Описание проектов направления "Геометрическая теория управления"

(под руководством Маштакова А.П.)

Предлагаются следующие темы исследовательских проектов:

1) моделирование первичной зрительной коры головного мозга,

2) управление качением твердых тел.

Проекты нацелены на развитие идеологии сквозного моделирования управляемых процессов, см. Рис. 1.

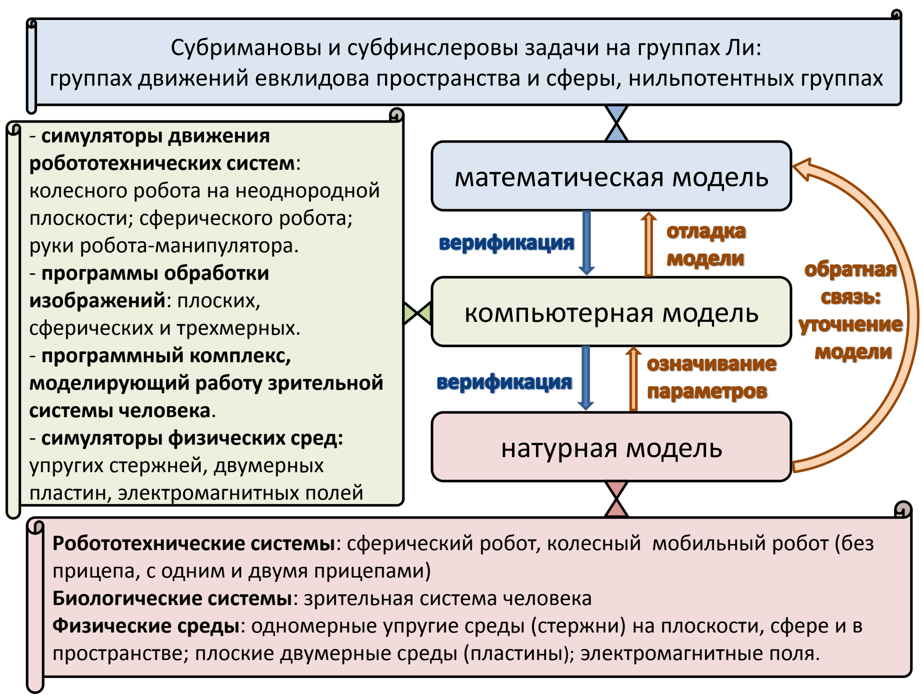

Рис. 1: Сквозное моделирование предполагает проведение исследований на нескольких взаимосвязанных уровнях: математическое, компьютерное и натурное моделирование.

7 Моделирование первичной зрительной коры головного мозга

Планируется разработать и исследовать уточненную модель Петито–Читти–Сарти [1,2] первичной зрительной коры V1 головного мозга человека. Уточнение осуществляется путем включения кривизны контуров изображений, проецируемых на сетчатку глаза. Идея включения кривизны изначально была предложена Петито [3], где он рассмотрел 4-мерное расширение модели с группы Гейзенберга на группу Энгеля. Такое уточнение является локальным. Позже Читти и Сарти показали, что более аккуратная (глобальная) модель, учитывающая связи между далекими нейронами V1, задается группой движений плоскости SE(2) а не группой Гейзенберга. В этом исследовании предлагается рассмотреть 4-мерное расширение группы SE(2).

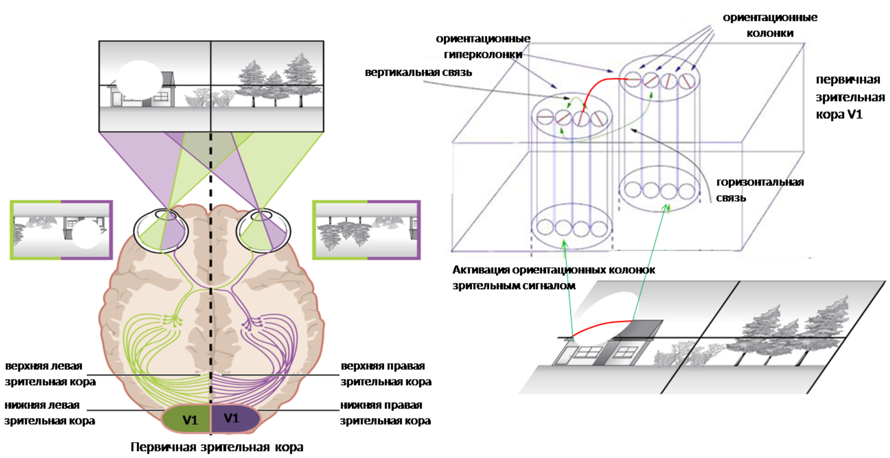

Рис. 2: В классической модели Петито–Читти–Сарти первичная зрительная кора осуществляет подъем изображения с плоскости сетчатки в расширенное пространство позиций и направлений. При этом скрытые от наблюдения контуры восстанавливаются с помощью субримновых кратчайших. Такие кривые моделируют горизонтальные связи между возбужденными нейронами V1, на создание которых затрачивается минимальная энергия.

В предлагаемой модели первичная зрительная кора осуществляет подъем изображения с плоскости сетчатки в пространство позиций, направлений и кривизн. Возникающая при этом задача восстановления скрытых контуров формулируется в виде следующей задачи оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, & x(0) = 0, \quad x(T) = x_1, & \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, & y(0) = 0, \quad y(T) = y_1, & (x, y, \theta, k) \in \mathrm{SE}(2) \times \mathbb{R}, \\ \dot{\theta} = u_1 k, & \theta(0) = 0, \quad \theta(T) = \theta_1, & (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \dot{k} = u_2, & k(0) = k_0, \; k(T) = k_1, & \end{cases}$$

$$\int\limits_0^T \mathcal{C}(x(t), y(t), \theta(t), k(t)) \sqrt{\beta^2 u_1^2(t) + u_2^2(t)}\, dt \to \min, \quad \beta > 0.$$

Здесь $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ задает точку в плоскости сетчатки глаза, угол $\theta \in S^1$ — направление и $k \in \mathbb{R}$ — кривизну восстанавливаемого контура. Функция $\mathcal{C}: \mathrm{SE}(2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ моделирует “внешнюю стоимость”, адаптирующую метрику к зрительному стимулу, генерируемому обозреваемым изображением.

Теоретическая часть проекта направлена на исследование математической модели — управляемой системы. Планируется исследование управляемости, применение необходимого условия оптимальности — принципа максимума Понтрягина (ПМП), исследование интегрируемости гамильтоновой системы ПМП и описание экстремальных траекторий. Предполагается детальное исследование случая $\mathcal{C} = 1$. В результате исследования ожидается получить следующие теоремы: условия управляемости, уравнения экстремальных траекторий.

Вычислительно–экспериментальная часть направлена на разработку компьютерной модели в подходящей программной среде, например в системе SageMath или на языке Python. В ходе выполнения проекта планируется разработка устойчивого численного метода интегрирования гамильтоновых систем с четырехмерным пространством состояний. Далее этот метод будет использован для вычисления геодезических в рассматриваемой задаче оптимального управления. Также планируется разработка модуля построения функции “внешней стоимости” $\mathcal{C}$ по заданному изображению.

Более подробно с задачей восстановления поврежденных контуров (в классической модели) можно познакомиться в [4]. С конструкцией функции “внешней стоимости” и применением к задаче поиска выделяющихся кривых на изображениях в [5]. Дополнительным возможным направлением является исследование применимости предложенной модели в контексте объяснения известных зрительных иллюзий [6].

8 Управление качением твердых тел

Качение твердых тел по поверхности друг друга без прокручиваний и проскальзываний в общем случае моделируется управляемой системой

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q),$$

где (u_1, u_2) — управления, являющиеся компонентами вектора скорости центра первого тела при качении по поверхности второго тела, спроецированного на касательную плоскость, проходящую через точку контакта двух тел. Здесь конфигурационное пространство имеет вид $Q = M \times \bar{M} \times \mathrm{SO}(2)$, где M и $\bar{M}$ определяют поверхности тел качения, а X_1, X_2 — базисные левоинвариантные векторные поля на Q.

Модельной является *задача об оптимальном качении шара по плоскости без прокручиваний и проскальзываний.* Задача ставится следующим образом: по заданным двум точкам на плоскости ($A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$) и двум ориентациям шара в трехмерном пространстве (e_0 и e_1) требуется найти кратчайшую кривую $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, соединяющую A и B, при качении по которой ориентация шара переходит из e_0 в e_1. См. Рис. 3. Управлением является скорость центра шара. Допустимое качение можно представить следующим образом: шар накрывается сверху плоскостью, параллельной плоскости качения, которая двигается поступательно в направлениях, параллельных плоскости качения. Получающееся при этом движение является качением без прокручиваний и проскальзываний.

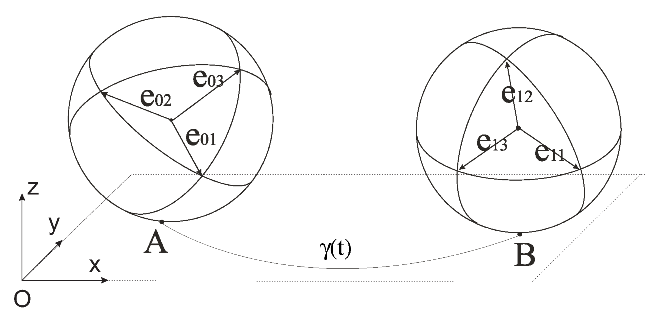

Рис. 3: Задача о качении шара по плоскости

Такая задача возникает, в частности, в математических моделях сферических мобильных роботов и роботов-манипуляторов, см. Рис. 4. Конфигурация сферического робота имеет вид $g = (x, y, e) \in Q$, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — точка контакта робота с поверхностью качения, а $e \in \mathrm{SO}(3)$ — ориентация сферического робота в пространстве.

Теоретическая часть проекта направлена на исследование математической модели — задачи об оптимальном качении шара по плоскости.

Рис. 4: Натурные модели сферического робота и руки робота-манипулятора

Планируется вывод управляемой системы (исходя из принципов механики), исследование управляемости, применение необходимого условия оптимальности — принципа максимума Понтрягина (ПМП), исследование интегрируемости гамильтоновой системы ПМП и описание экстремальных траекторий. В результате исследования ожидается получить следующие теоремы: условия управляемости, уравнения экстремальных траекторий.

Вычислительно–экспериментальная часть направлена на разработку компьютерной модели в подходящей программной среде, например в системе SageMath или на языке Python. В ходе выполнения проекта планируется разработка устойчивого численного метода интегрирования гамильтоновых систем с пятимерным пространством состояний. Далее этот метод будет использован для вычисления геодезических в задаче о качении шара по плоскости. Также планируется разработка модуля анимации качения.

Натурно–экспериментальная часть направлена на знакомство с натурной моделью сферического робота. В ходе выполнения проекта планируется освоение физических принципов, на которых основано движение робота; программирование блока управления робота а также проведение экспериментов по движению робота и сравнению реальных траекторий с траекториями, предсказанными теорией.

Дополнительным возможным направлением является исследование связи между оптимальными траекториями сферы на плоскости и эластиками Эйлера — стационарными конфигурациями упругого стержня, см. [7].

Список литературы

[1] J. Petitot, *Theneurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure* // J. Physiol., Paris 97,pp.265–309, 2003.

[2] G. Citti and A. Sarti, *A Cortical Based Model of Perceptual Completion in the Roto-Translation Space* // JMIV, 24(3), pp.307–326, 2006.

[3] Neuromathematics of Vision, Editors: G. Citti, A. Sarti, Lecture Notes in Morphogenesis, 2014.

[4] Alexey P. Mashtakov, Andrei A. Ardentov and Yuri L. Sachkov, *Algorithmand Parallel Software for Image Inpainting via Sub-Riemannian Minimizers on the Group of Rototranslations* // NMTMA, 6(1), pp. 95-115, 2013.

[5] Bekkers E.J., Duits R., Mashtakov A., Sanguinetti, G.R., *A PDE Approach to Data-driven Sub-Riemannian Geodesics in SE(2)* // SIAM JIS, 8(4), pp. 2740–2770, 2015.

[6] B. Franceschiello, A. Mashtakov, G. Citti and A. Sarti, *Geometrical optical illusion via sub-Riemannian geodesics in the roto-translation group*, DGA, 65, pp. 55–77, 2019.

[7] Yu. Sachkov, *Introduction to geometric control*, arXiv:1903.00211.