А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, 1987, том 16, 5–85

УДК 514.763

# НЕГОЛОНОМНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ГЕОМЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

*А. М. Вершик, В. Я. Гершкович*

## СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

0. Неголономное многообразие есть гладкое многообразие, снабженное гладким распределением. Это распределение, вообще говоря, неинтегрируемо. Термин «голономный» (буквально: «γολοφ» — цельный, «υομοφ» — закон) — всеобщий, интегральный, интегрируемый — ввел Герц. «Неголономность», тем самым, синоним «неинтегрируемости».

Неголономное многообразие есть геометрический (точнее кинематический) эквивалент динамической неголономной системы с линейными ограничениями. Имеется два основных способа построения динамики на неголономных многообразиях, условно называемых вариационным и механическим (см. далее).

Цель настоящего обзора — дать по возможности замкнутое изложение основных понятий геометрии распределений и начать систематическое построение теории неголономных динамических систем. По своему характеру эта статья несколько отличается от других обзоров серии, из-за особенностей истории данной проблематики, о которых мы скажем ниже.

Из-за недостатка места в этом томе помещены лишь первые главы нашего обзора: геометрия распределений и вариационная динамика. Геометрия и динамика неголономных механических систем, неголономные связности и др. будут рассмотрены отдельно. Однако в настоящем введении обсуждаются все эти темы, во всяком случае, в своей исторической части. Ряд задач неголономной механики рассмотрен в [8]. Обзор содержит современное изложение ряда предшествующих работ и новые, ранее не публиковавшиеся результаты.

1. Теории неголономных систем и неголономной геометрии посвящено очень много работ, среди них несколько работ крупных геометров первой половины XX века и огромное количество работ, выполненных в послевоенные годы. Тем не менее, эта теория не приобрела известности у широкого круга математиков. Например, большинство руководств по римановой геометрии и вариационному исчислению не содержат ничего или почти ничего на эту тему, кроме разве лишь классической теоремы Фробениуса. За исключением недавней книги Гриффитса [73], где приводятся некоторые факты (теорема Рашевского—Чжоу), в учебниках редко встретишь даже упоминание термина «неголономный». В то же время имеется много оснований для неудовлетворенности таким положением вещей.

Во-первых, в механике неголономные задачи всегда занимали достаточно важное и почетное место и, если учесть традиции детального изучения математиками классической динамики и вытекающих из нее математических структур, то невнимание к неголономной механике со стороны математиков бросается в глаза. Малоизвестно даже, что неголономная механическая задача не есть вариационная задача (см. ниже). Во-вторых, вариационные неголономные задачи обнаруживают много общих черт с задачами оптимального управления, которому посвящено столько работ последних лет. Это сходство не отмечалось до недавнего времени. Оставаясь классическими по постановке, неголономные вариационные задачи по характеру ответов более похожи на неклассические задачи (структура множеств достижимости, см. гл. 2). Но в учебниках по классическому вариационному исчислению отсутствуют даже теоремы существования для простейшей неголономной задачи и соответствующая теорема главы 2 нашей статьи опирается на факты, открытые сравнительно недавно в связи с неклассическими задачами. В третьих, задачи термодинамики (Гиббс, Каратеодори) квантовой теории (Дирак) также приводят к неголономным вариационным постановкам, но современный математический анализ этого класса задач пока еще не осуществлен.

В четвертых, неголономные задачи тесно связаны с общей теорией уравнений в частных производных; наиболее известным фактом, связывающим их, являются теоремы Хёрмандера и А. Д. Александрова (о гипоэллиптичности и гипогармоничности см. [2], [101]). Однако изучение этого вопроса с точки зрения неголономной теории явно незакончено[1].

Наконец, общая математическая теория динамических систем, о расцвете которой можно судить по настоящему изданию, могла бы, как мы увидим из дальнейшего, найти много новых задач, парадоксов, примеров в неголономной динамике, связанной с вариационной задачей.

2. Перейдем к краткому изложению истории предмета: на наш взгляд в ней содержится также объяснение изолированности неголономной проблематики, имевшей место до настоящего времени. Неголономная теория начала систематически создаваться в 20—30-х гг. XX века по наметкам более ранних работ. Эти основы содержались в классических работах по неголономной механике многих физиков и математиков: Герц, Фосс, Гёльдер, С. А. Чаплыгин, Аппель, Раус, П. В. Воронец, Кортевег, Каратеодори, Горак, Вольтерра и др. См. обзоры [3], [100]. В [31] отмечается, что уже Эйлер рассматривал неголономные механические задачи. Но четкое понимание специфики неголономных механических задач появилось лишь в конце XIX—начале XX века. Имя Герца («Принципы механики», 1894) должно быть названо в числе первых. Другой, менее известный источник, физика, а именно, — работы Гиббса и Каратеодори по основаниям термодинамики, где присутствует простейшая неголономная структура — контактная. Если обратиться собственно к математике и в частности к теории рас-

[1] О связи теории уравнений в частных производных и неголономных метрик см. также в работе Nagel A., Stein E. M., Wainger S., Balls and metrics defined by vector field. I. Acta Math., 1985, 155, № 1—2, 147.

пределений, которую нельзя отделить от неголономных теорий, то следовало бы начать с теории пфаффовых систем и последующих работ по общей теории дифференциальных уравнений. Особую роль играют здесь работы Э. Картана, который ввел в обиход аппарат внешних дифференциальных форм и корасппределений; к сожалению, он мало использовался в неголономной проблематике. Наконец, в самой геометрии, начиная с работ Иссали (1880 г.), а возможно и ранее, возникла традиция такого изучения «неголономных поверхностей», т. е. двумерных неголономных распределений в трехмерном пространстве, при котором обобщались бы понятия обычной теории поверхностей в 3-мерном пространстве. Эта линия в дальнейшем развивалась у нас Д. М. Синцовым и его учениками, а также представителями ряда последующих советских геометрических школ. Однако даже среди геометров эти работы не были достаточно известны и большой роли это направление не играло.

3. В 20-х гг. после работ Леви-Чивита и Г. Вейля, определивших понятие римановой и аффинной вязкости и вскрывших связь геометрии и механики, появилось понимание того, что и неголономная механика должна использоваться для выявления новых геометрических структур, а те, в свою очередь, давать механике и физике удобный точный язык. Начало такого взаимодействия было положено Врэнчану и Сингом. В СССР неголономную проблематику в те годы активно пропагандировал В. Ф. Каган. Он же предложил следующую тему в конкурсе 1937 г. на премию Н. И. Лобачевского [12]: «Установить общие основы учения о неголономных пространствах... желательны приложения к механике, физике или теории интегрирования пфаффовых уравнений».

Наиболее серьезные достижения по неголономной геометрии в ее связи с механикой относятся к предвоенным годам и принадлежат упомянутым выше Врэнчану, Сингу, а также Схоутену и В. В. Вагнеру. Румынский математик Врэнчану в двух коротких заметках и статье [104] впервые четко сформулировал понятие неголономной структуры на римановом многообразии и ее отношение к динамике неголономных систем. Синг [98], [99] рассмотрел вопрос об устойчивости движения по инерции неголономных механических систем, предвосхитив по сути понятие кривизны неголономного многообразия, которое далее было определено в два этапа. Голландский геометр Схоутен определил то, что позже было названо усеченной связностью, т. е. параллельный перенос некоторых векторов вдоль некоторых векторных полей и соответствующий тензор кривизны; при этом геодезические этой связности и были траекториями, о которых шла речь выше. Наконец, советский геометр В. В. Вагнер в серии работ, удостоенных в 1937 г. премии Казанского университета им. Н. И. Лобачевского, для молодых советских математиков, сделал следующий важный шаг. Он построил (весьма сложным способом) общий тензор кривизны, продолжающий тензор Схоутена, который отвечал всем обычным требованиям, например, он обращается в нуль в том и только в том случае, когда связность Схоутена—Врэнчану — плоская. В дальнейших работах В. В. Вагнер обобщал и развивал эти исследования (Схоутен был оппонентом по диссертации В. В. Вагнера).[1)]

**4.** Если динамике «прямейших» (т. е. классической неголономной механике) посвящено много работ в основном 20-40-х гг., то о динамике «кратчайших», т. е. вариационных неголономных задачах написано столь мало, что основные работы мы можем здесь перечислить. Началом развития этих работ следует считать работу Каратеодори (1909), доказавшего соединимость любых двух точек на контактном многообразии допустимой кривой. (Без доказательств это утверждение можно найти в более ранних работах, например у Герца). Любопытно, что Каратеодори эта теорема понадобилась в связи с обоснованием термодинамики, а точнее в связи с точным определением термодинамической энтропии. Хотя эта теорема носит кинематический характер, она может быть использована для определения вариационной (неголономной метрики), называемой иногда метрикой Карно—Каратеодори (см. гл. 3). Обобщение теоремы на произвольное вполне неголономное многообразие было дано почти одновременно последователем Каратеодори—Чжоу в 1939 г. и независимо П. К. Рашевским в 1938 [46]. Непосредственно вариационным задачам посвящена работа Шенберга, перенесшего на неголономный случай некоторые результаты классического вариационного исчисления. В работе Франклина и Мура [67] проведено сравнение неголономной вариационной и механической задач. В последнее время появился ряд работ, в которых приведена механическая (оптико-механическая) интерпретация неголономной вариационной задачи [8], [36], [37].

**5.** Прежде чем переходить к описанию содержания работы, поясним обстоятельства, возможно, объясняющие, упоминавшийся выше разрыв между важностью тематики и ее незаметным положением в «большой» математике. Дело в том, что изложение во многих работах по этой тематике было весьма неясным даже, если делать скидку на сложности «координатного изложения». Правильнее сказать, что эта теория, не слишком простая по существу, и не могла быть изложена ясно в те годы. Она нуждалась прежде всего в понятии связности в главном расслоении во всей или почти всей общности. Однако все это не было использовано в те годы. Мучения, связанные с от-

[1)] Изложение основной работы В. В. Вагнера на более современном языке появилось недавно в работе Горбатенко Е. М., Дифференциальная геометрия неголономных многообразий (по В. В. Вагнеру). Геом. сб. Томск. ун-т 1985, 31—43.

сутствием языка, разрешались огромными трудночитаемыми текстами, из которых нелегко извлечь даже понятия, не говоря уже о теоремах. Работы не были восприняты и поняты в нужной мере.[1] Нужны были струи, ростки, группы струй диффеоморфизмов и т. д. Это понимал Э. Картан, который, хотя и не занимался специально данной темой, однако не раз (например, по иронии, в том же томе [12], посвященном конкурсу им. Н. И. Лобачевского) писал о необходимости использовать связность в главном расслоении для неголономных задач. Может быть из-за всего этого грандиозная перестройка всей дифференциальной геометрии на «бескоординатный» лад в 50-60-х гг. не затронула неголономную теорию, пик интереса к которой к тому времени уже прошел и которая поэтому осталась в тени на долгие годы. В то же время многие работы последующих лет по неголономной теории, хотя уже и использовали современный язык, были оторваны от животворных приложений, из которых исходили упомянутые нами авторы предвоенных лет.

Современная дифференциальная геометрия, полностью обновив свой язык после 50-60-х гг., заняла одно из центральных мест в математике наших дней, стала вместе с топологией, теорией групп Ли, теорией особенностей и др. подлинной математической основой механики и теоретической физики вообще. Инвариантное изложение основ динамики позволило использовать мощные математические средства в этой области. Этот процесс постепенно затрагивает неголономную теорию. В самое последнее время связность Схоутена—Врэнчану была переоткрыта в работе [18], где последовательно излагались понятия механики в терминах дифференциальной геометрии (см. также [19], [70]), в частности, показано, что из локального принципа Даламбера как точного геометрического постулата следует упоминавшаяся теорема о геодезических в неголономной теории. Тензор Вагнера, как мы увидим далее, оказался в действительности тензором кривизны некоторой связности в главном расслоении, описываемой довольно просто.

Значительная часть усилий авторов была направлена на то, чтобы извлечь из литературы прошлых лет и представить в современной форме конструкции теории неголономных многообразий. Эта работа не вполне закончена, но без нее, видимо, нельзя осуществить последовательное развитие основной темы — построение качественной и геометрической теории неголономных динамических систем, аналогично другим теориям

[1] В. В. Вагнер (1948 г.) пишет «Недостаточный уровень математической строгости, типичный для дифференциальной геометрии, выражается также в отсутствии точных определений понятий геометрического пространства, многомерной поверхности..., это отставание дифференциальной геометрии сделалось особенно угрожающим после того, как непосредственная связь ее с теоретической физикой уменьшилась» и т. д.

динамических систем (гамильтоновой, гладкой, эргодической и др.). В этой работе мы старались определить и описать понятия и пространства и разобрать самые простые (трехмерные) примеры. Своими указаниями на разбросанную литературу авторам помогли многие математики и физики. Авторы особенно благодарны А. Д. Александрову, В. И. Арнольду, А. М. Васильеву, А. М. Виноградому, А. В. Гохману, В. В. Козлову, Н. В. Иванову, Ю. Г. Лумисте, Ю. И. Любичу, Н. Н. Петрову, А. Г. Чернякову, В. Н. Щербакову и Я. М. Элиашбергу.

6. Перейдем к краткому описанию общей структуры. Основой неголономной динамики служит геометрия распределений, и ей посвящена первая глава. Наиболее известным и простым примером неголономного многообразия служит контактная структура, т. е. максимально неголономное распределение коразмерности один. Поскольку о распределениях большей коразмерности литература крайне бедна, то в § 1, гл. 1 даются основные определения и приводятся наиболее важные примеры распределений. В § 2 исследуются распределения общего положения, дана классификация распределений.

Как уже указывалось, имеются две совершенно различные динамики, связанные с неголономным римановым многообразием, — динамика «прямейших» или «механическая» и динамика «кратчайших» или «вариационная». Термины «прямейшая» и «кратчайшая» впервые в связи с механикой ввел Герц. Различие между ними, коротко говоря, в следующем. С помощью распределения можно построить так называемую усеченную связность [94]. Изучение ее геодезических и соответствующего потока связано с механикой систем (задачи о качении и др.) с линейными ограничениями (в общую теорию включают и нелинейные ограничения, см., например, в [18], [19]). Эти вопросы будут рассмотрены отдельно. Если же ограничить на распределение метрику, то мы получим новую метрику на многообразии. Ее геодезические (кратчайшие) есть предмет вариационной проблематики, подробно рассмотренной во второй главе. Фазовое пространство вариационных неголономных задач есть, так называемое, смешанное расслоение — прямая сумма распределения, как подрасслоения касательного расслоения, и его аннулятора как подрасслоения кокасательного расслоения. Вариационные задачи, как уже отмечалось, имеют и собственную механическую интерпретацию.

В первом параграфе гл. 2 излагаются основные конструкции и понятия, связанные с неголономной вариационной задачей — неголономный геодезический поток, неголономная метрика, неголономное экспоненциальное отображение, волновой фронт и т. д. Во втором параграфе вычисляются множества достижимости для неголономных задач (множества управляемости на языке теории регулирования).

В третьей главе мы рассматриваем неголономную вариационную задачу на группах Ли и однородных пространствах. Как обычно, задачи на группе Ли являются важнейшим классом примеров и полигоном для отработки методов и конструкций, переносимых затем на общую ситуацию. В первом параграфе мы занимаемся локальными вопросами — изучаем волновой фронт и $\varepsilon$-сферу неголономной римановой метрики. В § 2 проведено полное исследование динамики систем, порожденных неголономным геодезическим потоком на однородных пространствах трехмерных групп Ли.

## *Глава 1*

## ГЕОМЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

### § 1. Распределения и связанные объекты

**1.1. Распределения и дифференциальные системы.** В дальнейшем все объекты: многообразия, функции, отображения, распределения, векторные поля, формы и т. д. предполагаются бесконечно-дифференцируемыми, что особо не оговаривается.

Определение 1.1. Пусть $X$ — вещественное гладкое многообразие без края, $TX$ — касательное расслоение; подрасслоение $V\subset TX$, т. е. семейство подпространств $\{V_x\}_{x\in X}$ касательных пространств $V_x\subset T_x$, гладко зависящих от точки $x\in X$, называется *распределением*. Если $X$ связно, то число $\dim V_x=\dim V$ называется *размерностью* распределения.

В наиболее простом случае распределение устроено следующим образом: все $X$ разбиваются на подмногообразия (слои), а $V_x$ есть подпространство, касательное к слою, проходящему через точку $x$. В этом случае говорят, что распределение *интегрируемо* и определяет слоение, а слои называют максимальными интегральными подмногообразиями распределения; их размерность равна размерности $V$. Если $\dim V=1$ (поле прямых), то $V$ всегда интегрируемо, а интегральные подмногообразия есть (локально) интегральные кривые векторного поля, порождающего $V$.

В этой работе нас будет интересовать противоположный случай, т. е. неинтегрируемые или неголономные распределения. Простейший пример неголономного распределения — двумерное распределение в $\mathbf{R}^3$; например, $V_x=\mathrm{Lin}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, -\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$, $x=(x_1, x_2, x_3)$. Здесь, как часто это делается, распределение задается как линейная оболочка векторных полей. Другой способ задания того же распределения таков: $V$ есть аннулятор 1-формы $x_1dx_2+dx_3$, задающей контактную структуру на $\mathbf{R}^3$ (см. 1.5). Задание распределения как аннулятора множества форм также будет часто использоваться.

Каждое распределение в $X$ можно рассматривать как сечение *расслоения Грассмана,* присоединенное к $TX$, т. е. расслоения $k$-мерных подпространств касательных пространств. Тем самым, естественно возникает пространство распределений данной размерности $\mathscr{V}_k(X)$ с естественной топологией $C^\infty$-сечений. Если $X$ — открытый шар, то при $k \geqslant 2$ открытое всюду плотное множество в $\mathscr{V}_k(X)$ образует неинтегрируемые (и даже максимально неинтегрируемые — см. § 2) в каждой точке распределения. Наоборот, интегрируемость распределения, т. е. наличие слоения — редкое («нигде не плотное») событие.

Определение 1.2. Векторное поле $\xi$ на $X$, для которого при всех $x \in X$ $\xi_x \in V_x$, называется подчиненным или принадлежащим распределению $V = \{V_x\}$. Если $V_x = \mathrm{Lin}\{\xi_x^i,\ i = 1, \ldots, n\}$, то говорят, что векторные поля $\xi^1, \ldots, \xi^n$ порождают распределение $V$. Интегральная кривая $\gamma$ векторного поля, принадлежащего $V$, называется *допустимой* (относительно $V$): $\dot\gamma_x \in V_x$, $x \in X$.

Напомним, что векторное пространство (над $\mathbf{R}$) гладких векторных полей $\mathrm{Vect}X$ образует алгебру Ли относительно скобки полей $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$ (векторное поле можно интерпретировать как дифференцирование, произведение понимается в смысле суперпозиции операций дифференцирования), кроме того, $\mathrm{Vect}X$ есть $C^\infty(X)$-модуль, поскольку определено умножение $\xi \in \mathrm{Vect}X$ на $f \in C^\infty(X)$.

Если $V$ — распределение, то множество принадлежащих ему векторных полей, т. е. сечений $V$, образует $C^\infty$-подмодуль в $\mathrm{Vect}X$. Дадим

Определение 1.3 *Дифференциальной системой* называется линейное пространство векторных полей на многообразии $X$, образующее модуль над кольцом функций.[1)]

Как сказано выше, каждое распределение $V$ порождает дифференциальную систему $N(V)$, но, оказывается, существуют другие дифференциальные системы, отвечающие «распределениям с особенностями», — полям линейных подпространств в $TX$ с непостоянной размерностью. Такие распределения возникают естественно. Например, скобка Ли двух распределений есть уже, вообще говоря, распределение с особенностями, что и мотивирует необходимость предыдущего определения.

Если $F$ — дифференциальная система, то множество всех тех векторов $v \in T_xX$, для которых существует $\xi \in F$, $\xi_x = v$, образует линейное подпространство $V_x \subset T_x$. Если $\dim V_x$ есть непрерывная функция от $x$, то $F$ порождено распределением $V = \{V_x\}$, $F = N(V)$, в противном случае такого распределения нет.

---

1) Некоторые авторы называют дифференциальной системой распределение. Поскольку в русской литературе термин «распределение» устоялся, то мы используем термин «дифференциальная система» для другого понятия. Напомним, что понятие «$C^\infty(X)$-модуль» означает здесь возможность умножения векторных полей из $F$ на произвольный элемент $C^\infty(X)$: $\forall \xi \in F\ \forall f \in C^\infty(X)\ f\xi \in F$.

Предложение. Дифференциальная система на гладком многообразии $X$ есть пространство сечений распределения тогда и только тогда, когда она является проективным $C^\infty(X)$-модулем.

Напомним, что если $X$ — открытый шар, то всякий проективный $C^\infty(X)$-модуль свободен, поэтому в локальных задачах дифференциальная система, являющаяся свободным модулем, есть тоже самое, что распределение. (Свободный модуль есть прямая сумма нескольких экземпляров $C^\infty(X)$, проективный модуль есть прямое слагаемое свободного модуля□.)

Определение 1.4. Распределение $V$ (дифференциальная система $N$) *инволютивно*, если $N(V)$ (соответственно $N$) есть алгебра Ли; иначе говоря, скобка двух векторных полей, подчиненных $V$ (соответственно принадлежащих $N$), также подчинена $V$.

В дальнейшем мы будем интересоваться в основном локальными проблемами, поэтому введем ростковые и струйные аналоги основных понятий (о понятиях струй, ростков и т. п. см. [61], [71]). Обозначим через $W_n^r$, $1<r\leqslant\infty$, $n=1,\ldots$, пространство *r-струй векторных полей* в $0\in\mathbf{R}^n$, $\omega_n$ — пространство ростков векторных полей в окрестности $0\in\mathbf{R}^n$. Пространства $W_n^\infty\equiv W_n$ и $\omega_n$ образуют алгебры Ли относительно скобки полей, кроме того, эти пространства являются модулями соответственно над кольцами струй $(J_n^\infty)$ или ростков функций $(E_n)$.

Кольцо ростков $C^\infty$-функций $E_n$ является локальным кольцом, т. е. имеет единственный максимальный идеал $\mathfrak{M}_n$, порожденный ростками, обращающимися в 0 в $0\in\mathbf{R}^n$. Идеал плоских соотношений, т. е. $\mathfrak{M}_n^\infty=\bigcap\limits_k\mathfrak{M}_n^k$ устроен весьма сложно. Фактор-кольцо $E_n/\mathfrak{M}_n^\infty$ есть кольцо струй $J_n^\infty$, его описывает следующая теорема (см. [61])

Теорема Бореля

$$J_n^\infty=E_n/\mathfrak{M}_n^\infty\cong\mathbf{R}[[y_1,\ldots,y_n]].$$

Следовательно, это кольцо, как кольцо степенных рядов — нётерово, т. е. имеет лишь конечные строго возрастающие цепочки идеалов (см. [61]).

Название «дифференциальная система» мы сохраним за подмодулями и в $W_n$, и в $\omega_n$. Таким образом, *струя* (росток) *распределения* есть на этом языке свободный подмодуль в $W_n(\omega_n)$.

Аналогично сказанному выше, дифференциальная система $F$ порождается ростком распределения (и является свободным модулем над $E_n$) тогда и только тогда, когда $\dim V(x)$ есть росток постоянной функции, здесь $V(x)=\{\xi(x),\ \xi\in F\}$.

**1.2. Теорема Фробениуса, флаг распределения.** Классическая теорема Фробениуса (см. [96]) утверждает, что всякое инволютивное распределение интегрируемо. Интегрируемость распределения означает наличие слоения, касательные пространства к слоям которого образуют данное распределение. Мы приведем доказательство теоремы, выделяющее алгебраическую сторону вопроса, (см. также [101]). Будет рассматриваться лишь локальный случай, так как теорема Фробениуса имеет локальный характер.

Теорема Фробениуса. Росток (или струя) всякого инволютивного распределения порождается коммутирующими векторными полями. Более точно, пусть $N$ — дифференциальная система (в струях или ростках), являющаяся подалгеброй и свободным $E_n$-модулем размерности $m$, тогда $N$ порождается, как модуль, $m$ коммутирующими векторными полями.

Следствие. Множество струй (ростков) инволютивных распределений данной размерности образует одну орбиту относительно группы струй (ростков) диффеоморфизмов $\mathbf{R}^n$. Иначе говоря, струи (ростки) двух инволютивных распределений одной и той же размерности могут быть переведены одна в другую струей (ростком) некоторого диффеоморфизма.

Тем самым, орбита определяется по 1-струе распределения, так как инволютивность есть 1-струйное условие.

Заключительная часть теоремы Фробениуса в обычной постановке (построение слоев) после этого сводится к применению теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку для коммутирующих полей можно последовательно строить интегральные кривые, что и дает нужный слой.

Доказательство. Пусть $V$ — росток инволютивного распределения размерности $m$ в $\mathbf{R}^n$, порожденного $\xi_1, \ldots, \xi_m \in W_n$. Докажем индукцией по $m$, что $V$ порождено коммутирующими векторными полями $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Выберем в $\mathbf{R}^n$ систему координат $\{x_i\}_{i=1}^n$ так, чтобы $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Разложим $\xi_i$ по $\frac{\partial}{\partial x_i}$: $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $c_{ij} \in E_n$, где $E_n$ — кольцо ростков гладких функций в $\mathbf{R}^n$.

Система векторных полей $\tilde{\xi}_i = \xi_i - c_{i,1}\xi_1$, $i = 2, \ldots, m$, инволютивна. По предположению индукции найдутся коммутирующие векторные поля $\Psi_2, \ldots, \Psi_m$ такие, что $V(\tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_m) = V(\Psi_2, \ldots, \Psi_m)$.

Выберем систему координат $\{y_i\}$ в $\mathbf{R}^n$ так, чтобы $\Psi_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$, $i = 2, \ldots, m$, и разложим $\xi_1$ по $\frac{\partial}{\partial y_i}$: $\xi_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Возьмем $\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \sum_{i=2}^{m} b_i \xi_i$ $(b_i \in E_n)$. Тогда $\tilde{\xi}_1 = b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{j=m+1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$. Найдется $j \in \{1, m+1, m+2, \ldots, n\}$ такой, что $b_j(0) \neq 0$. Мы можем считать, перенумеровав, если нужно, координаты, что $j = 1$. Положим $\Psi_1 = b_1^{-1}\tilde{\xi}_1$. Тогда $V(\Psi_1, \ldots, \Psi_m) = V(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и поля

$\Psi_i$ коммутируют. Пояснения требует лишь то, что $[\Psi_i, \Psi_1]=0$ при $i\geqslant 2$. Действительно

$$[\Psi_i, \Psi_1]=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{b_j}{b_1}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}, \tag{*}$$

с другой стороны, найдутся такие функции $c_i^k$, $k=1, \ldots, m$, что

$$[\Psi_i, \Psi_1]=\sum_{k=1}^{m}c_i^k\Psi_k=\sum_{k=1}^{m}c_i^k\frac{\partial}{\partial y_k}+\sum_{k=1+m}^{n}c_i^1 b_1^{-1}b_k\frac{\partial}{\partial y_k}. \tag{**}$$

Сравнивая коэффициенты в (*) и (**), получаем $c_i^k=0$ при всех $k$. Теорема доказана.

Подмногообразие $Y\subset X$ называется *интегральным* для распределения $V$, если $T_xY\subset V_x$, $x\in Y$. Если распределение неинволютивно, и поэтому неинтегрируемо, то у него нет интегральных подмногообразий размерности, равной размерности распределения во всех точках, однако интегральные подмногообразия существуют (например, интегральные кривые векторного поля, подчиненного $V$). Оказывается, в случае распределений общего положения и коразмерности $\geqslant 3$ неодномерных интегральных многообразий нет ни в одной точке (подробнее этот вопрос будет рассмотрен отдельно).

Пусть $N$ — есть дифференциальная система в $W_n$ (соответственно в $\omega_n$).

Определение 1.5. *Флагом дифференциальной системы* $N$ (или короче флагом $N$) называется последовательность дифференциальных систем $N_1=N$, $N_2=[N, N], \ldots,$ $N_l=[N_{l-1}, N]$; здесь $[A, B]$ есть $C^\infty$-подмодуль, порожденный скобками $[\alpha, \beta]$, $\alpha\in A$, $\beta\in B$.

Предложение. Последовательность $N_1, N_2\ldots\subset W_n$ стабилизируется, т. е. существует такое $r$, что $N_{r-1}\neq N_r=N_{r+1}=\ldots$, при этом $N_r$ есть подалгебра.

Доказательство. Множество струй векторных полей — $W_n$ — есть конечно порожденный $J_n$-модуль. Кольцо $J_n$ — нётерово по теореме Бореля (см. конец п. 1.1), значит модуль $W_n$ — нётеров, а тогда должна обрываться возрастающая цепочка его подмодулей $N_1\subset N_2\subset\ldots\subset W_n$.

Если $N_r=W_n$, то дифференциальная система $N$ называется вполне неголономной, наименьшее $r$ такое, что $N_r=W_n$ называется *степенью неголономности* $N$ (степень неголономности зависит от точки многообразия).

Пусть $V$ — распределение, $N=N(V)$ — порожденная им дифференциальная система; $N(V)=N_1\subset N_2\subset\ldots$ — ее флаг. Пфаффовы системы $N_i$, вообще говоря, не порождаются распределениями (см. п. 1.1), если это имеет место для всех $i$, то определен флаг распределения $V=V_1\subset V_2\subset\ldots$.

Определение 1.6. Распределение $V$ называется *регулярным*, если определен его флаг.

Пусть $n_i = \dim V_i$. Вектор $n_1 < n_2 < \ldots$ называется *вектором роста* распределения $V$. Последовательность $V_i$ очевидно стабилизируется. Если для некоторого $r$ $V_r = TX$, то *распределение $V$ вполне неголономно* и $r$ называется его *степенью неголономности*. Если последовательность $V_i$ стабилизируется при $i=1$, $V_1 = V_2$, то $V$ — подалгебра и мы имеем дело с интегрируемым случаем.

**1.3. Кораспределения и пфаффовы системы.** Все понятия, введенные выше, допускают дуализацию: распределению соответствует кораспределение, дифференциальной системе — пфаффова система. Такое соответствие имеется как для глобальных, так и для струйных и ростковых понятий. Классики (например, Картан) гораздо чаще использовали язык форм и кораспределений, а не язык векторных полей. Например, в механике и геометрии распределение чаще задают как аннулятор кораспределений. Но некоторые авторы, например Вессио, в те же годы (1926) писали, что многие идеи теории Картана выглядят более естественно (по крайней мере с алгебраической точки зрения) на языке векторных полей. Удобство пространств форм — в наличии внешнего дифференцирования и произведения, удобство пространства векторных полей — в наличии структуры алгебры Ли. В дальнейшем, $\Omega^1(X)$ — пространство 1-форм на $X$, т. е. гладких сечений $T^*X$.

Определение 1.7. *Кораспределением* на $X$ называется подрасслоение кокасательного расслоения $T^*X$ или, иначе говоря, поле подпространств кокасательных пространств, гладко зависящих от точки. *Пфаффовой системой* называется подмодуль $C^\infty(X)$-модуля $\Omega^1(X)$.

Аннулятор распределения $V$, т. е. $V^\perp = \{\omega : \langle\omega, \xi\rangle = 0 \ \forall \xi \in V\}$ есть кораспределение. Аналогично, аннулятор кораспределения есть распределение. В дальнейшем используется и язык векторных полей и язык дифференциальных форм. Ниже приведена таблица параллельных понятий. Переход от одних понятий к другим основан на двойственности пространств полей (струй полей, ростков полей) и 1-форм (соответственно струй и т. д.) как модулей над кольцом функций (соответственно струй, ростков функций). Обозначим $\overset{*}{W_n}$ пространство $\infty$-струй 1-форм в $0 \in \mathbf{R}^n$, $\omega_n$-ростков, а $\Omega^1(X)$ — 1-форм на $X$, $\langle\xi, \omega\rangle$ — спаривание поля и формы в функции (например, $W_n \times W_n^* \to J_n$ и т. п.).

Следующее утверждение является двойственным к утверждениям п. 1.2.

Предложение 1. Пфаффова система порождена кораспределением тогда и только тогда, когда она является проективным $C^\infty(X)$-модулем.

Напомним, что в пространстве всех дифференциальных форм $\Omega^*(X)$ имеется кососкоммутативная операция внешнего произведения, превращающая $\Omega^*(X)$ в алгебру (и супералгебру), и операция внешнего дифференцирования $d$ (см. [42]).

С их помощью можно выразить понятие инволютивности кораспределения.

Пфаффова система, в частности кораспределение, порождает идеал $J(V^*)$ во внешней алгебре $\Omega^*(X)$. Идеал $J\subset\Omega^*$ называется *дифференциальным,* если $dJ=\{d\omega\,|\,\omega\in J\}\subset J$. Рассмотрим распределение $V$, предположим, что $V_2=[V, V]$ есть распределение. Вычислим его аннулятор $V_2^\perp$. Поскольку $V\subset V_2$, то $V_2^\perp\subset V^\perp$. Проверим, что $V_2^\perp=U$, где

$$U=\{\omega\in V^\perp : d\omega\in J(V^\perp)\}.$$

Действительно, пусть $\omega\in V^\perp$, $d\omega\in J(V^\perp)$, тогда по *формуле Маурера—Картана* для $\xi, \eta\in V$ получаем

$$\omega[\xi, \eta]=d\omega(\xi, \eta)-\xi\omega(\eta)-\eta\omega(\xi)=d\omega(\xi, \eta\cdot=0,$$

так как $d\omega=\sum_i\omega_i\wedge\alpha_i$, где $\omega_i\in V^\perp$. Таким образом, $V_2^\perp\supset U$. Обратное включение столь же просто. Таким образом получаем следующее утверждение:

Предложение 2. Пусть $V$ — распределение, $V^*$ — его аннулятор. Тогда $V$ инволютивно, иначе говоря, дифференциальная система $N(V^*)$ является подалгеброй Ли в том и только том случае, когда идеал $J(V^*)$ дифференциален.

Действительно, если распределение $V$ интегрируемо, то

$$V_2=V\Leftrightarrow(\forall\omega\in J(V^\perp) : d\omega\in J(V^\perp))\Leftrightarrow dJ(V^\perp)\subset J(V^\perp),$$

т. е. идеал $J(V^\perp)$ дифференциален.

Это предложение иногда называют *теоремой Картана.*

Если $V\subset V_2\subset\ldots$ — флаг распределения (см. п. 1.2), то мы можем последовательно вычислить элементы кофлага кораспределения $V^\perp\supset V_2^\perp\supset\ldots$, где $V_l^\perp$ — есть аннулятор $V_l$, по аналогичным формулам с помощью дифференциалов форм из $V^\perp$. Эта конструкция укладывается в более общую схему, которая дает независимое и более раннее (см. [73]) определение *кофлага пфаффовой системы.* Пусть $N^*$ — пфаффова система (в предыдущем случае $N^*=N^*(V^\perp)$), т. е. $C^\infty(X)$ — модуль 1-форм, аннулирующих $V$. Положим $N_1^*=N^*$. Пусть $N_1^*, \ldots, N_i^*$ уже построены. Рассмотрим отображение $d: N_i^*\to\Omega^*$ и положим $N^*_{i+1}=d^{-1}N_i^*$. Таким образом имеем убывающую цепочку идеалов в $\Omega^* : N_1^*\supset N_2^*\supset\ldots$. Идеал $J\subset\Omega^*$ будем называть *специальным*, если он порождается (как идеал) множеством лежащих в нем 1-форм. Заметим, что кофлаг всегда состоит из специальных идеалов. Поэтому можно считать кофлаг последовательностью пфаффовых систем.

Сформулируем утверждение о двойственности флага и кофлага. Пусть $N$ — дифференциальная система, $N^*$ — аннулятор $N$. Обозначим $N^{**}$ — бианнулятор $N$; $N^{**}\supset N$ и, вообще говоря, $N$ и $N^{**}$ не совпадают, однако имеет место

Предложение 3. Пусть $N$ — дифференциальная система, $\{N_i\}$ — ее флаг, $N^*=M$ — аннулятор $N$ в $\Omega^*$, $\{M_i\}$ — кофлаг пфаффовой системы $N^*$. Тогда $M_i^*=N_i^{**}$ и $N_i^*=M_i^{**}$.

Из предложения 3 и предложения п. 1.1. получаем

Предложение 4. Для любой пфаффовой системы $M$ кофлаг $M_i$ стабилизируется.

Полная неголономность распределения $(V_k = TX)$ равносильна сходимости кофлага к 0, т. е. $N_k^* = 0$.

В следующей таблице приведена система двойственных понятий

| | |
|---|---|
| 1. Распределение на $X$ | Кораспределение (подпучок в $T^*X$) |
| 2. Дифференциальная система (на многообразии, в струях, ростках) | Система Пфаффа (подмодуль в пространстве 1-форм на многообразии и т. д.) |
| 3. Инволютивная дифференциальная система | Система Пфаффа (замкнутая относительно внешнего дифференцирования), являющаяся дифференциальным идеалом |
| 4. Флаг распределения | Кофлаг кораспределения |

Введем теперь новое понятие, играющее далее основную роль.

Определение 1.8. Пусть $X$ — гладкое многообразие, $V$ — распределение на $X$, $V^\perp$ — кораспределение, являющееся аннулятором $V$. Расслоение $\mathrm{ken}\, V = V \oplus V^\perp$ над $X$ называется *смешанным расслоением* — (*«кентавром»*), порожденным распределением $V$.

Слой над $x \in X$ есть $V_x \oplus V_x^\perp$, т. е. множество пар (вектор из $V_x$ и ковектор из $V_x^\perp$). Смешанное расслоение не является расслоением, присоединенным к какому-либо главному расслоению.

Смешанное расслоение есть фазовое пространство для неголономных динамических систем. Физическая интерпретация компонент $V^\perp$ — реакции связи или множители Лагранжа (см. §§ 2, 3).

**1.4. Регулярные распределения.** Распределения являются значительно более обозримыми геометрическими объектами, чем дифференциальные системы. Однако, как уже говорилось, класс распределений не замкнут относительно взятия скобки Ли, поэтому приходится рассматривать более широкое понятие дифференциальных систем. Можно, однако, напротив сузить класс распределений и рассматривать *регулярные распределения* (см. п. 1.2). Аннулятор и бианнулятор регулярного распределения — регулярны. Поэтому предложение 3 пункта 1.3 для регулярных распределений упрощается — *флаг и кофлаг регулярного распределения находятся в двойственности.*

Предложения п. 1.1 позволяют переформулировать определение регулярности для каждого класса объектов:

1. Распределение $N$ на $X$ является регулярным, если для всех $i$ $N_i$ есть проективный модуль над кольцом $C^\infty(X)$.

2. Росток распределения $N$ регулярен, если все $N_i$ — сво-

бодные модули над кольцом $E_n$ или, что то же, для всякого $i$ $\dim N_i(y)$ — есть росток постоянной функции.

3. Струя распределения $V$ является регулярной, если $V_{i+1}/V_i$ — свободные модули над $J_n^\infty$.

Помимо удобства класса регулярных распределений, этот класс важен тем, что является случаем общего положения. Кроме того, к этому классу относятся важные частные случаи — связности на римановых многообразиях и левоинвариантные распределения на группах Ли.

Для регулярного распределения определено, как говорилось ранее, понятие размерности. Определим для него понятие *базиса*: набор ростков (струй) векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ ($n_1 = \dim V$) называется *базисом* регулярного распределения $V$, если

а) $\xi_1, \ldots \xi_{n_1}$ — базис распределения $V$ как $C^\infty$-модуля,

б) линейная оболочка скобок Ли длины $l$ базисных векторных полей порождает $V_l/V_{l-1}$.

Предложение. Росток всякого регулярного распределения имеет базис.

В п. 1.2 мы показали, что базис интегрируемого распределения выбором системы координат можно привести к стандартному виду: $\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Базис векторных полей регулярного распределения можно привести к некоторому специальному виду. Это приведение в теории распределений играет примерно ту же роль, что приведение матрицы к верхнетреугольному виду в линейной алгебре.

Пусть $k$ — степень неголономности распределения $V$; $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — базис $V$, положим $n_i = \dim V_i$, $n_0 = 0$. Выберем среди скобок Ли $[\xi_{i_1}, \xi_{i_2}]$ базисных векторных полей набор из $n_2 - n_1$ элементов $\xi_{n_1+j} = [\xi_{i_1^j}, \xi_{i_2^j}]$, $j = 1, \ldots, n_2 - n_1$, порождающих $V_2$ над $V_1$, далее среди скобок Ли длины 3 базисных векторных полей выберем $n_3 - n_2$ элементов $(i_1^j, i_2^j, i_3^j)$ таких, что $\xi_{n_2+j} = [\xi_{i_1^j}, [\xi_{i_2^j}, \xi_{i_3^j}]]$ порождают $V_3$ над $V_2$ и так далее. Определим на множестве натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$ функцию $\varphi$, положив $\varphi(i) = j$ при $n_{j-1} < i \leqslant n_j$.

Лемма (о квазитреугольной форме). Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — базис векторных полей регулярного распределения $V$. Тогда найдется система координат в $\mathrm{R}^n$, $x_i : \mathrm{R}^n \to R^1$, $i = 1, \ldots, n$, такая, что струи векторных полей $\xi_i$ будут иметь следующий вид ($r$ — степень ноголономности $V$):

$$J^{r-1}\xi_{i_0} = \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} + \sum_T \mu_{i_{l+1}, \ldots, i_1, i_0} \prod_{j=1}^{l} x_{i_j} \frac{\partial}{\partial x_{i_{l+1}}},$$

где $\mu_{i_{l+1}, \ldots, i_1, i_0} \in \mathrm{R}$. В множество $T$ входят наборы индексов $(i_{l+1}, \ldots, i_1, i_0)$ такие, что $l \leqslant r - 1$ и выполнены следующие три условия:

1) $i_1 < i_0$,
2) $i_{j+1} \geqslant i_j$ при $j > 0$,
3) $\varphi(i_{l+1}) \leqslant \sum\limits_{j=0}^{l} \varphi(i_j)$.

Систему координат в лемме будем называть *согласованной с базисом*; регулярное распределение с выбранным согласованным с ним базисом называется оснащенным (ср. [15]).

**1.5. Распределения, инвариантные относительно действия группы и некоторые канонические примеры.** Пусть на гладком многообразии $X$ свободно действует группа Ли $G$. Тогда $G$ естественно действует на касательном расслоении $TX$, а также на алгебре ростков и струй векторных полей на $X$, на кокасательном расслоении, на внешней алгебре дифференциальных форм $\Omega^*(X)$ (см. [96]). Будем обозначать все эти действия группы $G$ на всех этих пространствах единообразно $g: TX \to TX$ и т. д. Мы будем говорить, что $V$ (распределение, кораспределение, дифференциальная система) инвариантно относительно действия $G$, если $gV = V$ для всякого $g \in G$. Очевидно в точках, лежащих на одной орбите относительно действия группы $G$, распределение устроено одинаково — имеет один и тот же рост, одну и ту же степень неголономности. Флаг Ли распределения $V$ в точке $x$ переводится действием $g$ во флаг в точке $gx$. Если распределение $V$ регулярно в точке $x$, то оно регулярно и во всех точках $gx$, базис векторных полей $V$ в точке $x$ действием $g$ переводится в базис векторных полей $V$ в точке $gx$. Левоинвариантные распределения на группах или однородных пространствах есть один из основных объектов неголономной механики. Часто, например, положение механической системы описывается элементами группы Ли $G$, а связь (неголономная), накладываемая на систему, состоит в том, что скорость лежит в подпространстве (но не подалгебре) алгебры Ли (см. гл. 2). Кроме того, инвариантные распределения служат хорошим модельным классом для общих задач (см. далее).

Другим важным примером распределений, инвариантных относительно группы, являются связности в главных и присоединенных расслоениях, о них см. п. 1.6.

Мы рассмотрим два класса примеров:

1. Инвариантные распределения на группах Ли и однородных пространствах.

2. Канонические распределения на некоторых многообразиях.

Распределения на группах Ли и однородных пространствах. Левоинвариантные распределения на группах Ли (однородных пространствах) — это распределения, инвариантные относительно действия группы Ли на себе (на однородном пространстве) левыми сдвигами. Более точно, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$ и $A$ — подпространство, пусть

$L_g$ — левый сдвиг на $G: L_g h = gh$, $dL_g: TG \to TG$, $V(A) = \{dL_g(A)\}_{g \in G}$. Поскольку, в этом случае орбита действия одна, по сказанному выше, распределение регулярно, имеет один и тот же рост и степень неголономности во всех точках. Обратно, всякое левоинвариантное распределение получается таким способом и поэтому теория левоинвариантных распределений на группах Ли сводится к изучению подпространств алгебр Ли. Множество левоинвариантных $m$-мерных распределений на группе Ли $G$ (однородном пространстве группы $G$) можно таким образом отождествить с грассмановым многообразием $\mathrm{Gr}(m, \mathfrak{g})$ — множеством $m$-мерных плоскостей в $\mathfrak{g}$. Распределение $V(A)$ является интегрируемым, если $A$ есть подалгебра Ли $\mathfrak{g}$, $V$ является вполне неголономным, если $A$ порождает $\mathfrak{g}$.

Флаг Ли левоинвариантного распределения получается левым сдвигом возрастающей цепочки линейных подпространств $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и т. д. в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Базис левоинвариантного распределения можно выбрать из левоинвариантных векторных полей — левых сдвигов векторов линейного базиса $V \subset \mathfrak{g}$.

Рассмотрим инвариантные распределения на некоторых группах Ли.

а) Пусть $G = \mathrm{SO}(3)$ — группа вращений $\mathbf{R}^3$, сохраняющих ориентацию. Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(3)$ — ее алгебра Ли и $A \subset \mathfrak{g}$ — произвольное двумерное подпространство в $\mathfrak{g}$. Левоинвариантное распределение $V(A)$, порожденное $A$, является неголономным (вектор роста (2,3)). Пара $(G, V(A))$ есть конфигурационное пространство для задачи о движении твердого тела с закрепленным центром инерции, при этом одна из компонент мгновенной скорости (в подвижной системе координат) равна нулю.

б) Пусть $G = GL(n, \mathbf{R})$, $A \subset \mathrm{gl}(n, \mathbf{R})$, $2 \leqslant \dim A = t \ll n$. Очевидно, подпространство $A$ общего положения порождает всю алгебру Ли, и поэтому $V = V(A)$ — левоинвариантное распределение на $G$ — вполне неголономно. Отметим, что до некоторого $k = k(n)$ вектор роста $\{n_l\}$, т. е. размерности $V_l$ для подпространства общего положения такие же, как если бы $A$ было $n_1$-мерным пространством образующих свободной алгебры Ли (с $n_1$ образующими), и только размерности последних компонент меняются из-за конечномерности пространства. То же верно и для других простых групп (см. § 2).

в) Пусть $G = \mathrm{SO}(n+1, \mathbf{R})$ $n$-мерное подпространство общего положения $A$ в $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(n+1, \mathbf{R})$ порождает $\mathfrak{g}$ «за два шага», т. е. $A + [A, A] = \mathfrak{g}$. Распределение $V(\mathbf{A})$ на $G$ вполне неголономно и имеет степень неголономности — 2. В этом примере $n$ можно положить равным $\infty$.

г) Особенно важен для нас следующий пример. $G = N$ — трехмерная группа Гейзенберга верхнетреугольных матриц с единицей на диагонали; здесь также имеется единственное, с точностью до автоморфизма алгебры Ли, распределение, порождающее всю алгебру Ли. Например $V=\left\{\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\0&0&\beta\\0&0&0\end{pmatrix}, \alpha, \beta\in\mathbf{R}\right\}$ (о классификации неголономных плоскостей трехмерных алгебр Ли см. п. 1.7).

д) Обобщим предыдущий пример. Пусть $N$ — произвольная нильпотентная алгебра Ли. Рассмотрим ее нижний центральный ряд $N\supset N_1\supset\ldots\supset N_k\supset 0$, где $N_1=[N, N]$, $N_i=[N_{i-1}, N]$. Возьмем произвольное подпространство $V_1$, дополнительное к $N_1$. Пусть $\{V_i\}$ — его флаг. Тогда $V_i$ дополнительно к $N_i$, а степень неголономности есть длина нижнего центрального ряда. На соответствующей группе Ли, тем самым, задано левоинвариантное распределение.

Канонические распределения на некоторых многообразиях. Иногда многообразия снабжены определенными распределениями уже в силу своей внутренней структуры. Простейший пример — контактная структура на многообразии 1-струй (см. [6], [23], [73] и ниже). Очень полезен следующий пример.

е) Многообразие флагов. Пусть заданы целые числа $0<n_1<\ldots<n_k<n$, рассмотрим всевозможные наборы линейных подпространств $V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_k\subset V$, $\dim V_i=n_i$, $i=1,\ldots,k$; мы будем называть эти наборы $(n_1,\ldots,n_k)$-флагами или просто флагами. Они образуют *многообразие флагов* $\mathrm{Fl}(\{n_i\})$, являющееся однородным пространством группы $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ по некоторой параболической подгруппе. На многообразии флагов имеется каноническое распределение. Для определенности рассмотрим его для наиболее интересного случая $n_i=i$, $i=1,\ldots,n-1$, т. е. для многообразия полных флагов $\mathrm{Fl}$. Общий случай аналогичен. Имеем $\mathrm{Fl}=\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})/B$, где $B$ — борелевская подгруппа (максимальная разрешимая, т. е. подгруппа верхнетреугольных матриц). Распределение $W$ на $\mathrm{Fl}$ определяется следующим образом; пусть $x=e$ и $B$ — стандартная подгруппа $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, тогда $W_x\subset b$, где $b$ — алгебра Ли группы $B$ (борелевская подалгебра), $W$ есть образ $n-1$-мерного подпространства $\gamma$ матриц $(a_{ij})$; $a_{ij}=0$, $i\neq j-1$, $a_{i,i+1}$ — произвольны, $i=1,\ldots,n-1$, при каноническом отображении $\mathrm{gl}(n, \mathbf{R})\to T_x\mathrm{Fl}$, $\dim\gamma=n-1$. Мы задали инвариантное относительно $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ распределение $W$. Нетрудно задать распределение инвариантным способом с помощью простых корней, но важнее следующее инвариантное геометрическое описание $W$, годное для произвольного многообразия флагов: при бесконечно малом допустимом движении флага $f=(V_1,\ldots,V_{n-1})$ каждое подпространство $V_i$ остается в $V_{i+1}$, $i=1,\ldots,n-1$; иначе говоря, базис в $W$ образуют векторы $a_1\ldots a_{n-1}$, где $a_i$ вращает подпространство $V_i$ внутри $V_{i+1}$.

Из алгебраического описания $W$ ясно, что оно вполне неголономно и его вектор роста для полных флагов таков:

$(n-1;\ (n-1)+(n-2);\ (n-1)+(n-2)+(n-3), \ldots)$.

Этот пример может быть буквально обобщен на случай, когда вместо флагов из подпространств рассматриваются флаги из подмногообразий, струй подмногообразий и т. д.

ж) Распределение Картана. Особенно важен следующий общий пример. Его частные случаи (см. ниже) возникали давно [67], [23], но систематическое изучение в полной общности лишь начинается. Имеется несколько вариантов определения, мы рассмотрим тот, который непосредственно обобщает известный частный случай — контактную структуру в пространстве 1-струй. Пусть $B, Y$ — гладкие многообразия, а $J^k(B;Y)\to B$ — расслоение $k$-струй гладких отображений $B$ в $Y$. Пусть $f: B\to Y$ и $j^k(f)$ — $k$-струйное расширение $f$. Его можно рассматривать как подмногообразие в $J^k(B;Y)$, точнее, сечение расслоения $J^k(B, Y)\to B$. Пусть $j_0=(b_0, j^k(f)b_0)$ есть точка $j^k(f)$, обозначим через $C_j(f)$ касательное подпространство к $j^k(f)$ в точке $j_0$ и через $C_j$ — линейную оболочку $C_j(f)$ по всем таким $f$, что $j\in j^k(f)$. Распределение $\{C_j: j\in J^k(B;Y)\}$ называется *распределением Картана* в $J^k(B;Y)$. Пусть $B=\mathbf{R}$, $k=1$, $Y$ — $n$-мерное многообразие, $J^1(\mathbf{R}, Y)=\mathbf{R}\times TY$. Распределение Картана здесь, как легко проверить, есть ядро набора из $n$ 1-форм, задаваемых локально так: $v_i dt-dy_i$, где $(t, y, v)\in J^1(\mathbf{R}, Y)$ — его вектор роста $(n+1, 2n+1)$. Если спроектировать распределение Картана на $TY$ (т. е. исключить $t$), то оно перейдет в хорошо известное аффинное распределение $\dot{x}_i=v_i$, задающее так называемые специальные кривые в $TY$.

Другой важный пример: $B=\mathbf{R}^n$, $Y=\mathbf{R}^1$, $k=1$. Тогда $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1)\simeq\mathbf{R}^{2n+1}$, а распределение Картана есть контактная структура, задаваемая 1-формой $du-\sum_i p_i dx_i$ (см. об этом [7], [23]).

Можно видоизменять этот пример, например, рассматривать $k$-струи подмногообразий данной размерности в данном многообразии (так делается в [23]). Ограничение распределения Картана на подмногообразия $k$-струй некоторых специальных отображений (диффеоморфизмов, иммерсий и т. п.) дает еще один важный класс распределений.

Роль распределения Картана в том, что вариационные и другие задачи о $k$-струях можно сводить к функциональным задачам на пространстве $J^k$ с неголономными ограничениями. Эта точка зрения отражена в [73]. По этой причине пример и носит универсальный характер. Например, простейшую задачу вариационного исчисления

$$\int_0^1 f(t, x(t), x'(t))\,dt$$

можно рассматривать как задачу на пространстве 1-струй

$$J^1(\mathbf{R};\ \mathbf{R}^n)=\{(t,\ x,\ v)\}$$

с ограничениями $v_i dt - \dot{x}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. как неголономную задачу, ограничения в которой заданы распределением Картана и т. д. В [23] это распределение рассмотрено с точки зрения общей теории нелинейных дифференциальных уравнений (см. также [24]).

**1.6. Связности как распределения.** Наиболее геометричным способом определения связности (из общего огромного числа) является следующий.

Определение 1.9. Пусть $E \to B$ — главное расслоение со *структурной группой Ли* $G$; *распределение* $H$ *на* $E$, *инвариантное относительно действия группы* $G$ и дополнительное к вертикальному распределению (т. е. $H_x + V_x = T_x E$, $H_x \cap V_x = \{0\}$, где $V_x$ — вертикальное подпространство в $T_x E$ (касательное к слою), называется *горизонтальным распределением связности.*

Если теперь задать $G$-инвариантную $\mathfrak{g}$-значную 1-форму на $E$ как отображение $\omega_x : T_x E \to V_x \simeq \mathfrak{g}$, $\operatorname{Ker} \omega_x = H_x$, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$, то нетрудно проверить, что $\omega$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на *форму связности*, следовательно, распределение $H$ однозначно определяет связность на $E$ в обычном смысле и определяется этой связностью. Такой подход принят в последнее время в большом числе работ. В меньшей мере использована геометрия распределений и понятия предыдущих пунктов для изучения связностей. Связность называется *плоской*, если $H$ инволютивно. Флаг распределения $H$ назовем *флагом связности* (это, вообще говоря, флаг в смысле дифференциальных систем — см. п. 1.2), а степень неголономности в точке — *степенью связности.*

Связность позволяет параллельно переносить касательный вектор вдоль любой кривой на многообразии. Инфенитезимальной группой голономии связности в точке $x$ называется группа преобразований касательного пространства, порожденная обходами достаточно малых петель, проходящих через точку $x$. Более подробное изложение см. в [80]. Легко доказать следующее утверждение.

Предложение. Алгебра Ли инфинитезимальной группы голономии в точке $x$ совпадает с образом инволютивной оболочки $H$ при отображении формой связности в $\mathfrak{g}$.

Следовательно, нередуцируемость группы голономии равносильна полной неголономности горизонтального распределения.

Для римановых связностей, т. е. связностей в расслоении со структурной группой $O(n)$, можно дать геометрическое описание того, что означает максимальная неинтегрируемость горизонтального распределения.

Теорема (А. Г. Черняков). Пусть $M$ — связное риманово многообразие, $O(M)$ — расслоение ортонормированных реперов, $\dim M = n$, $\dim O(M) = \frac{n(n+1)}{2}$. Для того чтобы горизонтальное распределение римановой связности в $O(M)$ — $H$ было распределением степени неголономности два (тем самым максимального роста), необходимо и достаточно, чтобы гауссова кривизна во всех точках многообразия сохраняла знак (не обращалась в ноль).

Чуть по-другому это условие можно высказать так: форма кривизны (в данном случае это с точностью до множителя есть форма Бробениуса (см. выше)) невырождена, т. е. является эпиморфизмом на алгебру Ли $o(n)$. Эта формулировка справедлива для связностей в произвольном главном расслоении с той же размерностью слоя $\frac{n(n-1)}{2}$, что и выше. Понятия флага связности, степени неголономности и других инвариантов распределения очень удобны для геометрической теории. Флаг связности может быть описан в терминах ковариантной производной (см. [80]).

Связности в присоединенных расслоениях охарактеризовать горизонтальным распределением несколько сложнее. Это сделано геометрами школы Г. Ф. Лаптева (см. обзоры [24], [41]).

Для приложений к механике важно понятие *связности над распределением*, рассмотренное в ряде работ и в частности в [42]. Пусть $X$ — многообразие, $E \xrightarrow{G} X$ — расслоение и $V$ — распределение на $X$, связность над распределением $V$ в $E$ — это $G$-инвариантное распределение $H$ в $E$, которое трансверсально с вертикальным распределением, а $\pi H = V$.

Фундаментальная проблема состоит в продолжении связности, заданной над вполне неголономным распределением, до связности над всем многообразием. Следует отметить, что эта проблема восходит к классическим работам Картана и др.

**1.7. Классификация левоинвариантных контактных структур на трехмерных группах Ли.** Левоинвариантная неголономная структура на трехмерной группе Ли $G$ задается плоскостью $V$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, точнее, любым двумерным подпространством $V$, не являющимся подалгеброй (см. п. 1.5). Множество левоинвариантных неголономных структур является открытым подмножеством грассманова многообразия $\mathrm{Gr}_2$ $\mathfrak{g}$-двумерных плоскостей $\mathfrak{g}$, которое будем обозначать $\mathrm{Gr}_2^0\mathfrak{g}$. Пару $(\mathfrak{g}, V)$ назовем неголономной алгеброй Ли. Будем говорить, что $(\mathfrak{g}_1, V_1)$ изоморфно $(\mathfrak{g}_2, V_2)$, если найдется изоморфизм $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ такой, что $\varphi(V_1) = V_2$.

Множество классов $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{g}$ изоморфных неголономных трехмерных алгебр Ли совпадает с пространством орбит $\mathrm{Gr}_2^0\mathfrak{g}/\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, где $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ — группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Вычислим $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{g}$ для всех трехмерных неголономных алгебр

Ли $\mathfrak{G}$. Классификация трехмерных вещественных алгебр Ли с точностью до изоморфизма хорошо известна (см., например, [35], [54]), перечислим их.

1. Коммутативная алгебра — $t_3$-трехмерный тор.

2. Нильпотентная алгебра — алгебра Гейзенберга — $N$, заданная следующими образующими и соотношениями

$$N=\mathrm{Lin}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}, [\xi_1, \xi_2]=\xi_3, [\xi_1, \xi_3]=[\xi_2, \xi_3]=0.$$

3. Разрешимые алгебры: $r_\alpha$

$$[\xi_1, \xi_2]=a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_3, [\xi_1, \xi_3]=0,$$
$$[\xi_2, \xi_3]=a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_3,$$
$$\alpha=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2\,\mathbf{R}.$$

Множество разрешимых алгебр разбивается на следующие подклассы в зависимости от собственных чисел матрицы $\alpha$.

3а) $\alpha$ имеет различные вещественные собственные числа:

$$a_{11}=\lambda_1, a_{22}=\lambda_2, a_{12}=a_{21}=0, \lambda_1\neq\lambda_2;$$

3б) $\alpha$ имеет вид

$$a_{11}=\cos\varphi, a_{12}=\sin\varphi, a_{21}=-\sin\varphi, a_{22}=\cos\varphi.$$

3в) $\alpha$ — диагональна:

$$a_{11}=a_{22}=1, a_{12}=a_{21}=0.$$

3г) $\alpha$ — жорданова клетка:

$$a_{11}=a_{22}=a_{12}=1, a_{21}=0.$$

4. Полупростые алгебры Ли. С точностью до изоморфизма имеется две различных полупростых трехмерных алгебры Ли.

4а) Алгебра $3\times3$-кососимметрических матриц — $\mathrm{so}(3)$ с базисом $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ и соотношениями:

$$[\xi_1, \xi_2]=\xi_3, [\xi_3, \xi_1]=-\xi_2, [\xi_2, \xi_3]=\xi_1.$$

4б) Алгебра $2\times2$-матриц с нулевым следом $\mathrm{sl}_2\,\mathbf{R}$ с базисом $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ и соотношениями:

$$[\xi_1, \xi_2]=\xi_3, [\xi_1, \xi_3]=2\xi_1, [\xi_2, \xi_3]=-2\xi_2.$$

Следующее утверждение указывает мощность множества $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{g}$ для каждой из трехмерных алгебр Ли.

Предложение. 1) На коммутативной группе Ли $T_3$, а также на разрешимой группе $R_\alpha$, $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ нет неголономных двумерных левоинвариантных распределений.

2) Для следующего перечня групп Ли все двумерные неголономные левоинвариантные распределения лежат на одной орбите относительно действия группы автоморфизмов алгебры Ли:
— группа Гейзенберга $N$,
— разрешимые группы $R_\alpha$ в случае, когда $\alpha$ типа $a$, б или г,

— специальная ортогональная группа.

3) Неголономные левоинвариантные распределения на $SL_2\mathbf{R}$ распадаются в объединение двух орбит.

Замечания. 1) Представителями орбит для $N$ и $SO(3)$ в указанном выше базисе являются распределения $V = \mathrm{Lin}(\xi_1, \xi_2)$. 2) Представителями орбит неголономных распределений на $SL_2\mathbf{R}$ являются распределения $V_1 = \mathrm{Lin}(\xi_1, \xi_2)$ и $V_2 = \mathrm{Lin}(\xi_3, \xi_1+\xi_2)$.

## § 2. Наборы векторных полей и распределения общего положения и вырождения малых коразмерностей

В п. 2.1 этого параграфа приведены некоторые важные свойства распределений общего положения (максимальность роста и др.). Эти результаты можно рассматривать как начало классификации распределений.

По поводу общей классификации распределений заметим, что она разумна лишь в локальной постановке, т. е. в ростковой или струйной. Положение и здесь, как можно предвидеть, довольно сложное. Прежде всего классификация ростков распределений в самых общих предположениях содержит функциональные модули уже при сравнительно небольших размерностях. В [15] показано, что такие модули есть уже для векторов роста (8, 11), т. е. множество орбит ростков восьмимерных распределений общего положения в одиннадцатимерном пространстве параметризуется функциями от одиннадцати переменных с вещественными значениями. На самом деле функциональные параметры встречаются и при меньших значениях размерности. Это означает, что классификация ростков распределений (даже общего положения) с точностью до изоморфизма не имеет смысла. Тем не менее, для некоторых размерностей положение иное. Например, классическая теорема Дарбу утверждает, что росток распределения коразмерности один общего положения (контактная структура) с точностью до диффеоморфизма — единственен. По-видимому, можно, хотя и много меньше, сказать о ростках распределений коразмерности два. Имеются многочисленные работы по распределениям со специальным вектором роста $(n-2, n-1, n)$ (см. [72] и др., в основном нацеленные на вопросы теории дифференциальных уравнений).

Однако для большинства локальных вопросов неголономной динамики и геометрии достаточно лишь информации о струях распределений некоторого порядка. В п. 2.2 показано, что $(k-1)$-струи распределений общего положения лежат на одной орбите относительно действия группы струй диффеоморфизмов $\mathbf{R}^n$.

Изучение динамики на компактных многообразиях требует изучения ростков распределений, имеющих вырождения, поскольку на таких многообразиях распределений всюду максимального роста, вообще говоря, нет. На гладких $n$-мерных многообразиях возникают вырождения до коразмерности $n$ (пп. 2.3, 2.5). В этом параграфе изучены вырождения до коразмерности $n-\sqrt{n}$, при этих «малых» коразмерностях имеется простая связь между коразмерностью вырождения и дефектом роста распределения, основанная на прозрачных геометрических конструкциях (см. п. 2.5).

Заметим, что имеется другой не менее естественный класс ростков распределений — регулярные распределения, рост которых близок к максимальному, которого мы совсем не касаемся в этой части работы. С точки зрения общего положения, эти распределения образуют подмногообразие бесконечной коразмерности, но при наличии симметрий (например для левоинвариантных распределений) этот случай представляет особый интерес.

**2.1. Распределения общего положения.** На множестве векторов роста распределений в точке $x$ определим отношение частичного порядка: будем говорить, что рост распределения $V$ в точке $x$ больше, чем рост распределения $W$, если

а) $\forall i \; n_i^V \geqslant n_i^W$,

б) $\exists i_0, \; n_{i_0}^V > n_{i_0}^W$.

Мы будем говорить о распределениях *максимального* и наибольшего роста в смысле введенного частичного упорядочения.

Множество ростков распределений размерности $n_1$ в $\mathbb{R}^n$ естественным образом отождествляется с множеством $S_n^{n_1}$-ростков сечений $s: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}_n^{n_1}$, где $\mathrm{Gr}_n^{n_1}$ — многообразие Грассмана $n_1$-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$ (см. § 1). На $S_n^{n_1}$ определена $C^\infty$-топология Уитни [71].

Следующая теорема (см. [27]) описывает распределения общего положения

Теорема (о распределениях общего положения). 1) Распределения максимального роста образуют открытое и всюду плотное подмножество в множестве $S_n^{n_1}$ в $C^\infty$-топологии Уитни.

2) Всякое распределение максимального роота является регулярным и вполне неголономным.

3) Все распределения максимального роста в $S_n^{n_1}$ имеют один и тот же рост (а значит одну и ту же степень неголономности, которую мы обозначим через $k(n, n_1)$).

4) $\forall j: 1 \leqslant j \leqslant k-1$ компонента вектора роста $n_j^V$ равна $\dim F_j(n_1)$, где $F_j(n_1)$ — линейное пространство, порожденное словами длины $\leqslant j$ в свободной алгебре Ли $F$ с $n_1$ образующими.

Приведем явные формулы для $\tilde{n}_j = \dim F_j(n_1)$. Число слов длины $j$ (т. е. $(\tilde{n}_j - \tilde{n}_{j-1})$) в свободной алгебре Ли с $n_1$ образующими задается следующим выражением (см. [59])

$$(\tilde{n}_j-\tilde{n}_{j-1})=\frac{1}{j}\sum_{d\diagdown j}\mu(d)\,n_1^{(j/d)},$$

где $\mu$ — функция Мёбиуса (см. [59]).

Выделим главный член суммы

$$(\tilde{n}_j-\tilde{n}_{j-1})=\frac{1}{j}\,n_1^j+\frac{1}{j}\sum_{\substack{d\diagdown j\\ d>1}}\mu(d)\,n_1^{(j/d)}=\frac{1}{j}\,n_1^j+O\left(n_1^{j/2}\log_2 n_1\right);$$

оценка остаточного члена основана на том, что $n_1^{j/d}\leqslant n_1^{j/2}$ при $d>1$ и число делителей $j$ есть $O(\log_2 j)$.

Следствие. Степень неголономности $k(n, n_1)$ распределения максимального роста размерности $n_1$ на многообразии размерности $n$ имеет асимптотику $\log_{n_1} n=\frac{\ln n}{\ln n_1}$ при $n\to\infty$ и фиксированном $n_1$.

Замечание. Если в алгебре Ли $\mathrm{gl}(n)$ матриц порядка $n\gg n_1$ взять $n_1$ матриц общего положения, то размерности подпространств, натянутых на скобки Ли этих матриц длины $\leqslant k$, будут максимально долго (пока не будет достигнута размерность $\mathrm{gl}(n)$) совпадать с размерностями соответствующих подпространств свободной алгебры Ли, поэтому всякий элемент алгебры $\mathrm{gl}(n)$ представим линейной комбинацией скобок Ли этих матриц длины не большей $k(n, n_1)\sim\frac{\ln n}{\ln n_1}$.

**2.2. Нормальные формы струй базиса векторных полей распределения общего положения.** Последнее утверждение теоремы п. 2.1 показывает, что максимальный рост, т. е. рост распределения общего положения совпадает, до момента стабилизации, с ростом числа слов в свободной алгебре Ли. Причина этого совпадения в следующем. Распределение максимального роста — регулярно, следовательно (см. п. 1.4), имеет базис $\xi_1, \ldots, \xi_{r_1}$ векторных полей; при гомоморфизме $\Phi$ свободной алгебры Ли $F$ в $W_n$, переводящем базис $\{g_i\}\in F$ в $\{\xi_i\}$; линейный однородный базис $F_i/F_{j-1}$ переходит в базис $\xi_{n_{j-1}+1}, \ldots, \xi_{n_j}$ факторраспределения $V_j/V_{j-1}$ при $j\leqslant k-1$. Это обстоятельство позволяет построить нормальную форму струй векторных полей $\xi_j$ — как квазинормальную форму струй базиса векторных полей регулярного распределения (см. п. 1.4), удовлетворяющую дополнительному условию

$$J^0\xi_j=\frac{\partial}{\partial x_j},\quad j=1, \ldots, n.$$

Для проведения этого плана нам потребуется описание линейного однородного базиса в свободной алгебре Ли.

Опишем процедуру построения линейного базиса *свободной алгебры* Ли $F$ с $n_1$ образующими $f_1, \ldots, f_{n_1}$ (см. [6]).

Пусть $Z$ — множество из $n_1$ элементов $x_1, \ldots, x_{n_1}$; $M(Z)$ —

свободный моноид над $Z$, $l(h)$ — длина слова $h \in M(Z)$, $M^i(Z)$ — множество слов длины $i$.

Определение (см. [59]). *Семейством Холла* над $Z$ называется любое линейно упорядоченное подмножество $H \subset M(Z)$ такое, что

1) если $u, v \in H$ и $l(u) < l(v)$, то $u < v$.

2) $Z \subset H$.

3) $H \cap M^2(Z) = \{xy \mid x, y \in Z, x < y\}$.

4) $H \setminus (M^2(Z) \cup Z) = \{\omega = a(bc) \mid a, b, c \in H, b \leqslant a < bc, b < c\}$.

Зададим отображение $\theta : M(Z) \to F$ следующим образом: возьмем слово из $M(Z)$ и заменим в нем $x_i$ на $g_i$, $i = 1, \dots, n_1$, а все круглые скобки заменим на квадратные. Имеет место

Теорема (Холл—Витт [59]). $\theta$ переводит $H$ в линейный однородный базис $F$.

Построение линейного базиса свободной алгебры Ли закончено. Последний пункт теоремы п. 2.1 можно уточнить следующим образом

Предложение 1. Пусть $V$ — росток распределения максимального роста в $\mathbf{R}^n$, $\dim V = n_1$; $\xi_1, \dots, \xi_{n_1}$ — базис $V$. Тогда

1) При $j \leqslant k-1$ отображение $\varphi : F_j \to V_j$ такое, что $\varphi(g_i) = \xi_i$ есть изоморфизм линейных пространств; $\{(\varphi\theta M^j(Z)) \cap H\}$ есть линейный базис $V_j(x)$.

2) Отображение $\varphi : F_k \to V_k = \operatorname{Vect} \mathbf{R}^n$ — сюръективно.

Линейный базис векторных полей $V_j$ естественно занумеровать элементами семейство Холла длины $\leqslant j$ таким образом, что $\{\xi_{u_i} \mid u_i \in H \cap M^i(Z)\}$ — относительный линейный базис $V_i / V_{i-1}$. Будем искать систему координат $\{x_i\}$ в окрестности точки $x$, в которой струи векторных полей $\xi_u$ имели бы наиболее простой вид, в частности естественно потребовать, чтобы векторы $\xi_{u_1}(0), \dots, \xi_{u_n}(0)$, составляющие набор линейно независимых направлений в $T_x\mathbf{R}^n$, были касательными к координатным линиям в $\mathbf{R}^n$; координаты в $\mathbf{R}^n$ при этом также естественно занумеровать элементами семейства Холла. Это обстоятельство используется в следующей теореме, дающей нормальные формы $(k-1)$-струй векторных полей $\xi_u$.

Теорема (о всюду плотной орбите). 1) Струи наборов базисных векторных полей всех $n_1$-мерных распределений максимального роста в $\mathbf{R}^n$ порядка $k = k(n, n_1)$ лежат на одной орбите относительно действия группы $(k-1)$-струй диффеоморфизмов в $\mathbf{R}^n$.

Обозначим через $\tilde{H}$ первые $n$ элементов $H$ (в смысле линейного порядка на $H$).

2) Представителем орбиты распределений максимального роста является распределение, $(k-1)$-струи базисных полей которого имеют следующий вид.

$$J^{(k-1)}\xi_{u_0}=\frac{\partial}{\partial x_{u_0}}+\sum_{S_1}x_{u_m}\dots x_{u_1}\frac{\partial}{\partial x_{u_{m+1}}}+$$
$$+\sum_{S_2}\mu_{u_{m+1},\dots,u_1,u_0}x_{u_m}\dots x_{u_1}\frac{\partial}{\partial x_{u_{m+1}}},\tag{1}$$

где

$$u_i\in\tilde{H},\ S_1=$$
$$=\left\{(u_{m+1},\dots,u_1,u_0)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m}l(u_i)\leqslant k-1,\ u_{m+1}=u_m(\dots(u_1,u_0)\dots)\right\},$$
$$S_2=\left\{(u_{m+1},\dots,u_1,u_0)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m}l(u_i)\geqslant k\right\}.$$

**2.3. Вырождения малых коразмерностей.** Теорема п. 2.2 полностью описывает нормальные формы струй распределения общего положения, оказывается, та же техника позволяет получить нормальные формы струй распределений до определенного порядка вырождения и дает возможность получить прозрачную связь между коразмерностью вырождений и *дефектом роста распределения* (т. е. разностью между ростом числа слов в свободной алгебре Ли и ростом распределения). Эта связь оказывается очень простой в случае, когда коразмерности вырождений не превосходят $n-\sqrt{n}$ (такие вырождения мы будем называть малыми). Мы приведем сейчас формулы для коразмерности вырождения через дефект роста распределения и дадим их геометрическую интерпретацию.

Пусть $u_1<u_2<\dots<u_n$ — наименьшие элементы семейства Холла $H$ в смысле введенного на $H$ линейного порядка. Для распределений общего положения векторные поля $\xi_{u_i}=\varphi\theta u_i$ линейно независимы в точке $x$. В случае вырождения появляются линейные зависимости. Для вырождений малой коразмерности между номером шага, на котором возникает линейная зависимость (т. е. падает рост) и коразмерностью вырождения имеется простая связь, которую дает следующее утверждение. Обозначим через $\tilde{n}_j=\dim F_j^{n_1}$, через $S_n^{n_1}$ — множество распределений размерности $n_1$ в $\mathbf{R}^n$. Положим $k=k(n,n_1)$, $\rho=\left[\frac{k-1}{2}\right]$. Через $\Sigma_j^i$ обозначим подмножество $S_n^{n_1}$, состоящее из распределений $V$ таких, что $\dim V_j=\dim F_j^{n_1}-i$. Через $\operatorname{cd}(j,i)$ обозначим $\operatorname{codim}\Sigma_j^i$ — коразмерность $\Sigma_j^i$ в $S_n^{n_1}$.

Предложение 1. Коразмерности множеств $\Sigma_j^i$ описываются следующими формулами

1) $\operatorname{cd}(j,i)\geqslant[n-\sqrt{n}]$ при $j<\rho$ и $i>0$.

2) Пусть $\rho<j\leqslant k-1$ и $i<\tilde{n}_{j+1}-\tilde{n}_j$. Тогда

$$\operatorname{cd}(j, i)=i(n-\tilde{n}_j+i). \tag{2}$$

3) Пусть $l_1=n-\tilde{n}_{k-1}$, $i_1 \leqslant l_1$. Тогда

$$\operatorname{cd}(k, i)=i(\tilde{n}_k-n+i). \tag{3}$$

Приведем геометрическую формулировку предложения 2.

Предложение 2. Пусть $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k$ — вектор роста $V$, $\tilde{n}_1 < \tilde{n}_2 < \ldots < \tilde{n}_k$ — распределения максимального роста. Тогда

1) для всех $V \in S_n^{n_1}$, кроме подмножества распределений, имеющего коразмерность $n-\sqrt{n}$ в $S_n^{n_1}$, первые половины координат векторов роста совпадают, т. е. $n_i=\tilde{n}_i$ при $i<\rho$.

2) Коразмерность множества распределений $V$, для которых $n_j \leqslant \tilde{n}_j - i$, совпадает с коразмерностью подмножества наборов, состоящих из $n_j$ точек в $\mathbf{R}^n$ таких, что все точки набора лежат в фиксированной плоскости $\mathbf{R}^{n-i} \subset \mathbf{R}^n$, в множестве всех наборов, состоящих из $n_j$ точек в $\mathbf{R}^n$.

Замечание. Объяснение простого характера зависимости между коразмерностью вырождения и дефектом роста для малых коразмерностей и выделение числа $n-\sqrt{n}$ в качестве границы «малых» коразмерностей опирается на приведение к нормальной форме наборов векторных полей и будет дано в п. 2.5.

Из предложения 2 и результатов предыдущего пункта вытекает следующее утверждение о струях распределений максимального роста.

Назовем размерность $n$ правильной, если $n=\tilde{n}_k$. Обозначим $\Sigma_k^0$ подмножество распределений максимального роста в $S_n^{n_1}$.

Предложение 3. 1) Множество $\Sigma_k^0$ связно (в $C^\infty$-топологии Уитни). 2) Если размерность $n$ не является правильной, то

$$\operatorname{codim}(S_n^{n_1} \setminus \Sigma_k^0) \geqslant 2.$$

Для вырождений коразмерности большей, чем $n-\sqrt{n}$, ситуация усложняется и формулы (2) и (3) перестают быть верными.

Переходим к рассмотрению наборов векторных полей.

**2.4. Наборы векторных полей общего положения.** Цель этого пункта описать наборы векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ общего положения. Ясно (см. п. 2.1), что требование общности положения должно заключаться в следующем: нужно взять векторные поля, совпадающие с базисными векторными полями $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ или их скобками Ли и потребовать, чтобы их значения в точке $x$ были настолько линейно независимы, насколько это возможно. Как уже было замечено (см. п. 2.3), в качестве таких векторных полей удобно выбирать образы элементов линейного базиса свободной алгебры Ли $F^{n_1}$ относительно гомоморфизма $\varphi: F^{n_1} \to W_n$, $\varphi(g_i)=\xi_i$. Выбранные векторные поля соответствуют некоторому подмножеству $Q \subset H$. Требование, которое естественно наложить на $Q$, состоит в том, что если векторное поле $\xi_q$, $q \in Q$, есть скобка Ли двух векторных полей: $\xi_q = [\xi_{q_1}, \xi_{q_2}]$, $q_1$, $q_2 \in H$, то $q_1$, $q_2 \in Q$, т. е. $Q$ есть идеал частично упорядоченного множества $(H \dashv)$. Отношение частичного порядка $\dashv$ на $H$ мы сейчас определим.

Определение. Зафиксируем семейство Холла $H$. Подмножество $Q \subset H$ будем называть идеалом в $H$, если выполнено следующее условие

$$(\alpha\beta \in H) \Rightarrow (\alpha \in H \& \beta \in H)$$

(иначе говоря, $Q$ есть идеал $H$ относительно следующего частичного упорядочения (см. [8]) на $H$

$$\alpha \dashv \gamma \Longleftrightarrow ((\exists \beta : \alpha\beta = \gamma) \vee (\exists \beta : \beta\alpha = \gamma))).$$

Пусть $Q$ — идеал в $H$, тогда линейное упорядочение на $H$ определяет цепочку множеств: $\varnothing \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_l$, $l = \# Q$, такую, что $Q_j = Q_{j-1} \cup q_j$, причем $\forall q \in Q_{j-1}\ q < q_j$. Цепочке подмножеств $Q_j$ соответствует цепочка линейных пространств

$$L_j = \mathrm{Lin}\{(\varphi\theta(q))x \mid q \in Q_j\},$$

$$\varnothing \subset L_1 \subset \ldots \subset L_l.$$

Множество наборов из $n_1$-ростков векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ в $\mathbf{R}^n$ отождествляется с множеством ростков сечений тривиального расслоения $\mathrm{R}_n^{n_1} = \{r : U \to [TU]^{n_1}\}$, где $U$ — окрестность начала координат в $\mathbf{R}^n$, $TU$ — касательное расслоение над $U$, $[TU]^{n_1}$ — сумма Уитни $n_1$ экземпляров $TU$ (см. [96]).

Предложение 1. Пусть $Q$ — идеал семейства Холла, $\# Q = n$. Тогда для открытого и всюду плотного подмножества $\mathrm{R}_0 \subset \mathrm{R}_n^{n_1}$ в $C^\infty$-топологии Уитни, $\dim L_n = n$, т. е. $\{L_i\}$ есть полный флаг линейного пространства.

Если набор векторных полей $\{\xi_i\}$ удовлетворяет заключению предложения 1, то мы будем говорить, что он имеет $Q$-максимальный рост.

Предложение 1 превращается в теорему п. 2.1, если выбрать в качестве $Q$ идеал $A$ следующим образом.

Идеал $A$. Включим в $A$ все слова длины $\leqslant k-1$ из $H$. Кроме того, выберем из $(M^k(Z) \setminus M^{k-1}(Z)) \cap H$ произвольный набор из $n - n_{k-1}$ слов и также включим их в $A$.

Теперь мы перенесем теорему п. 2.2. на случай произвольных идеалов семейства Холла.

Теорема 1. Пусть $Q$ — идеал в $H$, $\# Q = n$. Пусть набор векторных полей $\xi_i$ имеет $Q$-максимальный рост. Тогда в $\mathbf{R}^n$ найдется система координат $x_u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ такая, что

$$J^\infty \xi_{u_0} = \sum_{S_1} \left( \prod_{i=1}^{l} x_{u_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_{u_{l+1}}} + \sum_{S_2} \mu_{u_{l+1}, \ldots, u_1, u_0} \prod_{i=1}^{l} x_{u_i} \frac{\partial}{\partial x_{u_{l+1}}},$$

где $u_i \in Q$,

$$S_1=\{(u_{l+1}, \ldots, u_1, u_0) \mid u_{l+1}=u_l(u_{l-1}(\ldots(u_1u_0)\ldots) \in Q\},$$
$$S_2=\{(u_{l+1}, \ldots, u_1, u_0) \mid u_l(\ldots(u_1u_0)\ldots) \in H \setminus Q\}.$$

Теорема 1 позволяет, таким образом, определить часть «коэффициентов струй» векторных полей, соответствующих идеалу $Q$. Выбор в качестве $Q$ идеала $A$ дает теорему 1 о приведении к нормальной форме $(k-1)$-струй базиса векторных полей распределения $V$. Другой естественной задачей является нахождение наибольшего $r$, при котором в множестве $r$-струй наборов векторных полей существует всюду плотная орбита. Решение этой задачи дает теорема 1, если в качестве $Q$ взять идеал $B$, который мы сейчас построим.

Идеал $B$. Идеал $B$ мы будем строить по индукции. Положим $B_1=Z$; $B_{j+1}=\{h_2 \cdot h_1 \in H \mid h_1 \in B_j\}$.
Пусть $m_i=\#B_i$, $r=r(n, n_1)$ — натуральное число, для которого $m_{r-1}<n<m_r$. Положим $B=B_{r-1} \cup \tilde{B}$, где $\tilde{B}$ состоит из $n-m_{r-1}$ наименьших элементов $B_r \setminus B_{r-1}$. Положив $Q=B$, из теоремы 1 мы получаем

Теорему 2 (о всюду плотной орбите для векторных полей). 1) $(r-1)$-струи наборов из $n_1$ векторных полей лежат на одной орбите относительно действия группы струй диффеоморфизмов $\mathbf{R}^n$.

2) Нормальные формы $(r-1)$-струй векторных полей имеют следующий вид:

$$J^{r-1}\xi_{u_0}=\sum_{l=0}^{r}\left(\prod_{i=1}^{l} x_{u_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_{u_{l+1}}} \text{где, } u_{l+1}=u_l(\ldots(u_1u_0)\ldots).$$

Замечание. Теорема 2 показывает, что струи порядка $r-1$ лежат на одной орбите относительно действия группы струй диффеоморфизмов. Повысить порядок струй нельзя. В струях более высокого порядка появляются модули, число которых экспоненциально возрастает с ростом порядка струи.

Следующее утверждение дает асимптотику роста $r(n, n_1)$ с ростом $n$.

Предложение 2. При фиксированном $n_1$ $r(n, n_1)= =\log_2\log_{n_1} n(1+o(1))$ при $n \to \infty$.

Действительно, $k(n, n_1)=\log_{n_1} n(1+o(1))$ (см. замечание в п. 2.1), предложение сводится к асимптотической формуле $r(n, n_1) \sim \log_2 k(n, n_1)$, она вытекает из следующего очевидного утверждения, показывающего, что асимптотически почти все элементы из $B_l \setminus B_{l-1}$ имеют максимально возможную (для слов из $B_l$) длину $2^{l-1}$.

Утверждение. Пусть $\tilde{B}_l=\{h \in B_l \setminus B_{l-1}\colon l(h)=2^{l-1}\}$. Тогда $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{\#\tilde{B}_l}{\#(B_l \setminus B_{l-1})}=1$.

Случай «общего положения» описан. Рассмотрим вырождения малых коразмерностей.

2.5. **Вырождения малой коразмерности наборов векторных полей.** Для вырождений малой коразмерности приведем для векторных полей утверждение о связи дефекта роста с коразмерностью вырождения, аналогичное предложению 2 для распределений.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ — набор векторных полей, $Q$ — идеал в семействе Холла $H$, $0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n$ — цепочка линейных подпространств, соответствующая идеалу $Q$ (см. п. 2.2). Обозначим через $\nu_j^i$ подмножество наборов из $n_1$ векторных полей в $\mathbf{R}^n$ таких, что $\dim \nu_j \leqslant j - i$, через $\operatorname{cd}(j, i)$ — коразмерность $\nu_j^i$ в $\mathbf{R}_n^{n_1}$.

Предложение 1. Коразмерности $\nu_j^i$ даются формулами:

1) $\operatorname{cd}(j, 1) = n - j + 1$ при $1 \leqslant j \leqslant n$;

2) пусть $[\sqrt{n}] + 1 \leqslant j$, $i \leqslant j - [\sqrt{n}] - 1$, $i < \frac{j}{2}$, тогда $\operatorname{cd}(j, i) = i(n - j + 1)$.

Замечание. Предложение 1 превращается в предложение 1 п. 2.2, если в качестве $Q$ взять идеал $A$ и рассматривать формулы предложения 1 только при $j = \tilde{n}_l$.

Приведем нормальные формы наборов струй векторных полей для вырождений малой коразмерности.

Через $\operatorname{Diff}_n^r$ обозначим группу $r$-струй диффеоморфизмов $\mathbf{R}^n$ (где $r$ — из теоремы 2 п. 2.2).

Стабилизатор набора $x = (J^r\xi_1, \ldots, J^r\xi_{n_1})$ $r$-струй векторных полей в группе $\operatorname{Diff}_n^r$ обозначим через $\mathfrak{N}_x$. Через $M_{i,j}$, $i < \frac{j}{2}$, будем обозначать множество $i \times (j - i)$-матриц (т. е. матриц с $i$ строками и $j - i$ столбцами), имеющих ранг $i$.

Предложение 2. Пусть $[\sqrt{n}] + 1 < j$, $i < j - \sqrt{n}$, $i < \frac{j}{2}$. Тогда в $\nu_j^i$ найдется открытое и всюду плотное множество $\mathring{\nu}_j^i$ такое, что

1) $\mathring{\nu}_j^i$ — инвариантно относительно действия группы $\operatorname{Diff}_n^r$.

2) $\forall x, y \in \mathring{\nu}_j^i$ стабилизаторы $\mathfrak{N}_x$ и $\mathfrak{N}_y$ сопряжены в $\operatorname{Diff}_n^r$.

3) $\mathring{\nu}_j^i$ есть прямое произведение $M_{j,i} \times (\operatorname{Diff}_n^r / \mathfrak{N})$.

Замечания. 1. Результаты п. 2.4 дают возможность описать стратификацию пространства $r$-струй наборов векторных полей в $\mathbf{R}^n$ до коразмерности $n - \sqrt{n}$.

2. Мы ограничили область «малых» коразмерностей величиной $n - \sqrt{n}$. Поясним здесь ее происхождение. В нормальной форме наборов векторных полей общего положения (см. теорему 2 п. 2.2) одночлены, входящие в разложения струй векторных полей $J^{r-1}u_0$ по базисным — $\frac{\partial}{\partial x_{u_{i+1}}}$, имеют следующий вид:

$$\left(\prod_{i=1}^{p} x_{u_i}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_{u_{p+1}}},\quad u_{p+1}=u_p(u_{p-1}\dots(u_1u_0)\dots),\tag{4}$$

$u_i \in H$ — семейству Холла. Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 3. Пусть $N(u)$ — номер элемента $u\in H$ относительно линейного упорядочения на $H$. Тогда в формуле (4) $\forall i\leqslant p$ справедливо следующее неравенство $N(u_i)<\sqrt{n}$.

Действительно, положим $v_i=u_i(u_{i-1}\dots(u_1u_0)\dots)$, тогда

$$v_{p+1}=u_{p+1},\quad l(v_i)\geqslant l(u_i)+l(v_{i-1})\geqslant 2l(u_i)$$

и $l(v_i)<l(v_{p+1})$. Таким образом получаем неравенство

$$l(u_i)\leqslant\frac{1}{2}\,l(u_{p+1}).\tag{5}$$

Из формул для роста $\tilde{n}_i$ (см. п. 2.1) получаем

$$N(u_i)<n_1^{l(u_i)}<n_1^{\frac{1}{2}l(u_{p+1})}<n^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, $N(u_i)\leqslant\sqrt{n}$. Теперь мы можем объяснить происхождение границы «малых» коразмерностей. Координаты $x_{u_i}$ в $\mathbf{R}^n$ выбирались как направления векторных полей $\xi_{u_i}$ в точке $x$. В случае общего положения $\xi_{u_i}(x)$ — линейно независимы. При вырождениях появляются линейные зависимости. Как показывают предложения 1 и 3 при вырождениях коразмерности меньшей, чем $n-\sqrt{n}$, векторные поля $\xi_{u_i}$ для $u_i$ таких, что $N(u_i)<\sqrt{n}$, остаются линейно независимыми. Нормальные формы приобретают вид

$$J^{r-1}\xi_{u_0}=\sum_{l=1}^{r-1}\left(\prod_{i=1}^{l}x_{u_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_{u_{l+1}}},$$

где направления $\dfrac{\partial}{\partial y_{u_{l+1}}}$ уже не обязаны быть линейно независимыми. Подчеркнем еще раз, что простая связь коразмерности вырождения и дефекта роста и простое описание модулей связаны с тем, что координаты $x_{u_i}$, входящие под знак произведения: $N(u_i)<\sqrt{n}$, соответствуют векторным полям $\xi_{u_i}$, остающимся при «малых» вырождениях линейно независимыми. Общий случай требует уже учета комбинаторного типа конфигурации порождающих векторных полей и их скобок Ли.

**2.6. Проектор, ассоциированный с распределением.** Пусть $V$ — росток распределения максимального роста размерности $n_1$ в $\mathbf{R}^n$, $k^V$ — степень неголономности $V$. Как мы видели, последовательные члены флага распределения $V_i$, $i=1,\dots,k-1$, для всех распределений максимального роста (данной размерности) ведут себя одинаковым образом — их размерности растут максимально быстро — как размерности соответствующих подпространств в свободной алгебре Ли (см. п. 2.1), а последовательные скобки Ли длины $j$ векторных полей из $V$ при $j \leqslant k-1$ линейно независимы, пока их число не достигает $n$-размерности многообразия. При больших $j$ между скобками Ли векторных полей из $V$ возникнут линейные зависимости. Набор линейных зависимостей является инвариантом распределения. Опишем его.

Как и ранее, обозначим $F$ свободную алгебру Ли с $n_1$ образующими $f_1, \ldots, f_{n_1}$, $F_i$ — $i$-ую однородную компоненту $F$, $F^S = \bigoplus\limits_{i=1}^{S} F_i$. Линейное невырожденное отображение $\pi: F_1 \to V$ определяет эпиморфизм $\pi_i(x): F^i \to V_i(x)$. В частности, определено отображение $\pi_{k+1}(x): F^{k+1} \to T_x X$, которое мы обозначим $P_V(x)$ и будем называть проектором распределения $V$ в точке $x$.

Пусть $D$ — росток $\mathbf{R}^n$ в начале координат. Введем тривиальное расслоение над $D(F)$ со слоем $F$ над $D$. Пусть $\mathrm{GL}(E_{n_1})$ — группа ростков обратимых матриц порядка $n_1$, тогда послойное действие этой группы на $D(F_1)$ продолжается до действия на $D(F)$.

Два отображения $\pi^{(1)}$ и $\pi^{(2)}$ эквивалентны, если $\pi^{(1)}(\cdot) = \pi^{(2)} g(\cdot)$, $g \in \mathrm{GL}(E_{n_1})$. Обозначим $\pi / F^{k+1} = P_V$, а его орбиту относительно $\mathrm{GL}(E_{n_1})$ через $\mathfrak{P}_V$. Очевидно следующее

Предложение 1. Соответствие $V \to \mathfrak{P}_V$ есть взаимно однозначное соответствие между орбитами проекторов $\mathfrak{P}_V$ и ростками распределений размерности $n_1$ максимального роста.

Если фиксирован базис векторных полей распределения $V$ и он продолжен до базиса $TX$ (см. п. 1.4, § 1), то проектор $P_V$ определяется набором структурных констант

$c_{ij}^l = \langle [\xi_i, \xi_j], \xi_l \rangle$, где $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $n_{k-2} \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant n$.

Будем говорить, что ростки двух неголономных распределений $V_1$ и $V_2$ в $\mathbf{R}^n$ (ростки двух неголономных многообразий $(\mathbf{R}^n, V_1)$ и $(\mathbf{R}^n, V_2)$) изоморфны, если существует диффеоморфизм $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ такой, что $\varphi(V_1) = V_2$. Постоянство структурных констант означает инвариантность распределения относительно некоторой группы.

Предложение 2. 1. Если структурные константы для базиса векторных полей $\{\xi_i\}$ распределения $V$ постоянны, то существует локальная группа Ли $G$ и левоинвариантное распределение $\tilde{V}$ на $G$ такие, что $(\mathbf{R}^n, V)$ изоморфно $(G, \tilde{V})$.

2. Если структурные константы, соответствующие проектору, $c_{ij}^l \equiv 0$, то группа $G$ нильпотентна.

В дальнейшем введенный проектор будет использован для описания некоторых инвариантов распределений.

*Глава 2*

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕГОЛОНОМНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

## § 1. Общая вариационная неголономная задача и геодезический поток на неголономном римановом многообразии

В этом параграфе рассматривается неголономная вариационная задача на минимум длины на римановом многообразии, ограничения в которой задаются неголономным распределением. Решения этой задачи — неголономные геодезические — удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа условной задачи. Их совокупность порождает неголономный геодезический поток, заданный на смешанном расслоении, являющемся прямой суммой распределения и его аннулятора в кокасательном расслоении (см. п. 1.3). Построенный поток позволяет обобщить на неголономный случай понятие экспоненциального отображения.

**1.1. Теорема Рашевского—Чжоу и неголономная риманова метрика (метрика Карно—Каратеодори).** Пусть $X$ — гладкое многообразие, $V$ — дифференциальная система или распределение на $X$. Кривую $\gamma : \mathbf{R}^1 \to X$ будем называть допустимой, если $\dot{\gamma} \subset V$. Следующая теорема была доказана независимо и почти одновременно П. К. Рашевским и Чжоу (см. [46], [65]).

Теорема. Пусть дифференциальная система $V$ вполне неголономна в каждой точке гладкого многообразия $X$. Тогда любые две точки $x$, $y \in X$ можно соединить допустимой кусочно-гладкой кривой конечной длины.

Работа Чжоу [65] явилась обобщением аналогичного результата, полученного Каратеодори (см. [62]) для распределения коразмерности один, в связи с его исследованиями по основаниям термодинамики. Для П. К. Рашевского таким поводом, по-видимому, были исследования, которые активно велись в тот период в семинарах В. Ф. Кагана и С. П. Финикова (В. В. Вагнер и др.). Результат о соединимости любых двух точек многообразия допустимой кривой при более слабых (чем полная неголономность во всех точках) условиях на распределение был впоследствии получен Зуссманом (см. [97]). Таким образом, для вполне неголономных распределений возможна постановка произвольной двухточечной вариационной задачи с произвольным гладким лагранжианом

$$\inf \int_0^1 L(x, \dot{x})\, dt: \ \dot{x}(t) \in V_{x(t)}, \ x(0) = a, \ x(1) = b. \qquad (1)$$

Пусть $L$ есть *функционал длины* на римановом многообразии

$$L(x, \dot{x}) = \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle^{1/2}, \qquad (2)$$

тогда формула (1) определяет *неголономную риманову метрику* на $X$:

$$\rho_V(a, b)=\inf\int_0^1 \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle^{1/2} dt, \quad \dot{x}(t)\in V_{x(t)}, \quad x(0)=a, \quad x(1)=b.$$

Для контактной структуры эта метрика рассматривалась Каратеодори и некоторые авторы называют ее *метрикой Карно—Каратеодори*. Допустимые кривые, реализующие инфимум для любых двух достаточно близких точек, лежащих на них, называются неголономными геодезическими. Будем обозначать через $D_r^V(x)$ неголономный *шар радиуса* $r$ с центром в точке $x$ метрики $\rho_V$, через $S_r^V$ — неголономную *сферу радиуса* $r$.

Этот способ введения метрики на неголономном многообразии по метрике на исходном многообразии может быть далеко обобщен.

Рассмотрим произвольный положительно однородный степени один по $\dot{x}$ лагранжиан $L$, тогда

$$\rho^L(x, y)=\inf\int_0^1 L(x, \dot{x})\, dt, \quad x(0)=x, \quad x(1)=y \tag{3}$$

определяет метрику на $X$, а $\rho_V^L(x, y)$ по формуле (3) определяет неголономную метрику $\rho_V^L$. Можно рассматривать аналогичным образом более сложные метрики, например, зависящие от высших струй кривой (пространства Кавагути) и получать из них неголономные метрики.

**1.2. Двухточечная задача и теорема Хопфа—Ринова.** Рассмотрим условную вариационную задачу (1), лагранжиан в котором задан формулой (2). Легко построить пример дифференциальной системы $V$, когда экстремум не достигается. Простейший пример такого рода — задача на минимум длины в $\mathbf{R}^2$ для пары точек $(-1,0)$ и $(1,0)$, ограничения в которой заданы дифференциальной системой

$$V=\mathrm{Lin}(\xi_1, \xi_2), \quad \text{где } \xi_1=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \xi_2=\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Сильные достаточные условия существования решения вариационной задачи со связями дает *лемма А. Ф. Филиппова* [51]. Ее можно использовать и для неголономных задач, мы приведем ее частный случай.

Лемма. Пусть $X$ — геодезически полное риманово многообразие, $N$ — вполне неголономная дифференциальная система на $X$ и пусть $D_1X$ — подрасслоение единичных шаров в $TX$. Тогда если $N\cap D_1X$ — полунепрерывно сверху[1], то имеет решение всякая двухточечная условная вариационная задача на $X$ со связью $N$.

[1] Т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} (D_1X\cap N)_x \subset (D_1X\cap N)_{x_0}$.

В частности, условие леммы выполняется в случае, когда $N$ является распределением, и мы получаем аналог теоремы Хопфа—Ринова для неголономного случая.

Теорема (Хопф—Ринов). Пусть $X$ — полное риманово многообразие, $V$ — вполне неголономное распределение на $X$. Тогда всякие две точки на $X$ можно соединить кратчайшей неголономной геодезической.

Эта теорема существования относится к классическому вариационному исчислению (задача Лагранжа). Тем не менее, вопрос о существовании решения в стандартных учебниках почти не затрагивается. Он стал обсуждаться в последние годы, в связи с задачами оптимального управления.

**1.3. Задачи Коши и неголономный геодезический поток.** При изучении вариационных неголономных задач мы сталкиваемся со следующим эффектом. Пространство начальных данных такой задачи на первый взгляд состоит из пар $(x, v)$, где $x \in M$, $v \in V_x$ — допустимый вектор в точке $x$, $\dim V_x = m < n = \dim M$. Но из результатов п. 1.2 вытекает разрешимость любой двухточечной задачи. Таким образом, число параметров в пространстве геодезических (при фиксированной начальной точке) равно $n$. Поэтому может показаться, что задача Коши имеет неединственное решение. На самом деле начальные данные задачи Коши состоят не только из начальной скорости, т. е. допустимого вектора $v \in V_x$, но и ковектора $\omega \in V^{\perp}$, поскольку уравнение неголономной геодезической [4] является дифференциальным по $\lambda$. Задание $\omega$ на координатном языке есть задание начальных значений *множителей Лагранжа*.

Напомним, что (см. гл. 1) *смешанным расслоением* называется расслоение $\operatorname{Ken} V = V \oplus V^{\perp}$ над $X$, где $V$ — распределение на $X$, понимаемое как подрасслоение касательного расслоения, а $V^{\perp}$ — его аннулятор, понимаемый как подраспределение кокасательного расслоения.

Слой $V_x$ есть множество допустимых скоростей, а $V_x^{\perp}$ — совокупность множителей Лагранжа.

Теорема. Уравнения Эйлера—Лагранжа для неголономной задачи определяют векторное поле в смешанном расслоении.

Поток, отвечающий этому полю, дает решение задачи Коши. Если существует поток для безусловной задачи и выполнены условия леммы Филиппова (см. п. 1.2), то существует и поток для условной задачи. В частности, на полном римановом многообразии для любого вполне неголономного распределения глобально определен поток в $V \oplus V^{\perp}$. Этот поток называется *неголономным геодезическим потоком*.

Замечания. 1. Имеется другой способ построения теории. Он состоит в том, что из уравнений Эйлера—Лагранжа надлежащими дифференцированиями исключают множители Лагранжа и получают систему более высокого порядка. Тем самым единственность задачи Коши снова восстанавливается, но уже за счет высших скоростей. На инвариантном языке такой переход похож на обобщение римановой геометрии, где длина кривой зависит от струи высокого порядка. Вместо смешанного расслоения нужно рассматривать некоторые подмногообразия в высших касательных расслоениях. Этот путь, по-видимому, связан с подходом, развиваемым в [24].

2. Мы определили неголономный геодезический поток и неголономную метрику на римановом многообразии $X$ с заданным на нем вполне неголономным распределением $V$. Фактически же неголономный геодезический поток и неголономная метрика зависят лишь от ограничения метрического тензора $g$ на распределение $V$. Если ограничения на $V$ метрических тензоров двух римановых метрик совпадают, то совпадают построенные по ним неголономные геодезические потоки (и неголономные метрики), хотя формально уравнения Эйлера—Лагранжа и различны.

3. Аналогично определяется геодезический поток для финслеровой метрики и т. п.

**1.4. Уравнения Эйлера—Лагранжа в инвариантной форме и в ортогональном репере и неголономные геодезические.** Пусть $V$ — распределение размерности $n_1$ на $n$-мерном гладком многообразии $X$. Пусть на $TX\oplus\mathbf{R}^1$ задана функция, называемая лагранжианом. Выберем базис 1-форм $\omega_{n_1+1},\ldots,\omega_n$ кораспределения $V^\perp$.

*Уравнения Эйлера—Лагранжа* в локальной системе координат $\{x_i\}$ для задачи (3) имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}L_{\dot x}-L_x=\dot\lambda_j\omega_j-\lambda_j(\dot x\,\lrcorner\,d\omega_j).^{1)} \qquad (4)$$

Условия допустимости кривой $x(t)$ состоят в следующем:

$$(\dot x,\omega_j)=0,\quad j=n_1+1,\ldots,n.$$

Важное свойство уравнения (4) в том, что оно является дифференциальным и относительно $\lambda$.

Уравнения (4) могут быть записаны в инвариантной форме, как это сделано в [20], [73]. Лагранжиан $L(x,\dot x,t)$ безусловной задачи надо при этом заменить на функцию Лагранжа

$$L_V(x,\dot x,t)=L(x,\dot x,t)+\sum_j\lambda_j\langle\omega_j,\dot x\rangle.$$

Начиная с этого места, будем считать, что $L=\langle\dot x,\dot x\rangle^{1/2}$ — риманова метрика, иначе говоря, изучать *неголономные римановы многообразия.* С помощью ковариантной производной римановой связности [74], [80] уравнения геодезических записываются следующим образом:

---

1) Здесь $x\,\lrcorner\,d\omega$ есть 1-форма $(\dot x\,\lrcorner\,d\omega)\xi=w(x,\xi)$, см. [96].

$$
\begin{cases} \langle \dot\gamma, \omega_i \rangle = 0, \ i = n_1+1, \ldots, n, \\ \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \sum\limits_j (\dot\lambda_j \omega_j - \lambda_j (\dot\gamma \rfloor d\omega_j)) \end{cases} \tag{5}
$$

(мы отождествляем с помощью метрики 1-формы с векторными полями). Уравнения неголономных геодезических удобно записывать, раскладывая $\dot\gamma$ по ортонормированному базису векторных полей распределения $V$ (в ортогональном репере в терминологии Картана, Финикова и др., см. [63], [64]). Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ — ортонормированный базис $V$, $\xi_{n_1+1}, \ldots, \xi_n$ — ортонормированный базис ортогонального дополнения $V^\perp$ (наличие римановой метрики позволяет отождествить ортогональное дополнение $V$ и $V^\perp$ — аннулятор в пространстве 1-форм). Поскольку $\dot\gamma$ допустима, то $\dot\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n_1} v_i \xi_i$ и система уравнений (5) записывается в виде:

$$
\begin{cases} \dot\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n_1} v_i \xi_i, \\ \dot v_l + \sum\limits_{i,j=1}^{n_1} \Gamma^l_{ij} v_i v_j - \sum\limits_{\substack{i=1,\ldots,n_1 \\ j=n_1+1,\ldots,n}} c^j_{il} v_i \lambda_j = 0, \ l = 1, \ldots, n_1, \\ \dot\lambda_l - \sum\limits_{i,j=1}^{n_1} \Gamma^l_{ij} v_i v_j - \sum\limits_{\substack{i=1,\ldots,n_1 \\ j=n_1+1,\ldots,n}} c^j_{il} v_i \lambda_j = 0, \ l = n_1+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{6}
$$

где $\Gamma^l_{ij} = \langle \nabla_{\xi_j} \xi_i, \xi_l \rangle$ — символы Кристоффеля, $c^l_{ij} = \langle [\xi_i, \xi_j], \xi_l \rangle$ — структурные константы набора векторных полей $\xi_i$. Уравнения (6) есть результат проектирования векторного уравнения (второго уравнения из (5)) на направления $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Уравнения (6) представляют собой координатную запись уравнения Эйлера — Лагранжа для неголономных геодезических риманова многообразия для произвольного распределения. Для регулярных распределений уравнения (6) естественно разбиты на $k$ групп, в соответствии с флагом распределения (см. п.1.2). Обозначим через $\{n_i\}$ вектор роста распределения $V$. Выберем базис векторных полей $\xi_{n_1+1}, \ldots, \xi_n$ ортогонального дополнения $V^\perp$ таким образом, что $\xi_{n_i+1}, \ldots, \xi_{n_{i+1}}$ есть относительный базис $V_{i+1}$ по $V_i$. Тогда уравнения системы (6) распадаются на $k$ групп (где $k$ — степень неголономности $V$). В $m$-ую группу входят уравнения с номерами $l$ такими, что $n_{m-1}+1 \leqslant l \leqslant n_m$. Уравнения $m$-ой группы имеют следующий вид:

$$
\dot\lambda_l + \sum_{i,j=1}^{n_1} \Gamma^l_{ij} a_i \lambda_j + \sum_{j=1}^{n_m} c^l_{ij} a_i \lambda_j = 0. \tag{7}
$$

**1.5. Стандартная форма уравнений неголономных геодезических для распределения общего положения.** Пусть $V$ — распределение общего положения, в частности $V$ имеет максимальный рост. В этом случае уравнения неголономных геодезических за счет специального выбора набора векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можно привести к значительно более простому виду.

Выберем векторные поля следующим образом:

1) $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ — произвольный ортонормированный базис $V$;

2) среди скобок Ли $[\xi_i, \xi_j]$, $1 \leqslant i < j \leqslant n_1$ произвольно выберем относительный базис $V_2$ по $V_1$ — $\xi_{n_1+1}, \ldots, \xi_{n_2}$;

3) среди скобок Ли $[\xi_i, \xi_j]$, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $n_1 < j \leqslant n_2$, векторных полей из $V_1$ и $V_2$ выберем набор линейно независимых над $V_2$ — $\xi_{n_2+1}, \ldots, \xi_{n_3}$ и так далее.

Поскольку неголономные геодезические определяются лишь ограничением метрического тензора на распределение, мы можем считать выбранные векторные поля ортонормированными. (Распределение $V$ с выбранным таким образом набором векторных полей $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ будем называть оснащенным.)

Поскольку в неголономной вариационной задаче существенно лишь ограничение метрики на распределение (см. замечание 1 в п. 1.3), то можно считать базис $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ортонормированным. Метрику на $X$, определенную таким образом, назовем метрикой, индуцированной базисом $\{\xi_i\}_{i=1}^n$. Имеет место

Предложение 1. В выбранном базисе векторных полей уравнения неголономных геодезических имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v}_l = \sum\limits_{\substack{i \leqslant n_1 \\ n_1 \leqslant j \leqslant n_2}} c_{il}^j v_i \lambda_j, \quad 1 \leqslant l \leqslant n_1, \\ \dot{\lambda}_l = - \sum\limits_{\substack{i \leqslant n_1 \\ n_m \leqslant j \leqslant n_{m+1}}} c_{il}^j v_i \lambda_j, \quad n_{m-1} < l \leqslant n_m, \quad 2 \leqslant m \leqslant k-1, \\ \dot{\lambda}_l = \sum\limits_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n_1} c_{il}^j v_i v_j + \sum\limits_{\substack{i \leqslant n_1 \\ j > n_{k-1}}} c_{il}^j v_i \lambda_j, \quad n_{k-1} \leqslant l \leqslant n_k. \end{cases} \tag{8}$$

Замечания. 1) Структурные коэффициенты $c_{ij}^l(x)$ для набора векторных полей общего положения — постоянные функции при $i \leqslant n_1$ & $j \leqslant n_{k-2}$. (Они не зависят от набора векторных полей $\{\xi_i\}_{i=1}^{n_1}$, но зависят от способа выбора базисных полей среди скобок Ли.) Таким образом, все уравнения, кроме уравнений двух последних групп, одни и те же для всех ортонормированных базисов в $V$ и их продолжений по указанному выше способу до полных базисов. При этом $c_{il}^j \in \mathbf{Z}$ при $l < n_{k-2}$ и удовлетворяют некоторым специальным условиям.

2) Набор структурных коэффициентов $c_{ij}^k$ при $i \leqslant n_1$ и

$j \geqslant n_{k-2}$ определяется проектором распределения (см. п. 2.6, гл. 1).

Предложение 2. 1) Если упомянутые в замечании 2 структурные коэффициенты постоянны, т. е. постоянен проектор распределения в окрестности точки $x$, то система дифференциальных уравнений (8) имеет постоянные коэффициенты и в этом случае росток неголономного риманова многообразия $(X, V)$ изометричен ростку неголономной группы Ли $(G, V)$ с левоинвариантной метрикой.

2) Если проектор распределения равен нулю в окрестности точки $x$, то в п. 1.1. неголономная группа Ли является нильпотентной, а распределение есть ортогональное дополнение к $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Тем самым, ростки всех распределений максимального роста с нулевым проектором лежат на одной орбите действий группы ростков диффеоморфизмов $\mathbf{R}^n$.

**1.6. Неголономное экспоненциальное отображение и волновой фронт.** Так же, как для римановых многообразий (см. [74], [80]), неголономный геодезический поток позволяет определить в нашем случае экспоненциальное отображение.

Пусть $X$ — полное риманово многообразие, $V$ — регулярное распределение размерности $n_1$ на $X$. Определим *неголономное экспоненциальное отображение*

$$\exp_{V,\delta}: V_x \oplus V_x^{\perp} \to X$$

следующим образом: пусть $v_0 \in V_x$, $\omega_0 \in V_x^{\perp}$, $\gamma_{v_0}, {}_{\omega_0}$ — неголономная геодезическая, выходящая из точки $x$ с начальным вектором скорости $v_0$ и начальным значением множителей Лагранжа $\omega_0$. Положим

$$\exp_{V,\delta}(v_0, \omega_0) = \gamma_{v_0,\omega_0}(\delta).$$

Отображение $\exp_{V,\delta}$ играет в неголономной геометрии роль, аналогичную обычному экспоненциальному отображению, однако устроено оно гораздо сложнее. Обычное экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом окрестности нуля в касательном пространстве на окрестность точки $x$ в $X$. Для определенной выше экспоненты отображение $\exp_V$ не является диффеоморфизмом ни для какой окрестности нуля в $V_x \oplus V_x^{\perp}$. Например, $\exp_{V,1}(0, \omega) = x$ при любом $\omega \in V_x^{\perp}$. Другой эффект состоит в том, что сколь угодно близко к $0 \in V_x \oplus V_x^{\perp}$ лежат точки $(v_0, \omega_0)$ (с $v_0 \neq 0$), в которых ранг $\exp_V$ падает (см. гл. 3, § 2). Можно лишь утверждать, что точек, в которых происходит падение ранга $\exp_V$, в каком-то смысле мало. Нам удобнее будет сформулировать соответствующий результат не для отображения $\exp_V$, а для его ограничения на $S_\varepsilon \times V^{\perp}$, образ $A_\varepsilon^V = \exp_{V,1}(S_\varepsilon \times V^{\perp})$ мы назовем *неголономным волновым фронтом*. Иначе говоря, волновой фронт радиуса $\varepsilon$ есть множество концов неголономных геодезических длины $\varepsilon$, выходящих из точки $x$. В голономном случае при малых $\varepsilon$ волновой фронт

$A_\varepsilon$ есть просто $\varepsilon$-сфера. В неголономном случае имеет место лишь следующее включение.

Предложение 1.

При достаточно малых $\varepsilon$ справедливо включение:

$$S_\varepsilon^V(x) \subsetneqq A_\varepsilon^V(x).$$

Замечание 1. Специфика неголономного случая проявляется во многих «неклассических» эффектах. Вот один из них: существует такое $\varepsilon$, что при любых $\delta_1, \delta_2 < \varepsilon$ $S_{\delta_1}^V(x) \cap S_{\delta_2}^V = \varnothing$, однако $A_{\delta_1}^V(x) \cap A_{\delta_2}^V(x) \neq \varnothing$.

Рассмотрим на $S_\varepsilon \times V_x^\perp$ множество точек $\Sigma_i$, в которых коранг $\exp_V$ равен $i$. Множество точек, где падает ранг $\exp_V$, мало в том смысле, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.

$$\operatorname{codim} \Sigma_1 = 1, \ \operatorname{codim}(\exp_V(\Sigma_1)) = 2.$$

Множества $\Sigma_1$ и $\exp_V(\Sigma_1)$ могут иметь довольно сложную структуру, в частности, не являться многообразиями. Утверждение о том, что $\Sigma_1$ имеет положительную коразмерность означает, что $\Sigma_1$ содержится в объединении конечного набора гиперповерхностей; аналогичным образом надо понимать утверждение о коразмерности $\exp_V \Sigma_1$.

Замечание 2. При $i > 1$ коразмерность $\Sigma_i$ может быть меньше $i$.

**1.7. Функционал действия.** В этом параграфе мы в основном рассматривали вариационную задачу с неголономными связями, лагранжианом в которой служит функционал длины. Важную роль играет еще один функционал — действия. В голономном случае обе задачи имеют «одни и те же решения», точнее, если кривая $\gamma$ — решение задачи на минимум длины, то его параметризация такая, что $|\dot\gamma| = \mathrm{const}$ — решение задачи на минимум действия. Этот результат легко распространяется на неголономный случай.

Предложение. Пусть $X$ — риманово многообразие, $V$ — вполне неголономное распределение на $X$; $x, y \in X$, $\rho_V(x, y) = l$, $\gamma$ — допустимая кривая длины $l$, соединяющая $x$ и $y$; $T$ — положительное число. Тогда параметризация $\gamma$ такая, что $\dot\gamma = \frac{l}{T}$ реализует минимум функционала действия:

$$r_T(x, y) = \inf \int \langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle : \dot\gamma \in V, \quad \gamma(0) = x, \quad \gamma(l) = y,$$

и значение функционала действия на $\gamma$ равно $\frac{l^2}{T}$.

Замечание. Если на $X$ задана дифференциальная система $V$, то кратчайшей кривой, соединяющей $x$ и $y$ и согласованной с $V$, может не существовать. Однако соотношение

$$r_T(x, y) = \frac{\rho_V^2(x, y)}{T}$$

остается верным и существует последовательность кривых $\gamma_n$ таких, что $\gamma_n \in V$ $l(\gamma_n) \underset{n\to\infty}{\to} \rho_V(x, y)$, значения функционала действия на $\gamma_n$ сходятся к $r_T(x, y)$.

## § 2. Оценки множества достижимости

Как отмечалось в § 1, вполне неголономное распределение $V$ задает на гладком многообразии $X$ (с метрикой $\rho$) новую метрику — $\rho_V$. В этом параграфе мы приводим двусторонние оценки этой метрики в терминах исходной метрики и роста распределения $V$. Основой всех оценок являются построенные в § 2, гл. 1 нормальные формы струй распределений и наборов векторных полей.

В п. 2.1 мы даем точную по порядку величины оценку метрики $\rho_V$ (теорема о параллелепипеде) для регулярных распределений на римановом многообразии; эти оценки опираются на лемму о квазитреугольной форме (см. п. 1.4., гл. 1). В п. 2.2 оценки п. 21 распространяются на случай метрик, порожденных регулярными симметричными полисистемами.

В п. 2.3 для распределений общего положения приведен существенно более точный результат — оценка «главного члена» неголономной метрики.

В п. 2.4 локальные оценки (пп. 2.1, 2.3) и результаты о распределениях общего положения на компактных многообразиях (п. 2.3, гл. 1) позволяют получить «глобальные» оценки неголономной метрики для распределений общего положения на компактных римановых многообразиях.

В п. 2.5 оценки роста объемов шаров в неголономной метрике дают возможность вычислить размерность по Хаусдорфу неголономного риманова многообразия. Эти оценки связываются с вопросами роста числа слов в группах.

**2.1. Теорема о параллелепипеде.** Пусть X — риманово многообразие, $\dim X = n$, $V$ — регулярное вполне неголономное распределение на $X$. Опишем вид $\varepsilon$-шара $D_\varepsilon^V$ неголономной метрики $\rho_V$ на $X$ при малых $\varepsilon$. Неголономный шар $D_\varepsilon^V(x)$ есть множество точек $y \in X$, достижимых из точки $x$ вдоль допустимых кривых длины $\leqslant \varepsilon$. Как мы знаем (см. § 1), любые две точки из $X$ можно соединить допустимой кривой, вопрос о виде $D_\varepsilon^V(x)$ сводится к тому, как соединить $x$ с близкой точкой $y$, которая лежит в «недопустимом» направлении, допустимой кривой. Пусть $\xi_1$ и $\xi_2$ — допустимые векторные поля, обход параллелограмма со сторонами $\varepsilon\xi_1$, $\varepsilon\xi_2$, $-\varepsilon\xi_1$, $-\varepsilon\xi_2$ дает сдвиг на $\varepsilon^2$ в направлении $\xi = [\xi_1, \xi_2] \in V_2$ (см., например [78]). Обобщение этой конструкции позволяет сдвигаться на расстояние порядка $\varepsilon^i$ в направлении $\xi \in V_i$ вдоль допустимой кривой длины $\sim \varepsilon$.

С другой стороны, лемма о квазитреугольной форме позволяет показать, что приведенный выше способ сдвига вдоль векторного поля $\xi \in V_i$ является наилучшим по порядку величины. Таким образом, $D_\varepsilon^V(x)$ естественно описывается в терминах флага распределения $V$, точнее, его вектора роста — $(n_1^V, \ldots, n_k^V) = n$.

Определим функцию $\varphi = \varphi_V : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$, положив $\varphi(i) = j$ при $n_{j-1}^V < i \leqslant n_j^V$. Пусть в окрестности точки $x$ выбрана система координат $x_i : X \to \mathbf{R}^1$, $i = 1, \ldots, n$; определим параллелепипед $\Pi_{C,\varepsilon}(x)$ (где $C$ — положительная константа) следующим образом:

$$\Pi_{C,\varepsilon}(x) = \{y \in X \mid x_i(y) \mid \leqslant C\varepsilon^{\varphi(i)}\}.$$

Теорема (о параллелепипеде [27]). Пусть $X$ — риманово многообразие, $x \in X$; $V$ — регулярное вполне неголономное распределение на $X$. Тогда найдется такая система координат $\{x_i\}$ в окрестности точки $x$ и такие положительные константы $c$ и $C$, что справедливы включения

$$\Pi_{c,\varepsilon}(x) \subset D_\varepsilon^V(x) \subset \Pi_{C,\varepsilon}(x).$$

Замечания. 1) Из левого включения следует, что $\exists C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0 \quad D_{C\varepsilon^k}(x) \subset D_\varepsilon^V(x).$$

Этот результат был в разное время независимо получен многими авторами (см. ссылки в [27]).

2) Для распределения общего положения функция $\varphi$, участвующая в определении параллелепипеда, может быть точно описана в терминах роста числа слов свободной алгебры Ли $F$ с $n_1 = \dim V$ образующими:

$$\Pi_{C,\varepsilon}(x) = \{y \in X \mid |x_i(y)| \leqslant C\varepsilon^l \text{ при } \tilde{n}_{l-1} < i \leqslant \tilde{n}_l\},$$

$\tilde{n}_l$ — число слов длины $\leqslant l$ в $F$ (точные, оценки для $\tilde{n}_l$ см. в гл. 1, § 2).

Таким образом, асимптотика $\varepsilon$-шара неголономной метрики для распределения общего положения зависит лишь от пары чисел $n$ и $n_1$-размерностей пространства и распределения. В случае распределений максимального роста результат будет усилен в п. 2.3.

**2.2. Полисистемы и финслеровы метрики.** Полученная в теореме п. 2.1 оценка неголономного $\varepsilon$-шара $D_\varepsilon^V(x)$ включает произвольные положительные константы $c$ и $C$, поэтому она остается справедливой при замене римановой метрики $\rho$ на любую метрику $\tilde{\rho}$ ей эквивалентную (метрики $\rho$ и $\tilde{\rho}$ называются эквивалентными, если $\exists c_1 > 0$, $C_1 > 0$ такие, что

$$\forall x, y \in X \quad c_1 < \frac{\rho(x, y)}{\tilde{\rho}(x, y)} < C_1\Big).$$

В частности, утверждение теоремы остается справедливым для финслеровых метрик. (Напомним, что финслерова метрика на гладком многообразии $X$ определяется заданием структуры банахова пространства в касательных пространствах $T_x X$, гладко зависящей от точки $x$.)

Один из объектов, при изучении которых естественно возникают финслеровы метрики, — симметричные полисистемы — традиционный объект теории управления (см. [1], [79], [84]). Напомним, что росток *симметричной полисистемы* на гладком многообразии $X$ задается набором ростков векторных полей $\pm\xi_1, \ldots, \pm\xi_m$; кусочно-гладкая кривая $\gamma: \mathbf{R}^1 \to X$ называется *допустимой относительно полисистемы* $\{\xi_i\}$, если существуют кусочно-постоянная функция $j(t)$ со значениями в множестве $\{1, \ldots, m\}$ и кусочно-постоянная функция $i(t)$, принимающая значения в $\{-1, 1\}$ такие, что $\dot\gamma(t) = i(t)\,\xi_{j(t)}$.

Замечание. Многие свойства распределений естественно переносятся на полисистемы. Полисистему $\xi_1, \ldots, \xi_m$ на гладком многообразии $X$ назовем *регулярной*, если $\xi_1, \ldots, \xi_m$ порождают на $X$ регулярное $m$-мерное распределение. Аналогичным образом можно говорить о полисистемах (ростках, струях полисистем) максимального роста. Результаты § 2, гл. 1 показывают, что при $m < \dim X$ росток полисистемы общего положения имеет максимальный рост и является регулярным.

Симметричная полисистема $\{\xi_i\}$ задает на гладком многообразии $X$ неголономную *финслерову метрику* $\rho_{\{\xi_i\}} \equiv \tilde\rho$, которую можно определить двумя эквивалентными способами: 1) $\tilde\rho(x, y)$ — минимальное время, за которое можно придти из $x$ в $y$ по допустимой кривой. 2) Метрику $\tilde\rho$ можно получить как $\rho_V^K$, где $\rho^K$ — финслерова метрика, определенная произвольным полем выпуклых телесных многогранников $K_X$, удовлетворяющих лишь условию $\operatorname{Conv}(\{\pm\xi_i\}) = K_X \cap V_x$.[1]

Предложение. Две метрики, определенные выше, совпадают $\rho_V^K = \tilde\rho$. Поскольку метрика $\rho$ сравнима с любой римановой метрикой (см. выше), получаем теорему о параллелепипеде для симметричных полисистем.

Теорема. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ — регулярная полисистема на римановом многообразии $X$, $D_\varepsilon^{\{\xi_i\}}(x)$ — $\varepsilon$-шар с центром в точке $x$ относительно метрики $\rho$, порожденной полисистемой. Тогда $\exists c > 0,\ C > 0,\ \varepsilon_0 > 0\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливы включения

$$\Pi_{c,\varepsilon}(x) \subset D_\varepsilon^{\{\xi_i\}}(x) \subset \Pi_{C,\varepsilon}(x),$$

параллелепипед $\Pi_{c,\varepsilon}(x)$ построен по распределению $V = V(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ (см. п. 2.1).

[1] О полях выпуклых многогранников см. также Вершик А. М., Черняков А. Г., Поля выпуклых многогранников и оптимум по Парето — Смейлу. Новосибирск, 1982, Оптимизация, 28(45), 112—146

**2.3. Теорема о главном члене.** Более точные оценки для множества $D_\varepsilon^V(x)$ в случае распределений максимального роста основаны на канонической форме уравнений Эйлера—Лагранжа (см. п. 1.4). Получим их сначала для распределений с нулевым проектором (см. п. 1.5), после чего покажем, что для любого распределения максимального роста $V$ существует распределение $\tilde{V}$ с нулевым проектором, для которого $D_\varepsilon^{V}(x)$ и $D_\varepsilon^{\tilde{V}}(x)$ достаточно близки.

Напомним, что оснащенное распределение $V$ имеет нулевой проектор, если выполнены следующие условия (см. § 1):

1) $c_{il}^j \equiv 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n_1 \& n_{k-1} < l$ при любом $j$;

2) $c_{il}^j \equiv 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n_1 \& n_{k-2} < l \& j \leqslant n_{k-1}$, где $c_{ij}^l = \langle [\xi_i, \xi_j], \xi_l \rangle$.

Предложение 1. Пусть $V$ — росток распределения максимального роста с нулевым проектором на многообразии $X$. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{n_1}$ — базис регулярного распределения $V$, $\{x_i\}$ — система координат в окрестности точки $x$, согласованная с базисом. Отождествим с помощью системы координат $\{x_i\}$ $\varepsilon$-окрестность точки $x$ с окрестностью начала координат $\mathbf{R}^n$. Тогда $\varepsilon$-сфера $S_\varepsilon^V(x)$ неголономной метрики $\rho_V$ квазиоднородна, т. е. имеют место следующие формулы: $\exists \varepsilon_0 \ \forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$S_\varepsilon^V(x) = \psi_\delta\left(S_{\varepsilon_0}^V(x)\right), \quad D_\varepsilon^V(x) = \psi_\delta\left(D_{\varepsilon_0}^V(x)\right),$$

где $\delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, $\psi_\delta(x_1, \ldots, x_n) = (x_1\delta^{\varphi(1)}, \ldots, x_n\delta^{\varphi(n)})$ (функция $\varphi$ задана формулами $\varphi(i) = j$ при $n_{j-1} < i \leqslant n_j$, см. п. 2.1).

Из квазиоднородности $D_\varepsilon^V(x)$ немедленно вытекает, что $D_\varepsilon^V(x)$ гомеоморфен единичному шару в $\mathbf{R}^n$, $S_\varepsilon^V(x)$ — гомеоморфно единичной сфере в $\mathbf{R}^n$.

Зафиксируем два числа: $n$-размерность многообразия и $n_1$-размерность распределения.

Предложение 2. Для любых двух распределений $V_1$ и $V_2$ размерности $n_1$ с нулевым проектором на $n$-мерном многообразии и всякого достаточно малого $\varepsilon$ шары $D_\varepsilon^{V_1}(x)$ и $D_\varepsilon^{V_2}(x)$ изометричны.

Результаты, полученные для распределений с нулевым проектором, позволяют получить оценку расстояния между $\varepsilon$-шарами любых двух распределений: $V_1$ — максимального роста на римановом многообразии $X_1$ и $V_2$ — максимального роста на римановом многообразии $X_2$ таких, что $\dim V_1 = \dim V_2$, $\dim X_1 = \dim X_2$.

Напомним определение расстояния между двумя метрическими пространствами, рассматривавшееся рядом авторов (Минковский и др.), подробнее см. [75]

Определение. Пусть $Z_1$ и $Z_2$ — метрические пространства, расстояние $\rho_G$ между метрическими пространствами $Z_1$ и $Z_2$ есть

$$\rho_G(Z_1, Z_2) = \inf_{\{Z, f_1, f_2\}} \rho(f_1 Z_1, f_2 Z_2).$$

Инфимум берется по $(Z, f_1, f_2)$, где $Z$ — метрическое пространство, $f_i$ — изометрическое вложение $Z_i$ в $Z$, $i=1, 2$.

Предложение 3. Пусть $X$ — риманово многообразие, $x \in X$. Тогда для любых ростков распределений $V_1$ и $V_2$ на $X$, имеющих максимальный рост, верна оценка

$$\rho_G\left(D_\varepsilon^{V_1}(x), D_\varepsilon^{V_2}(x)\right) = 0(\varepsilon^{k+1}).$$

Замечание. Можно утверждать, что найдется росток $S$ диффеоморфизма $\mathbf{R}^n$ и такие положительные константы $C$, $\delta_0$, что $(V_1)_x = S(V_2)_x$ и $\forall (v_0, \omega_0) \in V_x \times V_x^\perp$ $\forall \delta \leqslant \delta_0$ справедливо неравенство

$$\rho\left(\gamma_{V_1, \delta}(v_0, \omega_0), \gamma_{SV_2, \delta}(Sv_0, S\omega_0)\right) \leqslant C\delta^{k+1},$$

где $\rho$ — риманова метрика на $X$, $k$ — степень неголономности распределения $V_1$.

Из предложений 1—3 получаем оценку главного члена для $\varepsilon$-шара в метрике $\rho_V$. Пусть $Y$ — неголономный шар распределения максимального роста с нулевым проектором.

Теорема (о главном члене). Пусть $X$ — риманово многообразие, $x \in X$. Пусть $V$ — росток оснащенного распределения размерности $n_1$ максимального роста в точке $x$. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\exists C > 0$ $\exists \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливо неравенство

$$\rho_G\left(D_\varepsilon^V(x), \Psi_\varepsilon(Y)\right) \leqslant C\varepsilon^{k+1},$$

где $D_\varepsilon^V(x)$ — $\varepsilon$-шар метрики $\rho_V$; $\Psi_\varepsilon$ — квазиоднородная гомотетия в $\mathbf{R}^n$, зависящая только от $n_1$ (см. предложение 1).

Теорема о главном члене позволяет получить следующее

Предложение 4. Пусть $V$ — росток распределения максимального роста с нулевым проектором на римановом многообразии $X$, $\dim X = n$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon$ неголономный $\varepsilon$-шар $D_\varepsilon^V(x)$ гомеоморфен единичному шару в $\mathbf{R}^n$, неголономная $\varepsilon$-сфера $S_\varepsilon^V(x)$ гомеоморфна единичной сфере в $\mathbf{R}^n$.

Замечания. 1) Неголономная сфера $S_\varepsilon^V(x)$ всегда является поверхностью с особенностями. В следующем параграфе будет подробно описана дифференциальная структура $S_\varepsilon^V(x)$ на трехмерном многообразии.

2) Если проекторы двух распределений $V_1$ и $V_2$ максимального роста в точке $x$ совпадают, то выполнено еще более сильное неравенство

$$\rho_G\left(D_\varepsilon^{V_1}(x), D_\varepsilon^{V_2}(x)\right) = O(\varepsilon^{k+2}).$$

**2.4. Оценки неголономных метрик общего положения на компактных многообразиях.** Пусть $X$ — компактное многообразие, $V$ — вполне неголономное распределение на $X$ и степень неголономности $V$ не превосходит $k^V$ во всех точках многообразия $X$. Теорема о параллелепипеде дает возможность получить оценку неголономной метрики на $X$.

Предложение 1. Найдется положительная константа $C$ такая, что справедливы неравенства

$$\rho(x, y) \leqslant \rho_V(x, y) \leqslant C \max(\rho(x, y), \rho^{1/k^V}(x, y)),$$

где $k^V$ — верхняя граница степени неголономности распределения $V$ на компактном многообразии $X$.

Нашей задачей теперь является оценка типичного значения $k^V$ на компактном многообразии.

Обозначим через $k_x^V$ — степень неголономности $V$ в точке $x$; через $k(n, n_1)$ — степень неголономности ростка $n_1$-мерного распределения максимального роста в $X$.

Теорема. Пусть $X$ — компактное многообразие, $\dim X = n$, $n_1 < n$, $V$ — распределение максимального роста на $X$ размерности $n_1$. Тогда найдется $C > 0$ такое, что

1) Если $(n, n_1) \neq (3, 2) \& (n, n_1) \neq (5, 2)$, то для дифференциальных систем размерности $n_1$ общего положения на $X$ справедливы неравенства

$$k^V = \max_{x \in X} k_x^V \leqslant k(n, n_1) + 1,$$

$$\rho(x, y) \leqslant \rho_V(x, y) \leqslant C \max\left(\rho^{\frac{1}{k+1}}(x, y), \rho(x, y)\right)$$

(где $k = k(n, n_1)$).

2) При $(n, n_1) = (3, 2)$ или $(n, n_1) = (5, 2)$ для дифференциальных систем общего положения можно гарантировать лишь более слабые неравенства

$$k^V = \max_{x \in X} k_x^V = k(n, n_1) + 2,$$

$$\rho(x, y) \leqslant \rho_V(x, y) \leqslant C \max\left(\rho^{\frac{1}{k+2}}(x, y), \rho(x, y)\right).$$

Доказательство теоремы основано на результатах § 2, гл. 1, связывающих коразмерности вырождений распределений (наборов векторных полей) с дефектами роста. Поясним его.

Зафиксируем $n$-размерность многообразия $X$ и $n_1$-размерность распределения $V$. Через $\nu_X^{n_1}$ обозначим множество дифференциальных систем размерности $n_1$ на $X$. Из оценок, связывающих коразмерности вырождений с дефектом роста (см. гл. 1, п. 2.3), получаем

Предложение 2. Пусть $X$ — компактное многообразие, $\dim X = n$, пусть $n_1 < n$. Тогда: 1) Найдется $\overset{\circ}{\nu}{}_X^{n_1}$-открытое и всюду плотное подмножество $\nu_X^{n_1}$ такое, что $\forall V \subset \overset{\circ}{\nu}{}_X^{n_1}$ выполнено следующее условие

$$\operatorname{codim}\{x \in X \mid k_x^V > k(n, n_1)+1\} = \tilde{n}_{k+1} - n + 1.$$

2) Если $\tilde{n}_{k+1} - n + 1 > n$, то для почти всех дифференциальных систем $V$ размерности $n_1$ на $X$ имеет место равенство

$$\max_{x \in X} k_x^V = k(n, n_1) + 1.$$

(Напомним, что через $\tilde{n}_k$ мы обозначаем число слов длины $\leqslant k$ в свободной алгебре Ли с $n_1$ образующими, см. § 2, гл. 1.) Теперь нам нужно установить, для каких $n$ и $n_1$ выполняется последнее неравенство: $\tilde{n}_{k+1} > 2n - 1$.

Заметим, что, поскольку $n \leqslant \tilde{n}_k$, неравенство является наиболее жестким для правильной размерности — $n = n_k$. В этом случае неравенство проверяется с использованием явных выражений для $(\tilde{n}_{i+1} - \tilde{n}_i)$ — числа слов длины $i$ в свободной алгебре Ли (см. гл. 1, § 2), таким образом, получаем

Предложение 3. Зафиксируем $n_1$, тогда: 1) Если размерность $n > n_1$ не является правильной, то справедливо неравенство

$$\tilde{n}_{k+1} > 2n - 1.$$

2) Если размерность $n$ является правильной $n = \tilde{n}_k$, то неравенство

$$\tilde{n}_{k+1} > 2n - 1$$

справедливо для всех пар $(n, n_1)$, кроме следующих двух:

а) $n=3$ $n_1=2$ (т. е. $k=2$).

б) $n=5$ $n_1=2$ $(k=3)$.

**2.5. Размерность по Хаусдорфу неголономного риманова многообразия.** Пусть $X$ — риманово многообразие с метрикой $\rho$, $V$ — вполне неголономное регулярное распределение на $X$; $V$ задает, как уже было сказано, метрику $\rho_V$ на $X$. Вычислим размерность по Хаусдорфу $d_H$ метрического пространства $(X, \rho_V)$. (Эти результаты были получены в [87], они легко вытекают из оценок неголономного $\varepsilon$-шара (см. п. 2.1).) Приведем геометрические утверждения, касающиеся оценок объемов неголономных шаров и размерности по Хаусдорфу неголономного многообразия, а затем кратко поясним связь этих результатов с алгебраической проблематикой.

Начнем с оценки объема $\operatorname{Vol} D_\varepsilon^V(x)$ неголономного $\varepsilon$-шара. Оценки п. 2.1 дают следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $X$ — риманово многообразие, $\dim X = n$, $V$ — регулярное вполне неголономное распределение на $X$; $(n_1, \ldots, n_k)$ — вектор роста распределения $V$. Тогда $\exists \varepsilon_0$, $c$, $C > 0$ $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливо неравенство

$$c\varepsilon^M < \operatorname{Vol} D_\varepsilon^V(x) < C\varepsilon^M,$$

где

$$M = \sum_{i=1}^{k} i(n_i - n_{i-1}).$$

Оценки пп. 2.1, 2.2 дают возможность получить хаусдорфову размерность $d_H(X, \rho_V)$. Напомним определение размерности по Хаусдорфу (см. [87]) метрического пространства $Y$. Пусть $D_1 \subset Y$ — шар единичного радиуса в $Y$, $N_\varepsilon$ — минимальная мощность набора $\varepsilon$-шаров, покрывающих $D_1$, тогда

$$d_H(Y) \stackrel{\text{def}}{=} -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon}{\log \varepsilon}.$$

Предложение 2. Пусть $X$ — риманово многообразие, $\dim X = n$, $V$ — вполне неголономное распределение на $X$; $n_1, \ldots, n_k$, $n$ — вектор роста $V$. Тогда имеет место формула

$$d_H(X, \rho_V) = \sum_{i=1}^{k} i(n_i - n_{i-1}).$$

Замечания. 1. Приведем явную формулу для размерности неголономного многообразия $d_H(X, \rho_V)$ в случае распределения $V$ общего положения. Пусть $n_1 = \dim V$ и степень неголономности $V$ равна $k$. Если размерность $n = \dim X$ правильна, т. е. $n = \tilde{n}_k$ (см. п. 2.4), то

$$d_H(X, \rho_V) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \setminus i} \mu(j) n_1^{i/j} = \frac{n_1^{k-1} - 1}{n_1 - 1} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j \setminus i \\ j > 1}} \mu(j) n_1^{i/j}.$$

Формулы для роста числа слов в свободной алгебре Ли (см. § 2, гл. 1) дают

$$\dim X = n = d_H(X, \rho) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \sum_{j \setminus i} \mu(j) \tilde{n}_1.$$

Таким образом, отношение между размерностями удовлетворяет неравенствам ($k = k(n, n_1)$):

$$k - 1 < \frac{d_H(X, \rho_V)}{d_H(X, \rho)} < k.$$

2. Для распределения $V$ максимального роста оценку объема неголономного $\varepsilon$-шара можно уточнить:

$$\operatorname{Vol} D_\varepsilon^V(x) = \varepsilon^{d_H(X, \rho_V)} \cdot (\operatorname{Vol}_0 + \varepsilon \operatorname{Vol}_1 + O(\varepsilon^2)),$$

где $\operatorname{Vol}_0$ не зависит от распределения $V$ (и зависит лишь от $n_1$ и $n$-размерностей распределения и многообразия), а $\operatorname{Vol}_1$ определяется значением проектора распределения $V$ в точке $x$.

**2.6. Неголономный шар в группе Гейзенберга как предельная форма степеней риманова шара.** Пусть $N$ — группа Гейзенберга и $D_r(e) = D_r$ — шар радиуса $r$ с центром в $e \in N$ относительно левоинвариантной римановой метрики на $N$, $V$ — единственное (с точностью до автоморфизма) неголономное двумерное распределение на $N$ (см. п. 1.7, гл. 1). Обозначим через $\psi_n^{-1}: N \to N$ — квазиоднородное сжатие, линейное (с коэффициентом $n$) в допустимых направлениях и квадратичное ($n^2$) в направлении центра (см. п. 2.3).

Теорема 1.

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} D_r^n = D_r^V, \tag{10}$$

где предел понимается в смысле п. 2.3, $D_r^V$ — есть неголономный шар (см. п. 2.1), $D_r^n$ — $n$-ая степень шара радиуса $r$ в группе $N$.

Замечания. 1. Структура $D^V$ описана в § 1, гл. 3.

2. Для неголономного шара $D_r^V$ выполнено замечательное соотношение

$$\psi_2^{-1}([D_r^V]^2) = D_r^V, \tag{11}$$

причем $D_r^V$ — есть единственное решение этого соотношения среди всех множеств, имеющих то же пересечение с ортогональным дополнением к центру.

3. Соотношение (11) имеет оптическую интерпретацию в терминах распространения волновых фронтов, в § 1, гл. 3 будет показано, что граница $D_\varepsilon^V$-неголономная сфера — есть внешняя часть неголономного волнового фронта.

4. Небольшая модификация приведенного результата в терминах мер на $N$ и их сверток связывает его с проблематикой законов больших чисел и предельных теорем на группах.

5. Как теорема, так и замечания к ней переносятся на произвольные нильпотентные группы с заменой распределения $V$ на распределение из примера д) п. 1.5, гл. 1, задающего на группе каноническую квазиоднородную структуру. Для других групп ситуация несколько сложнее, каноническая квазиоднородная структура отсутствует, однако можно ввести локально почти квазиоднородную структуру, см. п. 2.3, на чем мы подробнее не останавливаемся.

Можно дать дискретный вариант для рассматриваемых объектов, он связан с алгебраической проблематикой — ростом числа слов в группах и приводит к рассмотрению неголономных финслеровых метрик. Пусть $\mathbf{S}$ — конечное подмножество $N$, $\mathbf{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Положим $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cup \mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{S}^{-1} = \{s_1^{-1}, \ldots, s_n^{-1}\}$, $\tilde{\mathbf{S}}$ порождает симметричную полисистему на $N$—$\{\pm\xi_1, \ldots, \pm\xi_n\}$, где $\xi_i$ — левоинвариантное векторное поле на $N$ такое, что $\xi_i(e) = \log s_i$. Напомним, что полисистема задает на $N$ финслерову метрику (см. п.2.2).

Теорема 2. Последовательность множеств $\psi_n^{-1}(\tilde{\mathbf{S}}^n)$ аппроксимирует $D_1^{\{\xi_i\}}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(\psi_n^{-1}(\tilde{\mathbf{S}}^n), D_1^{\{\xi_i\}}\right) = 0,$$

где $D_1^{\{\xi_i\}}$ — единичный шар финслеровой метрики, порожденной полисистемой $\{\xi_i\}$.

Замечание. Теорема 2 показывает, что совокупность пределов нормированных степеней дискретных множеств в $N$ совпадает с совокупностью единичных шаров финслеровых метрик, порожденных полисистемами, или, что тоже, порожденных полями выпуклых симметричных многогранников (см. п. 2.2).

# *Глава 3*

# НЕГОЛОНОМНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

В этой главе рассматриваются простейшие неголономные вариационные задачи. Мы изучаем трехмерные неголономные группы Ли, т. е. группы с левоинвариантным неголономным распределением. В основном изучается неголономный геодезический (НГ) поток, точнее неголономная сфера и волновой фронт (§ 1) и общие динамические свойства (§ 2). Смешанное расслоение для групп Ли есть прямое произведение $G\times(V\oplus V^{\perp})$; НГ-поток на смешанном расслоении (см. п. 1.1), есть косое произведение с базой $V\oplus V^{\perp}$ и слоем $G$. В п. 1.2 описаны левоинвариантные метрические тензоры на алгебрах Ли; в п. 1.3 получены нормальные формы для уравнений неголономных геодезических; в п. 1.4 изучен поток на базе $V\oplus V^{\perp}$. В следующих пп. 1.5—1.7 описываются локальные свойства потока в слое; в п. 1.5 мы описываем $\varepsilon$-волновый фронт НГ-потока и $\varepsilon$-сферу неголономной метрики, которые оказываются многообразиями с особенностями, одними и теми же для всех трехмерных неголономных групп Ли. В п. 1.6 описывается их топологическая структура, в п. 1.7 — метрическая.

## § 1. Неголономная $\varepsilon$-сфера и волновой фронт

**1.1. Редукция неголономного геодезического потока.** Пусть $G$ — группа Ли с левоинвариантной метрикой $\rho$, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $V$ — вполне неголономное левоинвариантное распределение на $G$. Такое распределение задается линейным подпространством $V_e$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (см. гл. 1, § 1). Смешанное расслоение (см. § 1) группы Ли есть прямое произведение $G\times(V_e\oplus V_e^{\perp})$[1]. Уравнения неголономных геодезических $\gamma$ на группе Ли $G$ удобно записывать в коэффициентах разложения $\gamma$ по ортонормированному базису алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\{n_i\}$ — вектор роста распределения $V$, $\{\xi_i\}$ — ортонормированный базис алгебры

[1] Индекс $e$ мы будем иногда опускать.

Ли $\mathfrak{g}$ такой, что $\{\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}\}$ — базис $V, \ldots, \{\xi_{n_i+1}, \ldots, \xi_{n_{i+1}}\}$ — базис $V_{i+1}/V_i, \ldots$.

Уравнения неголономных геодезических (см. § 1) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \xi_i, \\ \dot{a}_i = \sum_{j<n_1, l>n_1} c_{ij}^l a_j \lambda_l - \sum_{m,l<n_1} \Gamma_{ml}^i a_l a_m, \\ \dot{\lambda}_i = - \sum_{j \leqslant n_1 < l} c_{ij}^l a_j \lambda_l + \sum_{m,l} \Gamma_{ml}^i a_l a_m, \end{cases}$$

где $c_{ij}^l$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $c_{ij}^l = \langle [\xi_i, \xi_j], \xi_l \rangle$, $\Gamma_{ij}^l$ — символы Кристоффеля, $\Gamma_{ij}^l = \langle \nabla_{\xi_j} \xi_i, \xi_l \rangle$. Напомним, (см. [35]), что символы Кристоффеля выражаются через структурные константы следующим образом: $\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}(c_{ji}^l + c_{li}^j + c_{lj}^i)$. Последние две группы дифференциальных уравнений на $V \oplus V^\perp$ имеют постоянные коэффициенты и определяют на $V \oplus V^\perp$ поток; если фиксировать начальную точку в $V \oplus V^\perp$, то первое уравнение определяет поток в группе $G$.

Напомним определение косого произведения динамических систем [39]. Пусть $M$ есть прямое произведение гладких многообразий $M = M_1 \times M_2$, на $M_1$ задана динамическая система $T^1(t): M_1 \to M_1$, а на $M_2$ семейство динамических систем $T_2(x_1)(t): M_2 \to M_2$, гладко зависящих от точки $x_1$ многообразия $M_1$. Косым произведением $T_1$ и $T_2$ называется динамическая система $T$ на $M_1 \times M_2$ такая, что $T(t)(x_1, x_2) = (T_1(t)x_1, T_2(x_1)(t)x_2)$. Пространство $M_1$ называется базой, а $M_2$ — слоем косого произведения.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение. Неголономный геодезический поток как динамическая система на смешанном расслоении группы Ли $G$ есть косое произведение с базой $V \oplus V^\perp$ и типовым слоем — группой Ли $G$.

Это предложение аналогично соответствующему утверждению об обычных левоинвариантных геодезических потоках на группах Ли; такое разложение называют *редукцией*. В отличие от симплектической редукции, дальнейшее разложение, вообще говоря, невозможно из-за отсутствия левоинвариантной симплектической структуры.

В п. 1,5 и последующих будет подробно изучена структура косого произведения.

**1.2. Метрические тензоры на трехмерных неголономных алгебрах Ли.** В § 1, гл. 1 мы перечислили все трехмерные неголономные алгебры Ли с точностью до изоморфизма. Перейдем к классификации метрик $\rho_V$ на трехмерных неголономных алгебрах Ли.

Заметим, что метрика $\rho_V$ определяется ограничением метрического тензора $g$, заданного на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, на плоскость $V: \tilde{g}=g/V$. Поскольку замена времени $t \to \lambda t$ эквивалентна умножению $g$ на $\lambda$, мы будем определять $\tilde{g}$ лишь с точностью до постоянного множителя; наконец, нас интересуют лишь классы эквивалентности таких метрик, т. е. орбиты действия группы автоморфизмов неголономных алгебр Ли на проективном пространстве, точками которого являются ограничения метрических тензоров на $V$. Следующее утверждение описывает эти классы эквивалентности $\mathrm{Cl}^{\rho}_{\mathfrak{g}}$ для всех неголономных трехмерных алгебр Ли.

Предложение. Число классов эквивалентных метрик на неголономных трехмерных группах Ли равно

1) 1 — для группы Гейзенберга,

2) 1 — для разрешимых трехмерных групп,

3) континуум (однопараметрическое семейство) для каждой простой трехмерной неголономной группы

$$(G, V)=(SO(3), V), \ (G, V)=(SL_2\mathbf{R}, V_1), \ (G, V)=(SL_2R, V_2)$$

множество классов эквивалентности $\mathrm{Cl}^{\rho}_{\mathfrak{g}_i}$ естественно изоморфно $\mathbf{R}_+$; представителями классов эквивалентности являются метрические тензоры $g=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}$ в базисе $V$, указанном в предложении 1 (п. 1.7, гл. 1).

**1.3. Структурные константы трехмерных неголономных групп Ли.** Множество структурных констант $c^k_{ij}$, $i, j, k=1, 2, 3$, неголономных трехмерных алгебр Ли является алгебраическим подмногообразием $S\subset\mathbf{R}^{27}$ и определяется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} c^k_{ij}=-c^k_{ji} \quad i, \ j, \ k=1, 2, 3, \\ \sum\limits_{r=1}^{3} c^r_{ij}c^l_{rk}+c^r_{jk}c^l_{ri}+c^r_{ki}c^l_{rj}=0, \\ c^3_{12}=1, \ c^1_{12}=c^2_{12}=0. \end{cases} \tag{1}$$

Первая группа уравнений соответствует условию антикоммутативности скобки Ли, вторая — тождеству Якоби, последняя — неголономности распределения $V$. Из (1) следует

$$c^2_{23}=-c^1_{13}, \quad c^3_{23}=0. \tag{2}$$

Строение алгебраической поверхности $S$ легко описывается.

Предложение. Алгебраическая поверхность $S$ есть объединение двух аффинных плоскостей $S=P_3\cup P_2$, где $P_3$ — трехмерная аффинная плоскость, $P_3\setminus P_2$ соответствует полупростым алгебрам Ли; $P_2$ — двумерная аффинная плоскость, соответствует разрешимым алгебрами Ли; прямая $P_3 \cap P_2$ соответствует нильпотентным алгебрам Ли. Плоскость $P_3$ выделена условием $c_{13}{}^3=0$, плоскость $P_2$ — условием $c_{23}^1=c_{23}^2=0$.

**1.4. Нормальные формы уравнений неголономных геодезических на трехмерных группах Ли.** Рассмотрим неголономную геодезическую $\gamma : \mathbf{R}^1 \to G$. Кривая $\gamma$ является решением условной вариационной задачи на минимум длины на группе $G$ со связью $V$. Напомним (см. п. 1.1), что неголономная геодезическая $\gamma$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = \dot\lambda \omega + \lambda \dot\gamma \lrcorner d\omega, \\ \langle \dot\gamma, \omega \rangle = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\nabla$ — ковариантная производная, отвечающая римановой связности на $G$, $\omega$ — 1-форма, аннулирующая $V$, $\lambda$ — множитель Лагранжа.

Неголономный геодезический поток на группе Ли $G$ задан на смешанном пучке — произведении $G \times (V \oplus \mathbf{R}^1)$, где $\mathbf{R}^1$ в обычной классической форме есть пространство множителей Лагранжа, а в терминах § 1 есть $V^\perp$-аннулятор $V$ в $\mathfrak{g}^*$.

Неголономный геодезический поток есть косое произведение (см. п. 1.1), база которого есть поток на $V \oplus V^\perp$, поэтому мы начинаем с изучения потока на базе.

Выберем базис $\xi_1$, $\xi_2$ ортонормированных векторных полей в $V$. Мы можем считать (заменив, если нужно метрический тензор $g$ на тензор $\hat g$, так чтобы $g|V=\hat g|V$), что $\xi_3 = [\xi_1, \xi_2] \perp V$, $\|\xi_3\|=1$. Положим $\dot\gamma = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$. Через $c_{ij}^k$ обозначим структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$: $c_{ij}^k = \langle [\xi_i, \xi_j], \xi_k \rangle$. Используем выражение символов Кристоффеля (см. [35], тетрадный формализм) $\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_{\xi_j}\xi_i, \xi_k \rangle$ через структурные константы $c_{ij}^k$ $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(c_{ji}^k + c_{ki}^j + c_{kj}^i\right)$. Тогда система уравнений (3) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dot\gamma = a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \\ \dot a_1 = -\lambda a_2, \\ \dot a_2 = \lambda a_1, \\ \dot\lambda = a_1 a_2\left(c_{31}^2 + c_{32}^1\right) + a_1^2 c_{31}^1 + a_2^2 c_{32}^2 + \lambda\left(c_{13}^3 a_1 + c_{23}^3 a_2\right). \end{cases}$$

Далее везде будем рассматривать лишь такие геодезические $\gamma$, что $|\dot\gamma| \equiv 1$, т. е. $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Таким образом, неголономный геодезический поток рассматривается на подмножестве смешанного расслоения — $G \times (S^1 \times \mathbf{R}^1)$, слоем над каждой точкой группы Ли является цилиндр $\{(\dot\gamma, \lambda)\} = S^1 \times \mathbf{R}^1$, $S^1 \subset V$. Положив

$a_1 = \sin\varphi$, $a_2 = \cos\varphi$, получим (с учетом (2)) систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \sin\varphi \cdot \xi_1 + \cos\varphi \cdot \xi_2, \\ \dot{\varphi} = \lambda, \\ \dot{\lambda} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(c_{31}^2 + c_{32}^1\right) + c_{13}^1 \cos 2\varphi + \lambda c_{13}^3 \sin\varphi. \end{cases} \tag{4}$$

Предложение п. 1.3 дает возможность получить нормальную форму уравнения неголономных геодезических для каждой из неголономных алгебр Ли (мы будем приводить лишь последнее уравнение системы (4), поскольку первые два стандартны).

Теорема (о нормальной форме уравнений неголономных геодезических). Уравнения неголономных геодезических имеют следующий вид:

$N$) Для группы Гейзенберга $N$: $\dot{\lambda} = 0$.

$S$) Для разрешимых групп $R_\alpha$, $\alpha \in SL_2\mathbf{R}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \det\alpha \cdot \sin 2\varphi - \lambda \operatorname{Sp}\alpha \cdot \sin\varphi.$$

$SS$) Для полупростых групп Ли:

$$\dot{\lambda} = f(m) \sin 2\varphi,$$

где $m \in \mathbf{R}$ — параметр метрического тензора (см. предложение п. 1.2), а

$$f(m) = \begin{cases} (m^{-1} - 1)/2 & \text{для } SO(3), \\ 2(1 - m^{-1}) & \text{для } (SL_2\mathbf{R}, V_1), \\ 2(m+1) & \text{для } (SL_2\mathbf{R}, V_2). \end{cases}$$

**1.5. Поток на базе косого произведения** $V \oplus V^\perp$. Рассмотрим фазовый портрет системы (4) на цилиндре $S^1 \times \mathbf{R}^1$. Из теоремы п. 1.4 вытекает, что для всех алгебр нормальные формы уравнений неголономных геодезических на алгебрах Ли имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \lambda, \\ \dot{\lambda} = \mu_1 \sin 2\varphi + \mu_2 \lambda \sin\varphi, \end{cases} \tag{5}$$

причем $\mu_1 \leqslant 0$. Изучим систему (5).

Предложение 1. Пусть на цилиндре $(\varphi, \lambda) \in S^1 \times \mathbf{R}^1$ задана система дифференциальных уравнений (5). Тогда имеет место один из следующих двух случаев:

1) При $\mu_1 \neq 0$ имеются четыре неподвижные точки: $\lambda = 0$; $\varphi = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$, и четыре сепаратрисы, их соединяющие. Все траектории, кроме сепаратрис, замкнуты. Сепаратрисы соединяют точки $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

2) При $\mu_1=0$ неподвижные точки образуют окружность, заданную уравнением $\lambda=0$. Все траектории (при $\lambda\neq 0$) — замкнуты.

Фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (5) при $\mu_1\neq 0$ изображен на рис. 1. Всякая кривая системы (5) пересекает прямую $\varphi=0$ или прямую $\varphi=\pi$. Через $\alpha_t$ обозначим траекторию, пересекающую прямую $\varphi=0$ в точке $t$, через $\tau_t$ — ее период. Через $\pm t_\infty$ обозначим точку пересечения сепаратрисы с прямой $\varphi=0$. В случае $\mu_1=0$ будем считать $t_\infty=0$. Фазовый портрет на цилиндре при $\mu_1=0$ изображен на рис. 2.

Предложение 2.

1) При $t_\infty<t$ функция $\tau_t$ строго убывает и $\tau_t \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

2) При $0<t<t_\infty$ функция $\tau_t$ строго возрастает и $\exists T_0>0$ такое, что $\tau_t \underset{t\to 0}{\to} T_0$.

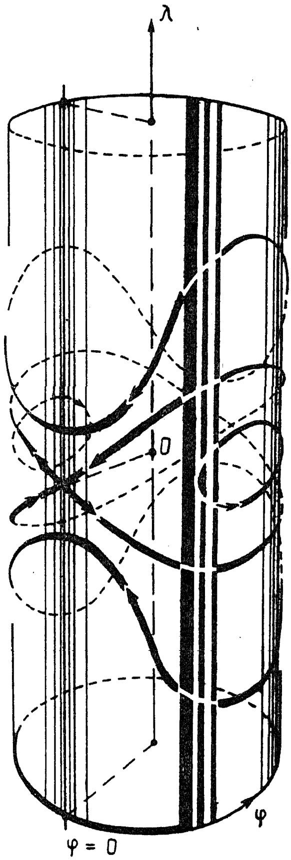

Рис. 1

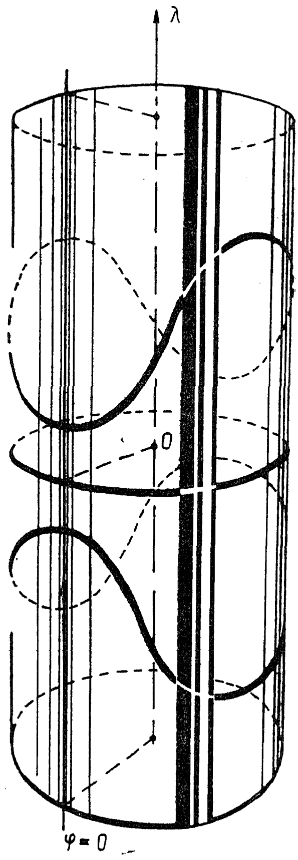

Рис. 2

Замечания. 1) $\tau_t$ — четная функция.

2) В случае $\mu_1=0$ считаем $T_0=\infty$.

3) $t\tau_t \underset{t\to\infty}{\to} 1$.

График зависимости периода $\tau$ от $\lambda$ изображен на рис. 3 для $\mu_1\neq 0$.

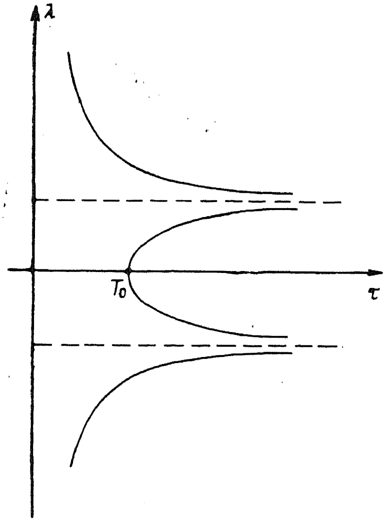


Рис. 3

**1.6. Волновой фронт неголономного геодезического потока, неголономная $\varepsilon$-сфера и их особенности.** Предложения предыдущего пункта полностью описывают строение проекции неголономного геодезического потока на базу. Займемся описанием самих геодезических как кривых на группе. Проекция каждой интегральной кривой неголономного геодезического потока в $G\times(V_e\oplus V_e^{\perp})$ на $V_e\oplus V_e^{\perp}$ есть кривая на цилиндре $S^1\times V^{\perp}\simeq \simeq S^1\times\mathbf{R}^1$. Для того, чтобы получить саму геодезическую на группе (т. е. в слое), нужно проинтегрировать уравнение

$$\gamma^{-1}\dot{\gamma}=\xi_1\cos\varphi(t)+\xi_2\sin\varphi(t)$$

($\gamma^{-1}\dot{\gamma}$ — развертка Картана кривой на базе).

Зафиксируем точку $x\in G$ и положительное число $\varepsilon$, обозначим $\mathrm{NE}(v_0,\lambda)=\exp_{V,\varepsilon}(v_0,\lambda)$ конец геодезической длины $\varepsilon$, выходящей из точки $x$ с начальными данными $(v_0,\lambda)$. Поскольку метрика и распределение левоинвариантны, можно в качестве точки $x$ рассматривать лишь единицу группы. Мы начнем с локальных вопросов — изучения неголономной $\varepsilon$-сферы и $\varepsilon$-шара. Как было отмечено выше (см. § 2, гл. 2), $S_\varepsilon^V(x)\subset A_\varepsilon^V(x)$, где $A_\varepsilon^V(x)$ — неголономный волновой фронт, т. е. множество концов геодезических длины $\varepsilon$; таким образом, $A^V_\varepsilon$ есть образ цилиндра $S_\varepsilon \times \mathbf{R}^1 \subset V_e \oplus V_e^\perp$, $A^V_\varepsilon(e) = \mathrm{NE}(S_\varepsilon \times \mathbf{R}^1)$. Мы будем использовать теорему Флоке.

Пусть $G$ — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $f: \mathbf{R}^1 \to \mathfrak{g}$ — периодическая кривая на алгебре $\mathfrak{g}$, $f(t+\tau) = f(t)$. Зафиксируем точку $x \in G$ и рассмотрим семейство кривых $\gamma_r^x$, $r \in \mathbf{R}^1$, на группе $G$, удовлетворяющих одному и тому же дифференциальному уравнению

$$(\gamma_r^x)^{-1} \dot{\gamma}_r^x = f(t), \tag{6}$$

с начальными данными $\gamma_r^x(r) = x$.

Теорема 1 (Флоке [76], [82]). При любых $r_1$ и $r_2$ для кривых $\gamma_{r_1}^x$, $\gamma_{r_2}^x$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (6) и с указанными выше начальными данными, справедливо равенство

$$\gamma_{r_1}^x(r_1+\tau) = \gamma_{r_2}^x(r_2+\tau).$$

Отображение $s: G \to G$, заданное формулой $x \mapsto \gamma_r^x(r+\tau)$, называется *отображением монодромии*, $s$ есть правый сдвиг на элемент $z_\tau = \gamma_r^x(r+\tau)(\gamma_r^x(r))^{-1} = \gamma_r^x(r+\tau)x^{-1}$.

Обозначим $\tilde{\alpha}_n$, $n \in \mathbf{N}$, кривую $(\varphi(t), \lambda(t))$ на цилиндре $S^1 \times \mathbf{R}^1$, являющуюся решением системы дифференциальных уравнений (5), имеющую период $\varepsilon/n$ и такую, что $\lambda(t) > 0$; через $\tilde{\alpha}_{-n}$, $n \in \mathbf{N}$, обозначим кривую $-\tilde{\alpha}_n$. Теория Флоке дает

Предложение 1. Для всякого натурального $n$ отображение $\exp_{V,\varepsilon}$ переводит кривую $\tilde{\alpha}_n$ в точку. Обозначим $\tilde{z}_n^\varepsilon = \exp_{V,\varepsilon}(\tilde{\alpha}_n)$.

Предложение 2. 1. Отображение $\varkappa: \mathbf{R}^1_+ \to G$ такое, что $\varkappa(\tau) = \tilde{z}_1^\tau$ является гладким.

2. $\rho(e, \varkappa(\delta)) \cdot \delta^{-2} \xrightarrow[\delta \to 0]{} C_G$, где $C_G$ — положительная константа (зависящая лишь от группы $G$).

Дополнение к множеству кривых — $\Sigma = (S^1 \times \mathbf{R}^1) \setminus \bigcup\limits_{n \in (\mathbf{N} \cup -\mathbf{N})} \tilde{\alpha}_n$ есть объединение счетного набора связных компонент (см. рис. 3). Открытую компоненту, ограниченную кривыми $\tilde{\alpha}_n$ и $\tilde{\alpha}_{n+1}$, обозначим $C_n$; компоненту, ограниченную кривыми $\tilde{\alpha}_{-(n+1)}$ и $\tilde{\alpha}_{-n}$, — через $C_{-n}$, наконец, ограниченную кривыми $\tilde{\alpha}_{-1}$ и $\tilde{\alpha}_1$, обозначим $C_0$.

Теорема 2 (*о волновом фронте*). Пусть $G$ — трехмерная неголономная группа Ли. Тогда для достаточно малых $\varepsilon$ справедливы следующие утверждения:

1. Отображение $\exp_{V,\varepsilon}$ невырождено, т. е. имеет ранг 2, во всех точках $x \in \Sigma$.

2. Отображение $\exp_{V,\varepsilon}$ переводит кривую $\tilde{\alpha}_n$ в точку $\tilde{z}_n^\varepsilon$. В окрестности каждой из точек $\tilde{z}_n^\varepsilon$ росток волнового фронта $A^V_\varepsilon$

диффеоморфен ростку прямого кругового конуса $K$, $K=\{(x, y, z) | z^2=x^2+y^2\}$ в начале координат.

3. Для любого $i \in \mathbf{N} \cup -\mathbf{N}$ образ $\overline{C}_i$ при отображении $\exp_{V,\varepsilon}$ гомеоморфен двумерной сфере.

4. $S_\varepsilon^V=\exp_{V,\varepsilon}(\overline{C}_0)$.

5. $\exp_{V,\varepsilon}(C \setminus \overline{C}_0)$ лежит во внутренности неголономного $\varepsilon$-шара.

**1.7. Метрическая структура сферы $S_\varepsilon^V$.** Опишем вид $S_\varepsilon^V$ при малых $\varepsilon$. Выберем в окрестности единицы группы Ли $G$ систему координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ так, чтобы базисные ортонормированные поля $\xi_1$ и $\xi_2$ распределения $V$, введенные в п. 1.4, имели следующий вид:

$$\xi_1=\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \xi_2=\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3}+\ldots.$$

Положим $\tilde{\xi}_2=\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$, $\tilde{\xi}_1=\xi_1$ и рассмотрим следующие две системы дифференциальных уравнений:

1) систему уравнений, определяющую неголономные геодезические в группе $G$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1=\cos\varphi_1\xi_1+\sin\varphi_1\xi_2, \\ \dot{\varphi}_1=\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_1=\mu_1\sin 2\varphi_1+\mu_2\lambda_1\sin\varphi_1; \end{cases} \tag{7}$$

2) систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_2=\cos\varphi_2\xi_1+\sin\varphi_2\xi_2, \\ \dot{\varphi}_2=\lambda_2, \\ \dot{\lambda}_2=0, \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) есть система уравнений, определяющая неголономные геодезические в группе Гейзенберга.

Из результатов § 2, гл. 2 следует

Предложение. Пусть $(\varphi,\lambda) \in S^1 \times \mathbf{R}^1$, $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — решения систем (7) и (8) соответственно, с начальными данными $(\varphi,\lambda)$ и $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$. Тогда $\rho(\gamma_1(\varepsilon), \gamma_2(\varepsilon))=O(\varepsilon^3)$.

Таким образом, с точностью до $\varepsilon^3$, $\varepsilon$-фронт $A_\varepsilon^V$ и $\varepsilon$-сфера $S_\varepsilon^V$ совпадают с соответствующими объектами для группы Гейзенберга $N$ (группа $N$ диффеоморфна $\mathbf{R}^3$), базису $N$ — $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ можно сопоставить векторные поля: $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$, $\frac{\partial}{\partial x_3}$. Система уравнений (8) определяет неголономные геодезические в $N$. Для группы Гейзенберга $N$ неголономные геодезические могут быть найдены явно — система (8) легко решается (см. [20]). Обозначим координаты $\gamma_{\lambda,\varphi}(\varepsilon)$ (для системы уравнений (8)) через $x_{\varphi,\lambda}$, $y_{\varphi,\lambda}$, $z_{\varphi,\lambda}$; они задаются следующими формулами

$$x_{\varphi,\lambda}=\varepsilon\,\frac{\sin(\theta+\varphi)-\sin\varphi}{\theta},$$

$$y_{\varphi,\lambda}=\varepsilon\,\frac{\cos\varphi-\cos(\theta+\varphi)}{\theta}, \tag{9}$$

$$z_{\varphi,\lambda}=\varepsilon^2\,\frac{2\theta-(\sin(2\theta+2\varphi)-\sin 2\varphi)+4\sin\varphi\,(\cos(\theta+\varphi)-\cos\varphi)}{4\theta^2},$$

где $\theta=\lambda\varepsilon$.

Из (9) видно, что (см. также § 2):

1) $A_\varepsilon^V$ и $S_\varepsilon^V$ — квазиоднородные поверхности: при замене $\varepsilon$ на $\frac{\varepsilon}{n}$, $A_\varepsilon^V$ и $S_\varepsilon^V$ сжимаются в $n$ раз в направлениях $x$ и $y$ и в $n^2$ раз — в направлении $z$.

2) $A_\varepsilon^V$ и $S_\varepsilon^V$ обладают группой симметрии $\Gamma=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, состоящей из преобразований, меняющих знак у любой пары координат в $\mathbf{R}^3$.

На рис. 4 схематически показано расположение волнового фронта на группе Гейзенберга (в этом случае кривые $\alpha_t$ есть просто горизонтальные окружности $\lambda=\frac{2k\pi}{\varepsilon}$). Все «бусинки» — образы $C_i$, $i\neq 0$, переходят внутрь первой — образа $C_0$, особые

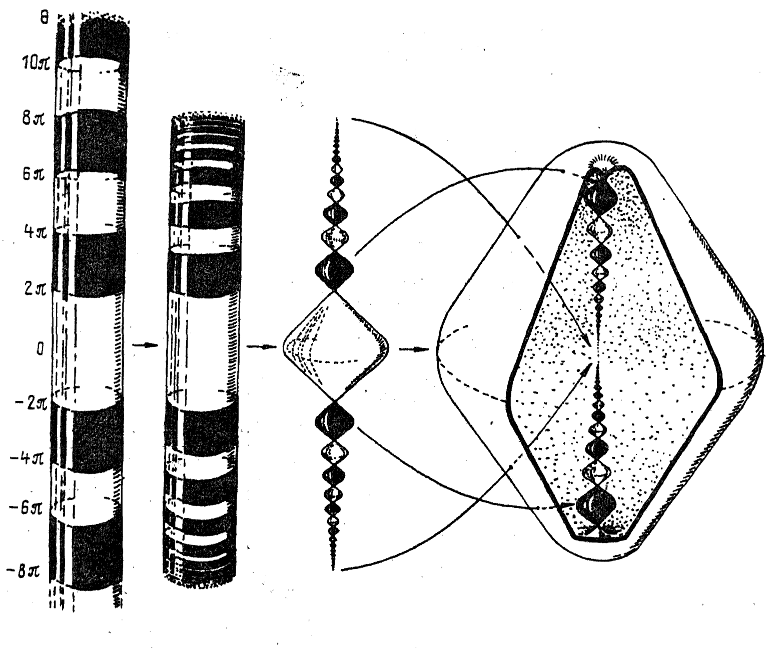


Рис. 4

точки лежат на оси $z$ и имеют координаты $z_k$, $k \in \mathrm{N} \cup -\mathrm{N}$,

$$z_k = \frac{\varepsilon^2}{4k\pi} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Метрически $\varepsilon$-сфера и волновой фронт устроены довольно сложно. Их более или менее точный вид приведен на рис. 5. На рис. 4 изображено неголономное экспоненциальное отображение цилиндра $S_\varepsilon^1 \times V^\perp$ в неголономный волновой фронт $A_\varepsilon$.

Поскольку для группы Гейзенберга степень квазиоднородности есть (1,1,2), то предложение 1 гарантирует, что при малых $\varepsilon$ неголономные $\varepsilon$-сферы для всех групп Ли имеют «близкий» вид.

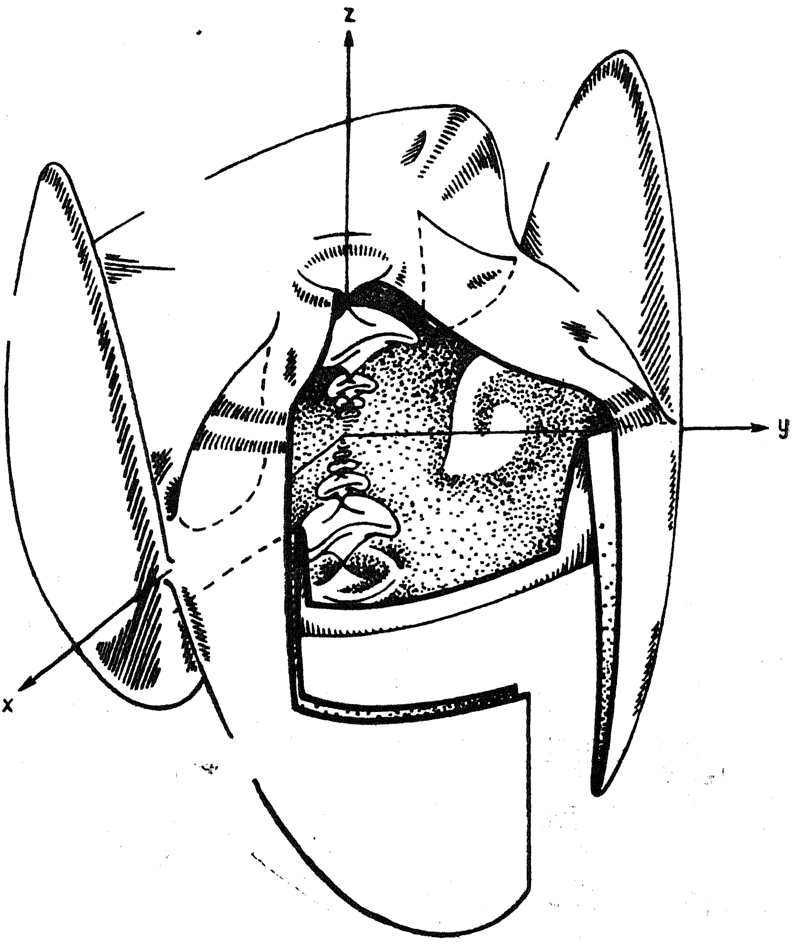


Рис. 5

Замечание. Теорема 2 п. 1.6 показывает, что для любой трехмерной группы Ли неголономная ε-сфера диффеоморфна телу вращения. Для группы Гейзенберга соответствующие координаты в $\mathbf{R}^3$ могут быть указаны явно. Сопоставление матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в алгебре Гейзенберга $\mathfrak{N}$ точки $(\alpha, \gamma, \beta-\frac{1}{2}\alpha\gamma)$ в $\mathbf{R}^3$ отождествляет $N$ с трехмерным евклидовым пространством. При этом отождествлении неголономная ε-сфера $S_\varepsilon^V$ есть тело вращения.

## § 2. Неголономный геодезический поток на трехмерных группах Ли

В этом параграфе мы изучаем динамические свойства неголономного геодезического потока на трехмерных группах Ли и их компактных однородных пространствах. Поскольку все траектории динамической системы на базе (см. п. 1.5) $V\oplus V^\perp$ для НГ-потоков оказываются замкнутыми, в слое возникают отображения монодромии, которые мы описываем в п. 2.1; они дают возможность исследовать неголономные геодезические потоки на группах Ли и их компактных однородных пространствах (п. 2.2). В п. 2.3 описан характер НГ-потока на $SO(3)$ и компактных однородных пространствах группы Гейзенберга. Наиболее интересным оказывается поток на компактных однородных пространствах группы $SL_2\mathbf{R}$, который описан в п. 2.4. В последнем пункте 2.5 описывается поток на нильмногообразии — компактном однородном пространстве нильпотентной группы ступени 2 с $m$-образующими.

**2.1. Отображение монодромии.** Результаты пункта 1.5 показывают, что при $\mu_1\neq 0$ все траектории на базе — цилиндре $S^1\times\mathbf{R}^1$ (за исключением четырех сепаратрис и четырех неподвижных точек) — распадаются на четыре семейства замкнутых траекторий:

1,2) $\alpha_\tau^+$ (соответственно $\alpha_\tau^-$) — траектория периода $\tau$ в верхней (соответственно нижней) части цилиндра $\tau\in(0, +\infty)$.

3,4) $\beta_\tau^+$ (соответственно $\beta_\tau^-$) — траектория периода $\tau$, обходящая неподвижную точку и расположенная внутри сепаратрис в правой (соответствено левой) части цилиндра (см. рис. 1).

При $\mu_1=0$ имеется два семейства периодических траекторий $\alpha_\tau$, описанных выше, и окружность, заданная уравнением $\lambda=0$, состоящая из неподвижных точек (см. рис. 2). Теория Флоке показывает (см. п. 2.5), что за время $\tau$ все геодезические $\gamma_{V,\tau}(v_0, \lambda)$ с начальными данными $(v_0, \lambda)\in\alpha_\tau$ (соответственно $(v_0, \lambda)\in\beta_\tau$), выходящие из точки $x$, перейдут в одну и ту же точку — $xz_\tau$ (соответственно $xy_\tau$). Таким образом, получаем

П р е д л о ж е н и е 1. Неголономная геодезическая $\gamma = \gamma_{V,t}(v_0, \lambda)$, где $(v_0\ \lambda) \in \alpha_\tau$ (или $(v_0, \lambda) \in \beta_\tau$), удовлетворяет условию: $\gamma(t) = \gamma(t - n\tau) \cdot z_\tau^n$ (соответственно $\gamma(t) = \gamma(t - n\tau) \cdot y_\tau^n$).

Предложение 1 дает возможность сразу описать неголономный геодезический поток на всех трехмерных односвязных группах Ли, за исключением двулистной накрывающей группы SO(3), т. е. $SU(2) = S^3$.

Напомним (см. [59]), что группа Гейзенберга, разрешимые односвязные группы и универсальная накрывающая $SL_2\mathbf{R}$ гомеоморфны (как многообразия) трехмерному евклидову пространству $\mathbf{R}^3$; универсальная накрывающая SO(3) — трехмерной сфере $S^3$.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть $G$ — трехмерная односвязная некомпактная группа Ли, $V$ — левоинвариантное двумерное распределение на $G$, $\rho$ — левоинвариантная метрика на $V$. Тогда всякая неголономная геодезическая на $G$ уходит на бесконечность (и не содержит предельных точек).

Пусть $(v_0, \lambda) \in \alpha_\tau$ (соответственно $(v_0, \lambda) \in \beta_\tau$); для каждой точки $x \in G$ рассмотрим неголономную геодезическую $\gamma^x_{v_0,\lambda}(t)$, выходящую из точки $x$ с начальными данными $(v_0, \lambda)$, рассмотрим отображение $\mu_\tau: G \to G$, $\mu_\tau(x) = \gamma^x_{v_0,\lambda}(\tau)$. Назовем $\mu_\tau$ отображением монодромии за время $\tau$. Очевидно, отображение $\mu_\tau$ есть умножение справа на элемент $z_\tau \in G$ для $(v_0, \lambda) \in \alpha_\tau$ (соответственно $y_\tau \in G$ для $(v_0, \lambda) \in \beta_\tau$): $\mu_\tau x = x z_\tau$ (соответственно $\mu_\tau x = x y_\tau$).

О п р е д е л е н и е. Набор элементов $z_\tau$ (соответственно $y_\tau$) при $\tau \in (-\infty, +\infty)$ (соответственно $\pm\tau \in (T_0, \infty)$) назовем *подмногообразием монодромии*. Следующее предложение дает иное описание точек подмногообразия монодромии.

П р е д л о ж е н и е 3. Для каждой из точек подмногообразия монодромии существует однопараметрическое семейство кратчайших геодезических (с равными длинами), соединяющих эту точку с единицей группы.

Таким образом каждая из точек подмногообразия монодромии сопряжена к единице группы.

В классическом случае множество точек, сопряженных с данной, на каждой геодезической дискретно. Наличие подмногообразий, состоящих из сопряженных точек, — еще один неголономный эффект. Интересен вопрос о их строении. Оказывается, для нильпотентной и всех полупростых трехмерных неголономных групп Ли подмногообразие монодромии есть: однопараметрическая группа $z_\tau$, если коэффициент $\mu_1$ равен 0; если $\mu_1 \neq 0$, то подмногообразие монодромии $\mathfrak{M}$ состоит из однопараметрической группы $z_\tau$, соответствующей семейству замкнутых кривых $\alpha_\tau$ (см. рис. 1), и подмножества однопараметрической группы $y_\tau$ ($y_\tau$ соответствуют замкнутым кривым $\beta_\tau$). (Для разрешимых групп подмногообразие монодромии уже не имеет столь простого описания.)

Следующие формулировки дают описание $\mathfrak{M}$ подмногообразия монодромии некоторых трехмерных неголономных групп Ли.

1) Для группы Гейзенберга $\mathfrak{M}=\{z_\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}^1}$ есть однопараметрическая подгруппа ($\simeq\mathbf{R}^1$) группы $N$ с генератором из $V^\perp$,

2а) Для SO(3) с двусторонне инвариантной метрикой $\mathfrak{M}$ есть однопараметрическая подгруппа (изоморфная $S^1$) с генератором из $V^\perp$.

2б) Для SO(3) с левоинвариантной метрикой (не являющейся двустороннее инвариантной) $\mathfrak{M}$ есть объединение двух однопараметрических подгрупп $\mathfrak{M}=\{z_\tau\}\cup\{y_\tau\}$, где $\{z_\tau\}$ — однопараметрическая подгруппа SO(3) с генератором из $V^\perp$, $\{y_\tau\}$ — однопараметрическая подгруппа с генератором, соответствующим центру — неподвижной точке на цилиндре (см. рис. 1). Каждая из компонент подмногообразия монодромии $\mathfrak{M}$ есть, таким образом, проективная прямая в $P_3\mathbf{R}\simeq SO(3)$ и эти прямые пересекаются в единице группы $e\in SO(3)$.

3а) Для неголономной группы Ли $(SL_2\mathbf{R}, V_1)$ с метрикой, заданной в стандартном базисе $\xi_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ алгебры $sl_2\mathbf{R}$ тензором $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathfrak{M}=\{z_\tau\}$—однопараметрическая подгруппа $SL_2\mathbf{R}$ с генератором $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

3б) Рассмотрим неголономную группу Ли $(SL_2\mathbf{R}, V_1)$ с метрикой, заданной в стандартном базисе тензором $g=\begin{pmatrix}1&0\\0&m\end{pmatrix}$, см. 1.2, $m\neq1$. Тогда подмногообразие монодромии $\mathfrak{M}$ не зависит от $m$ и есть объединение трех непересекающихся компонент:

a) $\{z_\tau\}$—однопараметрической подгруппы $SL_2\mathbf{R}$ с генератором $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in V_1^\perp$;

b) $\{y_\tau\}^+$—луча на однопараметрической подгруппе $\{\exp t\xi\mid t>T_0\}$ с генератором $\xi\in V_1$;

c) $\{y_\tau\}^-$—луча на той же однопараметрической подгруппе

$$\{\exp t\xi\mid t<-T_0\}.$$

Генератор $\xi$ есть $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in V_1$ при $m>1$; $\xi=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, если $m<1$. Каждая из компонент $\mathfrak{M}$ гомеоморфна $\mathbf{R}^1$.

4) Для неголономной группы Ли $(SL_2\mathbf{R}, V_2)$ подмногообразие $\mathfrak{M}$ состоит из трех компонент $\mathfrak{M}=\alpha\cup\beta^+\cup\beta^-$, где

a) $\alpha=\{\alpha_\tau\}_{\tau\in\mathbf{R}^1}$—однопараметрическая подгруппа с генератором $\begin{pmatrix}0&\gamma\\-\gamma&0\end{pmatrix}$, гомеоморфная окружности;

b) $\beta^+=\{\beta_\tau\}_{\tau\in(T_0,+\infty)}$—луч на однопараметрической подгруппе с генератором $\xi=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\{\beta_\tau\}_{\tau>T_0}=\{\exp t\xi\mid t>T_0\}$;

c) $\beta^- = \{\beta_\tau\}_{\tau \in (-\infty, -T_0)}$ — луч на однопараметрической подгруппе с тем же генератором $\xi$, $\{\beta_\tau\}_{\tau < -T_0} = \{\exp t\xi \mid t < -T_0\}$ (вторая и третья компоненты гомеоморфны $\mathbf{R}^1$).

Замечание. Метрику из 3б мы будем называть общей метрикой на $(SL_2\mathbf{R}, V_1)$, метрику из 3а — специальной.

**2.2. Неголономный геодезический поток на SO(3).** В предыдущем пункте описан неголономный геодезический поток на всех односвязных группах Ли, за исключением универсальной накрывающей SO(3), т. е. $S^3$. Опишем поток на $S^3$ — двулистной накрывающей SO(3), начав со случая двусторонне инвариантной метрики. В этом случае предложение 4, п. 1.7, гл. 3 показывает, что подмногообразие монодромии есть окружность $S^1$ в $S^3$, касательный вектор к которой ортогонален распределению $V$, отображение монодромии есть сдвиг вдоль этой окружности на угол $\varphi_t$. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — ортонормированный базис $V$, $\xi_3 = [\xi_1, \xi_2] \perp V$. Следующая теорема описывает неголономный геодезический поток на SO(3) (и на $S^3$) с двусторонне инвариантной метрикой.

Теорема 1 (о НГ-потоке для двусторонне инвариантной метрики). Пусть на группе Ли SO(3) с двусторонне инвариантной метрикой задано неголономное левоинвариантное двумерное распределение $V$; пусть $\gamma$ — неголономная геодезическая с начальными данными $(v_0, \lambda) \in S^1 \times V^\perp$. Тогда

1) Если $\lambda = 0$, то $\gamma$ есть однопараметрическая подгруппа $(\simeq S^1)$ группы SO(3) с допустимым генератором.

2) Если $\lambda \neq 0$ и $\varphi_\tau$ соизмеримо с $\pi$, т. е. $\varphi_\tau = \frac{k}{l} 2\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$, $l \neq 0$, то $\gamma$ — периодическая траектория; отображение $\gamma : \mathbf{R}^1 \to SO(3)$ задается формулой:

$$\gamma(t) = \exp \frac{2k\pi}{l\tau} t\xi_3 \exp\left(\xi_1 \cos \frac{2\pi}{\tau} t + \xi_2 \sin \frac{2\pi}{\tau} t\right);$$

геодезическая $\gamma_3$ лежит на двумерном (топологическом) торе в SO(3) (в $S^3$), заданном отображением:

$$\varkappa : (\varphi, \psi) \in S^1 \times S^1 - \exp(\varphi\xi_3) \ \exp(\xi_1 \cos \psi t + \xi_2 \sin \psi t).$$

3) Если $\varphi_\tau$ несоизмеримо с $\pi$, то траектория $\gamma$ всюду плотна на двумерном (топологическом) торе $\varkappa(S^1 \times S^1) \subset SO(3)$.

Пусть теперь метрика $\rho$ — левоинвариантна (и не является двусторонне инвариантной). В этом случае подмногообразие монодромии состоит из точек $z_\tau$, каждая из которых лежит на своей однопараметрической подгруппе $\Psi_\tau \simeq S_\tau^1$ и задает сдвиг вдоль этой подгруппы $S_\tau^1$ на угол $\varphi_\tau$. Имеет место очевидное

Утверждение. Угол $\varphi_\tau$ непрерывно зависит от $\tau$. НГ-поток с левоинвариантной метрикой на SO(3) описывает следующая

Теорема 2 (о НГ-потоке для левоинвариантной метрики на SO(3)). Пусть на группе Ли

SO(3) с левоинвариантной метрикой $\rho$ (не являющейся двусторонне инвариантной) задано двумерное левоинвариантное распределение $V$; пусть $\gamma$ — неголономная геодезическая с начальными данными $(\varphi_0, \lambda) \in S^1 \times V^{\perp}$. Тогда:

1) Если $(\varphi_0, \lambda) = \left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, есть неподвижная точка системы дифференциальных уравнений (5) на цилиндре $S^1 \times \mathbf{R}^1$, то неголономная геодезическая есть однопараметрическая подгруппа SO(3).

2) Если начальные данные неголономной геодезической $\gamma$ лежат на кривой периода $\tau$, т. е. $(\varphi_0, \lambda) \in \alpha_\tau$ (или $(\varphi_0, \lambda) \in (\beta_\tau)$ и угол $\varphi_\tau$ соизмерим с $\pi$, то $\dot{\gamma}$ — периодическая траектория на SO(3).

3) Если $(\varphi_0, \lambda) \in \alpha_\tau$ (или $(\varphi_0, \lambda) \in \beta_\tau$) и угол $\varphi_\tau$ несоизмерим с $\pi$, то $\gamma$ есть всюду плотная обмотка двумерного (топологического) тора в SO(3).

4) Если $(\varphi_0, \lambda)$ лежит на сепаратрисе, то замыкание положительной полутраектории $\{\gamma_{\varphi_0, \lambda}(t),\ t > 0\}$ содержит левый сдвиг однопараметрической группы $S^1 \simeq \gamma_{0,0}$, замыкание отрицательной полутраектории — левый сдвиг той же однопараметрической подгруппы.

Эти сдвиги однопараметрической подгруппы являются предельными $\omega_+$ и $\omega_-$ циклами неголономной геодезической $\gamma$, к которым $\gamma$ приближается с экспоненциальной скоростью.

Мы рассмотрели движение на группе SO(3) — слое смешанного расслоения $\mathrm{SO}(3) \times (V \oplus V^{\perp})$. Движение в смешанном расслоении описывается следующим утверждением.

Теорема 3. Пусть на группе Ли SO(3) задана произвольная левоинвариантная метрика. Тогда четырехмерные множества $\alpha_\tau \times \mathrm{SO}(3)$, $\beta_\tau \times \mathrm{SO}(3)$ являются инвариантными множествами НГ-потока. Каждая из таких четырехмерных компонент распадается в объединение двумерных и одномерных инвариантных торов. Тип траектории определяется следующим образом:

1) Если $\gamma$ — периодическая неголономная геодезическая на SO(3), то $(\gamma, \dot{\gamma}, \lambda)$ — периодическая траектория в смешанном расслоении.

2) Если замыкание $\gamma$ есть двумерный топологический тор в SO(3), то замыкание траектории $(\gamma, \dot{\gamma}, \lambda)$ есть двумерный топологический тор в $\mathrm{SO}(3) \times (V \oplus V^{\perp})$.

В 2.1 мы показали, что неголономный геодезический поток на односвязных трехмерных некомпактных группах Ли тривиален. Геодезические уходят на бесконечность и не имеют предельных точек. Значительно более интересен, как и в классическом — голономном случае, вопрос о неголономном геодезическом потоке на компактных однородных пространствах групп Ли.

**2.3. НГ-поток на компактных однородных пространствах группы Гейзенберга.** Группа Гейзенберга $N$ есть группа верхнетреугольных матриц $\left\{\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&1&\gamma\\0&0&1\end{pmatrix},\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^1\right\}$, ее алгебра Ли $\mathfrak{N}$ есть алгебра строго верхнетреугольных матриц

$$\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ с базисом } \xi_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Алгебру $\mathfrak{N}$ можно отождествить с подалгеброй алгебры Ли векторных полей в $\mathbf{R}^3$, отождествление задается сопоставлением векторных полей элементом базиса

$$\xi_1\to\frac{\partial}{\partial x_1},\quad \xi_2\to\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\quad \xi_3\to\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Группу Гейзенберга можно отождествить с $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&1&\gamma\\0&0&1\end{pmatrix}\to(\alpha,\gamma,\beta+\alpha\gamma)\in\mathbf{R}^3.$$

При этом отождествлении левоинвариантной метрике на $N$ соответствует метрика в $\mathbf{R}^3$, задаваемая в координатах $x$, $y$, $z$ тензором

$$g=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(1+x_1^2)^{-1/2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Напомним, что равномерной подгруппой группы Ли $G$ называется ее дискретная подгруппа $D$ такая, что множество классов смежности $G/D$ — компактно. Равномерные подгруппы группы Гейзенберга $N$ образуют однопараметрическую серию, члены которой $D_k$ занумерованы натуральными числами $k\in\mathbf{N}$; подгруппа $D_k$ порождена тремя матрицами

$$D_k=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{k}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

(см. [54]).

Напомним, что, с точностью до автоморфизма, в группе Гейзенберга существует только одно неголономное распределение — $V=\mathrm{Lin}(\xi_1,\xi_2)$. Подмногообразие монодромии для группы Гейзенберга — однопараметрическая подгруппа с генератором $\xi_3$. Отображение монодромии вдоль геодезической $\gamma$ с начальными данными $(\varphi_0,\lambda)$ $\left(\text{за период, равный } \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ есть умножение справа на матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4\pi}{\lambda^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Или, что то же самое, сдвиг на $4\pi/\lambda^2$ вдоль оси $z$.

Неголономный геодезический поток на $N$ описывается следующими теоремами.

Теорема 1 (движение в слое). Пусть $D_k$ — равномерная подгруппа группы Гейзенберга $N$, $\gamma$ — неголономная геодезическая на $N/D_k$ с начальными условиями $(\varphi_0, \lambda)$. Тогда

1) Если $\lambda=0$, то $\gamma$ есть однопараметрическая подгруппа в $N/D_k$, гомеоморфная $S^1$.

2) Если $\lambda\neq 0$ и $\lambda^2$ соизмеримо с $\pi$, то $\gamma$ — периодическая кривая в $N/D_k$.

3) Если $\lambda\neq 0$ и $\lambda^2$ несоизмеримо с $\pi$, то $\gamma$ есть всюду плотная обмотка двумерного (топологического) тора в $N/D_k$.

Мы описали НГ-поток на группе Гейзенберга. Для потока на смешанном распределении группы Гейзенберга — $N\times\times(V\oplus V^\perp)$ можно получить следующее утверждение, аналогичное предложению п. 2.2.

Предложение. Пусть $D_k$ — равномерная подгруппа группы Гейзенберга $N$, $\gamma$ — неголономная геодезическая на $N/D_k$ с начальными условиями $(\varphi_0, \lambda)$. Тогда

1) Если $\lambda=0$, то траектория $(\gamma(t), \dot\gamma(t), \lambda)$ в $N\times(V\oplus V^\perp)$ периодична (гомеоморфна $S^1$).

2) Если $\lambda\neq 0$ и $\lambda^2$ соизмеримо с $\pi$, то $(\gamma, \dot\gamma, \lambda)$ — периодическая кривая.

3) Если $\lambda\neq 0$ и $\lambda^2$ несоизмеримо с $\pi$, то замыкание траектории $(\gamma, \dot\gamma, \lambda)$ есть двумерный тор в $N\times(V\oplus V^\perp)$.

Опишем динамику в смешанном распределении. Траектория $\alpha_\tau$ для группы Гейзенберга есть окружность $S^1_\lambda$, заданная условием $\lambda=\frac{2\pi}{\tau}$. Полное описание динамики в смешанном распределении дает следующая

Теорема 2. Пусть $N$ — группа Гейзенберга, $V$ — двумерное левоинвариантное неголономное распределение на $N$, $D_k$ — равномерная подгруппа $N$. Тогда четырехмерные многообразия $M_\lambda=(N/D_k)\times S_\lambda$, $\lambda\neq 0$, инвариантны относительно НГ-потока на смешанном расслоении однородного пространства $(N/D_k)\times\times(V\oplus V^\perp)$. Кроме множеств $M_\lambda$, инвариантными являются образы (при проекции $N\to N/D_k$) однопараметрических подгрупп группы $N$ с допустимыми генераторами. Динамика на инвариантных множествах описывается следующим образом.

1) Если $\lambda^2$ — соизмеримо с $\pi$, то множество $M_\lambda$ состоит из инвариантных замкнутых траекторий.

2) Если $\lambda\neq 0$ и $\lambda^2$ несоизмеримо с $\pi$, то множество $M_\lambda$ расслаивается на двумерные торы. На каждом из таких торов

геодезические суть равномерные иррациональные обмотки (угол обмотки фиксирован на каждом из торов).

**2.4. Неголономный геодезический поток на компактных однородных пространствах $SL_2\mathbf{R}$.** В п. 1.7, гл. 1 было показано, что множество неголономных двумерных левоинвариантных распределений на $SL_2\mathbf{R}$ распадается в объединение двух орбит относительно действия группы автоморфизмов $SL_2\mathbf{R}$. Выберем базис $sl_2\mathbf{R}$:

$$\xi_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Представителем первой орбиты будет распределение $V_1=\mathrm{Lin}(\xi_1,\xi_2)=\left\{\begin{pmatrix}0&\alpha\\\beta&0\end{pmatrix}\right\}$, представителем второй — $V_2=\mathrm{Lin}(\xi_1+\xi_2,\xi_3)$. Напомним, что элемент $a\in sl_2\mathbf{R}$ называется гиперболическим, если $a$ имеет вещественные собственные числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ разных знаков; элемент $a$ называется параболическим, если $\lambda_1=\lambda_2=0$; эллиптическим, если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — невещественные.

Элементы, входящие в $V_1$, имеют следующий тип:

$$\begin{pmatrix}0&\alpha\\\beta&0\end{pmatrix}-\begin{cases}\text{гиперболическая при } \alpha\beta>0,\\ \text{параболическая при } \alpha\beta=0,\\ \text{эллиптическая при } \alpha\beta<0,\end{cases}$$

$V_1^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}\gamma&0\\0&-\gamma\end{pmatrix}\right\}$ состоит из гиперболических матриц. Ненулевые матрицы из $V_2$ — гиперболические,

$V_2^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}0&\gamma\\-\gamma&0\end{pmatrix}\right\}$ состоит из эллиптических матриц.

Неголономный геодезический поток на $(SL_2\mathbf{R}, V)$ оказывается довольно тесно связан с обычным геодезическим потоком на плоскости Лобачевского, как ясно из последующего. Если $D$ — решетка в $SL_2\mathbf{R}$ и $SL_2\mathbf{R}/D$ — компактно, то эта связь распространяется на поток на $(SL_2\mathbf{R}/D, V)$ и геодезический поток на $SL_2\mathbf{R}/D$.

Зафиксируем $a\in sl_2\mathbf{R}$. Однопараметрическая подгруппа с генератором $a$ порождает динамическую систему на $SL_2\mathbf{R}$

$$T_a{}^t: SL_2\mathbf{R}\to SL_2\mathbf{R},\quad T_a{}^t x=x\exp(ta).$$

Напомним, что (см., например, [35], [39]) эта динамическая система естественно изоморфна с геодезическим потоком на плоскости Лобачевского, если $a$ — гиперболично,

— орициклическим потоком, если $a$ — параболично,

— циклическим потоком, если $a$ — эллиптично.

Пусть на $SL_2\mathbf{R}$ задана мера Хаара (т. е. левоинвариантная мера).

Свойства факторпотоков на $SL_2\mathbf{R}$ описывает следующая

Теорема 1 ([39]). 1) Геодезический поток на компактной поверхности $X=S^1\diagdown SL(2, \mathbf{R})/D$ эргодичен, обладает перемешиванием и является $K$-системой.

2) Орициклический поток на $X$ — эргодичен.

Неголономный геодезический поток на смешанном распределении $(SL_2\mathbf{R}/D)\times(S^1\times V^\perp)$ есть косое произведение с базой $S^1\times V^\perp$ и слоем $SL_2\mathbf{R}/D$ (см. п. 2.1). Поток на базе — периодичен (см. п. 2.4). Фиксируем точку на базе $(\varphi_0, \lambda)\in S^1\times V^\perp$ и рассмотрим на $SL_2\mathbf{R}$ динамическую систему

$S^t_{(\varphi_0,\lambda)}: SL_2\mathbf{R}\to SL_2\mathbf{R}$ — преобразование слоя за время $t$,

$$S^t x = x\cdot\gamma_{(\varphi_0,\lambda)}(t),$$

где $\gamma_{(\varphi_0,\lambda)}$ — неголономная геодезическая с начальными данными $(\varphi_0, \lambda)$. Заметим, что мера Хаара на $SL_2\mathbf{R}$ является инвариантной для динамической системы $S^t$. (Мы будем предполагать, что $(\varphi_0, \lambda)$ не лежит на сепаратрисе (см. п. 2.5)). Тогда точка $(\varphi_0, \lambda)$ лежит на периодической траектории; пусть $\tau=\tau(\varphi_0, \lambda)$ — ее период, $z_\tau$ — отображение монодромии.

Предложение 1. Пусть $(\varphi_0, \lambda)\in S^1\times V^\perp$ не лежит на сепаратрисе, $\lambda\neq 0$, $\tau=\tau(\varphi_0, \lambda)$. Тогда отображение монодромии есть умножение справа на элемент $z_\tau\in SL_2\mathbf{R}$, лежащий на подмногообразии монодромии. Таким образом,

$$S^{n\tau}_{(\varphi_0,\lambda)}\simeq T^n_{z_\tau}.$$

(Напомним, что каскадом называется динамическая система с дискретным временем.) Предложение 1 показывает, что динамические системы $S^{t\tau}_{(\varphi_0,\lambda)}$ и $T^t_{z_\tau}$ имеют общий каскад.

Поведение НГ-потока $S^t_{(\varphi_0,\lambda)}$ во многом определяется свойствами каскада, порожденного монодромией $S^\tau_{(\varphi_0,\lambda)}$, совпадающего с каскадом $T^n_{z_\tau}$, вложенного в поток $T^t_{z_\tau}$, характер которого определяется типом $z_\tau$ — отображения монодромии. Объединяя теорему 1 и предложение 1, получаем

Предложение 2. Пусть $D$ — равномерная подгруппа $SL_2\mathbf{R}$; на $SL_2\mathbf{R}/D$ определен поток $S^t_{(\varphi_0,\lambda)}$; $(\varphi_0, \lambda)$ лежит на траектории периода $\tau$ на цилиндре $S^1\times\mathbf{R}^1$, $z_\tau$ — соответствующая точка подмногообразия монодромии. Тогда

1) Если $\log z_\tau$ гиперболичен, то поток $S^t_{(\varphi_0,\lambda)}$ эргодичен на $SL_2\mathbf{R}/D$.

2) Если $\log z_\tau$ параболичен, то поток $S^t_{(\varphi_0,\lambda)}$ эргодичен на $SL_2\mathbf{R}/D$.

3) Если $\log z_\tau$ эллиптичен, то $SL_2\mathbf{R}/D$ распадается в объединение двумерных и одномерных инвариантных торов.

Рассмотрим теперь неголономный геодезический поток на смешанном расслоении $(SL_2\mathbf{R}/D)\times(S^1\oplus V^\perp)$. Четырехмерные многообразия $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\alpha_\tau$ (и $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\beta_\tau$) инвариантны относительно потока. Обозначим $\tilde{S}^t$ ограничение НГ-потока на такое множество. На каждом из множеств $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\alpha_\tau$, $(SL_2\mathbf{R}/D)\times$ $\times\beta_\tau$ мера $\frac{d\varphi}{\lambda}\times\mu$, где $\mu$ — мера Хаара на $SL_2\mathbf{R}$, инвариантна относительно потока $\tilde{S}^t$. Поток $\tilde{S}^t$ есть косое произведение потока на базе — окружности $\alpha_\tau$ (или $\beta_\tau$) и потока $S^t_{(\varphi_0,\lambda)}$ в слое — однородном пространстве $(SL_2\mathbf{R}/D)$. Характер потока $\tilde{S}^t$ описывает

Предложение 3. 1) Если поток $S^t_{(\varphi,\lambda)}$ эргодичен на слое, то поток $\tilde{S}^t$ эргодичен на $(SL_2\mathbf{R}/D)\times S^1$.

2) Если $SL_2\mathbf{R}/D$ разбивается в объединение двумерных и одномерных торов, инвариантных относительно $S^t_{\varphi,\lambda}$, то и $(SL_2\mathbf{R}/D)\times S^1$ разбивается в объединение двумерных и одномерных торов, инвариантных относительно $\tilde{S}^t$.

Предложения 2 и 3 описывают характер неголономного геодезического (НГ) потока на четырехмерных инвариантных подмножествах $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\alpha_\tau$ и $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\beta_\tau$ смешанного расслоения в зависимости от типа элементов $\log z_\tau$ и $\log y_\tau$. Тип этих элементов для неголономных групп Ли $(SL_2\mathbf{R}, V_1)$ и $(SL_2\mathbf{R}, V_2)$ определен предложением 4 п. 1.7, гл. 3. Таким образом получается описание НГ-потока на этих группах.

Теорема 2 (об НГ-потоке на $(SL_2\mathbf{R}. V_1)$). Пусть на $(SL_2\mathbf{R}, V_1)$ задана общая левоинвариантная метрика. Тогда инвариантными множествами НГ-потока являются:

1) $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\alpha_\tau$, $\tau\in(-\infty, \infty)$,

2) $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\beta_\tau$, $\tau\in(-\infty, -T_0)\cup(T_0, \infty)$,

3) $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\mathrm{sep}_i$, $i=1, 2, 3, 4$,

где $\mathrm{sep}_i$, $i=1,\ldots,4$, — четыре сепаратрисы системы дифференциальных уравнений (5) на цилиндре (см. п. 1.5, гл. 3 и рис. 1).

4) Однопараметрические группы, соответствующие неподвижным точкам на базе, с генераторами $\xi_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ и $\xi_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

1—2) На каждом из множеств первого и второго типа НГ-поток эргодичен.

3—4) Каждая из траекторий типа 3 и 4 всюду плотна на $SL_2\mathbf{R}/D$.

Следующее предложение описывает НГ-поток на $(SL_2\mathbf{R}, V_1)$ со специальной метрикой.

Предложение 4. Пусть на $(SL_2\mathbf{R}, V_1)$ задана специальная метрика. Тогда имеется два типа множеств, инвариантных относительно НГ-потока:

1) $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\alpha_\tau$. На $SL_2\mathbf{R}/D\times\alpha_\tau$ НГ-поток эргодичен.

2) Однопараметрическая группа с (любым) допустимым генератором $\begin{pmatrix}0&\alpha\\\beta&0\end{pmatrix}$. Однопараметрическая группа с генератором $\xi=\begin{pmatrix}0&\alpha\\\beta&0\end{pmatrix}$ при $\alpha\beta\geqslant0$ — всюду плотна на $SL_2\mathbf{R}/D$ и периодична при $\alpha\beta<0$.

Перейдем к описанию НГ-потока на компактных однородных пространствах неголономной группы Ли $(SL_2\mathbf{R}, V_2)$.

Теорема 3 (об НГ-потоке на $(SL_2\mathbf{R}, V_2)$). Пусть $D$ — равномерная подгруппа $SL_2\mathbf{R}$. Тогда на инвариантных множествах, описанных в теореме 2, НГ-поток устроен следующим образом:

1) $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\alpha_\tau$ распадается в объединение двумерных и одномерных инвариантных торов.

2) НГ-поток эргодичен на $(SL_2\mathbf{R}/D)\times\beta_\tau$ и является косым произведением над потоком на базе с дискретным спектром. Преобразование слоев есть $K$-система.

3) Каждая из траекторий типа 3 и 4 всюду плотна на $SL_2\mathbf{R}/D$.

**2.5. Неголономный геодезический поток на многомерных нильмногообразиях специального вида.** Зафиксируем натуральное число $m\geqslant 2$. Определим максимальную нильпотентную алгебру $\mathfrak{N}_{2\xi}$ с $m$-образующими ступени 2 следующим образом. В качестве ее линейного базиса возьмем набор из $\frac{m(m+1)}{2}$ элементов:

$$\xi_1, \ldots, \xi_m, \{\xi_{i,j}\}, \ 1\leqslant i<j\leqslant m. \tag{10}$$

Скобку Ли зададим формулами

$$[\xi_i, \xi_j]=\xi_{i,j} \text{ при } 1\leqslant i<j\leqslant m,$$
$$[\xi_i, \xi_{j,k}]=0 \text{ при } 1\leqslant i\leqslant m, \ 1\leqslant j<k\leqslant m.$$
$$[\xi_{i,j}, \xi_{k,l}]=0 \text{ при } 1\leqslant i<j\leqslant m, \ 1\leqslant k<l\leqslant m.$$

Соответствующую (односвязную) группу Ли обозначим через $N_m^2$. Группа Ли $N_m^2$ является максимальной группой Ли с $m$ образующими в том смысле, что всякая другая нильпотентная группа Ли с $m$ образующими ступени 2 является ее образом относительно некоторого гомоморфизма. Зададим на $N_m^2$ левоинвариантное неголономное $m$-мерное распределение $V=\mathrm{Lin}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Имеет место

Предложение 1. Распределение $V$ имеет степень неголономности два и всякое левоинвариантное неголономное $m$-мерное распределение $\tilde V$ такое, что $\tilde V+[\tilde V, \tilde V]=\mathfrak{N}_m^2$ переводится в $V$ автоморфизмом группы $N_m^2$.

Легко также показать, что все метрические тензоры на $V$ лежат на одной орбите относительно действия группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(N_m^2, V)$ неголономной группы Ли $(N_m^2, V)$. Мы выберем метрический тензор так, чтобы $\xi_i$, $i=1, \ldots, m$, были ортонормированным базисом $V$.

Уравнения неголономных геодезических $\gamma$ для рассматриваемого случая приобретают особенно простой вид. Координаты в $\frac{n(n-1)}{2}$-мерном пространстве множителей Лагранжа $V^\perp$ естественно обозначить $\lambda_{i,j}$, $1\leqslant i<j\leqslant m$. Положим $\lambda_{ji}=-\lambda_{ij}$

при $i<j$, $\Lambda=\{\lambda_{i,j}\}$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}=\sum_{i=1}^{m} v_i \xi_i, \\ \dot{v}_i=\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} v_j, \\ \dot{\lambda}_{ij}=0. \end{cases} \tag{11}$$

Систему уравнений (11) удобно записать в матричной форме. Обозначим через $A$ $m$-мерный вектор с координатами $v_i$, $i=1,\ldots,m$. Последние две группы уравнений, задающие движение на базе (см. п. 2.1), запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{A}=\Lambda A, \\ \dot{\Lambda}=0. \end{cases} \tag{12}$$

Ортогональным преобразованием $\alpha\in SO(V)\simeq SO(m)$ кососимметрическую матрицу $\Lambda$ можно привести к каноническому виду:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_m \end{pmatrix}, \text{ где } B^i=\begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{pmatrix},$$

$\{\pm i\omega_j\}$ — набор собственных чисел (частот) матрицы $\Lambda$. Движение на базе (в выбранной в $V$ системе координат) описывается уравнением:

$$\dot{\gamma}=\sum_{i=1}^{[m/2]} a_i \cos\omega_i (t+\tau_i)\, \xi_{2i-1}+a_i \sin\omega_i (t+\tau_i)\, \xi_{2i}.$$

Как видно из (12), поведение траектории $\dot{\gamma}$ на базе определяется соизмеримостью частот матрицы $\Lambda$ и описывается следующим простым утверждением.

Предложение 2. 1. Для кососимметрической матрицы $\Lambda$ общего положения частоты $\omega_i$ попарно несоизмеримы. Траектория $A$ на $V$ есть всюду плотная (и равномерно распределенная) обмотка тора размерности $[m/2]$.

2. Если частоты $\omega_i$ распадаются на $l$ групп, каждая из которых состоит из попарно соизмеримых чисел (а числа из разных групп несоизмеримы), то $A$ есть всюду плотная обмотка $l$-мерного тора. (В частности, в наиболее вырожденном случае, когда соизмеримы все частоты, траектория периодична.)

Рассмотрим движения в слое. Группа $N_m^2$ гомеоморфна $\mathbf{R}^M$, где $M=\frac{m(m+1)}{2}$. Неголономный геодезический поток на $N_m$ устроен очень просто: все траектории уходят на бесконечность. Больший интерес представляет НГ-поток на компактных однородных пространствах $N_m{}^2/D$, где $D$ — равномерная подгруппа ([54]). Воспользуемся отождествлением $N_m{}^2$ с $\mathbf{R}^M$, чтобы получить явные формулы неголономных геодезических, которые позволят исследовать движение в слое $N_m{}^2/D$.

Мы будем считать, что базис векторных полей в $V$ выбран так, что матрица $\Lambda$ имеет канонический (блочно диагональный) вид и что ее частоты $\omega_i$ упорядочены по убыванию $\omega_1 > \omega_2 > \dots$ $\dots > \omega_{[m/2]}$. Определим гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{N}_m^2 \to \operatorname{Vect} \mathbf{R}^M$, $M = m + \frac{m(m-1)}{2}$. Для этого фиксируем в $\mathbf{R}^M$ систему координат, занумеровав координаты в $\mathbf{R}^M$ так же, как и базис векторных полей в $\mathfrak{N}_m^2$:

$$\{x_i\},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\quad \{x_{i,j}\},\ 1 \leqslant i < j \leqslant m,$$

зададим $\varphi$ на линейном базисе левоинвариантных векторных полей группы $N_m^2$ следующим образом:

$$\varphi(\xi_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=i+1}^{m} x_j \frac{\partial}{\partial x_{i,j}},\quad 1 \leqslant i \leqslant m;$$

$$\varphi(\xi_{i,j}) = \frac{\partial}{\partial x_{i,j}},\quad 1 \leqslant i < j \leqslant m.$$

Гомоморфизм $\varphi$ позволяет отождествить $N_m{}^2$ и $\mathbf{R}^M$. Обозначим неголономную геодезическую, выходящую из $0 \in \mathbf{R}^M$ с начальными данными $(A, \Lambda)$ через $\gamma_{A,\Lambda}$. Кривая $\gamma_{A,\Lambda}$ задается системой уравнений (12), причем можно считать, что $\tau_i = 0$ при $i = 1, \dots, m$. (Этого можно добиться, подействовав на $V$ ортогональной матрицей $\alpha \in SO(m)$.) Систему (12) удается проинтегрировать.

Предложение 3. Пусть $\Lambda$ — кососимметрическая матрица, частоты которой $\omega_1, \dots, \omega_m$ отличны от нуля и попарно несоизмеримы. Тогда координаты $x_i(\gamma_{A,\Lambda}(t))$ задаются следующими формулами:

1) $x_{2i-1}(\gamma_{A,\Lambda}(t)) = \frac{a_i}{\omega_i} \sin \omega_i t,$

2) $x_{2i}(\gamma_{A,\Lambda}(t)) = \frac{a_i}{\omega_i}(1 - \cos \omega_i t),$

3) $x_{2i-1,2j-1}(\gamma_{A,\Lambda}(t)) = \frac{a_i a_j}{2\omega_i(\omega_i + \omega_j)}(1 - \cos(\omega_i + \omega_j)t) + \frac{a_i a_j}{2\omega_i(\omega_i - \omega_j)}(1 - \cos(\omega_i - \omega_j)t),$

4) $x_{2i-1,2i}(\gamma_{A,\Lambda}(t)) = \frac{a_i^2}{4\omega_i^2}(2\omega_i t - \sin 2\omega_i t),$

5) $x_{2i-1,2j}(\gamma_{A,\Lambda}(t)) = \frac{a_i a_j}{\omega_i(\omega_j - \omega_i)} \sin(\omega_j - \omega_i)t - \frac{a_i a_j}{\omega_i(\omega_i + \omega_j)} \times \sin(\omega_i + \omega_j)t,\ i \neq j,$

6) $x_{2i,2j}(\gamma_{A,\Lambda}(t))=\frac{a_i a_j}{\omega_i(\omega_i-\omega_j)}\sin(\omega_i-\omega_j)t-\frac{a_i a_j}{\omega_i(\omega_i+\omega_j)}\times$ $\times\sin(\omega_i+\omega_j)t$.

Подалгебра $\mathfrak{N}_m^2$ с линейным базисом $\xi_{2i-1}, \xi_{2i}, \xi_{2i-1,2i}$ изоморфна алгебре Гейзенберга; обозначим ее $\mathfrak{N}_{(i)}$, ее группу Ли $N_{(i)}\subset N_m^2$. Ортогональная проекция $P_i:\mathbf{R}^M\to\mathbf{R}^3\simeq N_{(i)}$ проектирует неголономный геодезический поток на $N_m^2$ на неголономный геодезический поток на группе Гейзенберга. Подгруппы $N_{(i)}$ коммутируют. Обозначим их сумму через $\tilde{N}$. Имеет место

Предложение 4. Неголономный геодезический поток на группе $N_m^2$ есть косое произведение потока $T_1$ на базе—подгруппе $\tilde{N}$ и потока $T_2$ на слое—$\mathbf{R}^{M-\left[\frac{m}{2}\right]-m}$. Поток $T_1$ на базе есть прямое произведение неголономных геодезических потоков на группах Гейзенберга $N_{(i)}$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Аграчев А. А., Вахрамеев С. А., Гамкрелидзе Р. В.,* Дифференциально-геометрические и теоретико-групповые методы в теории оптимального управления. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1983, *14*, 3—16
2. *Александров А. Д.,* Исследования о принципе максимума. I—III. Изв. вузов, 1958, № 5, 126—157; 1959, № 3, 3—12; 1959, № 5, 16—82
3. —, Геометрия и топология в СССР. I—II. Успехи мат. наук, 1947, *2*, № 4, 3—58; 1947, *2*, № 5, 9—92
4. *Арнольд В. И.,* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 431 с.
5. —, Особенности в вариационном исчислении. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат., 1983, *22*, 3—5
6. —, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1968, 304 с.
7. —, *Гивенталь А. Б.,* Симплектическая геометрия. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат.: Фундам. направления, 1985, 4, 5—139
8. —, *Козлов В. В., Нейштадт А. И.,* Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат.: Фундам. направления. 1985, 303 с.
9. *Ахиезер Н. И.,* Вариационное исчисление. Харьков: Вища школа, 1981, 168 с.
10. *Березин Ф. А.,* Гамильтонов формализм в общей задаче Лагранжа. Успехи мат. наук, 1974, *29*, № 3, 183—184
11. *Брендел*е*в В. Н.,* О перестановочных соотношениях в неголономной механике. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1978, № 6, 47—54
12. *Вагнер В. В.,* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. VIII-ой Междунар. конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского (1937). Отчет. Казань: Казан. физ.-мат. общ-во, 1940, 327 с.
13. —, Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. Вып. II—III, 1935, 269—315
14. —, Геометрическая интерпретация неголономных динамических систем. Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. ОГИЗ 1941, вып. V, 301—327
15. *Варченко А. Н.,* О препятствиях к локальной эквивалентности распределения. Мат. заметки, 1981, 29, № 6, 939—947
16. *Васильев А. М., Ефимов Н. В., Рашевский П. К.,* Исследования по диф-

ференциальной геометрии в МГУ в советский период. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1967, № 5, 12—33
17. *Вершик А. М., Фаддеев Л. Д.*, Дифференциальная геометрия и лагранжева механика со связями. Докл. АН СССР, 1972, *202*, № 3, 555—557
18. —, —, Лагранжева механика в инвариантном изложении. Проблемы теор. физ., 1975, 129—141
19. —, Классическая и неклассическая динамика со связями. Сб.: «Новое в глобальном анализе». Воронеж: ВГУ 1984, 23—48
20. —, *Гершкович В. Я.*, Неголономные задачи и геометрия распределений. Добавление к переводу [73], 317—349
21. —, —, Неголономные геодезические потоки на $SL_2\mathbf{R}$. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика, 1986, 155, 7—17
22. *Веселов А. П., Веселова Л. Е.*, Потоки на группах Ли с неголономной связью и интегрируемые негамильтоновы системы. Функ. анализ и его прил., 1986, № 4, 65—66
23. *Виноградов А. М.*, Красильщиков И. С., Лычагин В. В., Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1981, 335 с.
24. *Василюс Р. В.*, Контравариантная теория дифференциальных продолжений в модели пространства со связностью. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии 1983, *14*, 101—175
25. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.*, Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961, 228 с.
26. *Герц Г. Р.*, Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: АН СССР, 1959, 386 с.
27. *Гершкович В. Я.*, Двусторонние оценки метрик, порожденных абсолютно неголономными распределениями на римановых многообразиях. Докл. АН СССР, 1984, *278*, № 5, 1040—1044
28. —, Вариационная задача с неголономной связью на SO (3). Геометрия и топол. в глобальных нелинейных задачах. Воронеж, 1984, 149—152
29. —, Метод штрафных метрик в задачах с неголономными связями. Применение топол. в соврем. анал. Воронеж, 1985, 138—145
30. *Григорьян А. Т., Фрадлин Б. Н.*, Механика в СССР. М.: Наука, 1977, 192 с.
31. —, —, История механики твердого тела. М.: Наука, 1982, 294 с.
32. *Гюнтер Н. М.*, Курс вариационного исчисления. М. — Л., 1941, 308 с.
33. *Давыдов А. А.*, Квазигельдеровость границы достижимости. Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. 1985, вып. XXII, 25—30
34. *Добронравов В. В.*, Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа, 1970, 270 с.
35. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.*, Современная геометрия. М.: Наука, 1979, 759 с.
36. *Карапетян А. В.*, О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней. Прикл. мат. и мех., 1981, *45*, 42—51
37. *Козлов В. В.*, Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I—III Вест. МГУ. Мат., мех., 1982, № 3, 92—100; 1982, № 4, 70—76; 1983, № 3, 102—111
38. —, К теории движения неголономных систем. Успехи мех., 1986, 8, № 3, 85—107
39. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.*, Эргодическая теория. М.: Наука, 1980, 383 с.
40. *Лаптев Г. Ф.*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, 2, 275—382
41. *Лумисте Ю. Г.*, Связности в однородных расслоениях. Мат. сб., 1966, *69* (III), 434—469
42. *Манин Ю. И.*, Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984, 335 с.

43. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.*, Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 519 с.
44. *Рашевский П. К.*, Линейные дифференциальные геометрические объекты. Докл. АН СССР. 1954, *97*, 609—611
45. —, Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. — Л., 1947, 354 с.
46. —, О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией. Уч. зап. пед. ин-та им. Либкнехта, Сер. физ. мат. наук, 1938, № 2, 83—94
47. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П.*, Яненко Н. Н., Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1984, 272 с.
48. *Синцов Д. М.*, Работы по неголономной геометрии. Киев: Вища школа, 1972, 294 с.
49. *Смирнов В. И.*, Курс высшей математики. М.: 1974, Т. 4. Ч. I, 336 с.
50. *Суслов Г. К.*, Теоретическая механика. М. — Л., 1946, 347 с.
51. *Филиппов А. Ф.*, О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1959, № 2, 25—32
52. *Чаплыгин С. А.*, Исследования по динамике неголономных систем. М. — Л., ГИТТЛ, 1949, 112 с.
53. *Щербаков Р. Н.*, Двадцать геометрических сборников (библиографическая справка). Геом. сб. Томск. ун-т, 1980, вып. 21, 79—90
54. *Auslander L., Green L., Hahn F.*, Flows on homogeneous spaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1963, 107 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф.*, Потоки на однородных пространствах. М.: Мир, 1966, 208 с.)
55. *Appell P.*, Traite de mechanique rationelle. T. 1, 2, Paris: Jauthier Villars, 1953, 497 p., 462 p. (Пер. на рус. яз.: *Аппель П.*, Теоретическая механика. Т. 1, 2. М.: ГИФМЛ, 1960, 515 с., 488 с.)
56. *Bennequin D.*, Entrelagement et equations de Pfaff. III$^e$ renconte de geometrie du Schnepfenried 1983. V. 1, Society math. de France, 1983, 87—163
57. *Birkhoff G.*, Lattice theory. Providence, 1967, 545 pp. (Пер. на рус. яз.: *Биркгоф Г.*, Теория решеток. М.: Наука 1984, 568 с.)
58. *Bishop R. L., Crittenden R. J.*, Geometry of manifolds. N. Y.: Acad. Press, 1964, 317 pp. (Пер. на рус. яз.: *Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж.*, Геометрия многообразий. М.: Мир, 1967, 335 с.)
59. *Bourbaki N.*, Éléments de Mathematique. Groupes et algebras de Lie. Paris: Hermann, 1970 (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.*, Элементы математики. Группы и алгебры Ли. Гл. I—III. М.: Мир 1976, 496 с.)
60. *Brockett R. W., Millman R. S., Sussmann H. J.*, Differential geometric control theory. Boston: Birkhäuser, 1983, 340 pp.
61. *Bröker Th., Lander L.*, Differential germs and catastrophes. Cambridge: Cambr. Univ. Press 1975, 182 pp. (Пер. на рус. яз.: *Брёкер Г., Ландер Л.*, Дифференциальные ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977, 207 с.)
62. *Caratheodory C.*, Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamyk. Math. Ann., 1909, *67*, 355—386 (Пер. на рус. яз.: Каратеодори К., Об основах термодинамики. В кн.: Развитие современной физик. М.: Наука, 1964, 188—228)
63. *Cartan E.*, Les groupes d'holonomie des espaces generalises. Acta Math., 1926, *48*, 1—42 (Пер. на рус. яз.: в [12])
64. —, La methode du Repere Mobile, La Theorie de Groupes Continus et les Espaces Generalises. Paris: Hermann, 1935, 366 pp. (Пер. на рус. яз.: *Картан Э.*, Теория конечных непрерывных групп преобразований и дифференциальная геометрия, изложенные методы подвижного репера. М.: МГУ, 1963, 367 с.)
65. *Chow W. L.*, Systeme von linearen partiellen differential gleichungen erster ordnung. Math. Ann., 1939, *117*, 98—105
66. *Dirac P. A. M.*, Lectures on quantum mechanics. N. Y.: Yeshiva Univ., 1964, 87 pp. (Пер. на рус. яз.: *Дирак П.*, Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968, 82 с.)

67. *Franklin P., Moore C. L. E.,* Geodesics of Pfaffians. J. Math. Phys., 1931, *10*, 157—190
68. *Gardner R.,* Invariant of Pfaffians Systems. Trans. Amer. Math. Soc., 1967, *126*, 514—533
69. *Gibbs J. W.,* Graphical methods in the thermodynamics of fluids. Transactions of Connecticutt Academy, 1973, *2*, 309—342 (Пер. на рус. яз.: *Гиббс Дж. В.,* Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982, 584 с.)
70. *Godbillon C.,* Geometrie differentielle et mechanique analytique. Paris: Hermann, 1974, 180 p. (Пер. на рус. яз.: *Годбийон К.,* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1978, 188 с.)
71. *Golubitsky M., Guiemin V.,* Stable mappings and their singularities, 1973, 272 pp. (Пер. на рус. яз.: *Голубицкий М., Гийемин В.,* Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977, 290 с.)
72. *Goursat E.,* Recond sur le problem Pfaff. Paris: Hermann, 1922, 347 p.
73. *Griffits P. A.,* Exterior differential system and the calculus of variations. Boston: Birkhäuser, 1983, 336 pp. (Пер. на рус. яз.: *Гриффитс П. А.,* Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М.: Мир, 1986, 350 с.)
74. *Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W.,* Riemannsche Geometrie ins Groben. Berlin-Heidelberg-N. Y.: Springer, 1968, 287 pp. (Пер. на рус. яз.: *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.,* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971, 343 с.)
75. *Gromov M.,* Groups of polynomial growth and expanding maps. Publs Math. Inst. hautes étud. sci. 1981, *53*, 53—78
76. *Hartman P.,* Ordinary differential equations. N. Y.-London-Sydney: J Wiley & Sons, 1964, 697 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хартман Ф.,* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970, 720 с.)
77. *Haynes G. W., Hermes H.,* Nonlinear controllability. SIAM J. Contr. 1970, *8*, 450—460
78. *Helgason S.,* Differential geometry and symmetric spaces. N. Y.: Acad. Press, 1962, 628 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хелгасон С.,* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964, 468 с.)
79. *Jurdjevith V., Sussmann H. J.,* Controllability of nonlinear systems. J. Different. Equat., 1972, *12*, 470—476
80. *Kobayshi S., Nomizu K.,* Foundations of differential geometry. Vol. 1, 2. N. Y. — London: Intersci. Intersci. Publ., 1963, 329 pp., 470 pp. (Пер. на рус. яз.: *Кобаяси Ш., Номидзу К.,* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981, 344 с., 414 с.)
81. *Lanczos C.,* The variation principles of mechanics. Toronto, 1949, 307 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ланцош К.,* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965, 408 с.)
82. *Lefshetz S.,* Differential equations: Geometric Theory. N. Y.: Intersci. Publ., 1957, 390 pp. (Пер. на рус. яз.: *Левшец С.,* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1964, 387 с.)
83. *Levit N., Sussmann H. J.,* On controllability by means of two vector fields. SIAM J. Contr., 1975, *19*, № 6, 1271—1281
84. *Lobry C.,* Dynamical polysystems and control theory. Geometric methods in systems theory. Proc. of the Nato Advanced study institute held at London 1973, Dordrecht — Boston: Reidel Publ. Company, 1—42 (Пер. на рус. яз.: *Лобри К.,* Динамические полисистемы и теория управления. В кн.: Математические методы в теории систем. М.: Мир, 1979, 134—173
85. *Martinet I.,* Formes de contact sur les variétés de dimension 3, Lect. Notes Math., 1971, *209*, 142—191
86. *Milnor J. W.,* Lectures of Morse theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1963, 153 pp. (Пер. на рус. яз.: *Милнор Дж.,* Теория Морса. М.: Мир, 1965, 184 с.)
87. *Mitchel J.,* On Carnot-Caratheodory metrics. J. Different. Geom., 1985, *21*, № 1, 35—46
88. *Nagano T.,* Linear differential systems with singularities and an applica-

tions to transitive Lie algebras. J. Math. Soc. Jap., 1966, *18*, № 4, 398—404
89. *Pansu P.*, Croissance des boules et des geodesique fermees dans les nilvarietes. Ergod. Theory and Syst., 1983, 3, part 3, 415—446
90. *Routh E. G.*, Dynamic of a system of right bodies. T. 1 London: McMillan & Co, 1905, 417 pp.
(Пер. на рус. яз.: *Раус Э. Дж.*, Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983, 464 с.)
91. *Rund H.*, The differential geometry of Finsler spaces. Berlin, 1959, 484 pp. (Пер. на рус. яз.: *Рунд X.*, Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981, 502 с.)
92. *Schoenberg I.*, Notes on geodesics in higher spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1931, *37*, № 5
93. *Schouten J. A.*, On non holonomic connections. Koninklijke akademie van wetenschappen te Amsterdam. Proceeding of sciences. 1928, *31*, № 3, 291—298
94. —, Zur Einbettung und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. Math. Ann., 1930, *103*, 752—783
95. —, *Kulk V. D.*, Pfaff's problem and its generalization, Oxford: Clarendon Press, 1949, 542 pp.
96. *Sternberg S.*, Lectures on differential geometry. Enlewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964, 395 pp.
(Пер. на рус. яз.: *Стернберг С.*, Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970, 412 с.)
97. *Sussmann H. J.*, Orbits of families of vector fields and integrabilities of distributions. Trans. Amer. Math. Soc. 1973, *180*, 171—188
98. *Synge J. L.*, Geodesics in non-holonomic geometry. Math. Ann., 1928, *99*, 738—751
99. —, On geometry of dynamics. Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1927, *226*, № 2, 31—107
100. —, Tensorial methods in dynamics. Toronto: Univ., Appl. Math. Stud., 1936, 38 pp.
(Пер. на рус. яз.: *Синдж Дж. Л.*, Тензорные методы в динамике. М.: ИЛ, 1947, 43 с.)
101. *Treves F.*, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operatores. V. 1, 2. N. Y. and London: Plenum Press, 1982, 332 pp., 351 pp. (Пер. на рус. яз.: *Трев Ф.*, Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984, 359 с., 298 с.)
102. *Ulam S. M.*, A collection of mathematical problems. New-Mexico i Los Alamos Scien. Labor, 1960, 150 pp.
(Пер. на рус. яз.: *Улам С.*, Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964, 168 с.)
103. *Vagner V.*, Geometria del calcolo delle varisioni. V. 2. Centro Intern. Matem. Estivo (C. I. M. E.), Roma, 1965, 172—XVIII
104. *Vranceanu G.*, Parallelisme et courlure dans une variete non holonome. Atti del congresso Internaz. del Mat. di Bologna, 1928, 6
105. *Young L. S.*, Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. Philadelfia-London-Toronto: W. B. Saunders Comapny, 1969, 331 pp.
(Пер. на рус. яз.: *Янг Л.*, Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974, 488 с.)

УДК 514.763

**А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи.** «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1987, 5—85

Обзор посвящен геометрии распределений и динамическим системам, порожденным вариационными задачами с неинтегрируемыми связями. Описаны распределения общего положения и близкие к ним. Изучаются динамические свойства неголономного геодезического потока, а также ряд связанных с этим потоком объектов: неголономное экспоненциальное отображение, неголономный волновой фронт и неголономная сфера. Библ. 53

УДК 517.912+517.958

**М. А. Ольшанецкий, А. М. Переломов, А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, Интегрируемые системы. II.** «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1987, 86—226

Излагается общая теоретико-групповая схема построения гамильтоновых систем и их решений. Библ. 105.

УДК 517.912+514.756.4

**В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли.** «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР»). М., 1987, 227—299

Изложены геометрические и топологические аспекты теории интегрируемых гамильтоновых систем на симплектических многообразиях. Дан обзор алгебраических методов построения и интегрирования вполне интегрируемых гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли. Библ. 100

# ОПЕЧАТКИ

## Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 16

| Страница | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 114 | 18 сверху | $\exp\{2at\}$ | $\exp\{2at\}$, |
| 204 | 7 сверху | $\bar{f}=f\|_{\mathfrak{f}}\cdot$ | $\bar{f}=f\|_{\mathfrak{v}}\cdot$ |
| 205 | 2 снизу | $\ldots U(\mathfrak{g})k).$ | $\ldots U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}).$ |
| 209 | 10 снизу | $i=\sqrt{-1}.$ | $i=\sqrt{-1}$, |
| 257 | 22 сверху | $+sA^3+K^3$, | $+sA^3+K^3$, |

Зак. 1342