

Субриманова геометрия в обработке изображений и моделировании зрительной системы человека



Алексей Маштаков

ИПС им. А.К. Айламазяна РАН

Основано на совместных работах с

R. Duits, Yu. Sachkov, G. Citti, A. Sarti, A. Popov

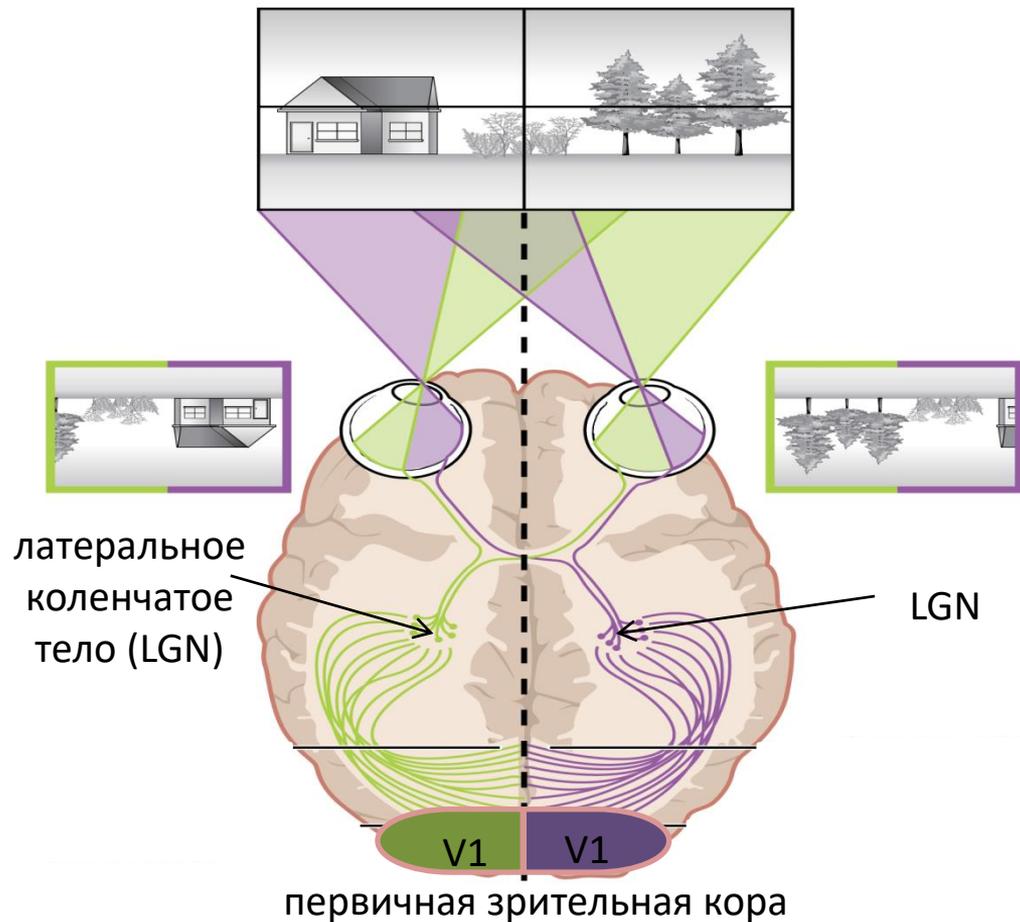
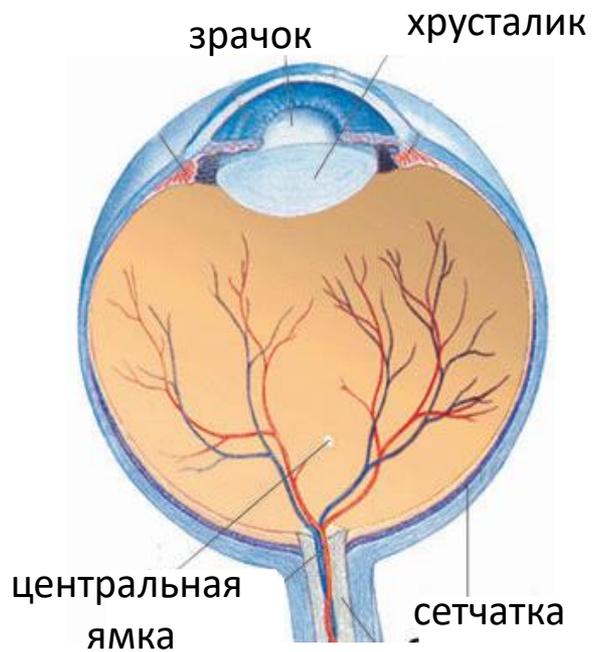
E. Bekkers, G. Sanguinetti, A. Ardentov, B. Franceschiello

I. Beschastnyi, A. Ghosh and T.C.J. Dela Haije



Современные методы теории информации, оптимизации и управления
Университет Сириус, г. Сочи, 10.08.2020

Восприятие визуальной информации человеком



Строение и функции человеческого глаза

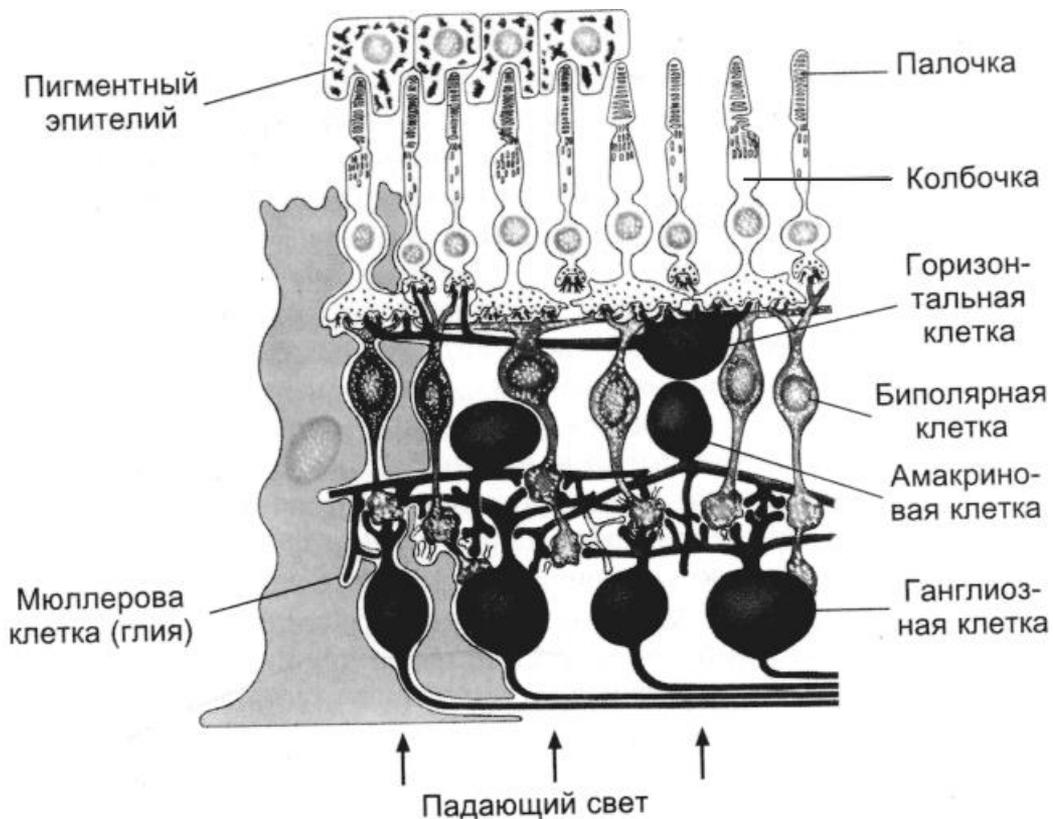
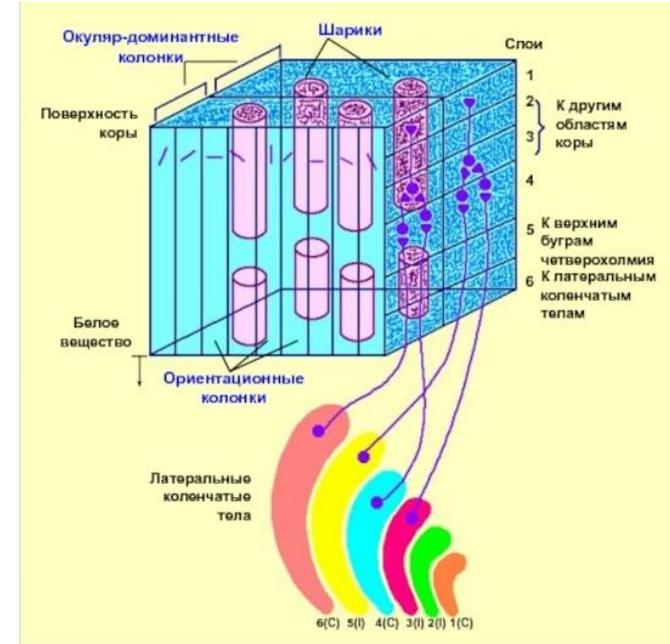
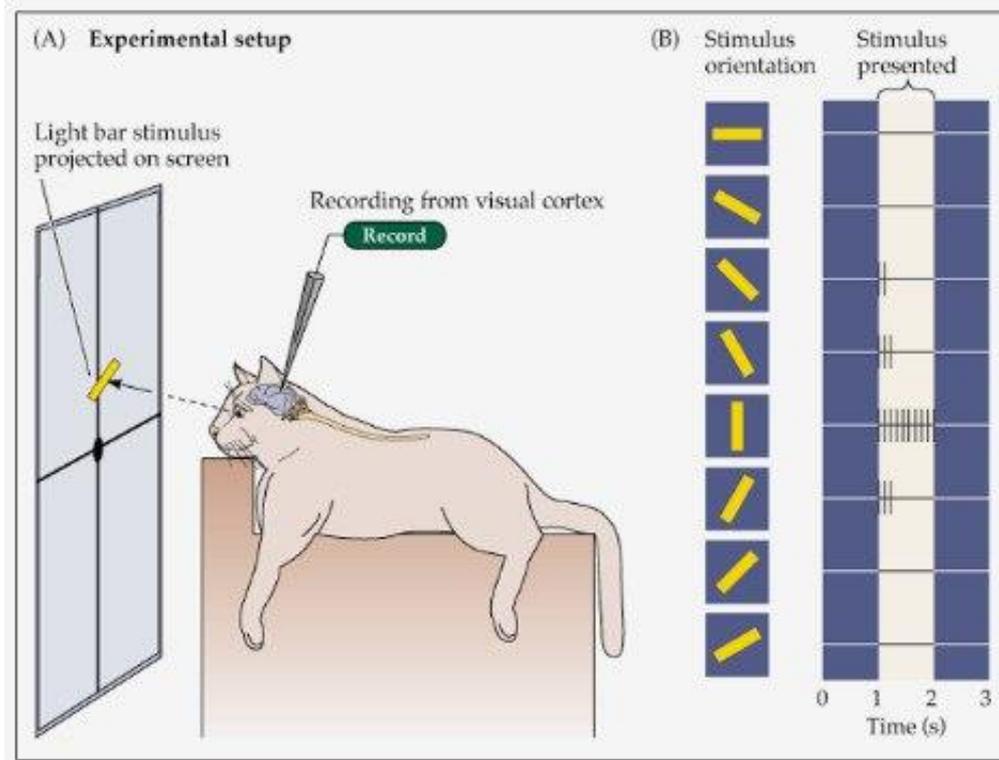


Иллюстрация адаптирована из Смирнов В.М., Будылина С.М., 2003

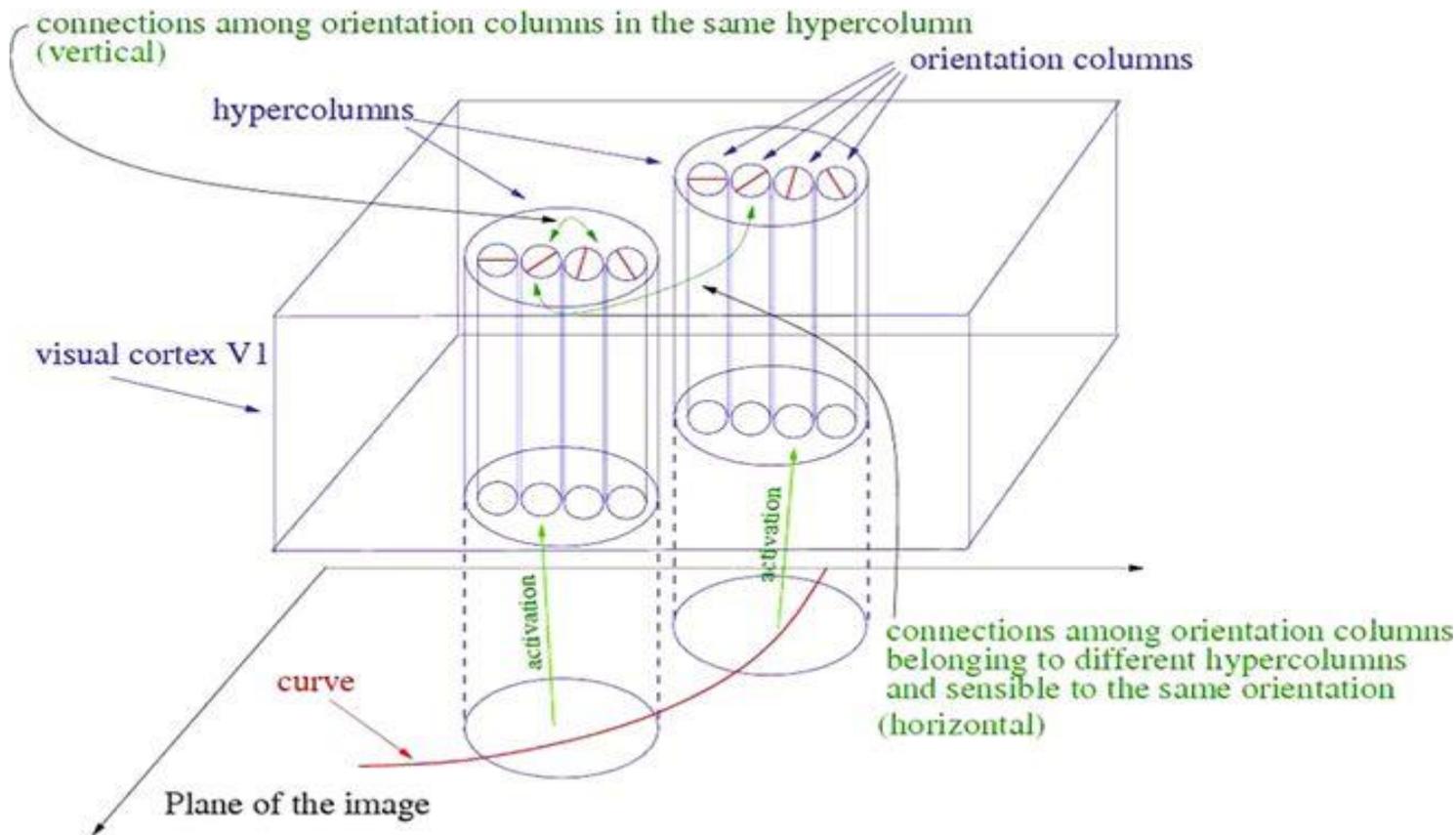
Строение зрительной коры V1 млекопитающих



Адаптировано из Алмазова Т.А. Обработка визуальной информации: от сетчатки до V1, Психиатрия & Нейронауки, 2018.

D.H. Hubel and T.N. Wiesel, Receptive fields of single neurones in the cat's striate cortex, 1959. Nobel prize in 1981.

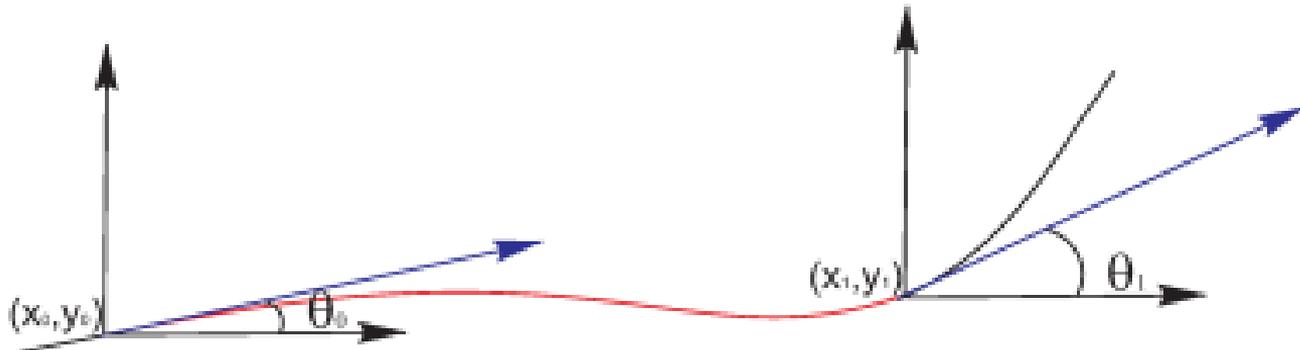
Математическая модель первичной зрительной коры



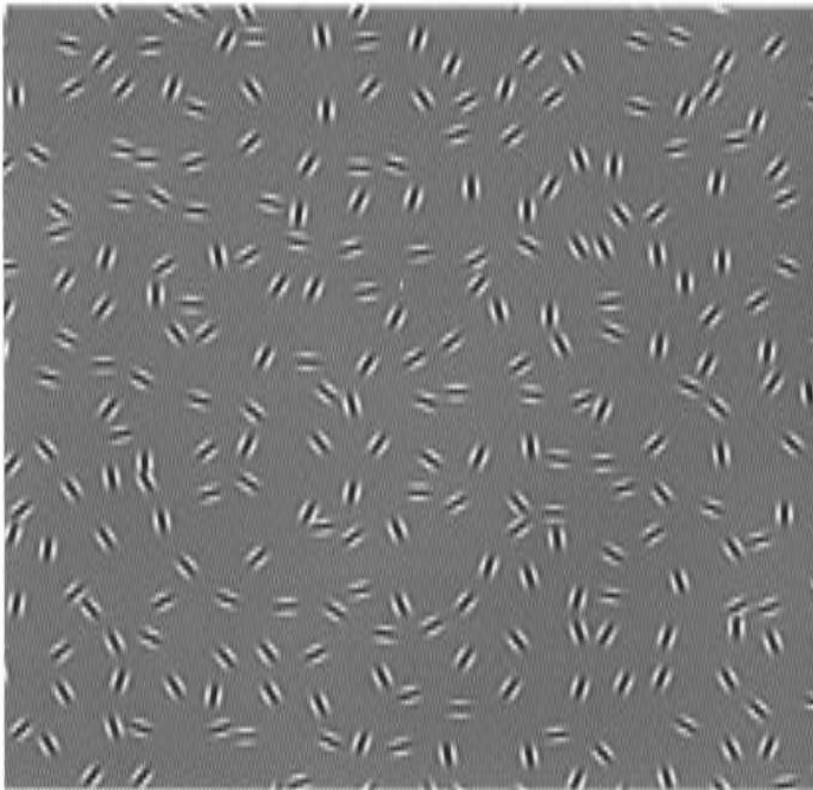
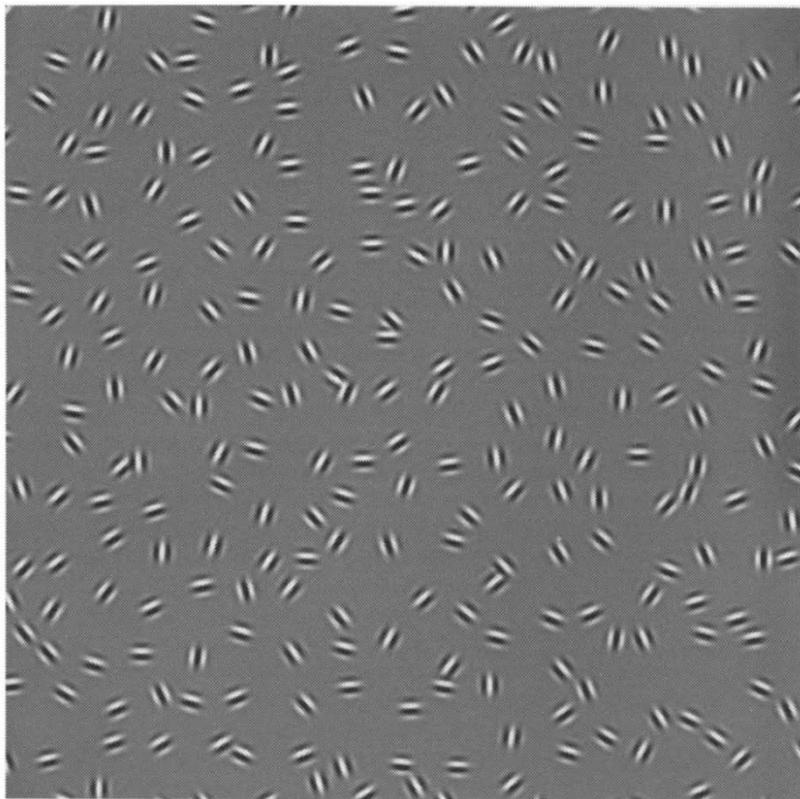
Вариационный принцип восстановления поврежденных контуров

- Субримановы структуры в нейрогеометрии зрения:
 - J. Petitot, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure, 2003. (Группа Гейзенберга)
 - G. Citti and A. Sarti, A Cortical Based Model of Perceptual Completion in the Roto-Translation Space, 2006. (Группа $SE(2)$)
- Восстановленная дуга имеет минимальную длину в пространстве (x, y, θ) :

$$\int \sqrt{\xi^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min, \text{ при условии } \dot{\theta} = \arg(\dot{x} + i \dot{y})$$

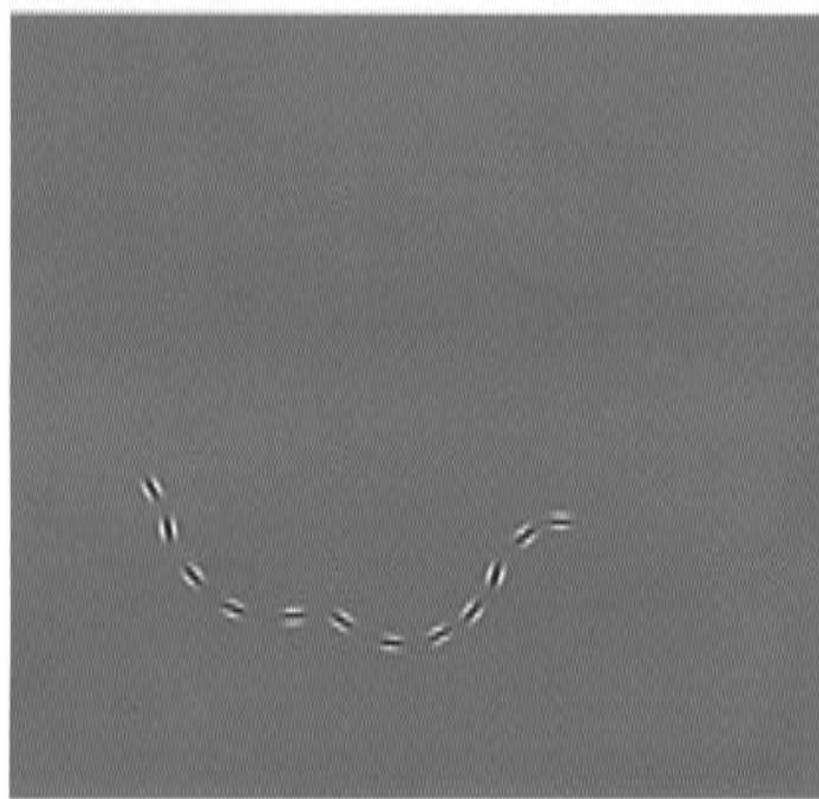
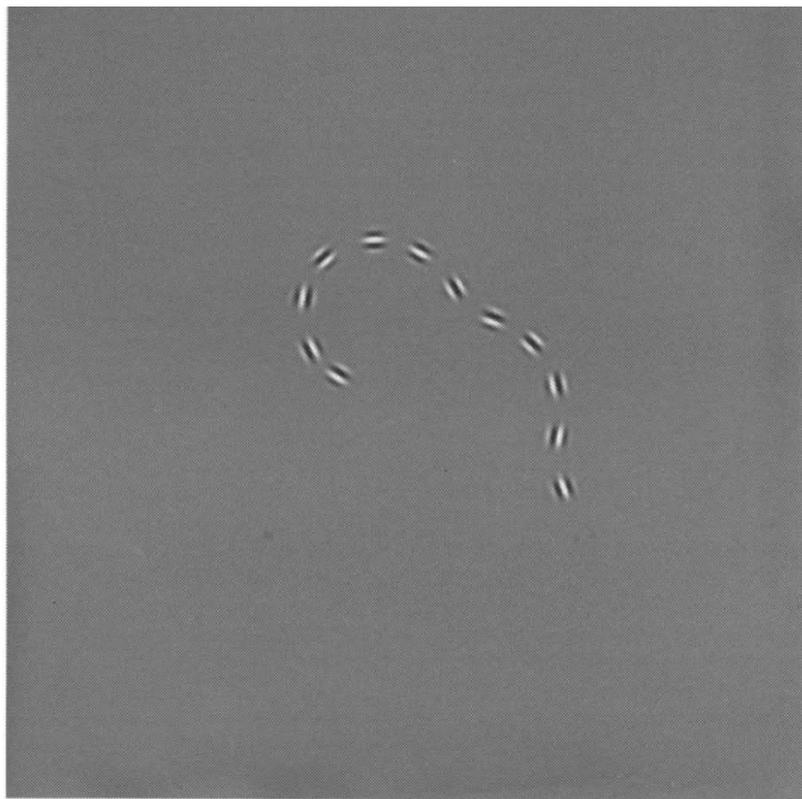


Поля ассоциаций: условия восстановления «скрытого» контура



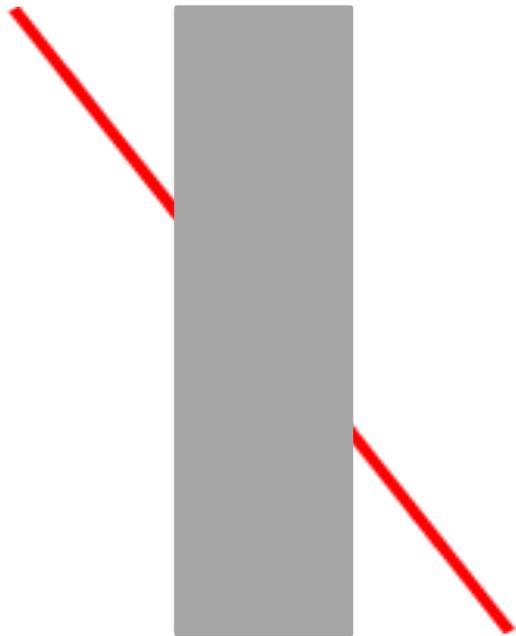
- D.J. Field, A. Hayes, R. Hess. Contour integration by the human visual system: Evidence for a local “association field”, Vision Research, 1993.

Поля ассоциаций: условия восстановления «скрытого» контура

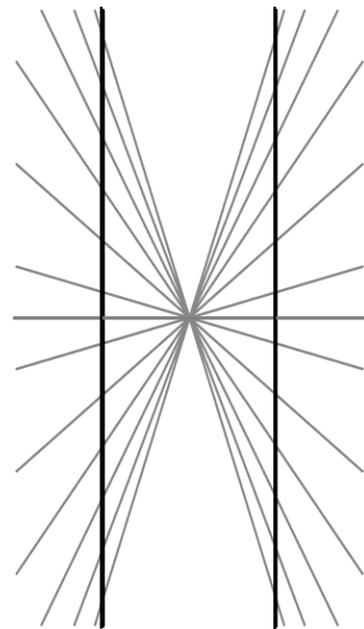


- D.J. Field, A. Hayes, R. Hess. Contour integration by the human visual system: Evidence for a local “association field”, Vision Research, 1993.

Геометрические зрительные иллюзии

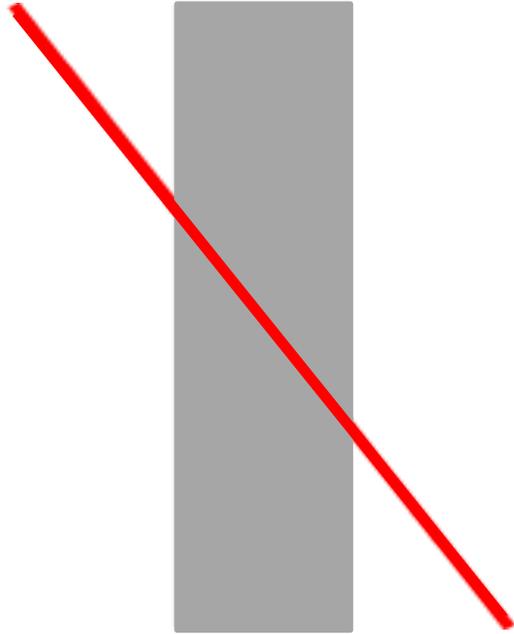


Иллюзия Поггендорфа

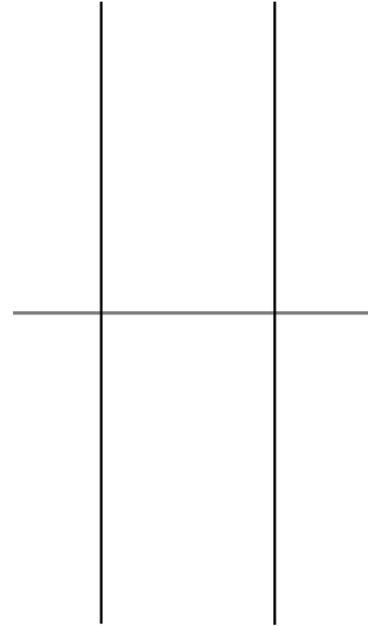


Иллюзия Геринга

Геометрические зрительные иллюзии

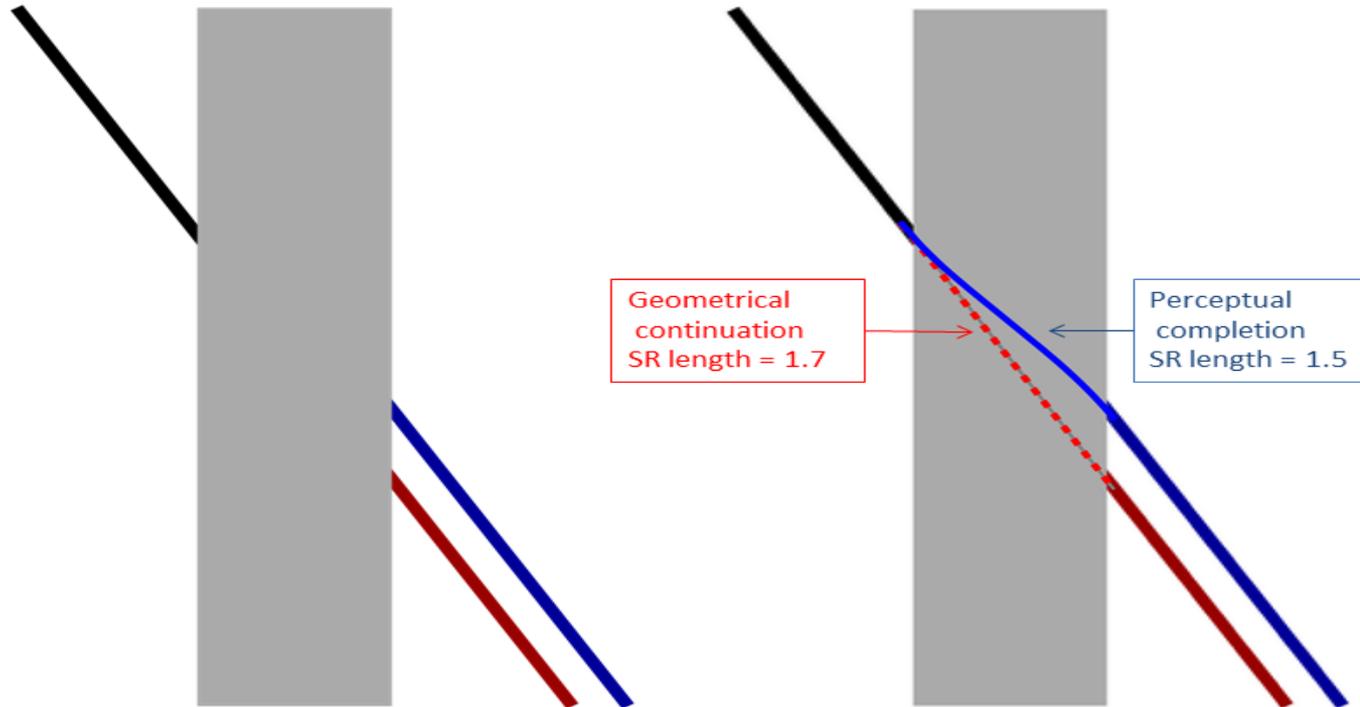


Иллюзия Поггендорфа



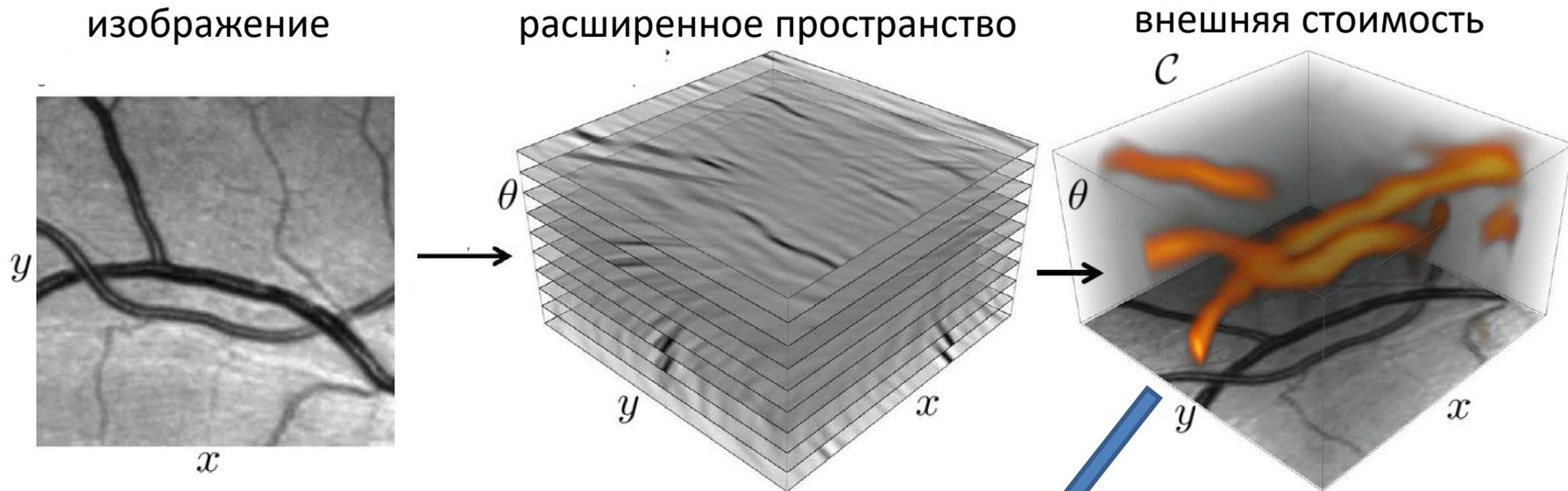
Иллюзия Геринга

Моделирование иллюзорного контура



Идея: Иллюзорный контур создается зрительной системой, как геодезическая в CP метрике, индуцированной зрительным сигналом.

Адаптированная модель зрения



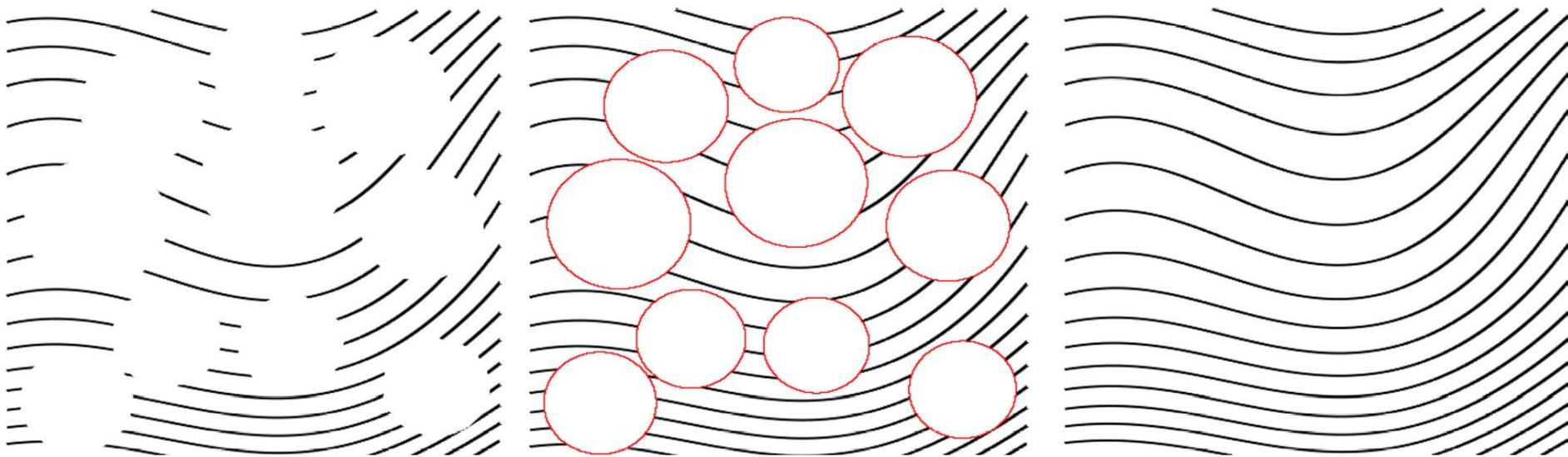
Первичная зрительная кора V1 поднимает изображение с двумерной поверхности сетчатки в расширенное пространство M и задает на M субриманову метрику, адаптированную к изображению. Скрытый контур восстанавливается СР геодезической с заданными граничными условиями.

$$l = \int_0^T \mathcal{C}(\gamma(t)) \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \rightarrow \min,$$
$$\dot{\gamma} = u_1 \mathcal{A}_1 + u_2 \mathcal{A}_2, \quad \gamma(0) = e, \quad \gamma(T) = g \in M$$

Методы обработки изображений, основанные на принципах зрения

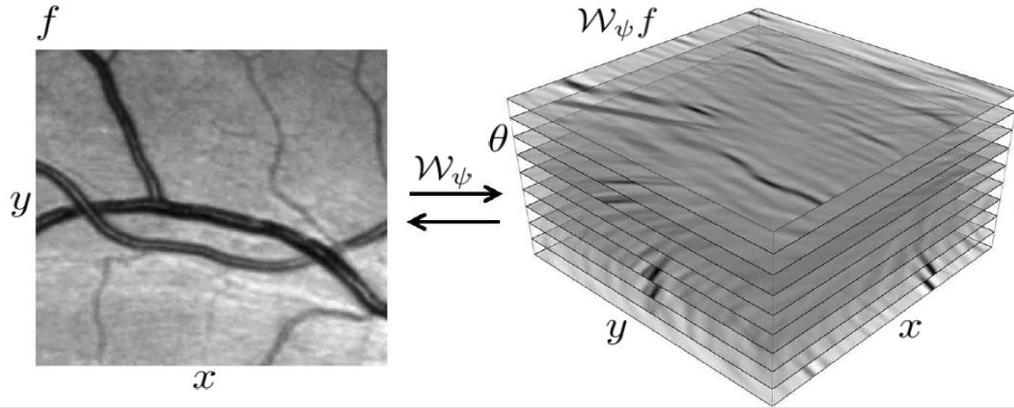
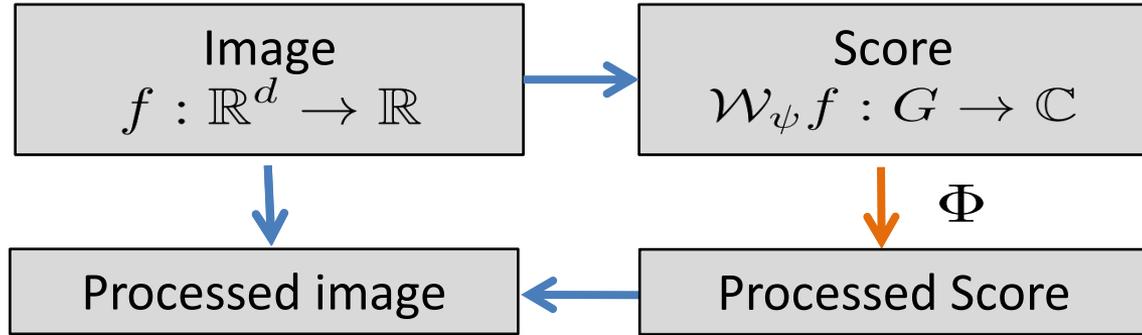
Антропоморфное восстановление изображений

Исследование применимости модели CP геодезических на $SE(2)$
для восстановления изофот искусственных изображений



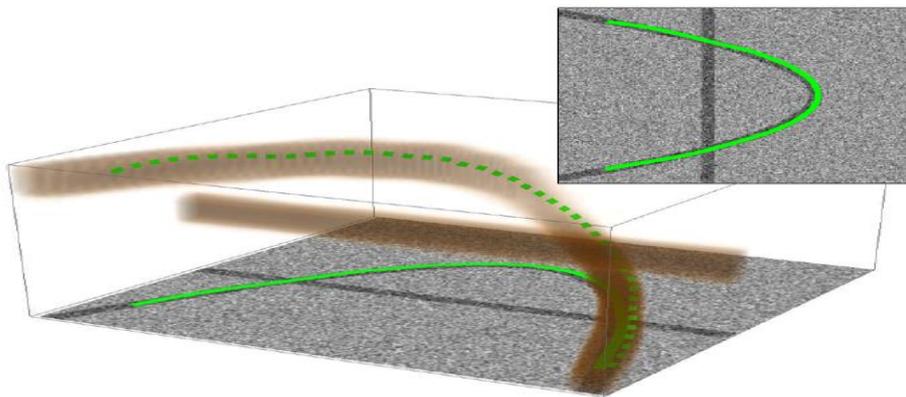
A. Mashtakov, A. Ardentov, Yu. Sachkov, *Parallel Algorithm and Software for Image Inpainting via Sub-Riemannian Minimizers on the Group of Rotations*, NMTMA, 2013.

Анализ изображений с помощью Orientation Scores на группах Ли

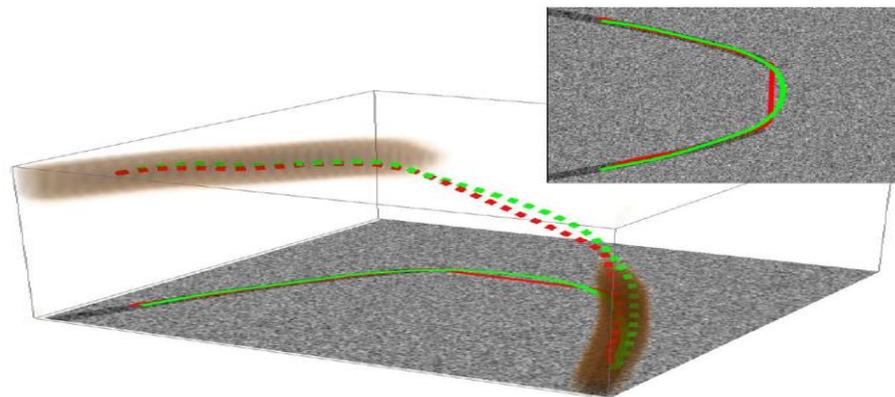


R. Duits: generic mathematical model for contextual image analysis via scores on Lie groups with many applications.

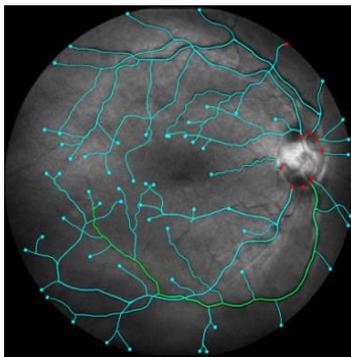
Субримановы геодезические в обработке изображений



Пересекающиеся линии
разъединяются

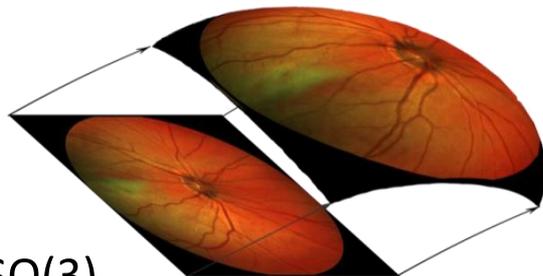


Восстановление поврежденных контуров
на основе модели зрения человека

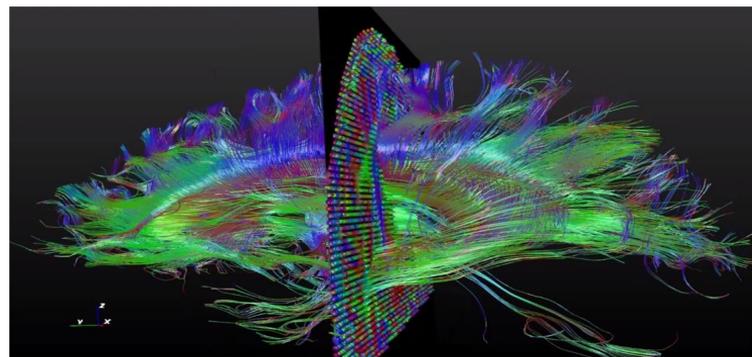


SE(2)

СР геодезические на группах Ли в
анализе медицинских изображений

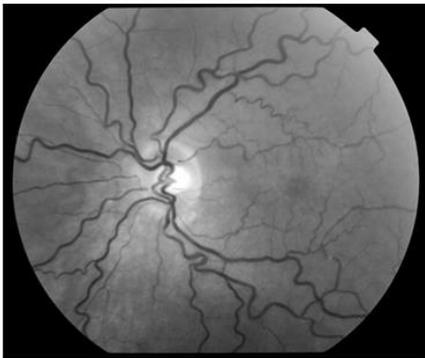


SO(3)

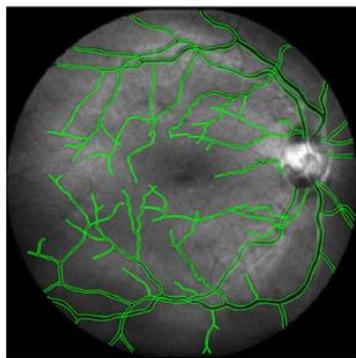


SE(3)

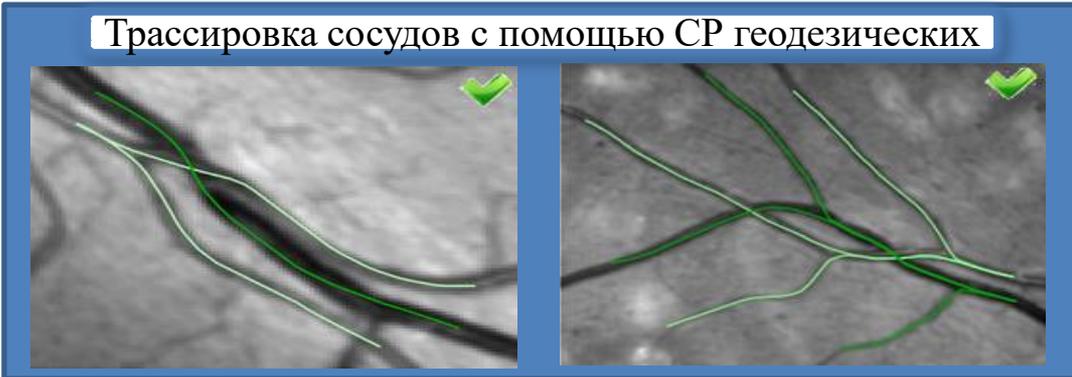
Геодезические на $SE(2)$ для плоских изображений



Искривление сосудов при ретинопатии



Трассировка сосудов



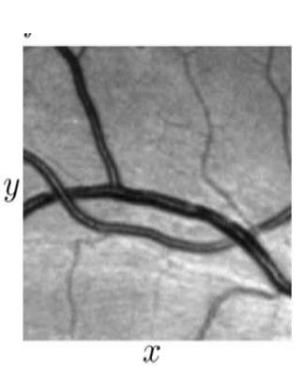
Постановка задачи

$$\dot{\gamma} = u_1 (\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) + u_2 \partial_\theta,$$

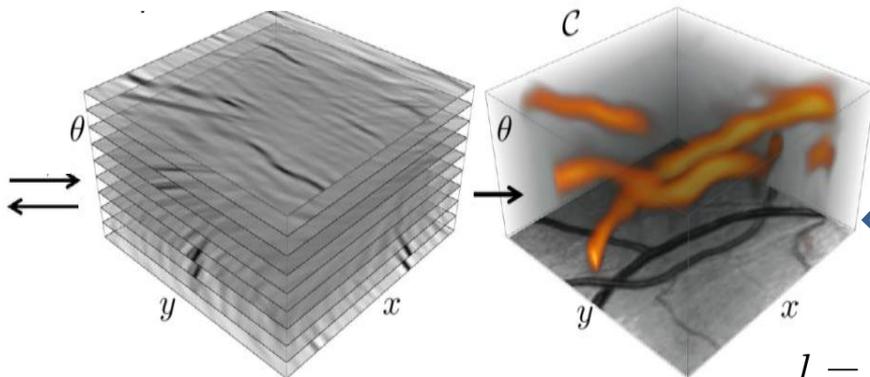
$$\gamma(0) = e, \quad \gamma(T) = g \in SE(2),$$

$$(u_1(t), u_2(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

$$l = \int_0^T C(\gamma(t)) \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \rightarrow \min.$$

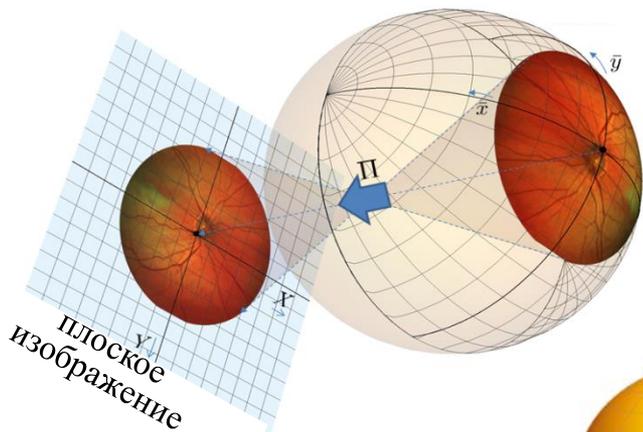


Функция внешней цены из изображения

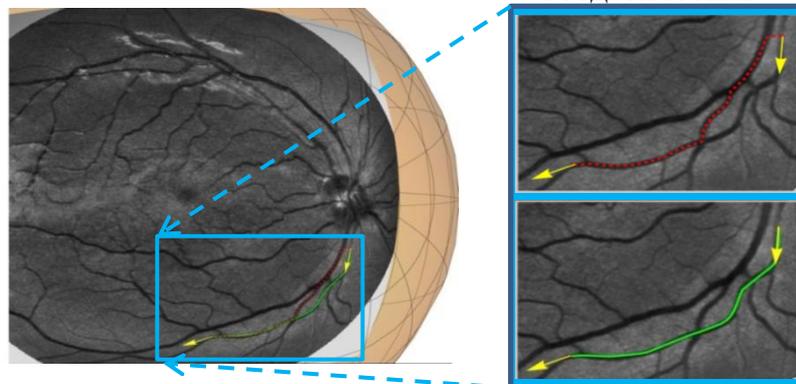


Геодезические на $SO(3)$ для сферических изображений

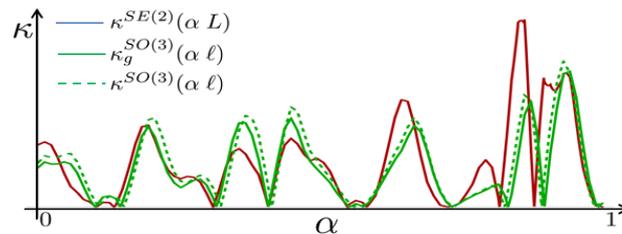
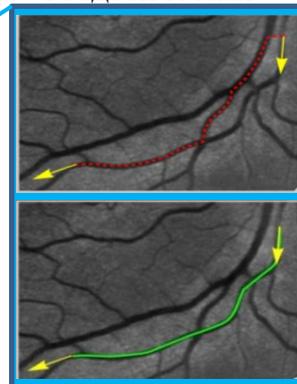
сферическая сетчатка



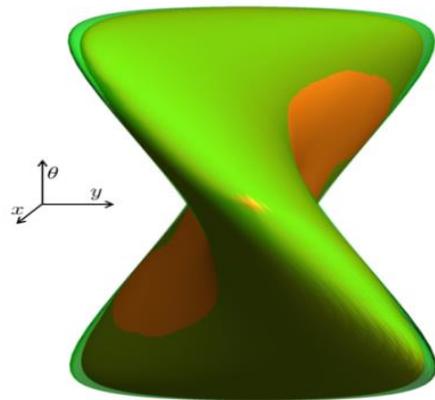
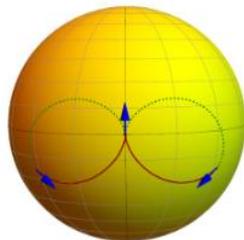
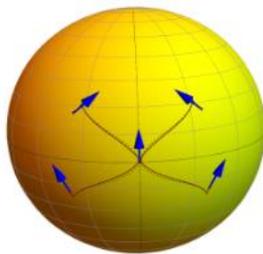
Риманова
геодезическая



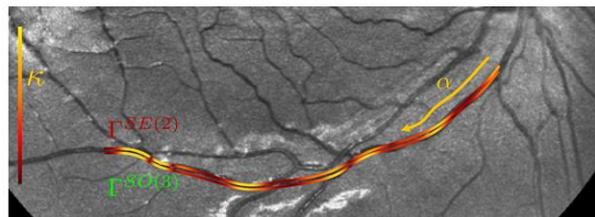
CP геодезическая



CP геодезические при $C=1$



Волновой фронт и CP сфера



Сравнение геодезической
кривизны на сфере и
кривизны на плоскости

Геодезические на $SE(3)$ для трехмерных изображений

Дано $\xi > 0$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}_i \in S^2$, $i \in \{0, 1\}$.

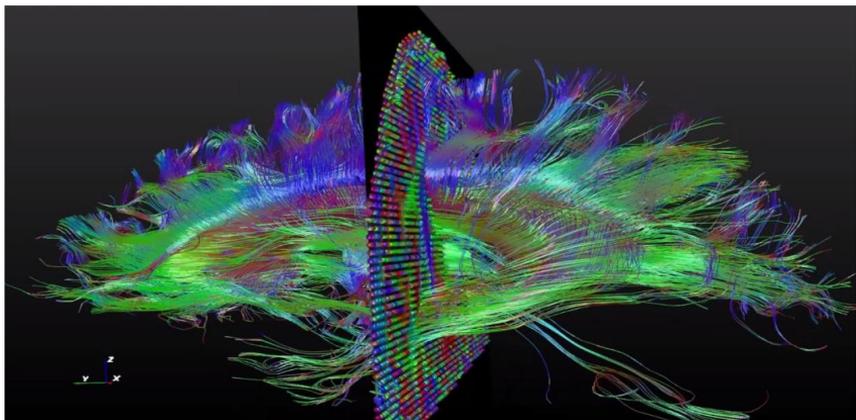
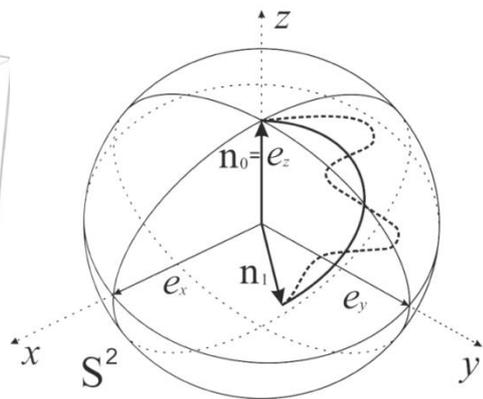
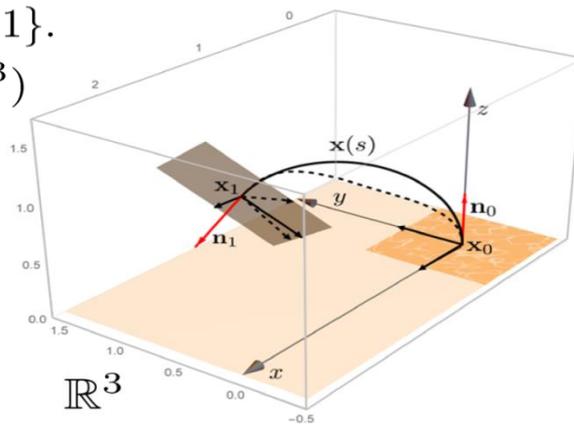
Найти гладкую кривую $\mathbf{x} \in C^\infty([0, L], \mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(L) = \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^3,$$

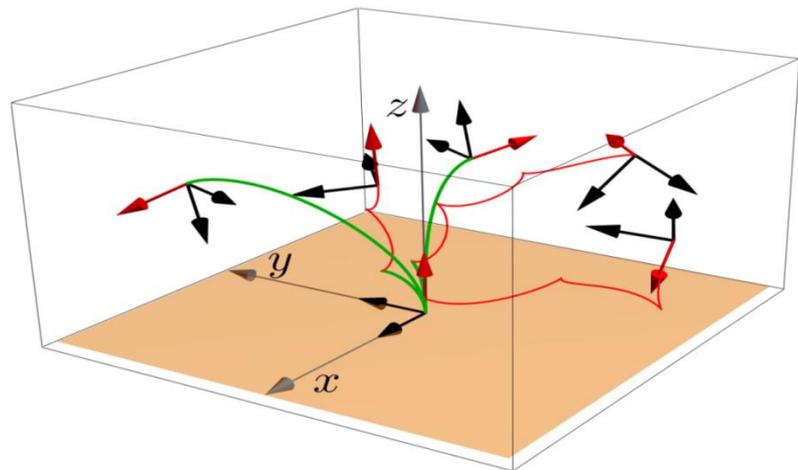
$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{n}_0, \mathbf{x}'(L) = \mathbf{n}_1 \in S^2,$$

$$E(\mathbf{x}) := \int_0^L \sqrt{\xi^2 + \kappa^2(s)} ds \rightarrow \min,$$

где $\kappa(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$.



Задача трассировки нервных волокон на МРТ снимках головного мозга человека



CP геодезические при $C=1$

Краткий обзор понятий субримановой геометрии

Левинвариантные СР структуры на группах Ли

- G – группа Ли, e – единичный элемент
 $\Delta \subset TG$ – левинвариантное подрасслоение касательного расслоения,
 \mathcal{G} – левинвариантное скалярное произведение в Δ .
- $\gamma : [0, T] \rightarrow G$ – горизонтальная (т.е. допустимая) кривая, если

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)} \text{ для п.в. } t \in [0, T].$$

СР кратчайшие — горизонтальные кривые γ минимальной длины

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \rightarrow \min.$$

-
- Левинвариантная СР структура на группе Ли размерности $d(d+1)/2$:

$$(G, \Delta, \mathcal{G}), \quad \Delta = \text{span}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_d), \quad \mathcal{G}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = \delta_{ij}.$$

Здесь $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_d$ левинвариантные векторные поля на G , т.ч. $\Delta + [\Delta, \Delta] = TG$.

Задача оптимального управления: подход на основе ОДУ

- Задача оптимального управления

$$\dot{\gamma}(t) = u_1(t) \mathcal{A}_1|_{\gamma(t)} + \dots + u_d(t) \mathcal{A}_d|_{\gamma(t)}$$

$$\gamma(0) = e, \quad \gamma(T) = g_1$$

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{u_1(t)^2 + \dots + u_d(t)^2} dt \rightarrow \min$$

$$(u_1(t), \dots, u_d(t)) \in \mathbb{R}^d,$$

- Принцип максимума Понтрягина: гамильтонова система

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda), \quad \lambda \in T^*G$$

- Экспоненциальное отображение:

$$\text{Exp} : (\lambda_0, t) \mapsto \gamma(t)$$

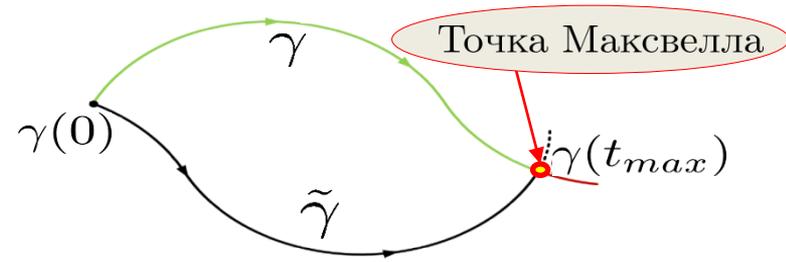
Оптимальность экстремальных траекторий

- Короткие дуги экстремальных траекторий γ оптимальны.
- Время разреза вдоль γ :

$$t_{cut} = \sup\{\tau > 0 \mid \gamma(t) \text{ оптимальна при } t \in [0, \tau]\}.$$

- Время Максвелла t_{max} :

$$\exists \tilde{\gamma} \neq \gamma : \begin{cases} \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0), \\ \gamma(t_{max}) = \tilde{\gamma}(t_{max}) \end{cases}$$



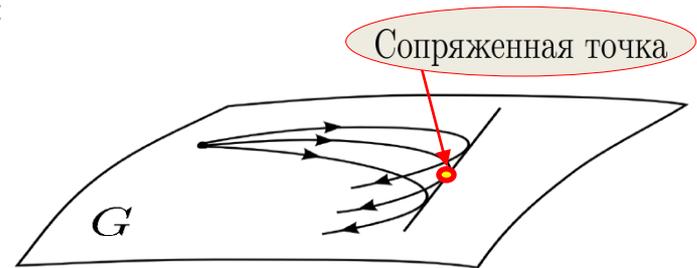
- Сопряженное время t_{conj} :

Сопряженная точка — критическое значение E_{xp} :

$$\frac{\partial E_{xp}}{\partial(\lambda, t)}(\lambda_0, t_{conj}) = 0.$$

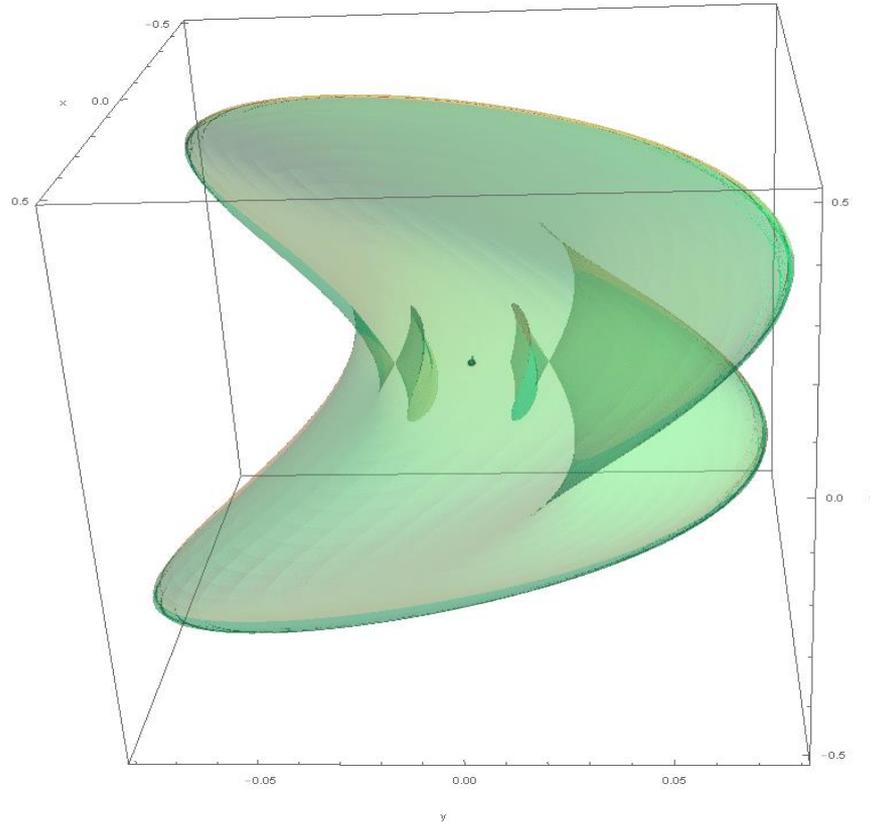
- Верхняя граница времени разреза:

$$t_{cut} \leq \min(t_{max}, t_{conj}).$$



Волновой фронт

$$W(T) = \{\text{Exp}(\lambda_0, T) \mid \lambda_0 \in T_e^*G, H(\lambda_0) = \frac{1}{2}\}.$$



$$\lambda_0 = (\nu_0, c_0)$$

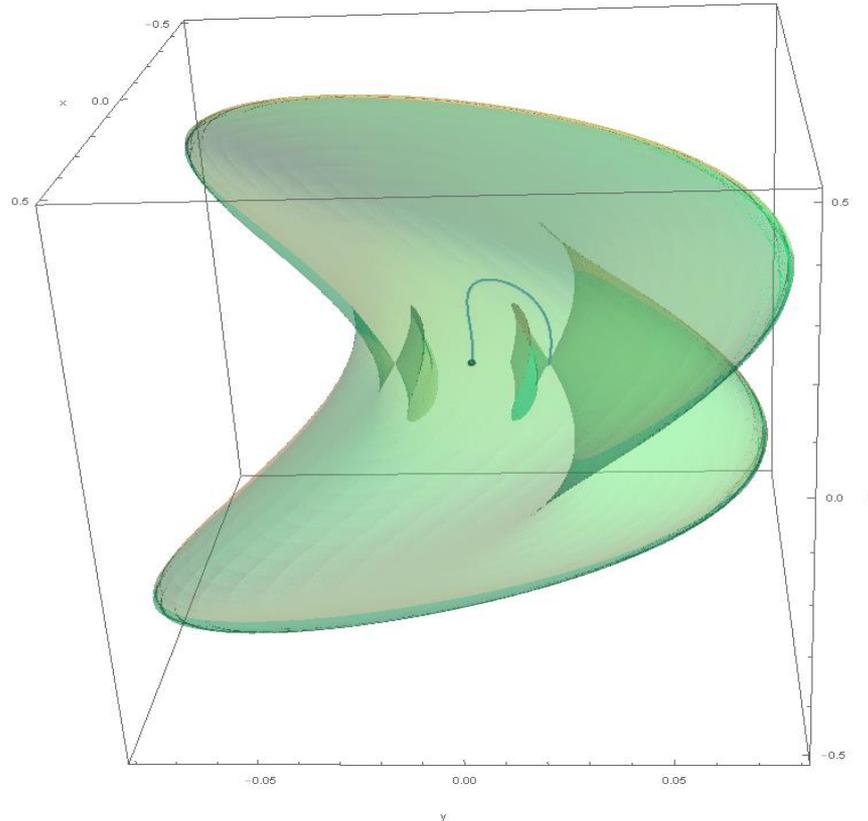
Изменение t

\Rightarrow

одна геодезическая

Волновой фронт

$$W(T) = \{\text{Exp}(\lambda_0, T) \mid \lambda_0 \in T_e^*G, H(\lambda_0) = \frac{1}{2}\}.$$



$$\lambda_0 = (\nu_0, c_0)$$

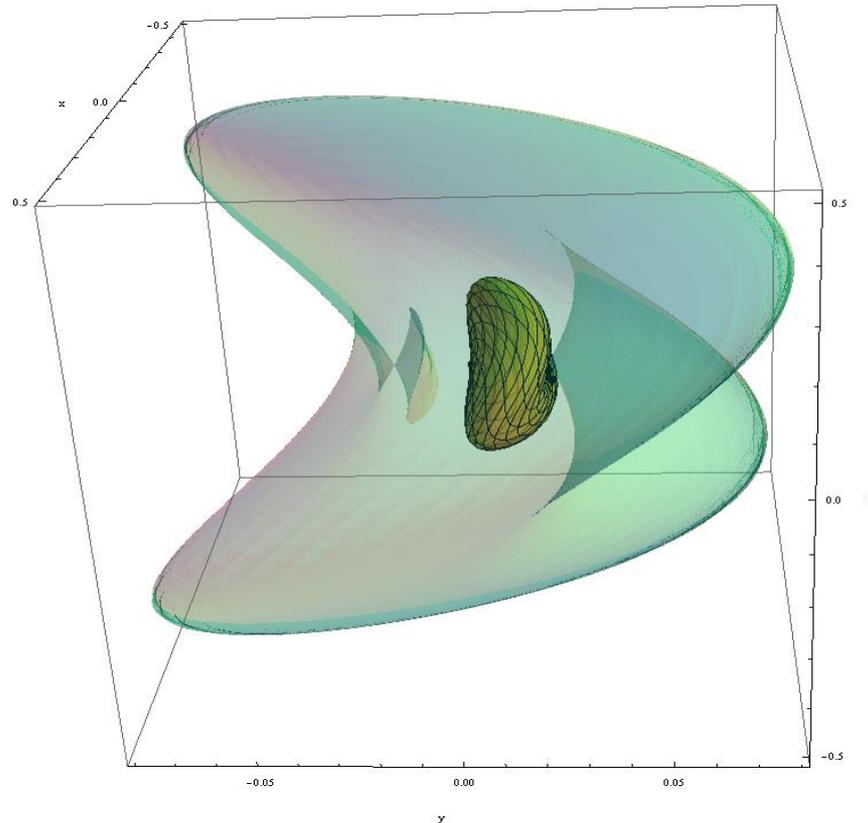
$$t \in [0, T]$$

изменение ν_0

\Rightarrow семейство
геодезических

Волновой фронт

$$W(T) = \{\text{Exp}(\lambda_0, T) \mid \lambda_0 \in T_e^*G, \mathbb{H}(\lambda_0) = \frac{1}{2}\}.$$



$$\lambda_0 = (\nu_0, c_0)$$

$$t \in [0, T]$$

$$2\nu_0 \in S^1$$

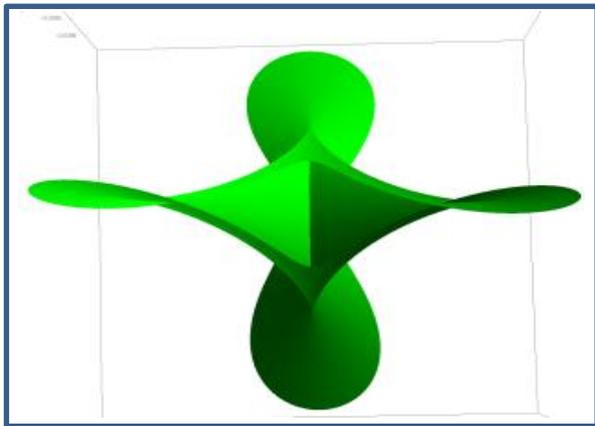
Изменение c_0

\Rightarrow

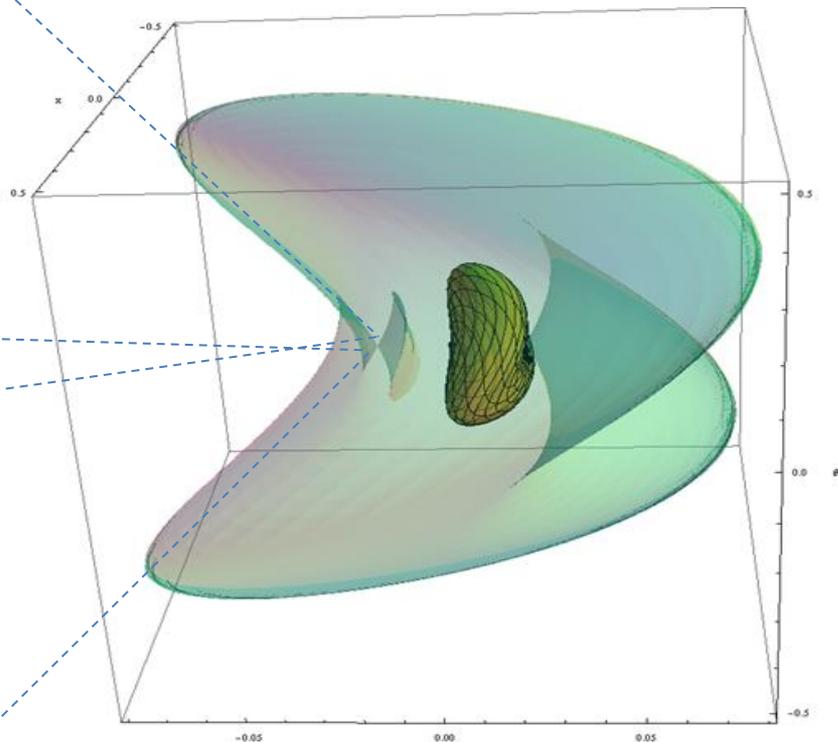
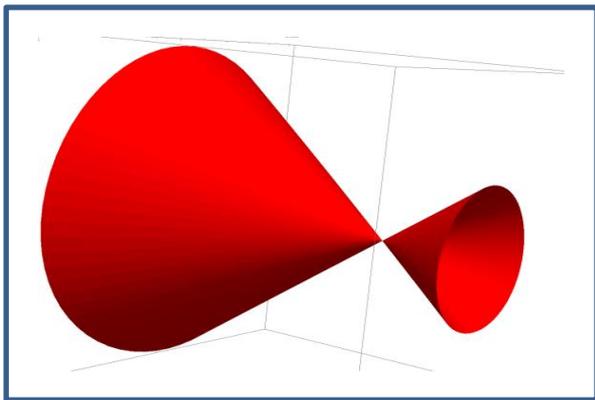
все семейство
геодезических

Самопересечение волнового фронта

Общий случай:
астроидальная
форма
каустики



Специальный
случай
вращательной
симметрии

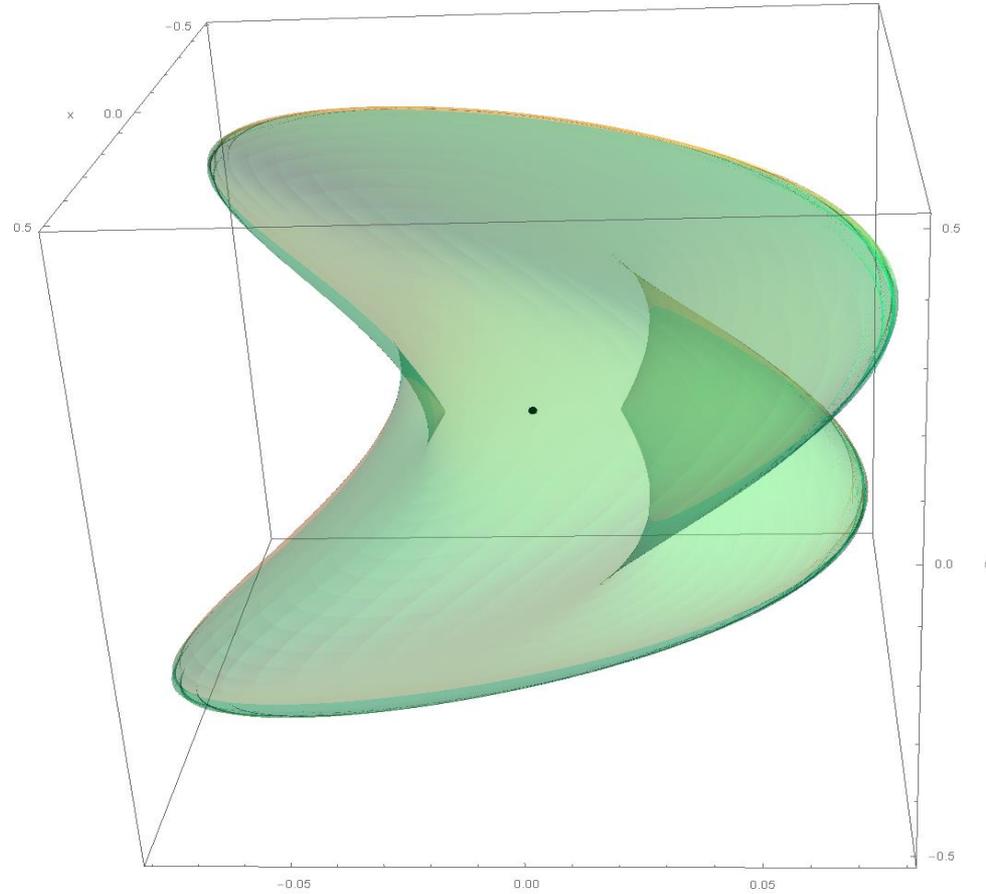


A. Agrachev, Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures. JDCS, 1996.

H. Chakir, J.P. Gauthier and I. Kupka, Small Subriemannian Balls on R^3 . JDCS, 1996.

Субриманова сфера

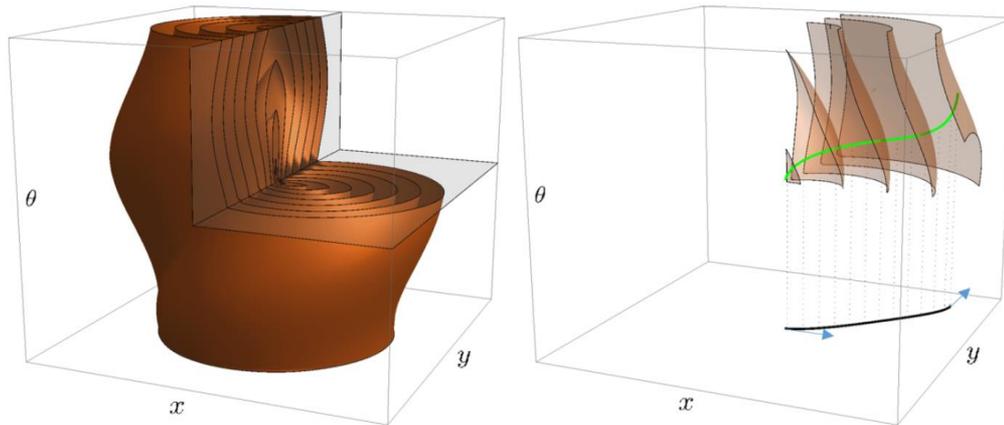
$$S(T) = \{\text{Exp}(\lambda_0, T) \mid \lambda_0 \in T_e^*G, H(\lambda_0) = \frac{1}{2}, t_{cut}(\lambda_0) \geq T\}.$$



Подход на основе уравнений в частных производных

Численная схема на основе уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ):

- Вывод уравнения ГЯБ, описывающего распространение волнового фронта;
- Построение функции расстояния (на основе вязкого решения уравнения ГЯБ);
- Вычисление оптимальных траекторий методом наискорейшего спуска по функции расстояния вдоль разрешенных направлений.



Преимущество: позволяет учитывать функцию внешней стоимости.

Пример: адаптированная СР структура на SE(2)

Группа Ли SE(2) $\ni g \sim (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$,

$$L_g g' = g g' = (x' \cos \theta + y' \sin \theta + x, -x' \sin \theta + y' \cos \theta + y, \theta' + \theta).$$

Базисные левоинвариантные векторные поля

$$\mathcal{A}_1|_g = \cos \theta \partial_x|_g + \sin \theta \partial_y|_g = (L_g)_* \partial_x|_e$$

$$\mathcal{A}_3|_g = -\sin \theta \partial_x|_g + \cos \theta \partial_y|_g = (L_g)_* \partial_y|_e$$

$$\mathcal{A}_2|_g = \partial_\theta|_g = (L_g)_* \partial_\theta|_e$$

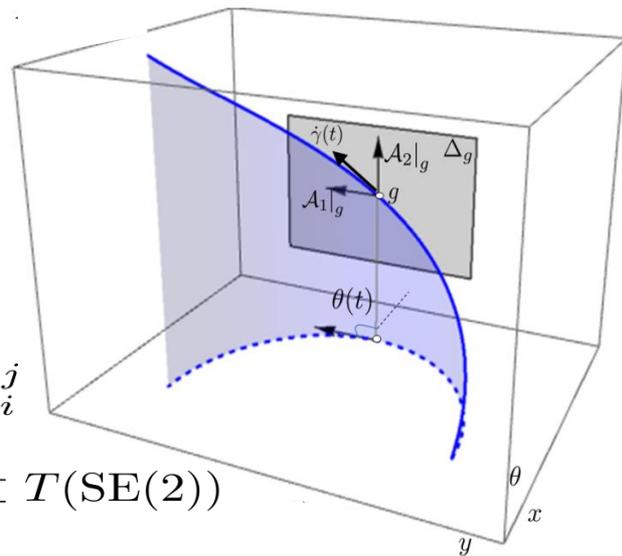
Базисные левоинвариантные формы $\langle \omega^i, \mathcal{A}_j \rangle = \delta_i^j$

Левоинвариантное распределение $\Delta = \text{span}\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} \subset T(\text{SE}(2))$

Метрика $\mathcal{G}|_g = \mathcal{C}^2(g) (\xi^2 \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2)|_g$ на Δ ,

с функцией внешней стоимости $\mathcal{C} : \text{SE}(2) \rightarrow [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$, и $\xi > 0$.

СР расстояние: Inf среди липшицевых кривых $\gamma : [0, T] \rightarrow \text{SE}(2)$



$$d(e, g) = \inf \left\{ \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \mid \begin{array}{l} \gamma(0) = e, \\ \gamma(T) = g, \\ \dot{\gamma}(t) \in \Delta|_{\gamma(t)} \end{array} \right\}. \quad 30$$

Адаптированные к внешним данным СР кратчайшие

Постановка задачи.

$$\dot{\gamma} = \sum_{i=1}^d u_i \mathcal{A}_i, \quad \gamma(0) = e, \quad \gamma(T) = g, \quad l(\gamma) = \int_0^T \mathcal{C}(\gamma(t)) \sqrt{\sum_{i=1}^d u_i^2(t)} dt \rightarrow \min$$

Теорема. Пусть $\mathcal{W}(g)$ — вязкое решение системы эйконала

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^d (\mathcal{A}_i|_g(\mathcal{W}))^2 = \mathcal{C}^2(g), & \text{при } g \neq e, \\ \mathcal{W}(e) = 0. \end{cases}$$

Тогда

- $\mathcal{W}(g) = d(e, g)$ — функция СР расстояния на G ;
- $\mathcal{S}_t = \{g \in G \mid \mathcal{W}(g) = t\}$ — СР сферы $S(t)$ радиуса t ;
- кратчайшая $\gamma(t)$, соединяющая e и g имеет вид $\gamma(t) = \gamma_b(\mathcal{W}(g) - t)$, где $\gamma_b(t)$ находится интегрированием по $t \in [0, \mathcal{W}(g)]$

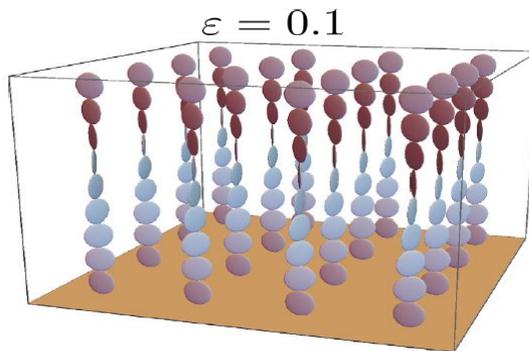
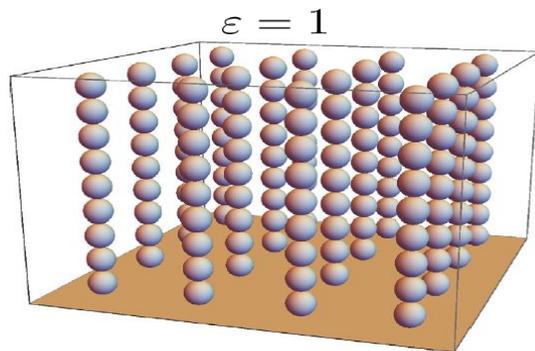
$$\dot{\gamma}_b(t) = -u_1(t) \mathcal{A}_1|_{\gamma_b(t)} - \dots - u_d(t) \mathcal{A}_d|_{\gamma_b(t)}, \quad \gamma_b(0) = g,$$

где $u_i(t) = \frac{\mathcal{A}_i|_{\gamma_b(t)}(\mathcal{W})}{\mathcal{C}^2(\gamma_b(t))}$, $i = 1, \dots, d$.

Риманова аппроксимация и Fast Marching

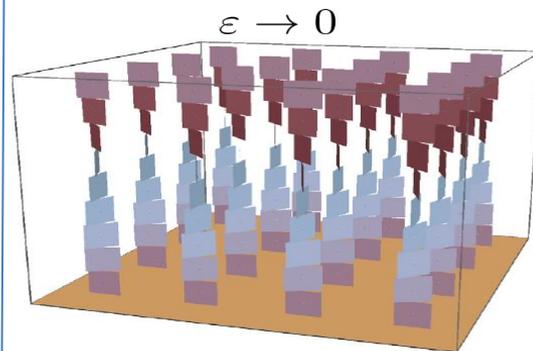
Риманова метрика

$$\mathcal{G}_\varepsilon = \mathcal{C}^2(\cdot) (\xi^2 \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2 + \xi^2 \varepsilon^{-2} \omega^3 \otimes \omega^3)$$



Субриманова метрика

$$\mathcal{G} = \mathcal{C}^2(\cdot) (\xi^2 \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2)$$



SR Fast Marching для сильно анизотропного риманова уравнения эйконала

$$\begin{cases} \text{При } g \neq e : \\ \frac{\mathcal{A}_1|_g(\mathcal{W}_\varepsilon)^2}{\xi^2} + \mathcal{A}_2|_g(\mathcal{W}_\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 \frac{\mathcal{A}_3|_g(\mathcal{W}_\varepsilon)^2}{\xi^2} = \mathcal{C}^2(g), \\ \text{При } g = e : \mathcal{W}_\varepsilon(e) = 0. \end{cases}$$

Систему ГЯБ можно записать как СР уравнение эйконала

$$\begin{cases} \text{При } g \neq e : \\ \frac{\mathcal{A}_1|_g(\mathcal{W})^2}{\xi^2} + \mathcal{A}_2|_g(\mathcal{W})^2 = \mathcal{C}^2(g), \\ \text{При } g = e : \mathcal{W}(e) = 0. \end{cases}$$

Поиск выделяющихся кривых на изображениях

Анализ изображений сетчатки глаза

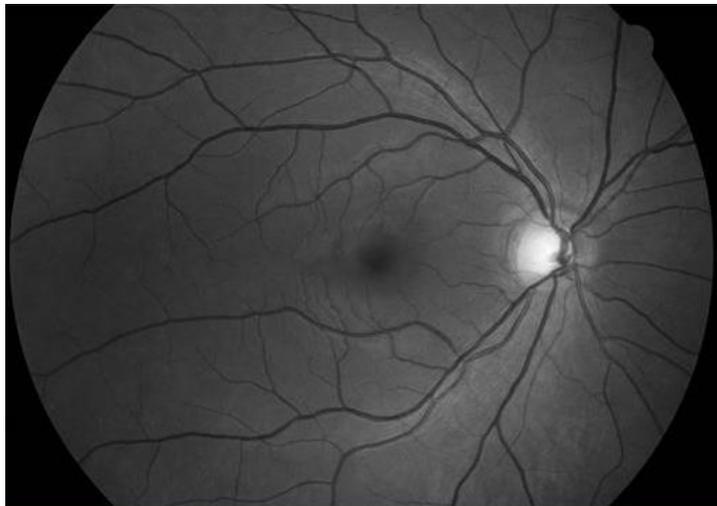
Диабетическая ретинопатия - одна из основных причин слепоты.

Масштаб эпидемии: 10% жителей Китая страдают ДР.

Ранняя диагностика -> возможно лечение.

Признаки заболевания --- искривленные сосуды.

Сетчатка - отличный обзор микрососудов головного мозга.



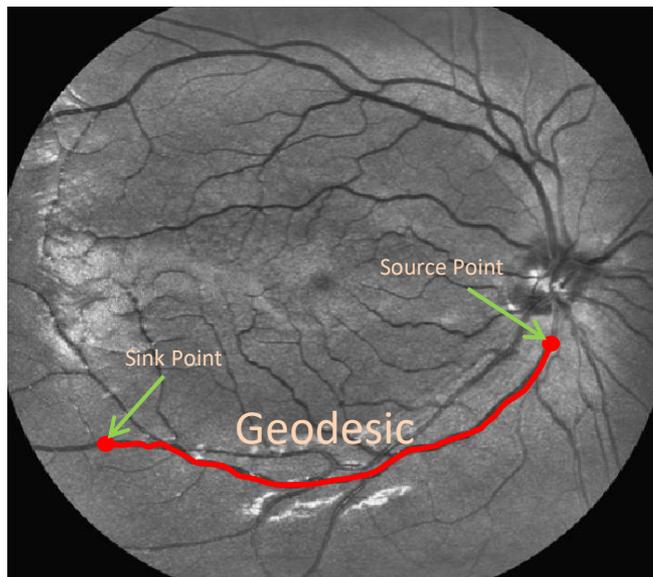
Здоровая сетчатка



*Диабетическая ретинопатия
(искривленные сосуды)*

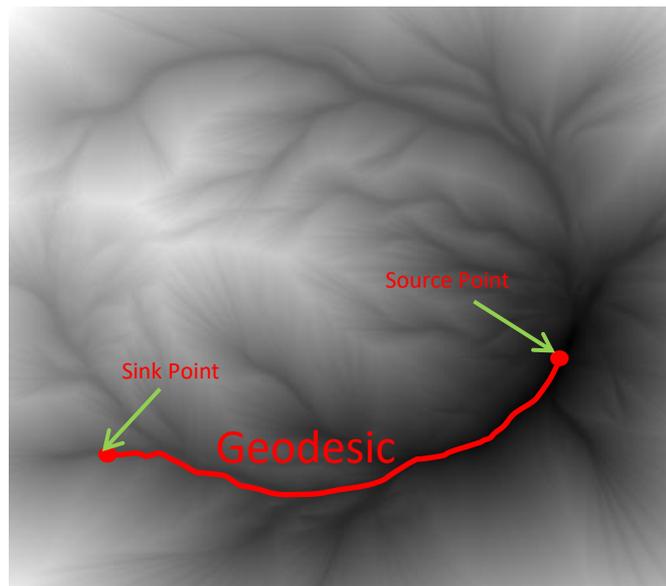
Геодезические методы в компьютерном зрении

Изображение



Поиск выделяющихся кривых с помощью минимальных путей (или геодезических)
Геодезическая, адаптированная к данным
- кривая, минимизирующая длину в метрике, порожденной изображением.

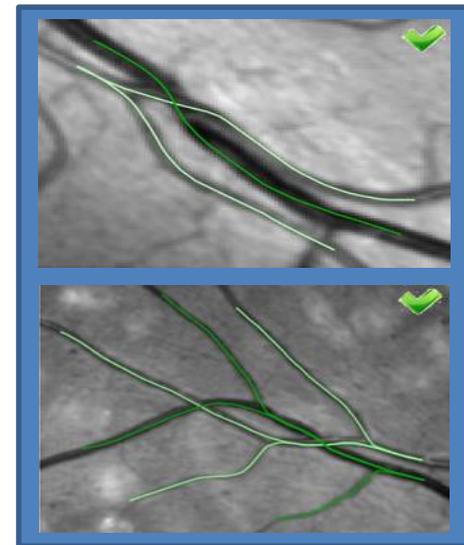
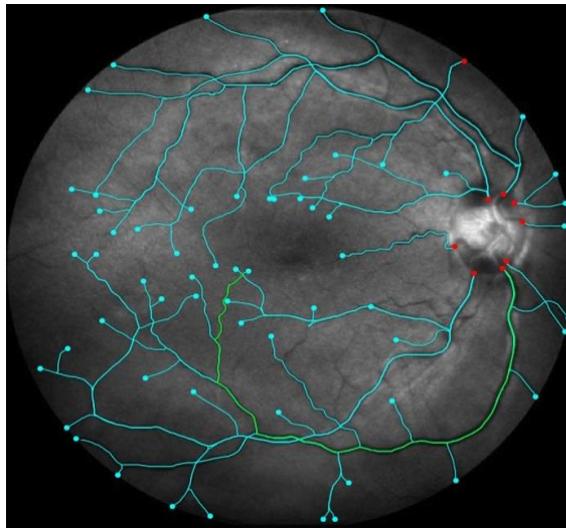
Функция расстояния



Метод Fast Marching для вычисления геодезических:

- 1) Вычисление функции расстояния от исходной точки,
- 2) Наискорейший спуск на функции расстояния.

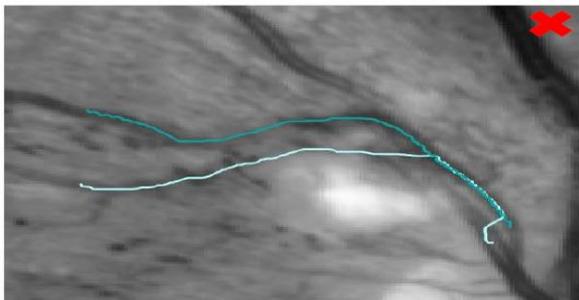
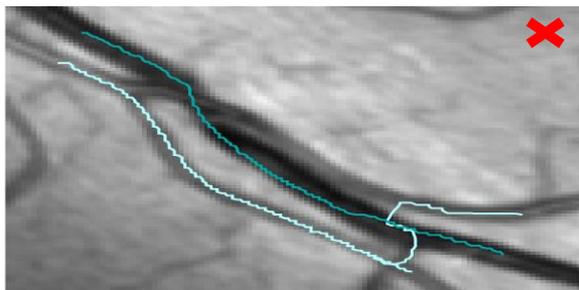
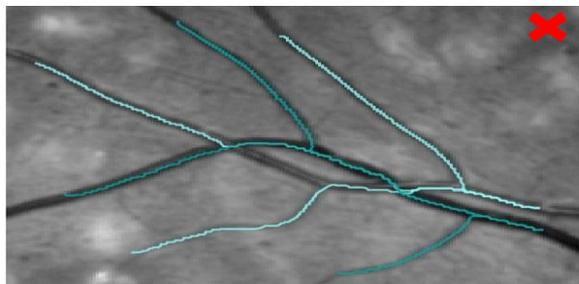
Поиск сосудов на плоском фото сетчатки



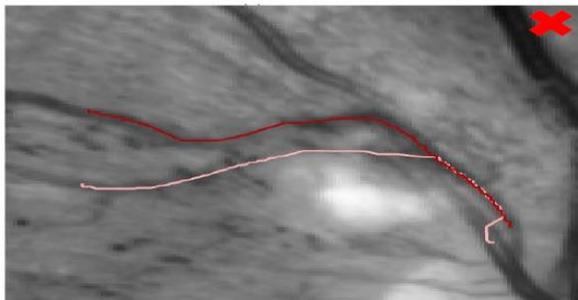
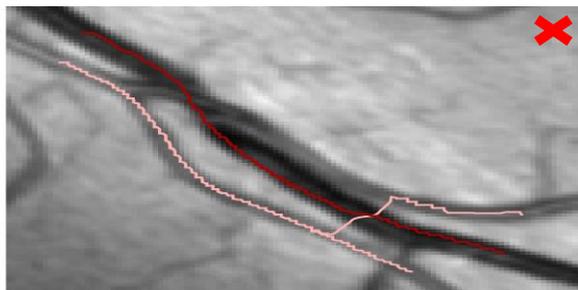
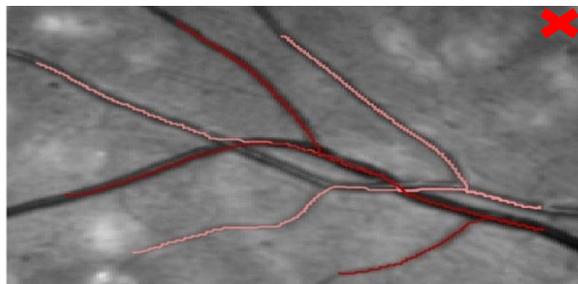
- [1] E.J. Bekkers, R. Duits, A. Mashtakov and G.R. Sanguinetti, *Data-driven Sub-Riemannian Geodesics in SE(2)*, Proc. SSVM, 2015.
- [2] E.J. Bekkers, R. Duits, A. Mashtakov and G.R. Sanguinetti, *A PDE Approach to Data-driven Sub-Riemannian Geodesics in SE(2)*, SIIMS, 2015.
- [3] G. Sanguinetti, R. Duits, E. Bekkers, M. Janssen, A. Mashtakov, J-M. Mirebeau, *Sub-Riemannian Fast Marching in SE(2)*, Proc. CIARP, 2015.

Сравнение с классическими методами

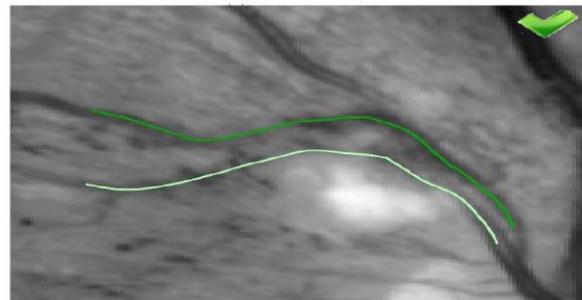
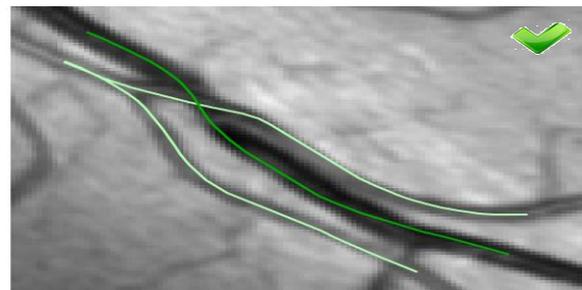
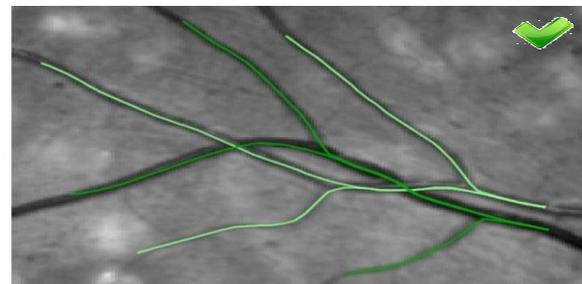
\mathbb{R}^2 - Riemannian



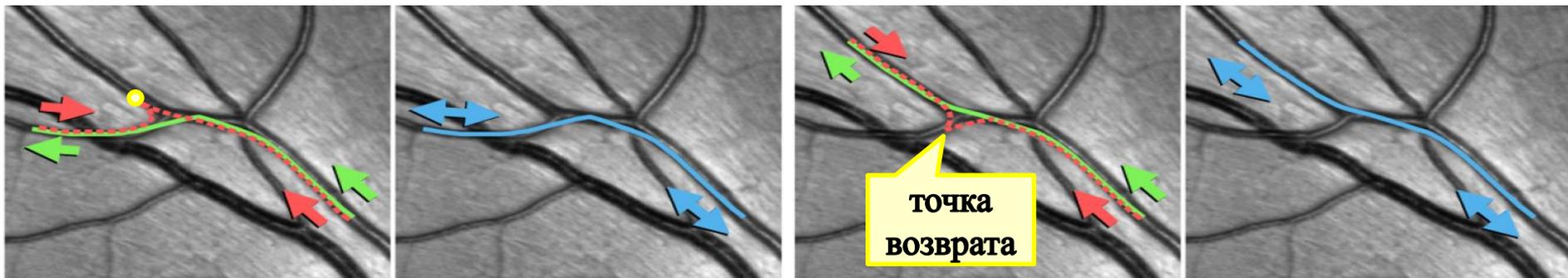
$SE(2)$ - Riemannian



$SE(2)$ - Sub-Riemannian

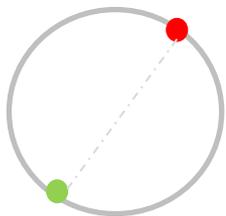


Устранение точек возврата: геодезические на PTR(2)

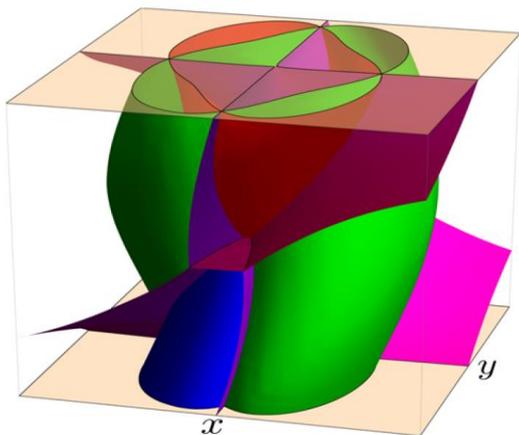


$$(x, y, \theta) \in PT(\mathbb{R}^2)$$

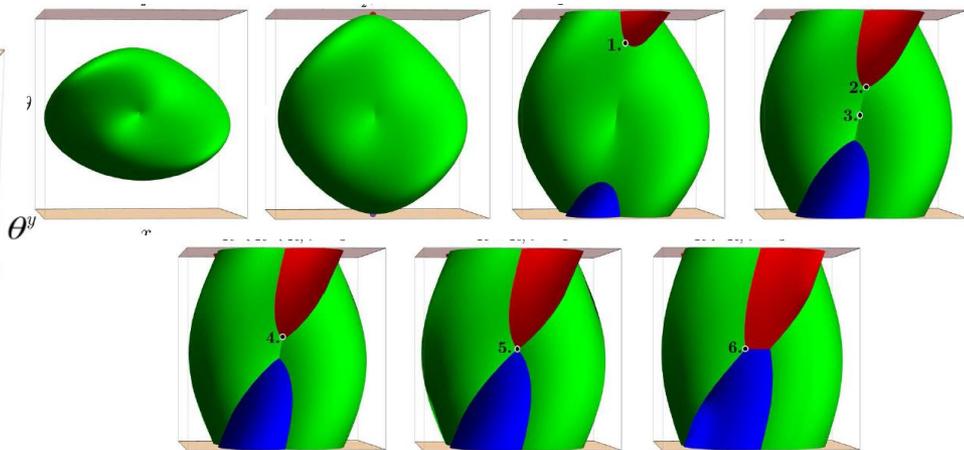
$$PT(\mathbb{R}^2) \equiv \mathbb{R}^2 \times P^1$$



$$P^1 = S^1 / \sim$$

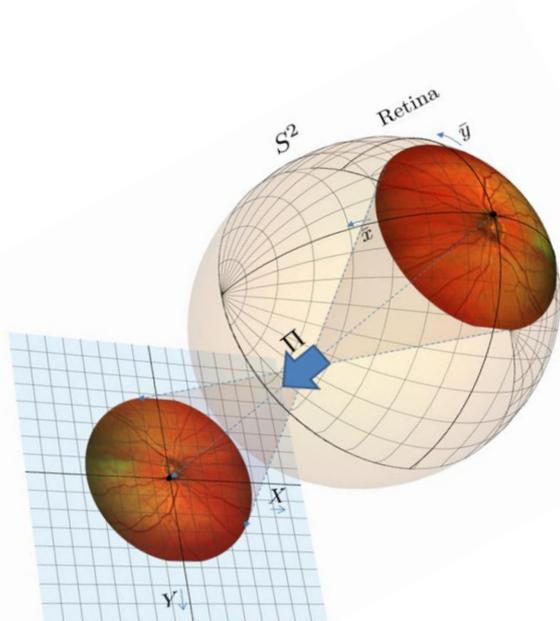


Множество разреза

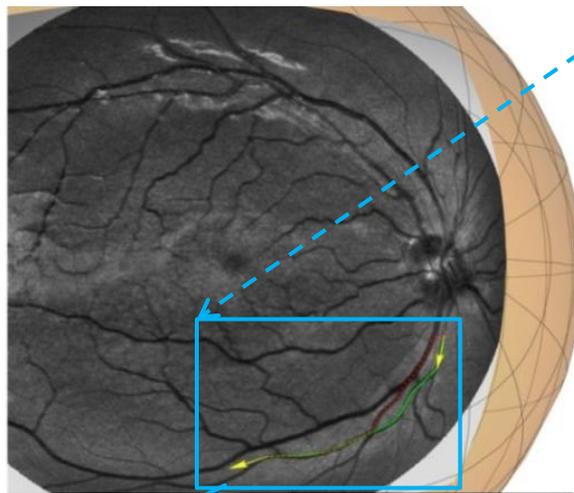


Субримановы сферы

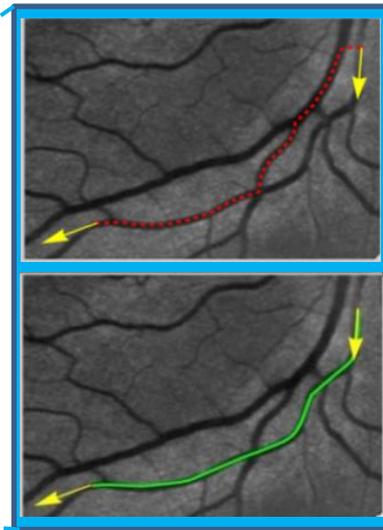
Поиск сосудов на сферическом фото сетчатки



Flat Image



Риманова геодезическая



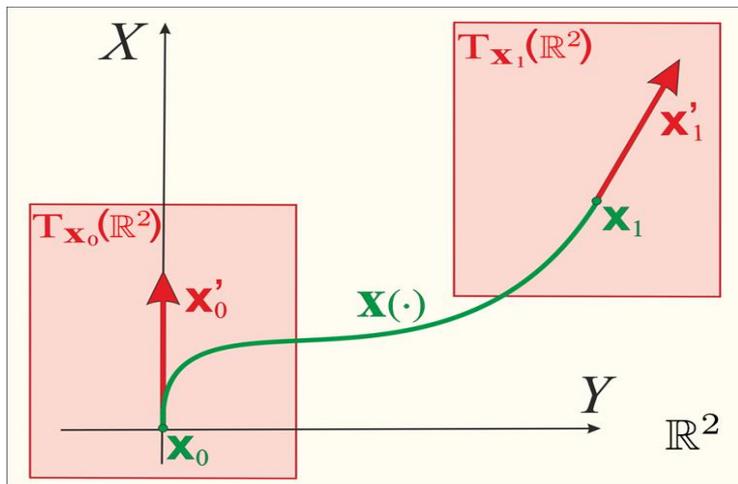
CR геодезическая

[1] A. Mashtakov, R. Duits, Yu. Sachkov, E.J. Bekkers, I. Beschastnyi, *Tracking of Lines in Spherical Images via Sub-Riemannian Geodesics in $SO(3)$* , JMIV, 2017.

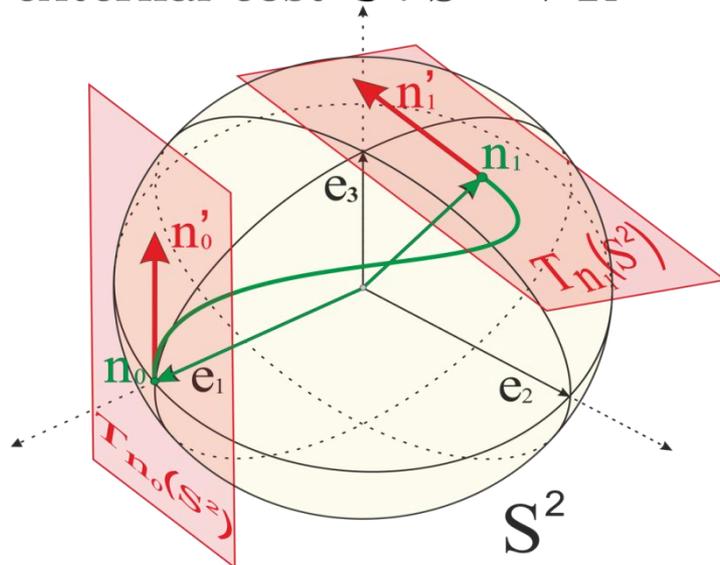
[2] A.P. Mashtakov, R. Duits, Yu.L. Sachkov, E.J. Bekkers, I.Yu. Beschastnyi, *Sub-Riemannian Geodesics in $SO(3)$ with Application to Vessel Tracking in Spherical Images of Retina*, Doklady Mathematics, 2017.

Сферический аналог плоской модели

Given: constant $\xi > 0$,
 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}'_0 \in T_{\mathbf{x}_0}(\mathbb{R}^2)$,
 $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}'_1 \in T_{\mathbf{x}_1}(\mathbb{R}^2)$,
 external cost $\mathbf{c} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$



Given: constant $\xi > 0$,
 $\mathbf{n}_0 \in S^2$, $\mathbf{n}'_0 \in T_{\mathbf{n}_0}(S^2)$,
 $\mathbf{n}_1 \in S^2$, $\mathbf{n}'_1 \in T_{\mathbf{n}_1}(S^2)$,
 external cost $\mathbf{c} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$



Find: $\mathbf{n}(\cdot) : [0, l] \rightarrow S^2$, s.t.
 $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}(l) = \mathbf{n}_1$,
 $\mathbf{n}'(0) = \mathbf{n}'_0$, $\mathbf{n}'(l) = \mathbf{n}'_1$,
 $\int_0^l \mathbf{c}(\mathbf{n}(s)) \sqrt{\xi^2 + k_g^2(s)} ds \rightarrow \min.$ ⁴⁰

Find: $\mathbf{x}(\cdot) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, s.t.
 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(l) = \mathbf{x}_1$,
 $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}'_0$, $\mathbf{x}'(l) = \mathbf{x}'_1$,
 $\int_0^l \mathbf{c}(\mathbf{x}(s)) \sqrt{\xi^2 + k^2(s)} ds \rightarrow \min.$

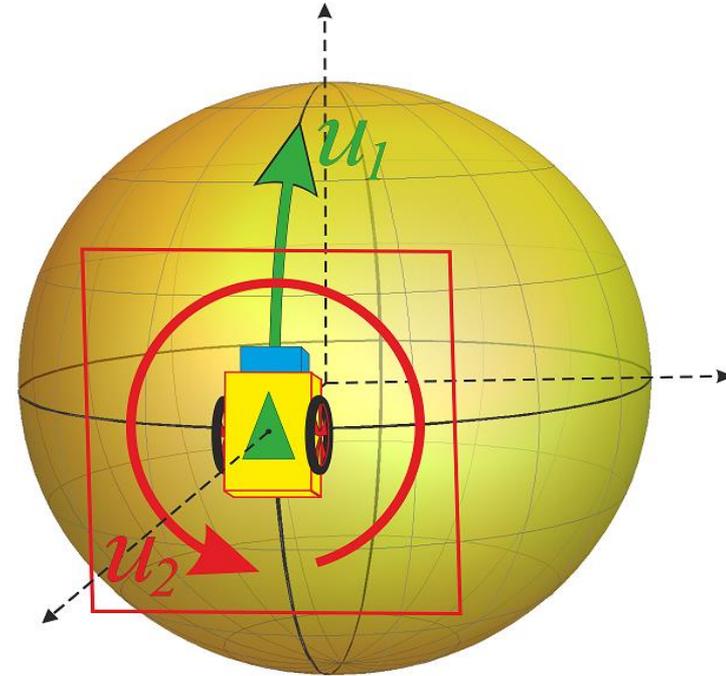
Механическая интерпретация СР задачи на $SO(3)$

Р_{мех} :

$$\gamma(0) = e, \quad \gamma(T) = g,$$

$$\dot{\gamma}(t) = u_1(t) \mathcal{A}_1|_{\gamma(t)} + u_2(t) \mathcal{A}_2|_{\gamma(t)}$$

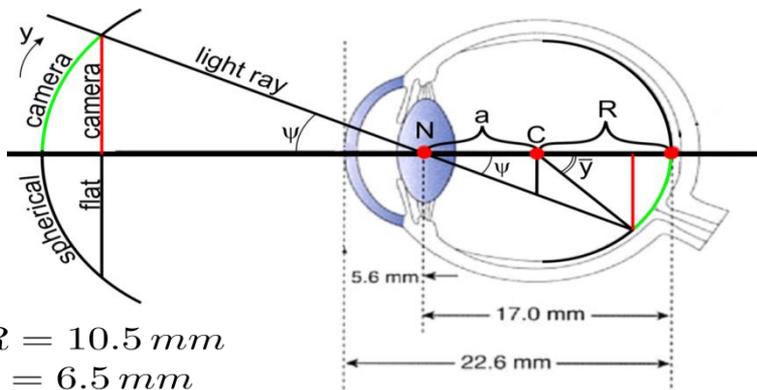
$$\int_0^T C(\gamma(t)) \sqrt{\xi^2 u_1(t)^2 + u_2(t)^2} dt \rightarrow \min.$$



Оптимальное движение машины Ридса–Шеппа на сфере.

Допустимые движения вперед / назад и вращения на месте соответствуют управлениям $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Сферические изображения сетчатки глаза

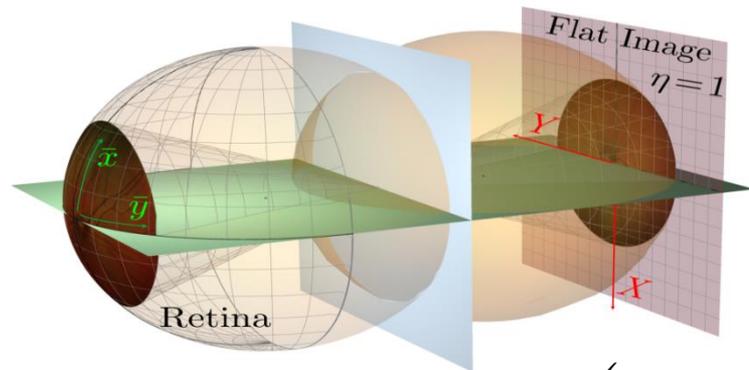
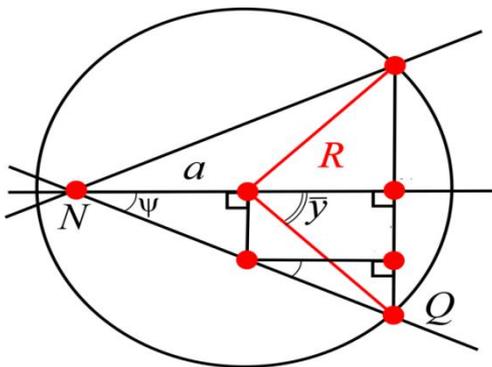


$$R = 10.5 \text{ mm}$$

$$a = 6.5 \text{ mm}$$

$$\psi_{\max} = \frac{\pi}{8}$$

$$y(a, R, \psi) = \arccos \left(\cos \psi \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \psi}{R^2}} - \frac{a \sin^2 \psi}{R} \right)$$



$$S^2 \ni \mathbf{n}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ \cos x \sin y \\ \sin x \end{pmatrix}$$

Projection $\Pi : (x, y) \mapsto (X, Y)$:

$$X = \frac{(a + c) \sin x}{a + \cos x \cos y} \eta, \quad Y = \frac{(a + c) \cos x \sin y}{a + \cos x \cos y} \eta$$

Maximum angle $y_{\max} \approx 0.63 \text{ rad} \approx 36^\circ$

$$\text{Global distortion } \mathcal{GD}(y) = \frac{|y - Y(0, y)|}{|y|}$$

Maximum global distortion: $0 \leq \mathcal{GD}(y) \leq \mathcal{GD}(y_{\max}) \approx 0.07$

$$\text{Local deformation } J(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial X}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Maximum local deformation error 23%

Обнаружение сосудов на сферическом фото сетчатки

Retina $S^2 \ni n(x, y)$

Spherical Image $I(x, y)$

Flat Image $F(X, Y)$

$$F(X, Y) = I(\Pi^{-1}(X, Y))$$

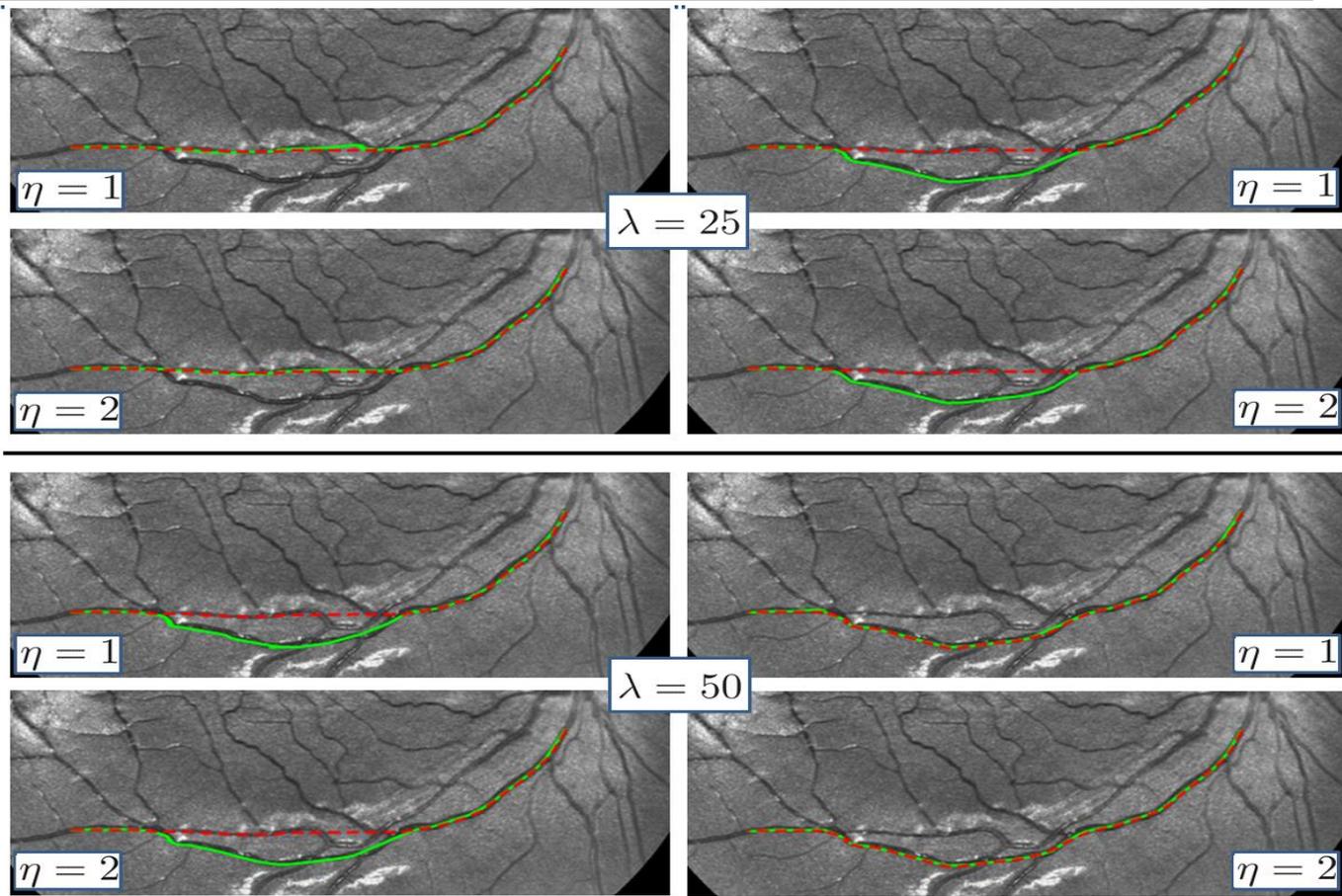
External cost

$$C(x, y, \theta) = \left(1 + \frac{VF(\Pi(x, y))}{\lambda \|VF\|_\infty^2}\right)^{-1}$$

VF multiscale vesselness

--- SE(2) geodesics

— SO(3) geodesics



$\xi = 1$

$\xi = 3$

Измерение кривизны сосудов в разных моделях

X_i - l.-i. v.f. on $SO(3)$

\mathcal{A}_i - l.-i. v.f. on $SE(2)$

$\gamma^{SO(3)}$ - $SO(3)$ geodesic

$\gamma^{SE(2)}$ - $SE(2)$ geodesic

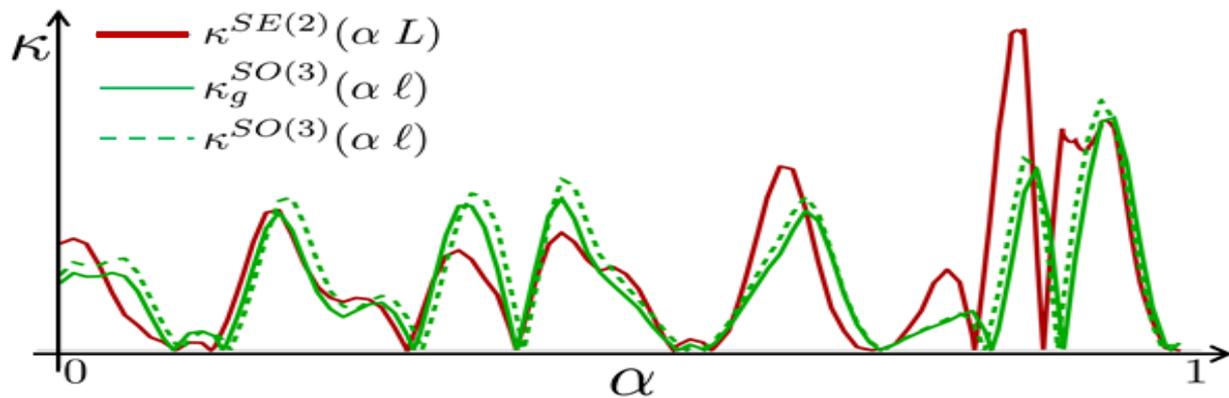
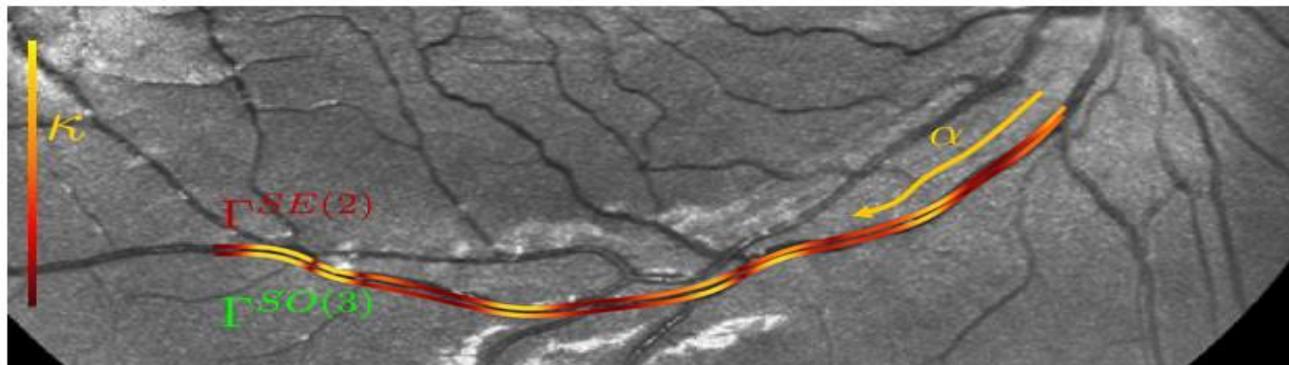
\mathcal{W} - SR-distance
from source point

Geodesic curvature

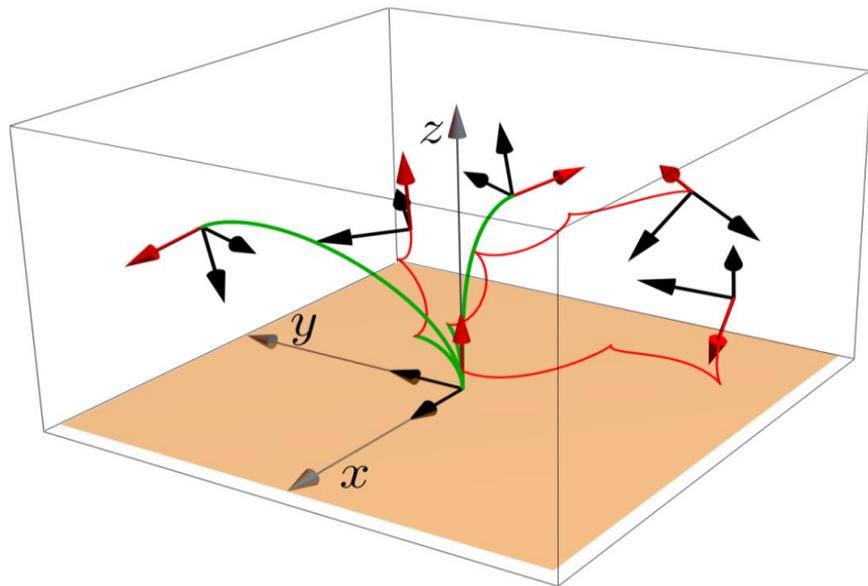
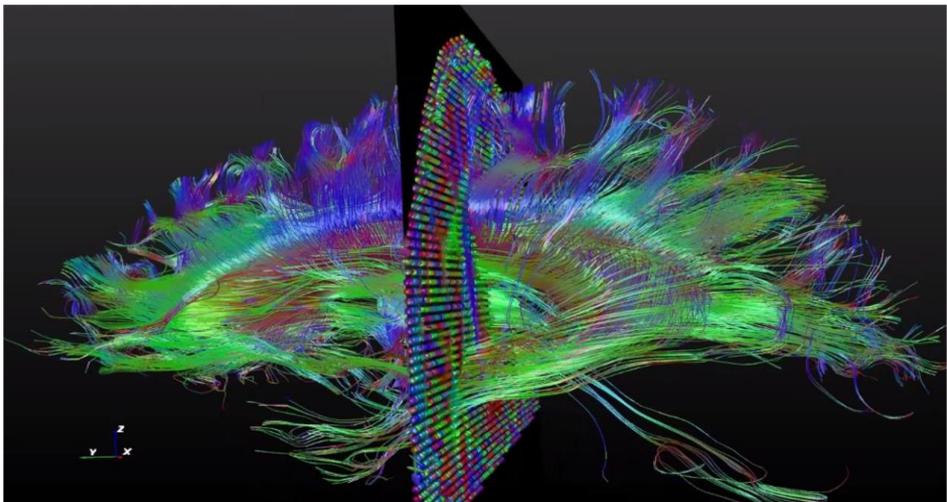
$$\begin{aligned} \kappa_g^{SO(3)}(\cdot) &= \\ &= -\xi^2 \frac{X_2|_{\gamma^{SO(3)}(\cdot)}(\mathcal{W}^{SO(3)})}{X_1|_{\gamma^{SO(3)}(\cdot)}(\mathcal{W}^{SO(3)})} \end{aligned}$$

Plannar curvature

$$\begin{aligned} \kappa^{SE(2)}(\cdot) &= \\ &= -\xi^2 \frac{\mathcal{A}_2|_{\gamma^{SE(2)}(\cdot)}(\mathcal{W}^{SE(2)})}{\mathcal{A}_1|_{\gamma^{SE(2)}(\cdot)}(\mathcal{W}^{SE(2)})} \end{aligned}$$



CP геодезические на $SE(3)$

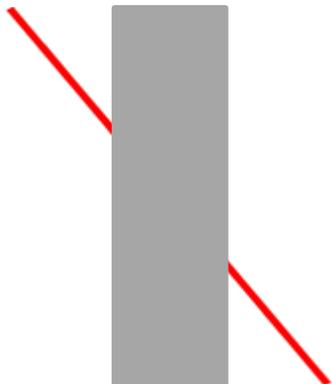


[1] R. Duits, A. Ghosh, T. Dela Haije, A. Mashtakov,
On sub-Riemannian geodesics in $SE(3)$ whose spatial projections do not have cusps, JDCS, 2016.

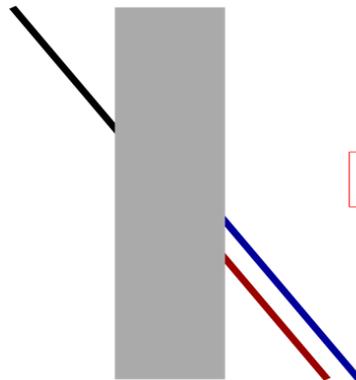
[2] A. Mashtakov, A. Popov
Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of Euclidean Space, RCD, 2017.

Адаптированные субримановы геодезические на $SE(2)$
для моделирования геометрических оптических иллюзий

Моделирование и объяснение зрительных иллюзий

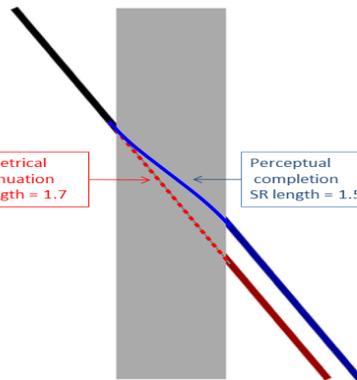


Идея: Иллюзорный контур создается зрительной системой, как геодезическая в SR метрике, индуцированной зрительным сигналом.

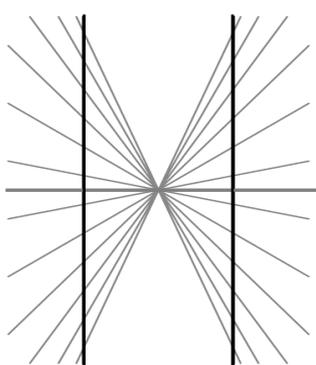


Geometrical continuation
SR length = 1.7

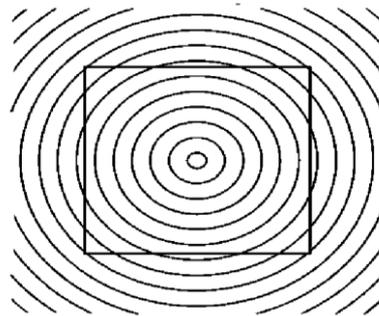
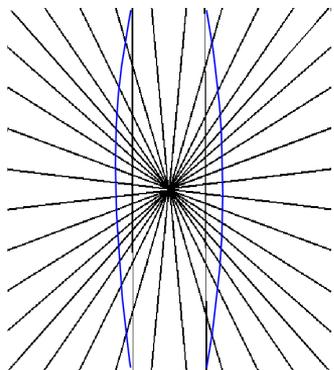
Perceptual completion
SR length = 1.5



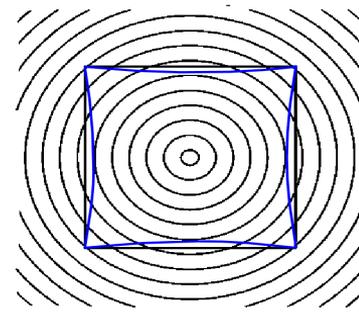
Иллюзия



Иллюзия Геринга



Иллюзия Орбисона



B. Franceschiello, A. Mashtakov, G. Citti, A. Sarti, *Geometrical optical illusion via sub-Riemannian geodesics in the roto-translation Group*, DGA, 2019.

Построение функции внешней стоимости

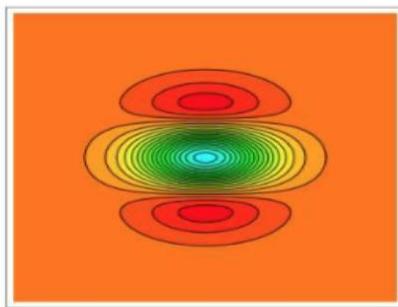
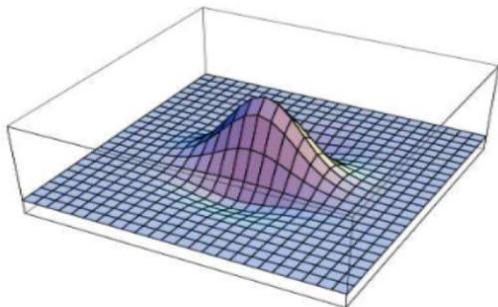
Плоскость сетчатки $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$. Зрительный стимул — функция яркости $I(x, y) : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Локальные координаты $\chi = (\chi_1, \chi_2) \in M$ с центром в точке (x, y) .

Фильтры Габора:

$$\psi_0(\chi) = \psi_0(\chi_1, \chi_2) = \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(\chi_1^2 + \alpha^2\chi_2^2)}{2\sigma^2}} e^{\frac{2i\chi_2}{\lambda}},$$

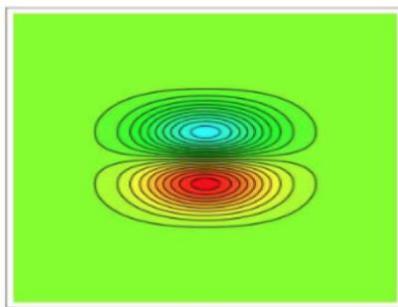
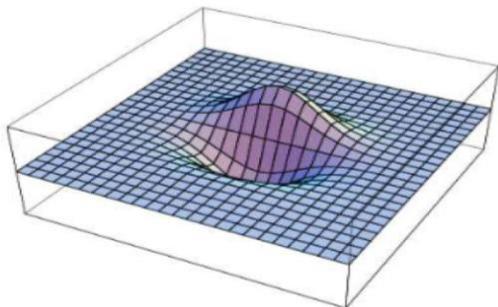
$\lambda > 0$ длина волны, $\alpha > 0$ соотношение между осями, $\sigma > 0$ стандартное отклонение.



Четная часть

$$\operatorname{Re}(\psi_0(\chi)) = \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(\chi_1^2 + \alpha^2\chi_2^2)}{2\sigma^2}} \cos \frac{2\chi_2}{\lambda}$$

обнаружение контуров.



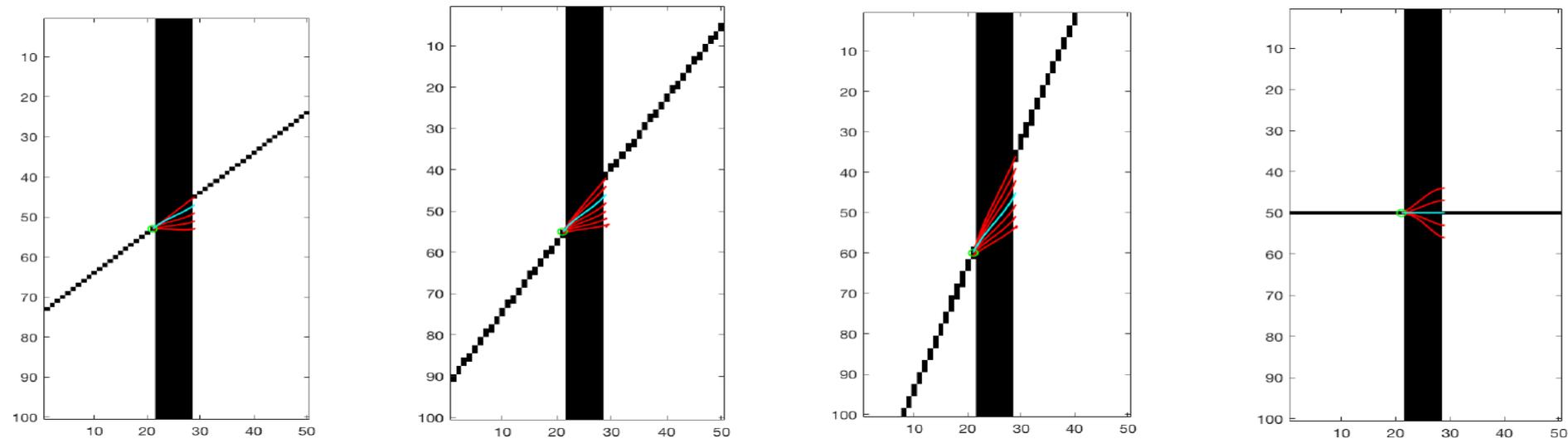
Нечетная часть

$$\operatorname{Im}(\psi_0(\chi)) = \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(\chi_1^2 + \alpha^2\chi_2^2)}{2\sigma^2}} \sin \frac{2\chi_2}{\lambda}$$

обнаружение границ.

Моделирование иллюзорного контура

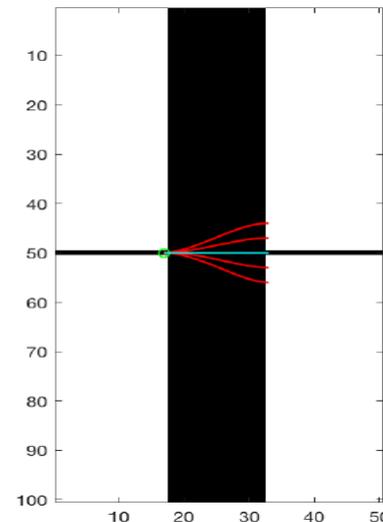
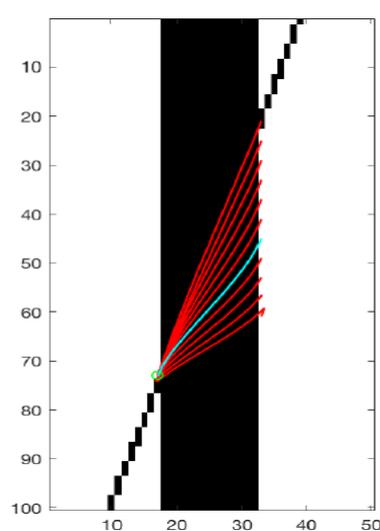
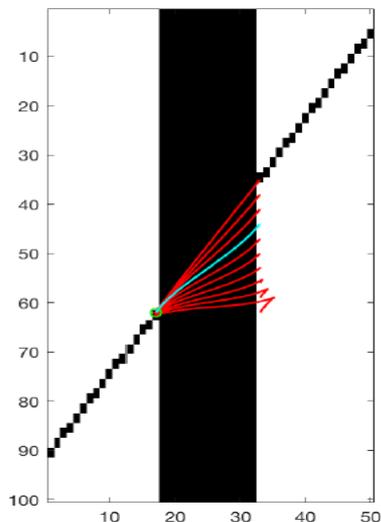
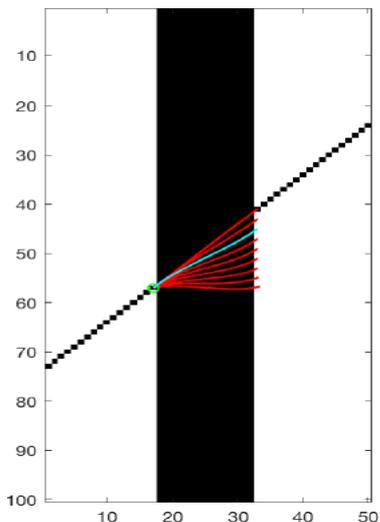
Width of the stripe 9 px.



Illusory contour (in cyan) is given by SR-minimizer with fixed initial condition and terminal set on the right edge of the stripe with the same angle.

Моделирование иллюзорного контура

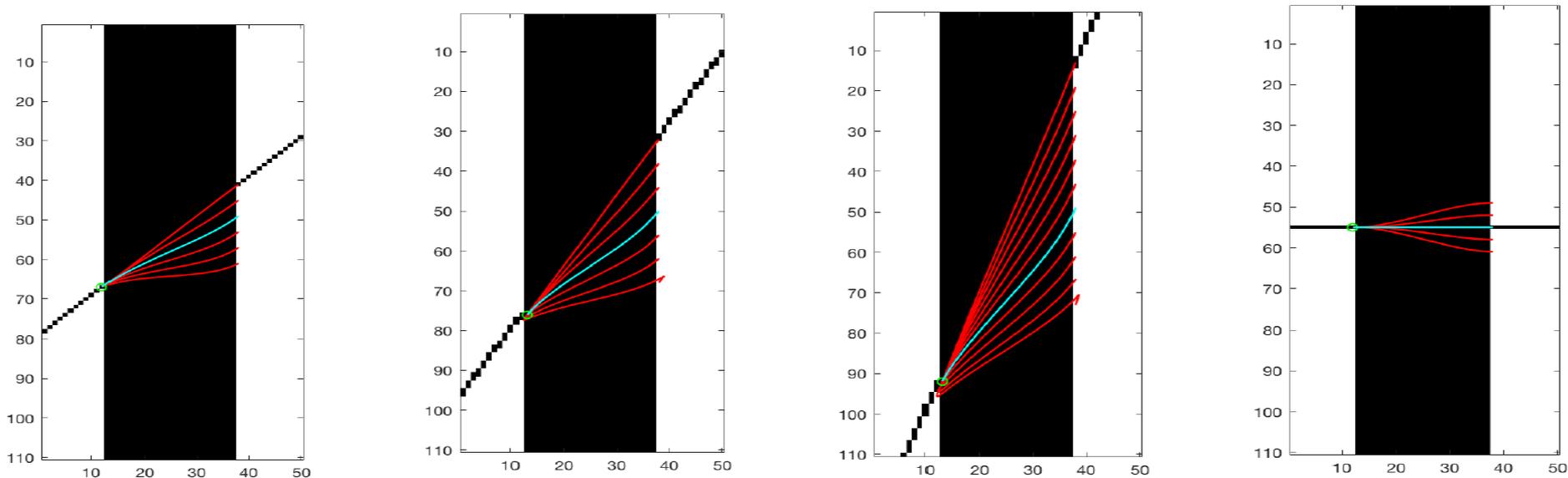
Width of the stripe 15 px.



Illusory contour (in cyan) is given by SR-minimizer with fixed initial condition and terminal set on the right edge of the stripe with the same angle.

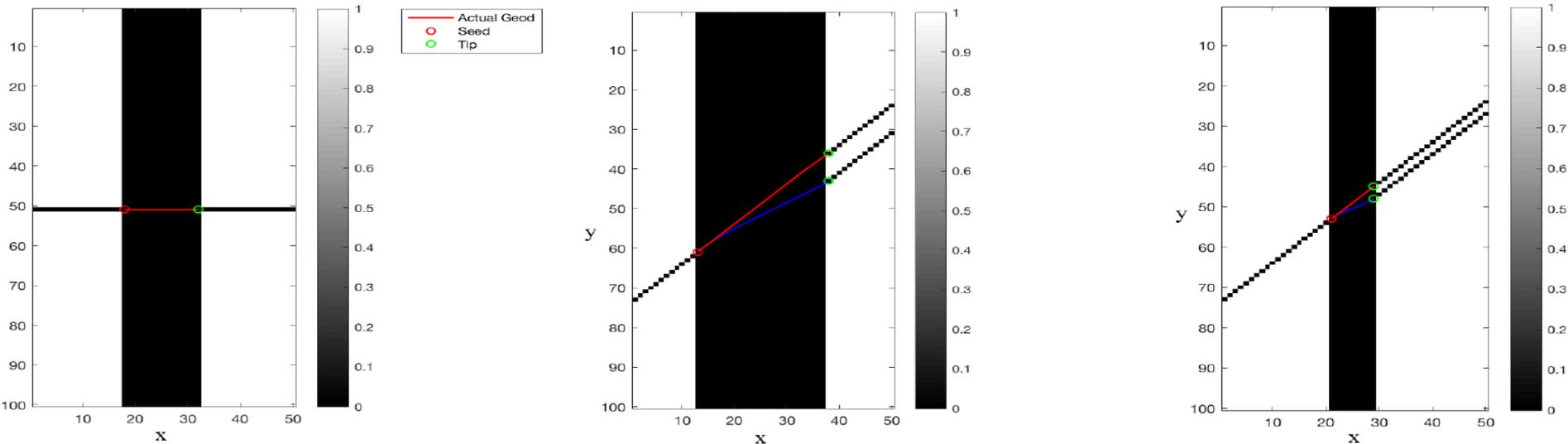
Моделирование иллюзорного контура

Width of the stripe 25 px.



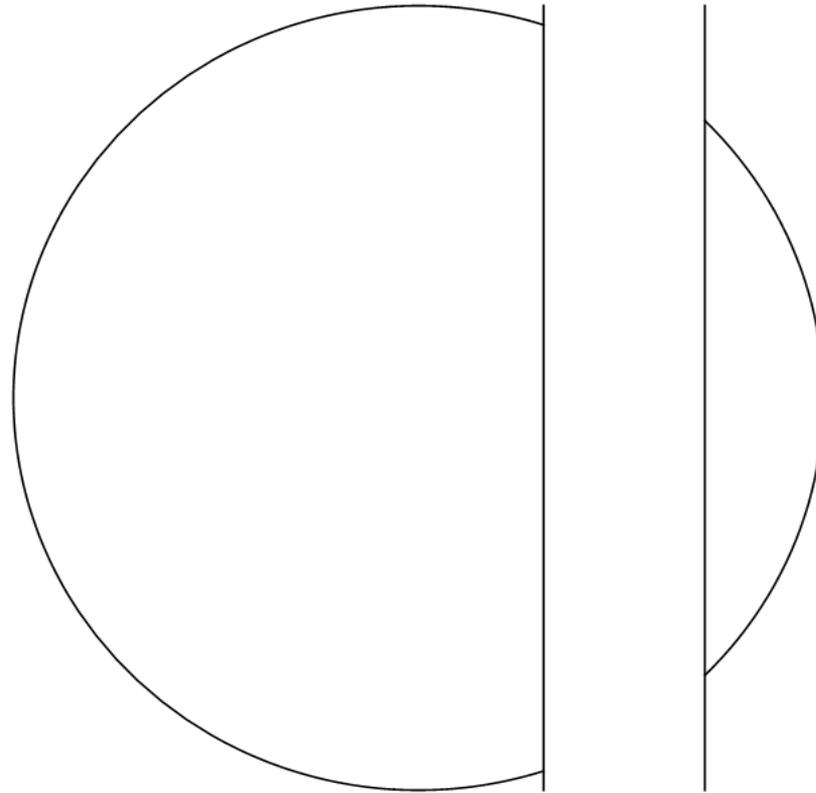
Illusory contour (in cyan) is given by SR-minimizer with fixed initial condition and terminal set on the right edge of the stripe with the same angle.

Моделирование иллюзорного контура

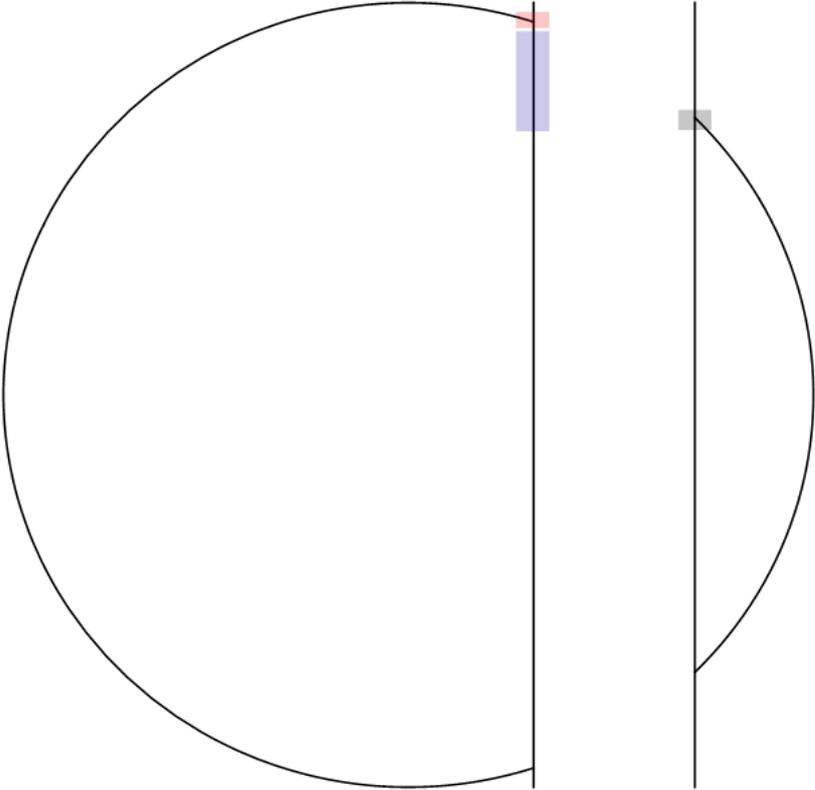


Type of curve	Width = 9 pixels	Width = 15 pixels	Width = 25 pixels
Percep. curve $\theta = \pi/4$	1.0366	1.8094	3.1113
Actual curve $\theta = \pi/4$	1.1369	2.0480	3.5354
Percep. curve $\theta = \pi/10$	2.1033	3.4719	4.9411
Actual curve $\theta = \pi/10$	2.8925	4.4927	7.3924
Percep. curve $\theta = \pi/2$	1.0320	1.4412	2.5196

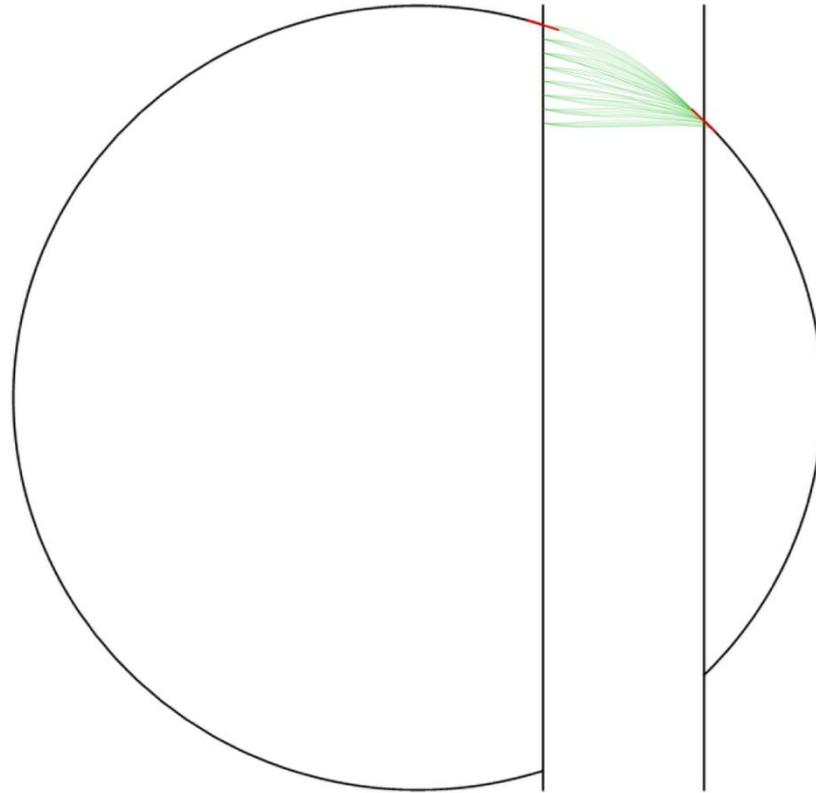
Модифицированная иллюзия Поггендорфа



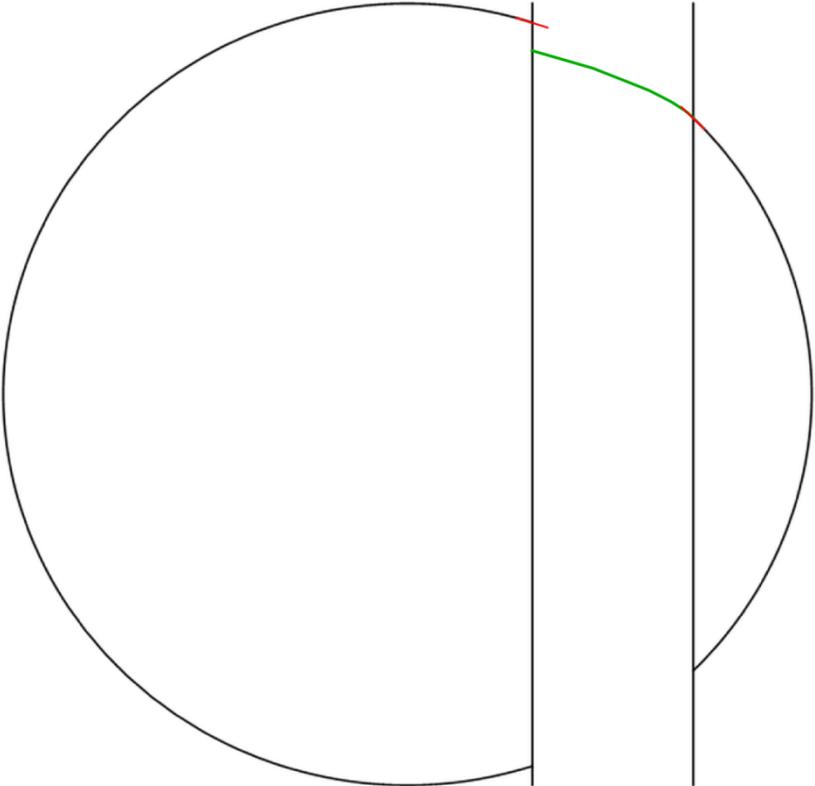
Модифицированная иллюзия Поггендорфа



Модифицированная иллюзия Поггендорфа



Модифицированная иллюзия Поггендорфа



Заключение

- Субриманова геометрия возникает при моделировании зрительной системы.
- На ее основе разработан класс методов обработки изображений.
- Метод антропоморфного восстановления изображений.
- Метод поиска выделяющихся кривых на 2D и 3D изображениях.
- Геодезические на $SE(2)$ использованы для поиска кровеносных сосудов на плоских изображениях сетчатки глаза человека.
- На $SO(3)$ --- на сферических изображениях сетчатки.
- В $SE(3)$ --- для поиска путей нервных волокон на 3D МРТ-изображениях человеческого мозга.
- Предложена модель $V1$ для объяснения оптических иллюзий.

Спасибо за внимание!