системы
4) Произведен анализ дискретных симметрий задачи

Научная новизна

Решение задачи Маркова - Дубинса хорошо известно. Научная новизна исследования заключается в новом подходе к решению, основанном на анализе фазового портрета вертикальной подсистемы гамильтоновой системы. Описание непрерывных симметрий задачи позволяет сократить число неизвестных. Описание дискретных симметрий задачи дает представление об оптимальных фазовых траекториях. Глобальная управляемость доказана конструктивно.

Планы

В дальнейшем представляется возможным описать множество оптимальных управлений и множества достижимости задачи Дубинса, а также описать оптимальный синтез задачи: для каждой конечной точки q_1 можно предъявить явно все оптимальные управления и оптимальные траектории, соединяющие q_0 с q_1. Предполагается также разработка демонстрации Wolfram с построением множества достижимости задачи Дубинса в пространстве (x, y, θ).

Не исключено последующее сотрудничество и работа над другими задачами геометрической теории управления.

Спасибо за внимание!