

Субриманова геометрия и ее приложения к робототехнике и обработке изображений

Ю.Л. Сачков, А.А. Ардентов, А.П. Маштаков

Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский

Математический институт им. В.А. Стеклова

6 ноября 2019 г.

План доклада

- геометрическая теория управления
- субриманова геометрия: линейная по управлению динамика и квадратичный функционал качества
- задачи: управляемость, интегрируемость, условия оптимальности, оптимальный синтез, его регулярность и особенности
- результаты: группа Гейзенберга, $SE(2)$, $SH(2)$, группа Энгеля
- управление движением роботов с прицепами
- восстановление и обработка изображений

Основные определения

- гладкое многообразие M ,
- распределение $\Delta = \{\Delta_q \subset T_q M \mid q \in M\}$, $\dim \Delta_q \equiv \text{const}$,
- скалярное произведение в Δ :

$g = \{g_q — \text{скалярное произведение в } \Delta_q \mid q \in M\}$

- СР многообразие (M, Δ, g) , СР структура (Δ, g) на M
- горизонтальная (допустимая) кривая $q \in \text{Lip}([0, t_1], M)$:

$\dot{q}(t) \in \Delta_{q(t)}$ для п.в. $t \in [0, t_1]$,

- длина $I(q(\cdot)) = \int_0^{t_1} (g(\dot{q}(t), \dot{q}(t)))^{1/2} dt$,
- СР расстояние $d(q_0, q_1) = \inf \{I(q(\cdot)) \mid q(\cdot) \text{ гориз. кривая}, q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$,

- СР кратчайшая $q(t)$, $t \in [0, t_1]$: горизонтальная кривая т.ч. $I(q(\cdot)) = d(q(0), q(t_1))$,
- сфера $S_R(q_0) = \{q \in M \mid d(q, q_0) = R\}$,
шар $B_R(q_0) = \{q \in M \mid d(q, q_0) \leq R\}$,
- геодезическая: горизонтальная кривая, малые дуги которой — кратчайшие,
- время разреза вдоль геодезической $q(t)$:

$$t_{\text{cut}}(q(\cdot)) = \sup\{t > 0 \mid q(s), s \in [0, t], \text{ кратчайшая}\},$$
- точка разреза $q(t_1)$, $t_1 = t_{\text{cut}}(q(\cdot))$,
- множество разреза

$$\text{Cut}_{q_0} = \{q_1 \in M \mid q_1 \text{ т. разреза для нек-рой геодез. } q(\cdot),$$

$$q(0) = q_0\}$$

- первое сопряженное время вдоль геодезической $q(t)$:

$$t_{\text{conj}}(q(\cdot)) = \sup\{t > 0 \mid q(s), s \in [0, t], \text{ локально оптимальна}\},$$

- $q(\cdot)$ локально оптимальна, если \exists окрестность $O \supset \{q(t)\}$ т.ч. $q(\cdot)$ — кратчайшая на $(O, \Delta|_O, g|_O)$,
- первая сопряженная точка вдоль геодезической $q(t)$: $q(t_1)$, $t_1 = t_{\text{conj}}(q(\cdot))$,
- первая каустика:

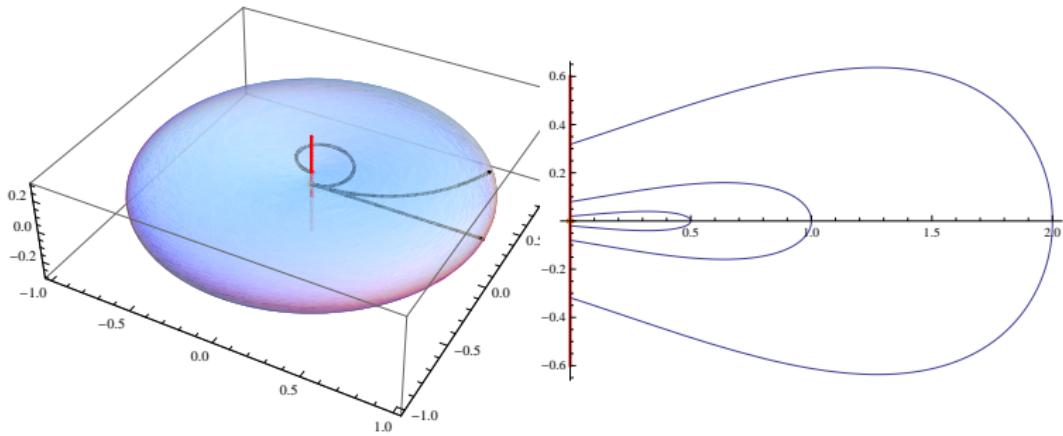
$$\text{Conj}_{q_0} = \{q_1 \in M \mid$$

q_1 первая сопряженная т. для нек-рой геодез. $q(\cdot)$,

$$q(0) = q_0\}.$$

Пример: Группа Гейзенберга

- $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
- $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z},$
- $\Delta_q = \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$



Задача оптимального управления

- СР многообразие (M, Δ, g)
- Ортонормированный репер:

$$\Delta_q = \text{span}(X_1(q), \dots, X_k(q)), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}, \quad i, k = 1, \dots, k,$$

- Кратчайшие $q(t)$ — решения задачи

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i(q), \quad q \in M, \quad u_i \in \mathbb{R},$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^k u_i^2(t) \right)^{1/2} dt \rightarrow \min$$

$$\iff J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt \rightarrow \min.$$

Существование решений

Теорема (Рашевский-Чоу)

Пусть M связно и для всех $q \in M$

$$\text{span}(X_i(q), [X_i, X_j](q), [[X_i, X_j], X_l](q), \dots) = T_q M. \quad (1)$$

Тогда для $\forall q_0, q_1 \in M \exists$ горизонтальная кривая $q(t)$,
 $t \in [0, t_1]$, т.ч. $q(0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$.

Далее условие полного ранга (1) предполагается выполненным.

Теорема (Филиппов)

Соединяющая точки $q_0, q_1 \in M$ кратчайшая существует, если выполнено одно из условий:

- q_1 достаточно близко к q_0 ,
- шары $B_R(q_0)$ компактны,
- (Δ, g) левоинвариантна на группе Ли M .

Принцип максимума Понtryгина

- $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(q) \rangle, \lambda \in T^*M.$

Теорема (Понtryгин)

Если $q(t), t \in [0, t_1]$, — кратчайшая, соответствующая управлению $u(t)$, то $\exists \lambda \in \text{Lip}([0, t_1], T^*M), \lambda(t) \in T_{q(t)}^*M$, т.ч.:

(1) либо $\dot{\lambda}(t) = \vec{H}(\lambda(t)), H(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k h_i^2(\lambda),$
 $u_i(t) = h_i(\lambda(t)),$

(2) либо $h_1(\lambda(t)) = \dots = h_k(\lambda(t)) \equiv 0,$
 $\dot{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) \vec{h}_i(\lambda(t)).$

(1) $\Rightarrow \lambda(t)$ нормальная экстремаль, $q(t)$ нормальная экстремальная траектория,

(2) $\Rightarrow \lambda(t)$ аномальная экстремаль, $q(t)$ аномальная экстремальная траектория.

Оптимальность нормальных геодезических

- $q(t)$ — нормальная экстремальная траектория \Rightarrow
 $q(t)$ — геодезическая (усиленное условие Лежандра)
- $\lambda(t)$ — нормальная экстремаль \Rightarrow
 $\lambda(t) = e^{t\vec{H}}(\lambda_0), \quad H(\lambda(t)) \equiv \text{const}$
- $\lambda_0 \in C = \{H(\lambda) \equiv 1/2\} \cap T_{q_0}^* M$
- Экспоненциальное отображение $\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$,
 $\text{Exp}(\lambda, t) = q(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda).$
- q_1 — точка Максвелла на геодезической $q(t)$:
 $\exists \tilde{q}(t) \not\equiv q(t), \tilde{q}(0) = q(0), \tilde{q}(t_1) = q(t_1) = q_1.$

Теорема

Пусть $q(t) = \text{Exp}(\lambda, t)$ — строго нормальная геодезическая.

Если t_1 — время разреза, то $q(t_1)$ — первая точка Максвелла или первая сопряженная точка.

Гладкость сфер

Теорема

Если $\Delta_{q_0} \neq T_{q_0} M$, то любая сфера $S_R(q_0)$ не является гладким многообразием (если $S_R(q_0) \neq \emptyset$).

Теорема

Пусть $q_1 \in S_R(q_0)$. Предположим, что:

- (1) q_1 соединяется с q_0 единственной норм. кратчайшей $q(t)$,
- (2) q_1 не является сопряженной точкой вдоль $q(t)$.

Тогда $S_R(q_0)$ — гладкое многообразие в окрестности точки q_1 .

Следствие

Причины точек разреза и особенностей сфер:

- (1) аномальные кратчайшие,
- (2) точки Максвелла,
- (3) сопряженные точки.

Группа евклидовых движений плоскости

$$\text{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1 \right\}$$

$$X_1(q) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$M = \text{SE}(2), \quad \Delta = \text{span}(X_1, X_2), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y, \theta) \in \text{SE}(2), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

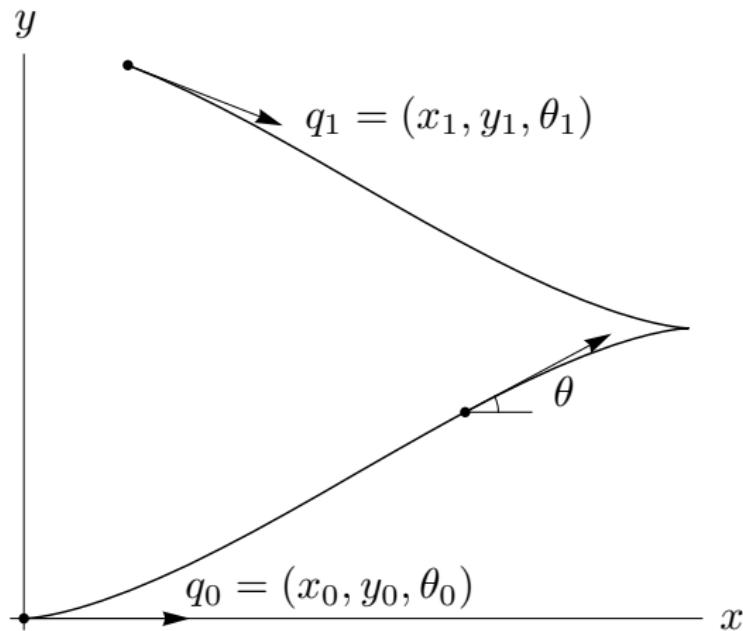
$$q(0) = q_0 = \text{Id} = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Контактная субриманова структура на $SE(2)$

- $X_3 = [X_1, X_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$
- $\text{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)) = T_q M \Rightarrow$ полная управляемость
- Вектор роста $(2, 3) \Rightarrow$ контактное распределение
- Единственная левоинвариантная контактная субриманова структура на $SE(2)$, с точностью до растяжений и локальных изометрий

Задача об оптимальном движении мобильного робота на плоскости



$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Принцип максимума Понtryгина

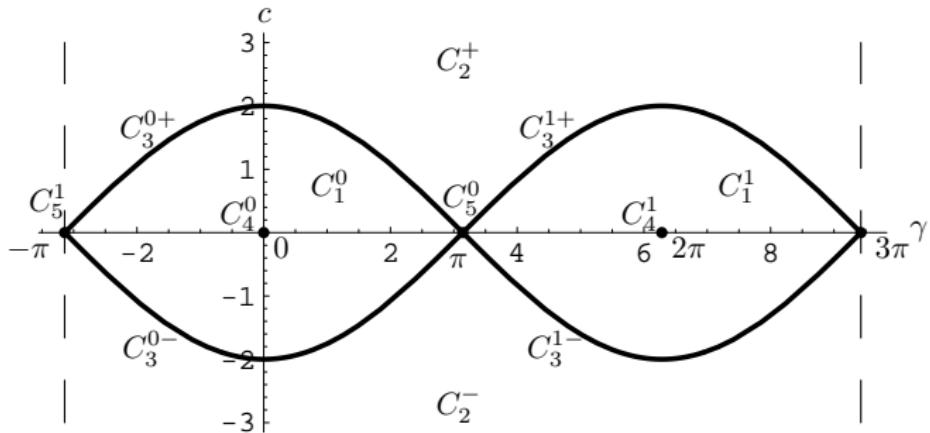
- Аномальные экстремальные траектории постоянны.
- Нормальные экстремали:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c, \quad \dot{c} = -\sin \gamma, \quad (\gamma, c) \in C \cong (2S_\gamma^1) \times \mathbb{R}_c, \\ \dot{x} &= \sin \frac{\gamma}{2} \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \frac{\gamma}{2} \sin \theta, \quad \dot{\theta} = -\cos \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

- Интеграл энергии $E = \frac{c^2}{2} - \cos \gamma \in [-1, +\infty)$
- $\gamma(t)$, $c(t)$, $q(t)$: параметризация функциями Якоби sn, cn, dn, E.

Разбиение фазового цилиндра маятника $C = \bigcup_{i=1}^5 C_i$

- $C_1 = \{\lambda \in C \mid E \in (-1, 1)\}$ ⇒ колебания маятника,
- $C_2 = \{\lambda \in C \mid E \in (1, +\infty)\}$ ⇒ вращения маятника,
- $C_3 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c \neq 0\}$ ⇒ критическое движение,
- $C_4 = \{\lambda \in C \mid E = -1\}$ ⇒ устойчивое равновесие,
- $C_5 = \{\lambda \in C \mid E = 1, c = 0\}$ ⇒ неуст. равновесие

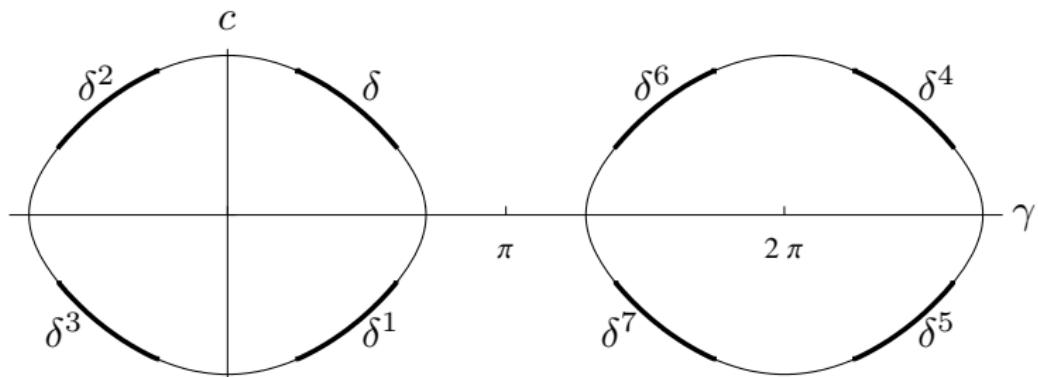


Отражения ε^i в фазовом цилиндре маятника $\ddot{\gamma} = -\sin \gamma$

- $\varepsilon^i : C \rightarrow C, \quad \varepsilon_*^i \vec{H}_v = \pm \vec{H}_v, \quad \vec{H}_v = c \frac{\partial}{\partial \gamma} - \sin \gamma \frac{\partial}{\partial c} \in \text{Vec } C,$
- Группа симметрий параллелепипеда

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

- Действие отражений $\varepsilon^i : \delta \mapsto \delta^i$ на траектории маятника:



$$\varepsilon^i(\lambda, t) = \begin{cases} (\varepsilon^i(\lambda), t), & \varepsilon_*^i \vec{H}_v = \vec{H}_v, \\ (e^{-t\vec{H}_v} \circ \varepsilon^i(\lambda), t), & \varepsilon_*^i \vec{H}_v = -\vec{H}_v. \end{cases}$$

Первое время Максвелла, соответствующее симметриям

Симметрии экспоненциального отображения:

$$\text{Exp} \circ \varepsilon^i(\lambda, t) = \varepsilon^i \circ \text{Exp}(\lambda, t), \quad (\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon^i \in G.$$

$$t_{\text{Max}}(\lambda) = \min \{ t > 0 \mid \exists \varepsilon^i \in G : \varepsilon^i(\lambda, t) \neq (\lambda, t), \\ \text{Exp} \circ \varepsilon^i(\lambda, t) = \text{Exp}(\lambda, t) \}$$

Теорема

- $E = -1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = \pi,$
- $E \in (-1, 1) \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2K(k), k = \sqrt{(E+1)/2},$
- $E = 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = +\infty,$
- $E > 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2kp_1(k), k = \sqrt{2/(E+1)},$

$$p_1(k) = \min \{ p > 0 \mid \text{cn}(p, k)(\text{E}(p, k) - p) - \text{dn}(p, k)\text{sn}(p, k) = 0 \}.$$

Оценки первого сопряженного времени

Теорема

- $E \in [-1, 1] \Rightarrow t_{\text{conj}}(\lambda) = +\infty,$
- $E > 1 \Rightarrow t_{\text{conj}}(\lambda) \in [t_{\text{Max}}(\lambda), 4kK],$
- $\forall \lambda \in C \quad t_{\text{conj}}(\lambda) \geq t_{\text{Max}}(\lambda).$

Метод доказательства:

Гомотопическая инвариантность индекса Маслова (количество сопряженных точек)

Глобальная структура экспоненциального отображения

- $\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ = N \rightarrow M$: неоптим. геодез. при $t > t_{\text{Max}}(\lambda)$,
- $\widehat{N} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \leq \mathbf{t}(\lambda)\}$, $\widehat{M} = M \setminus \{q_0\}$,
 $\text{Exp} : \widehat{N} \rightarrow \widehat{M}$ сюръективно, не инъективно (т. Максвелла),
- $\widetilde{M} = \{q \in M \mid \varepsilon^i(q) \neq q\} =$
 $= \{q \in M \mid \sin \theta \neq 0, R_i(q) \neq 0\} = \cup_{i=1}^8 M_i$,
 $\widetilde{N} = \text{Exp}^{-1}(\widetilde{M}) =$
 $= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{Max}}(\lambda), \sin(\gamma_{t/2}/2) \neq 0\} = \cup_{i=1}^8 D_i$,
 $\text{Exp} : \widetilde{N} \rightarrow \widetilde{M}$: нет т. Максвелла и сопряженных точек.

Теорема

$\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, \dots, 8$.

$\text{Exp} : \widetilde{N} \rightarrow \widetilde{M}$ — диффеоморфизм.

Диффеоморфные стратификации и множество разреза

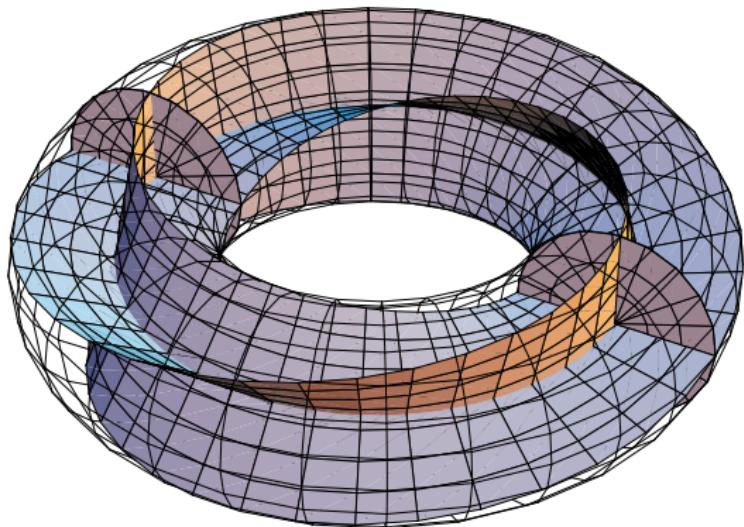
- Cut, Max $\subset M' = \widehat{M} \setminus \widetilde{M} = \{q \in M \mid \sin \theta R_1(q)R_2(q) = 0\}$,
- $N' = \widehat{N} \setminus \widetilde{N}$,
- Exp : $N' \rightarrow M'$,
- Стратификации: $N' = \sqcup_{i=1}^{58} N'_i$, $M' = \cup_{i=1}^{58} M'_i$,
- Exp : $N'_i \rightarrow M'_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, \dots, 58$
- Max = $\cup\{M'_i \mid \exists M'_j = M'_i, j \neq i\}$,
- Cut = Max \cup (Cut \cap Conj),
- Cut = Cut_{loc} \cup Cut_{glob},
- Cut_{glob} = $\{q \in M \mid \theta = \pi\}$, $d(q_0, \text{Cut}_{\text{glob}}) = \pi$,
- Cut_{loc} $\subset \{R_2 = 0\}$, cl(Cut_{loc}) $\ni q_0$,
- Cut_{loc} = $\{q \in M \mid \theta \in (-\pi, \pi), R_2 = 0, |R_1| > R_1^1(|\theta|)\}$,

$$R_1 = y \cos \frac{\theta}{2} - x \sin \frac{\theta}{2}, \quad R_2 = x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2},$$

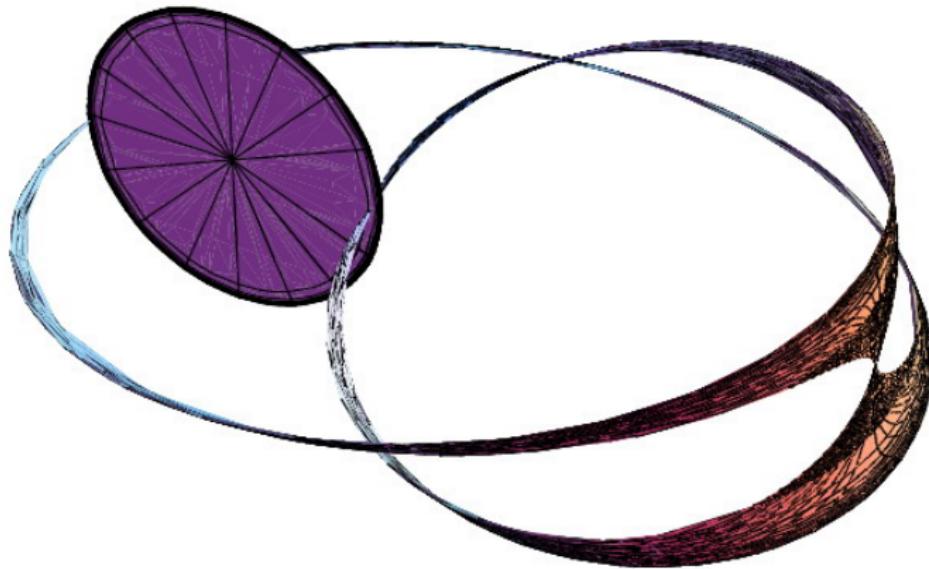
$$R_1^1(\theta) = 2(p_1(k) - E(p_1(k), k)),$$

$k = k_1(\theta)$ — обратная функция к $\theta = k \operatorname{sn}(p_1(k), k)$.

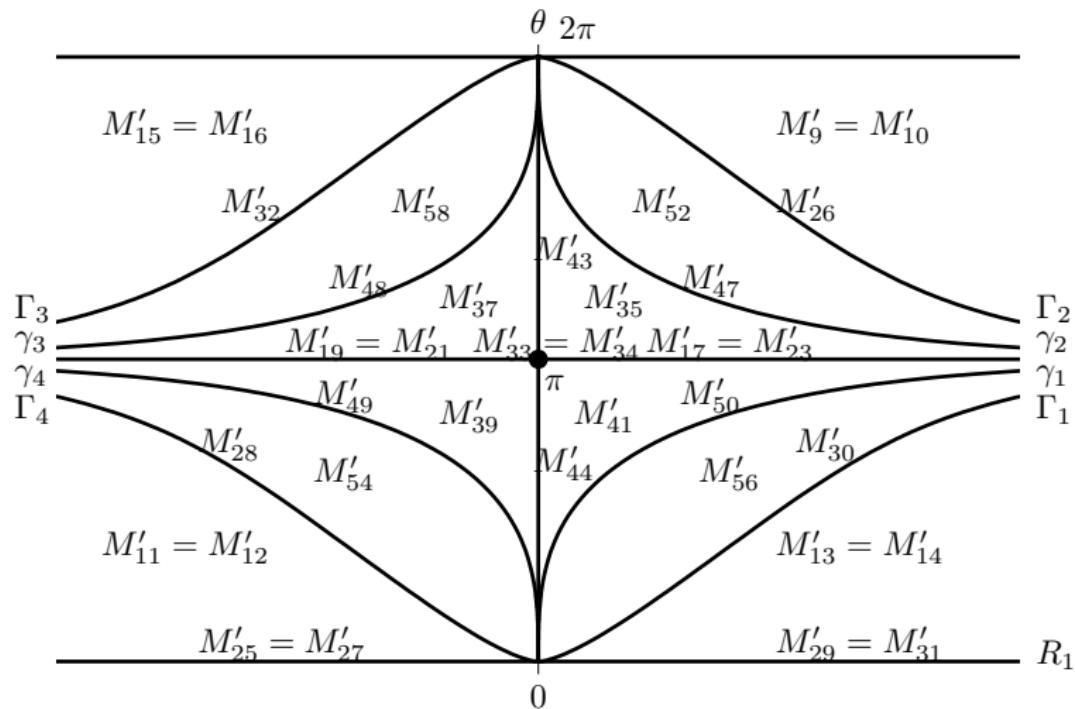
Множество $M' \supset Cut \supset Max$



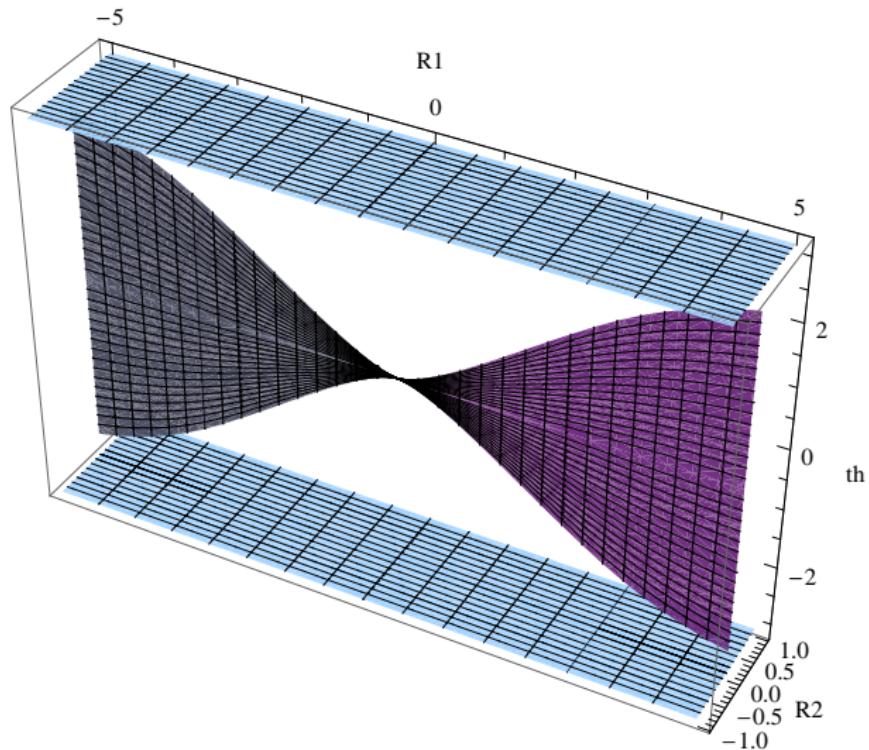
Множество разреза: глобальное расположение



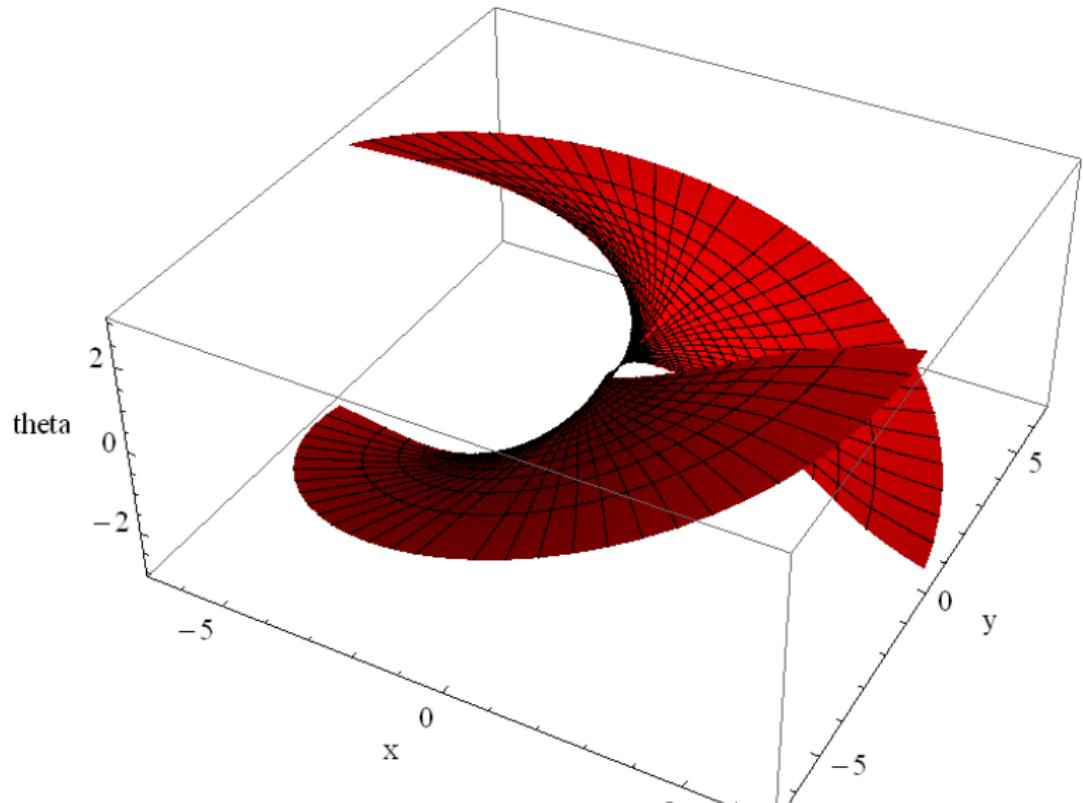
Стратификация ленты Мебиуса $R_2(q) = 0$



Множество разреза в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



Локальная компонента множества разреза в исходных координатах (x, y, θ)



Оптимальный синтез в задаче

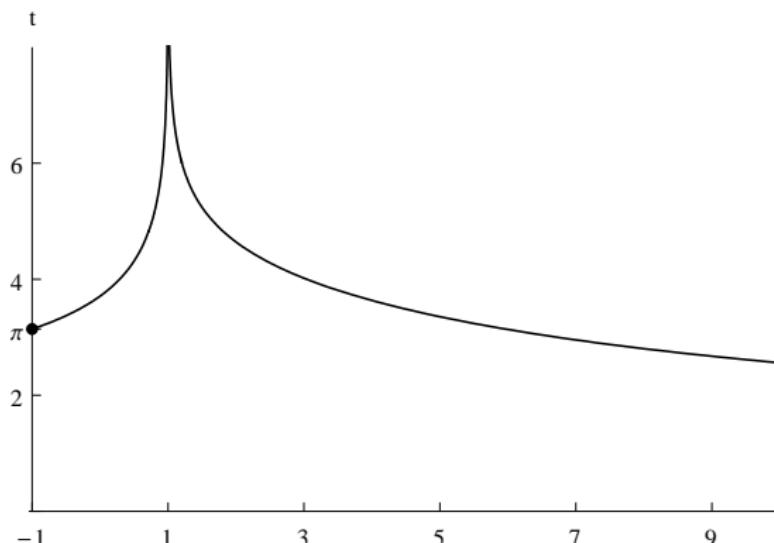
$$q(0) = q_1, \quad q(t_1) = q_0 = (0, 0, 0)$$

- $q_1 \in \widehat{M} = M \setminus \{q_0\}$
- $\text{Exp} : \widehat{N} \rightarrow \widehat{M}$ сюръективно
- $\text{Exp}^{-1}(q) = \begin{cases} \{(\lambda, t)\}, & \text{если } q \in \widehat{M} \setminus \text{Max}, \\ \{(\lambda', t) \neq (\lambda'', t)\}, & \text{если } q \in \text{Max} \end{cases}$
- $\text{Exp}^{-1}(q_1) = (\lambda, t), \quad \lambda = (\gamma, c) \in (2S^1) \times \mathbb{R}, \quad t > 0$
- $\ddot{\gamma}_s = -\sin \gamma_s, \quad (\gamma_0, \dot{\gamma}_0) = (\gamma, c), \quad s \in [0, t]$
- $u_1(q_1) = -\sin(\gamma_t/2), \quad u_2(q_1) = \cos(\gamma_t/2)$
- оптимальный синтез $q_1 \mapsto (u_1, u_2)$ двузначен на Max , однозначен на $\widehat{M} \setminus \text{Max}$.

Время разреза

Теорема

- $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}(\lambda), \quad \lambda \in C,$
- $t_{\text{cut}} \circ \varepsilon^i = t_{\text{cut}}, \quad \varepsilon^i \in G,$
- $\vec{H}_v t_{\text{cut}} = 0,$
- $t_{\text{cut}} : C \rightarrow (0, +\infty]$ непрерывна, $t_{\text{cut}}|_{F \neq +1}$ гладкая.



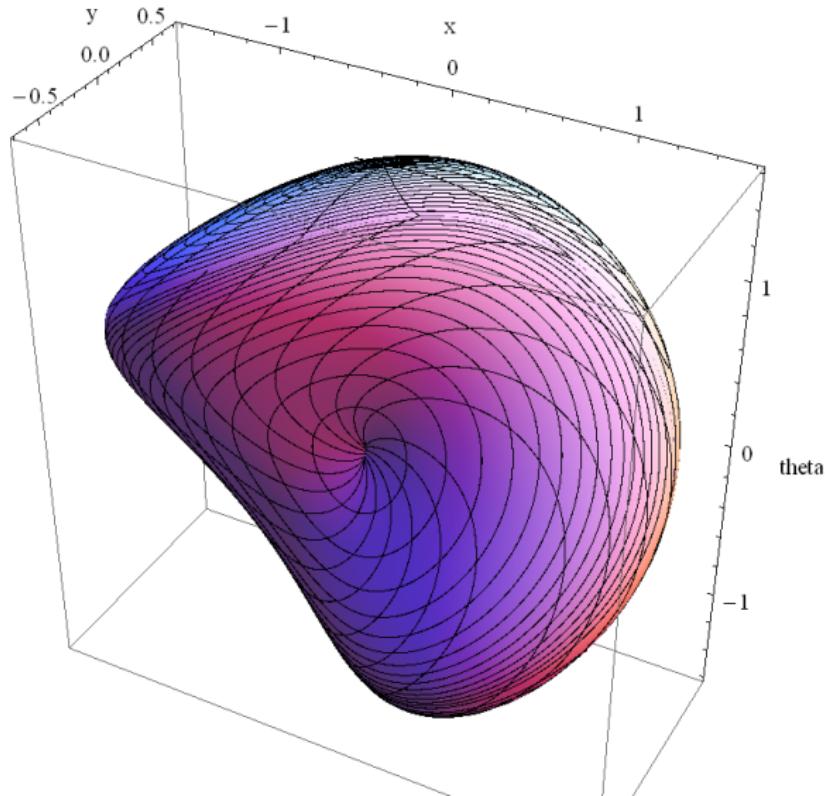
Субримановы сферы

- $R \in (0, \pi) \Rightarrow S_R \cong S^2,$
- $R = \pi \Rightarrow S_R \cong S^2 / \{N = S\},$
- $R > \pi \Rightarrow S_R \cong T^2.$

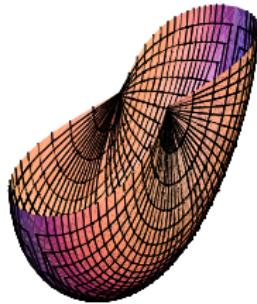
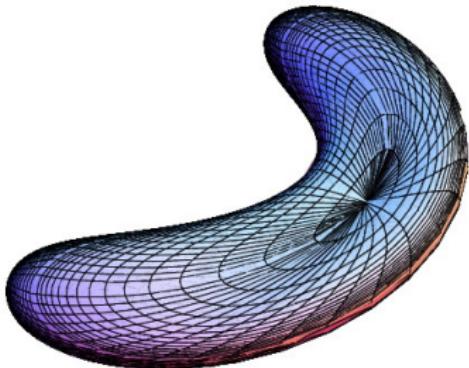
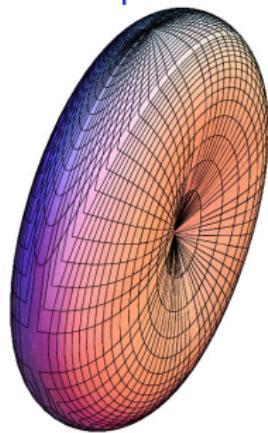
Особенности сфер:

$$S_R \cap \text{Cut} = (S_R \cap \text{Max}) \cup (S_R \cap \text{Cut} \cap \text{Conj}).$$

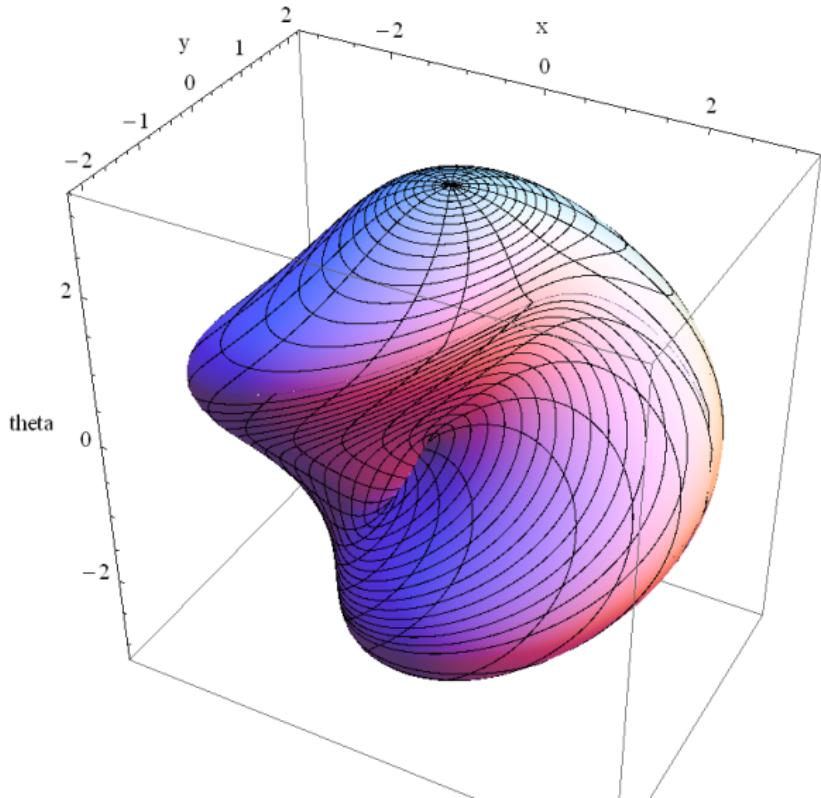
Субриманова сфера радиуса $< \pi$
в исходных координатах (x, y, θ)



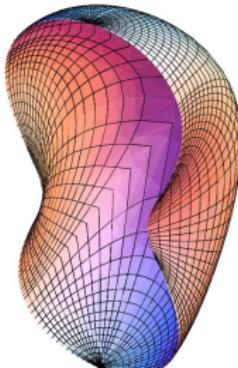
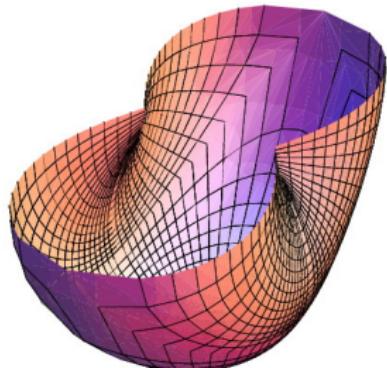
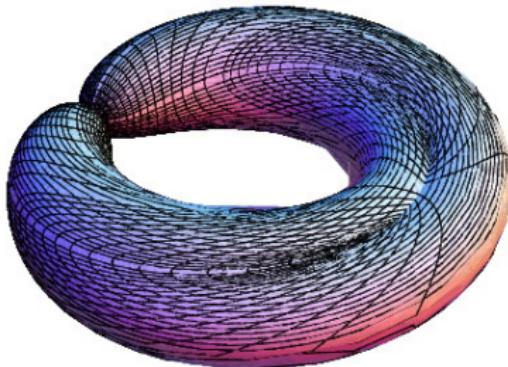
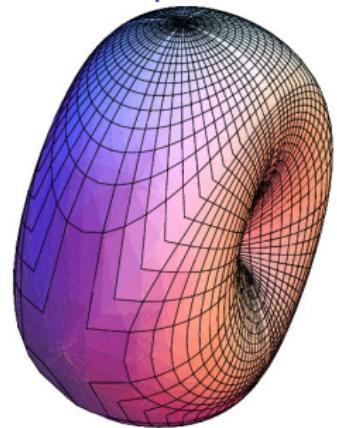
Субриманова сфера радиуса $< \pi$
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



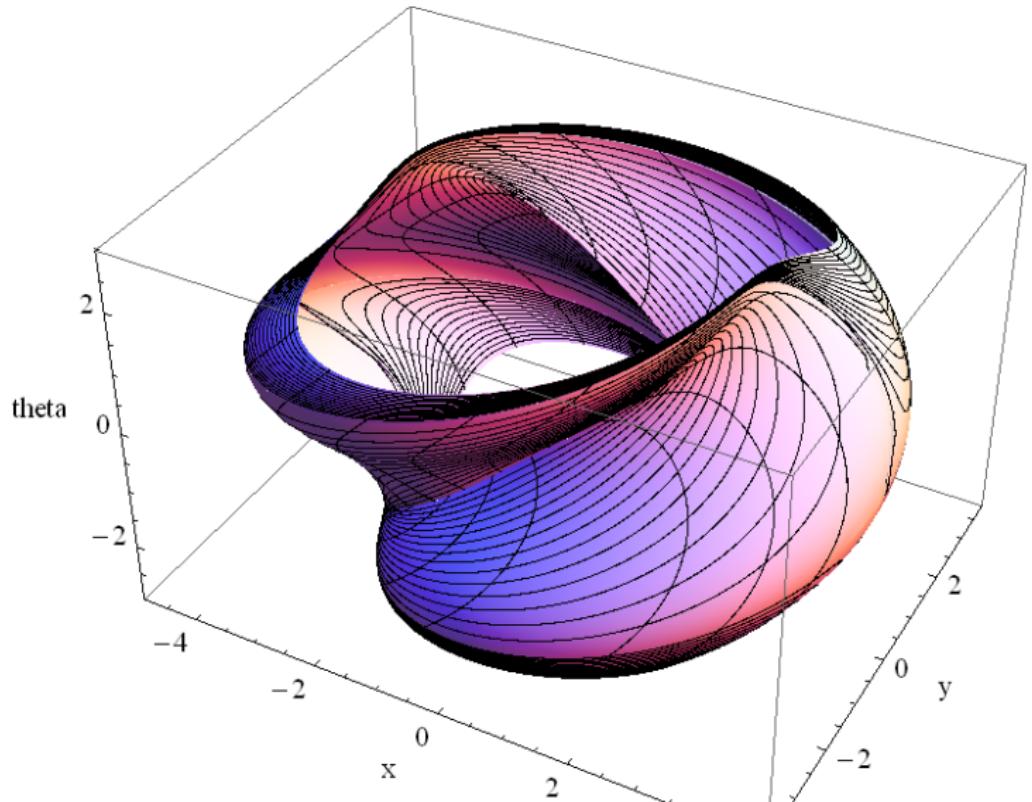
Субриманова сфера радиуса π
в исходных координатах (x, y, θ)



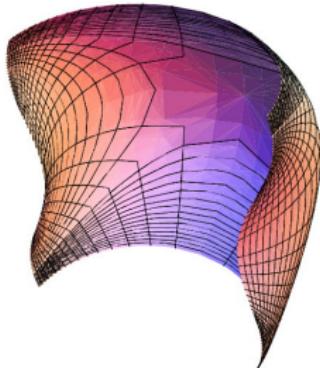
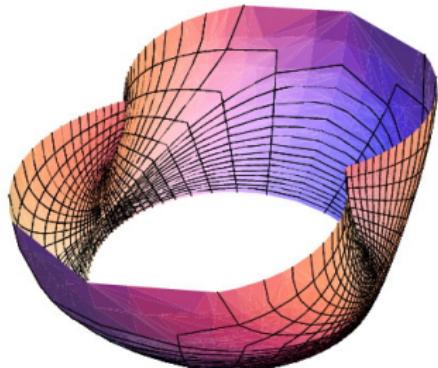
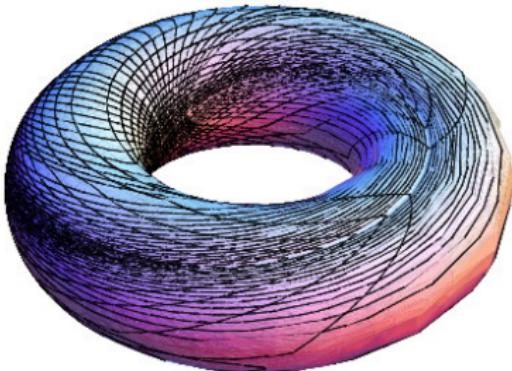
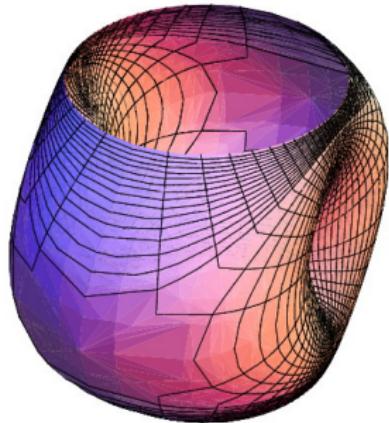
Субриманова сфера радиуса π
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



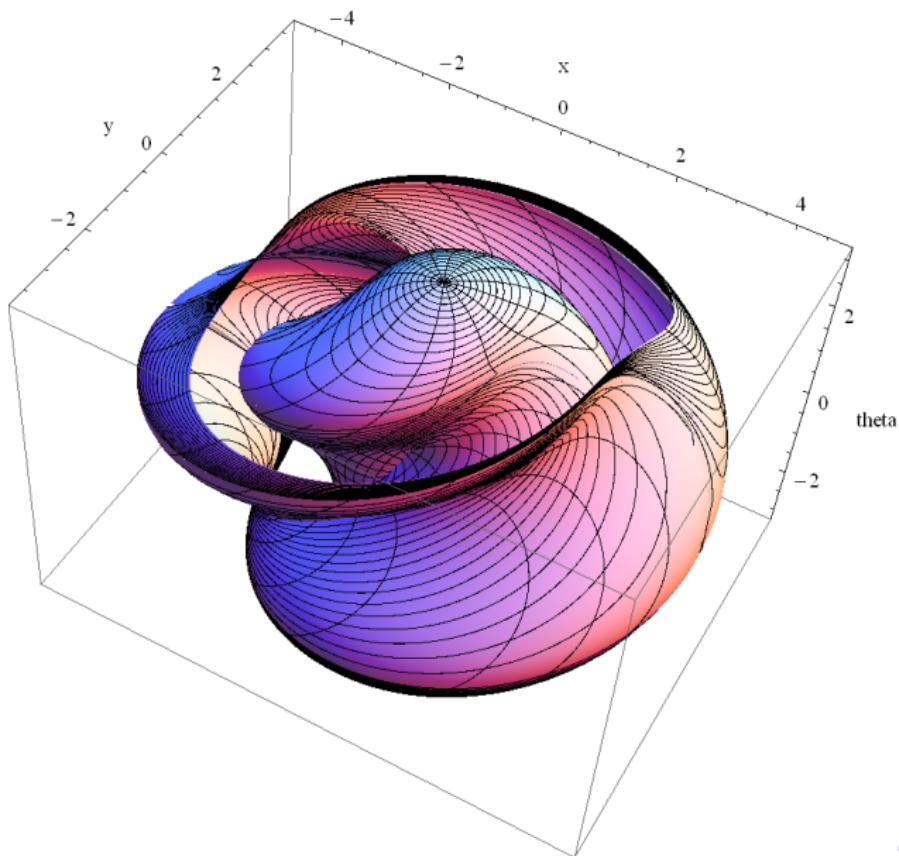
Субриманова сфера радиуса $> \pi$
в исходных координатах (x, y, θ)



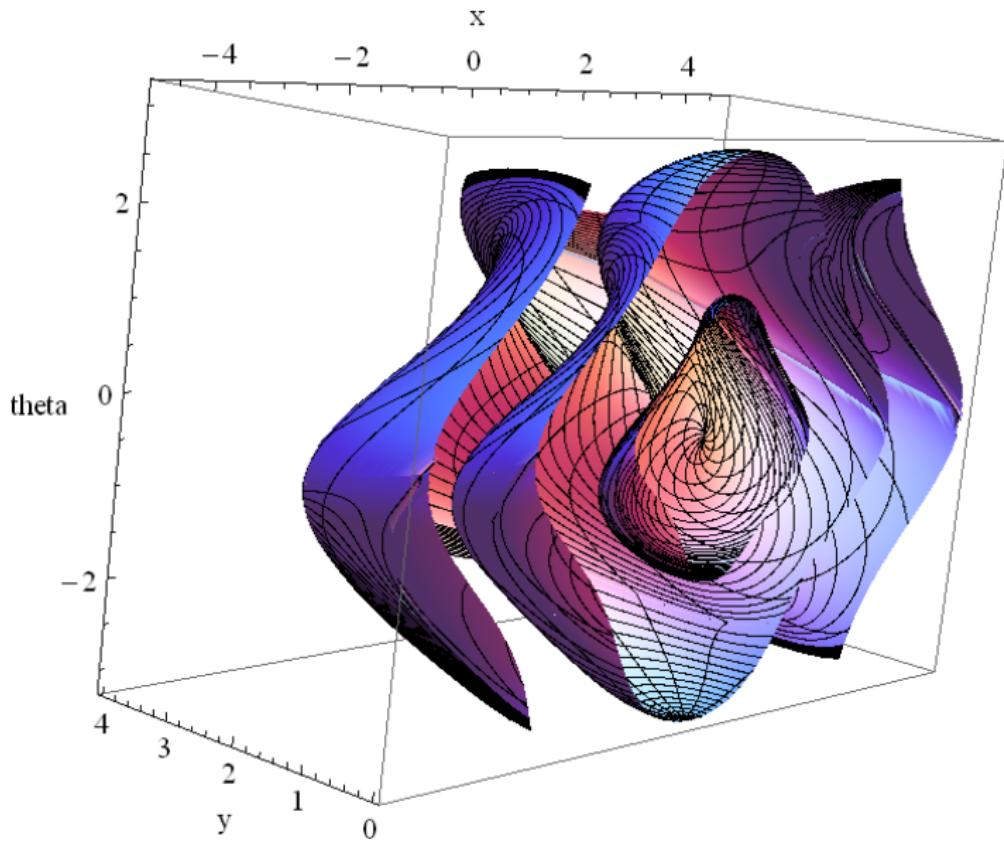
Субриманова сфера радиуса $> \pi$
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, θ)



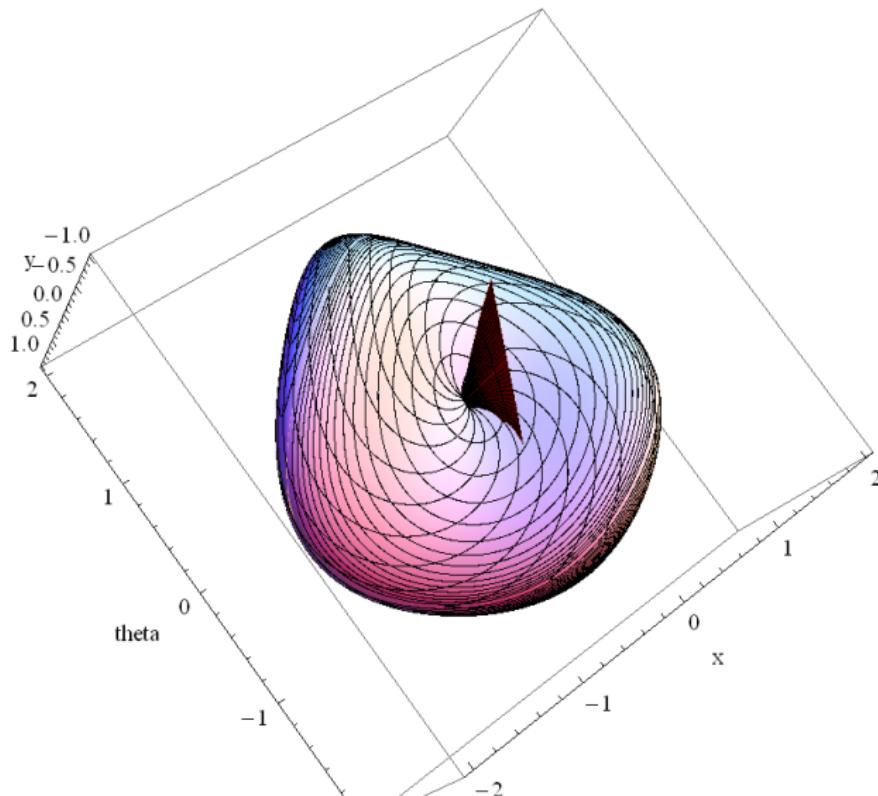
Матрёшка сфер радиуса π и $> \pi$



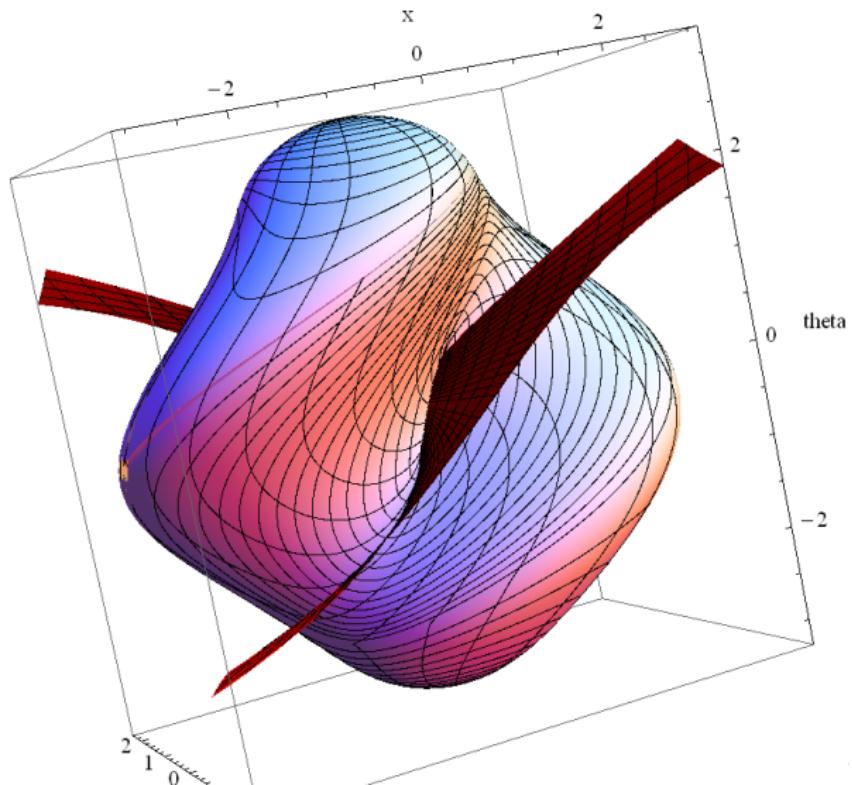
Матрёшка полусфер радиуса $< \pi$, π и $> \pi$



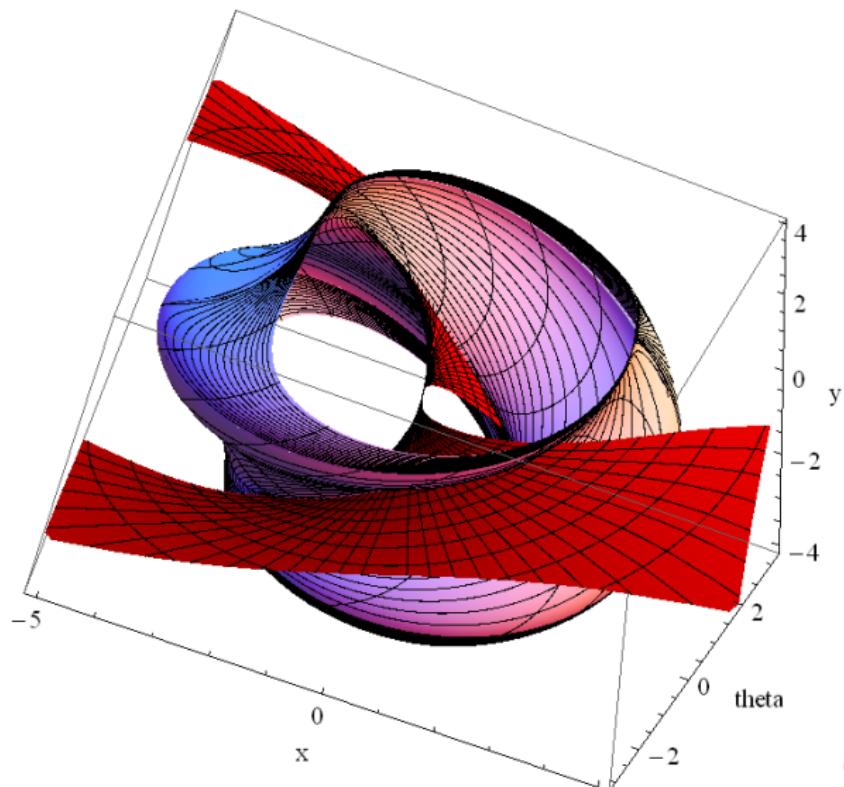
Субриманова сфера радиуса $< \pi$ и множество разреза



Субриманова сфера радиуса π и множество разреза



Субриманова сфера радиуса $> \pi$
и множество разреза



Группа гиперболических движений плоскости

$$\mathrm{SH}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{ch} z & \mathrm{sh} z & x \\ \mathrm{sh} z & \mathrm{ch} z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$X_1(q) = \mathrm{ch} z \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{sh} z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$M = \mathrm{SH}(2), \quad \Delta = \mathrm{span}(X_1, X_2), \quad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y, \theta) \in \mathrm{SH}(2), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0 = \mathrm{Id} = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Контактная субриманова структура на $\mathrm{SH}(2)$

- $X_3 = [X_1, X_2] = -\operatorname{sh} z \frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{ch} z \frac{\partial}{\partial y}$
- $\operatorname{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)) = T_q M \Rightarrow$ полная управляемость
- Вектор роста $(2, 3) \Rightarrow$ контактное распределение
- Единственная левоинвариантная контактная субриманова структура на $\mathrm{SH}(2)$, с точностью до растяжений и локальных изометрий

Принцип максимума Понtryгина

- Аномальные экстремальные траектории постоянны.
- Нормальные экстремали:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= c, \quad \dot{c} = -\sin \gamma, \quad (\gamma, c) \in C \cong (2S^1_\gamma) \times \mathbb{R}_c, \\ \dot{x} &= \cos \frac{\gamma}{2} \operatorname{ch} z, \quad \dot{y} = \cos \frac{\gamma}{2} \operatorname{sh} z, \quad \dot{z} = \sin \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

- $\gamma(t)$, $c(t)$, $q(t)$: параметризация функциями Якоби sn , cn , dn , E
- Группа симметрий Exp :

$$G = \{\operatorname{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\}.$$

Первое время Максвелла и сопряженные времена

Теорема

- $E = -1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2\pi,$
- $E \in (-1, 1) \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 4K(k), k = \sqrt{(E+1)/2},$
- $E = 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = +\infty,$
- $E > 1 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 4kK(k), k = \sqrt{2/(E+1)}.$

Теорема

- $t_{\text{Max}}^n(\lambda) \leq t_{\text{conj}}^n(\lambda) \leq t_{\text{Max}}^{n+1}(\lambda)$ для любых $\lambda \in C, n \in \mathbb{N}.$
- Справедливо обобщение теоремы Ролля: между последовательными точками Максвелла заключена одна сопряженная точка.

Глобальная структура экспоненциального отображения

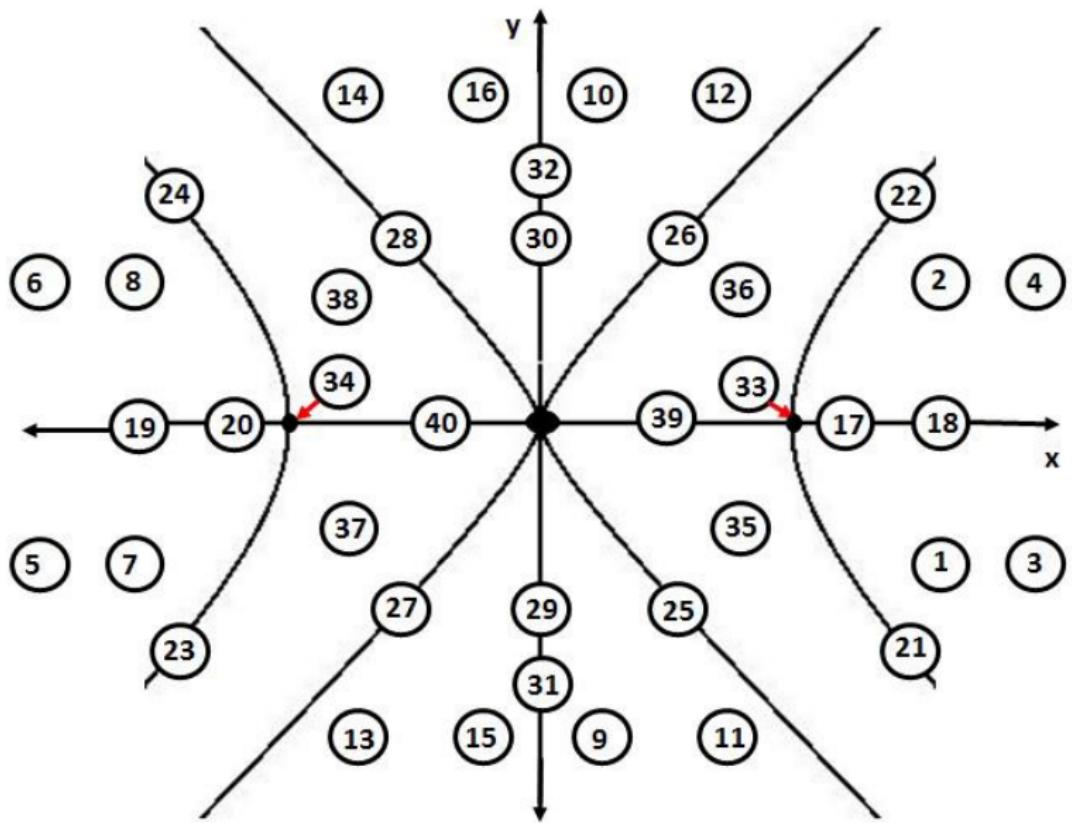
Диффеоморфные стратификации в прообразе и образе Exp :

- $\widehat{N} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \leq t_{\text{Max}}(\lambda)\} = \cup_{i=1}^2 D_i \cup (\cup_{i=1}^{40} N'_i),$
- $\widehat{M} = M \setminus \{q_0\} = \cup_{i=1}^2 M_i \cup (\cup_{i=1}^{40} M'_i).$

Теорема

- $\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, 2$.
- $\text{Exp} : N'_i \rightarrow M'_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, \dots, 40$.

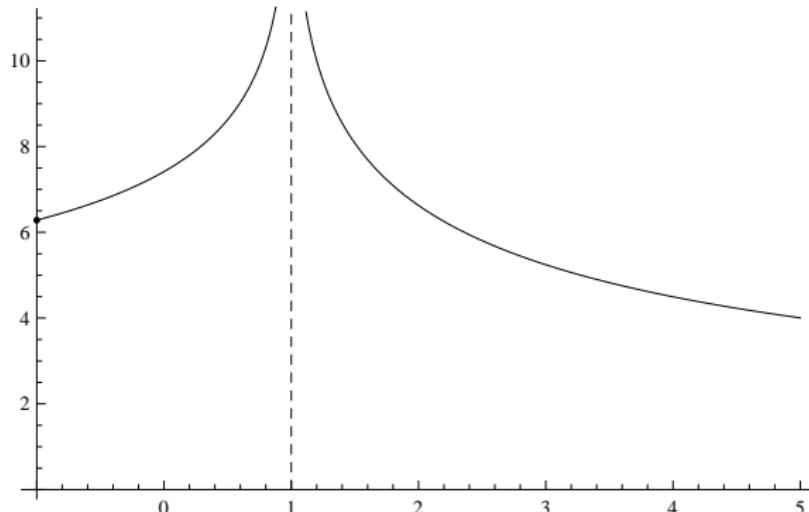
Стратификация плоскости $M' = \{z = 0\}$



Время разреза

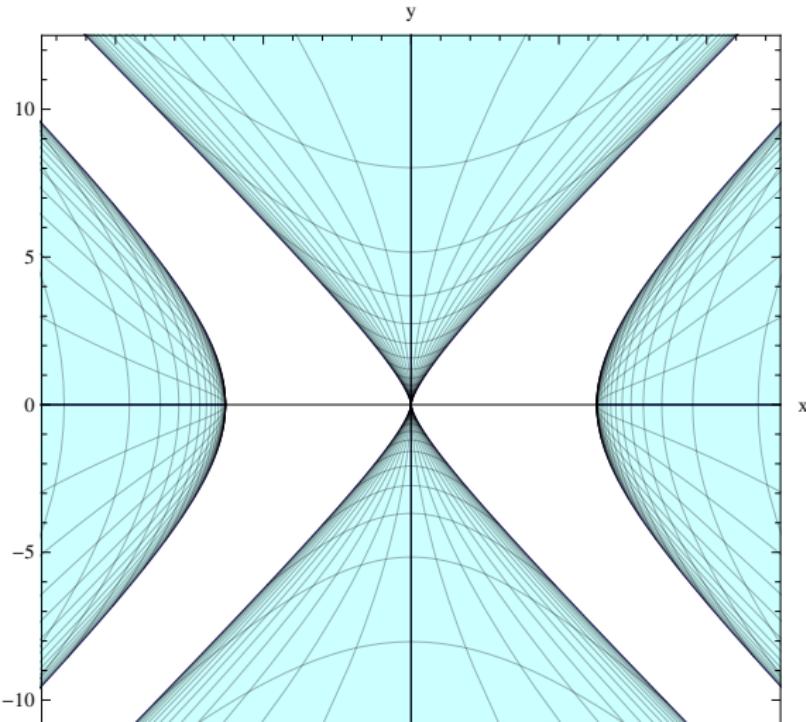
Теорема

- $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}(\lambda)$, $\lambda \in C$,
- $t_{\text{cut}} \circ \varepsilon^i = t_{\text{cut}}$, $\varepsilon^i \in G$,
- $\vec{H}_v t_{\text{cut}} = 0$,
- $t_{\text{cut}} : C \rightarrow (0, +\infty]$ непрерывна, $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm 1}$ гладкая.



Множество разреза

- $\text{Cut} = \text{Max} \cup (\text{Cut} \cap \text{Conj}) = \text{Cut}_{\text{loc}} \cup \text{Cut}_{\text{glob}},$
- $\text{cl}(\text{Cut}_{\text{loc}}) \ni q_0, d(q_0, \text{Cut}_{\text{glob}}) = 2\pi,$
- $\text{Cut} \subset \{z = 0\}.$

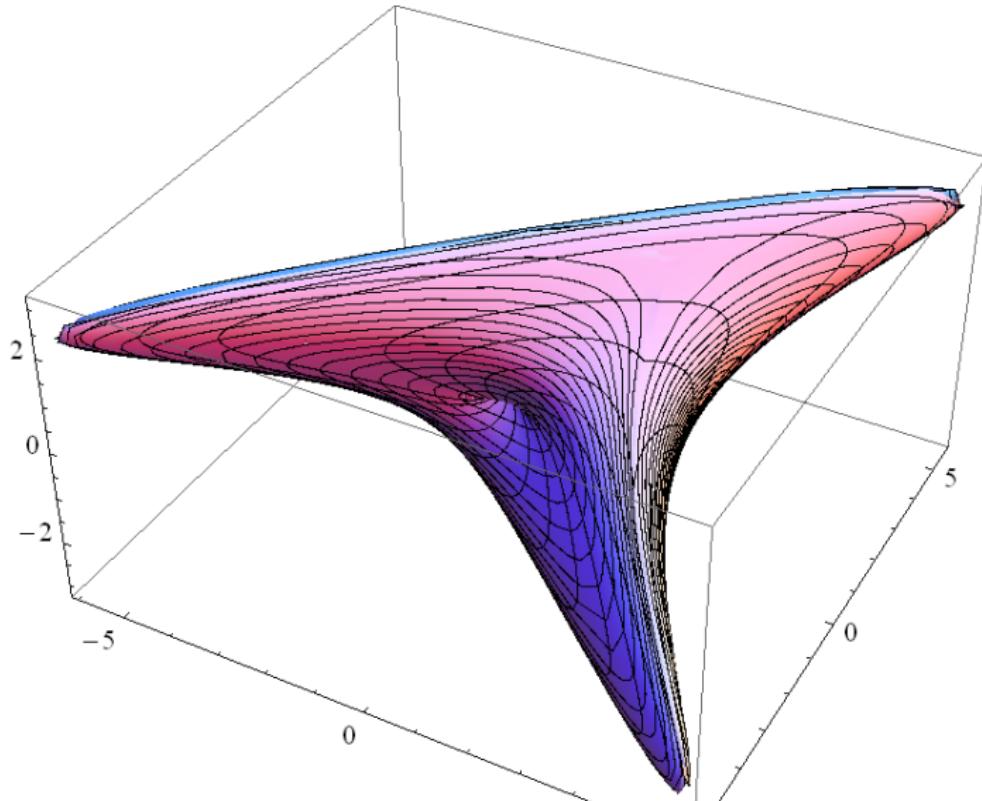


Субримановы сферы

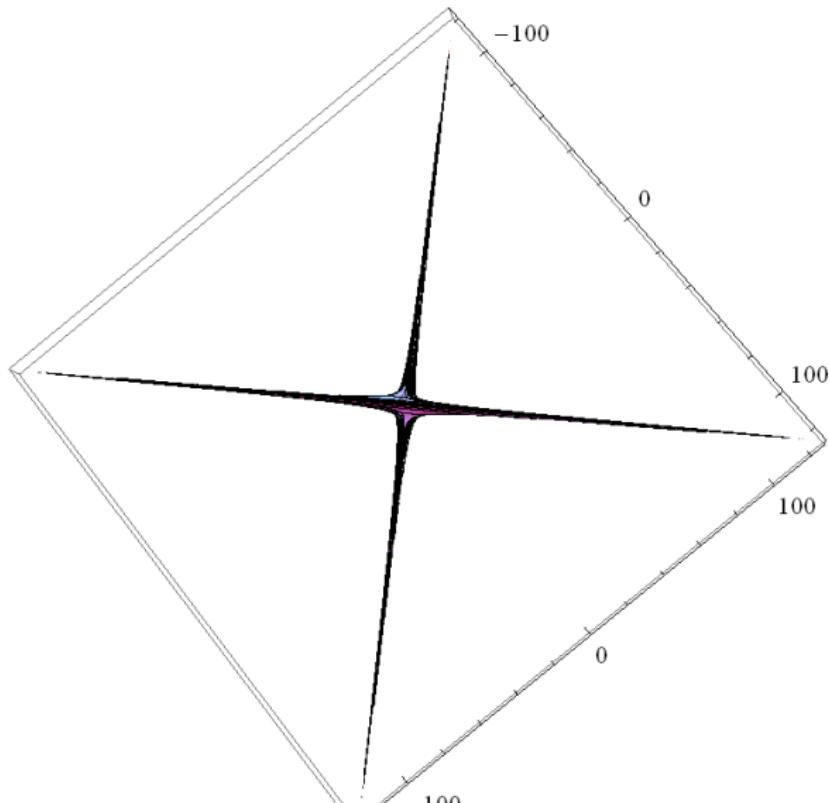
- $R > 0 \Rightarrow S_R \cong S^2,$
- Особенности сфер:

$$S_R \cap \text{Cut} = (S_R \cap \text{Max}) \cup (S_R \cap \text{Cut} \cap \text{Conj}).$$

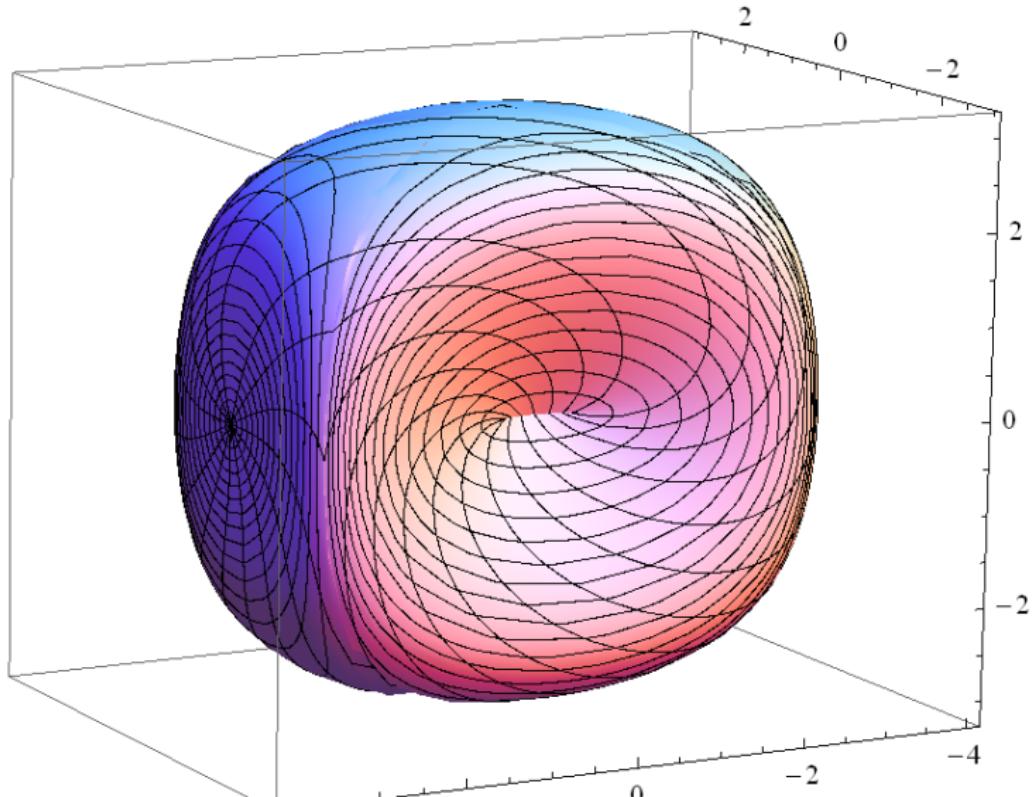
Субриманова сфера радиуса $< 2\pi$
в исходных координатах (x, y, z)



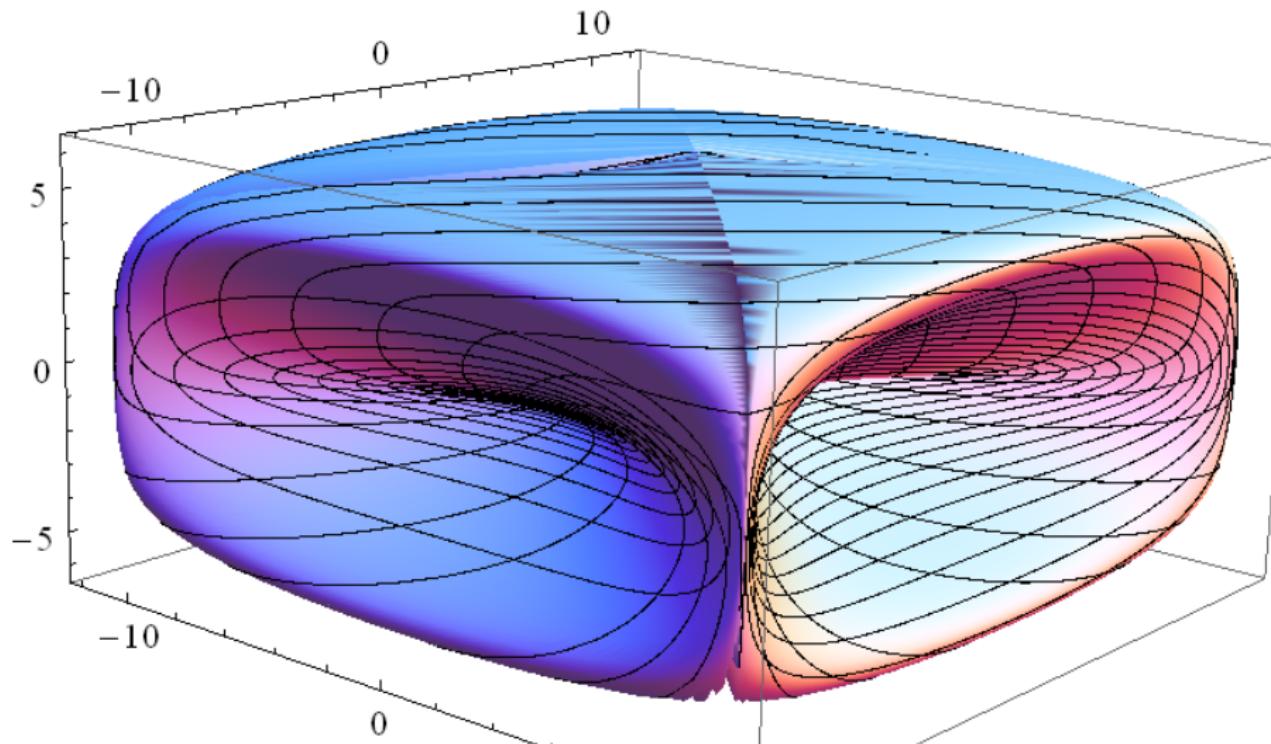
Субриманова сфера радиуса 2π
в исходных координатах (x, y, z)



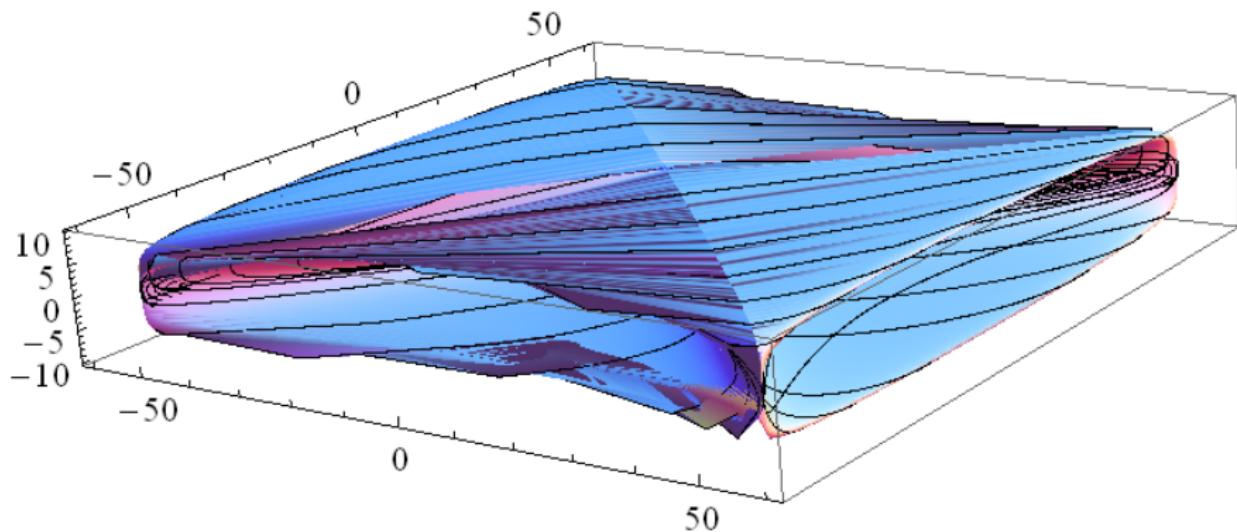
Субриманова сфера радиуса $< 2\pi$
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



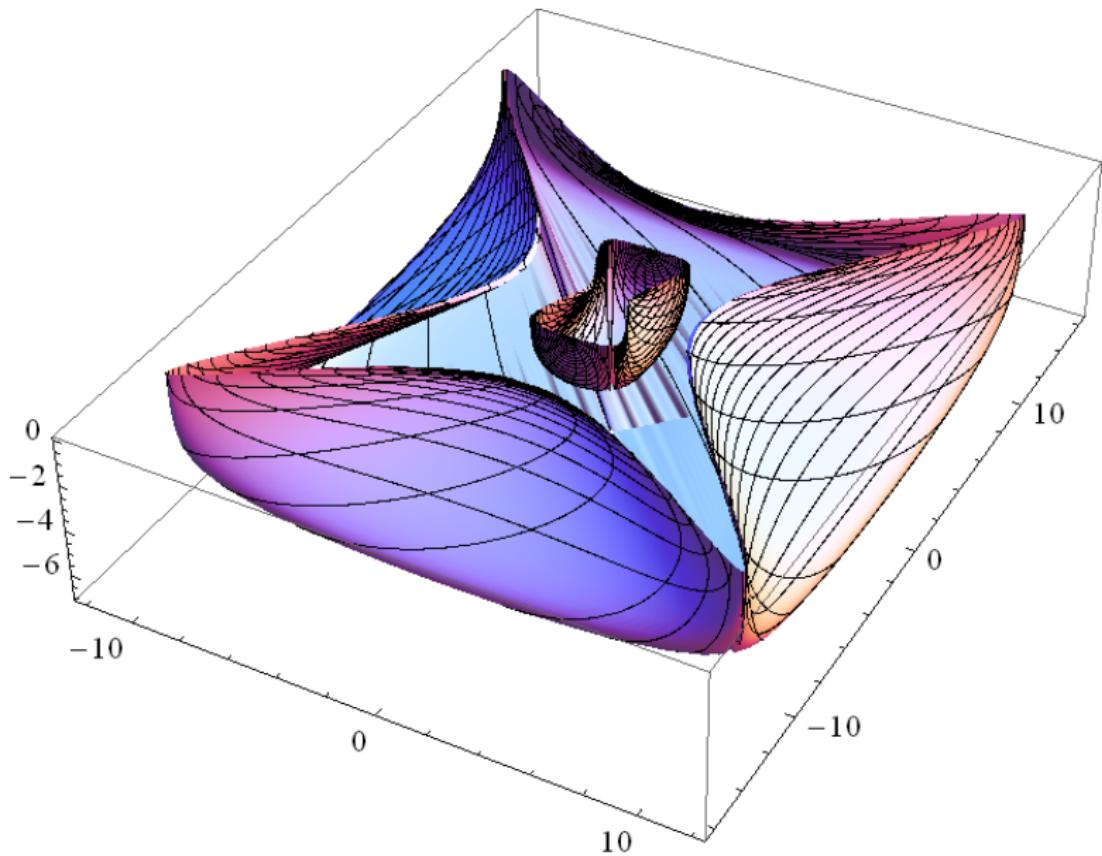
Субриманова сфера радиуса 2π
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



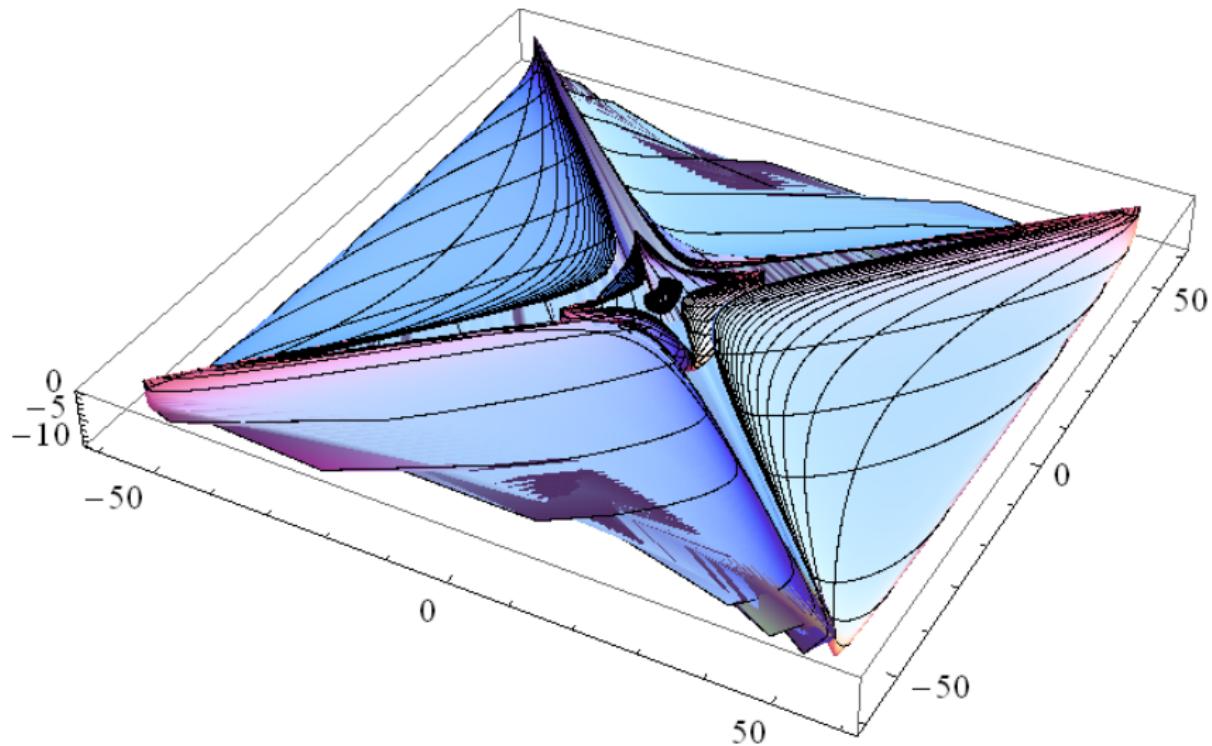
Субриманова сфера радиуса $> 2\pi$
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



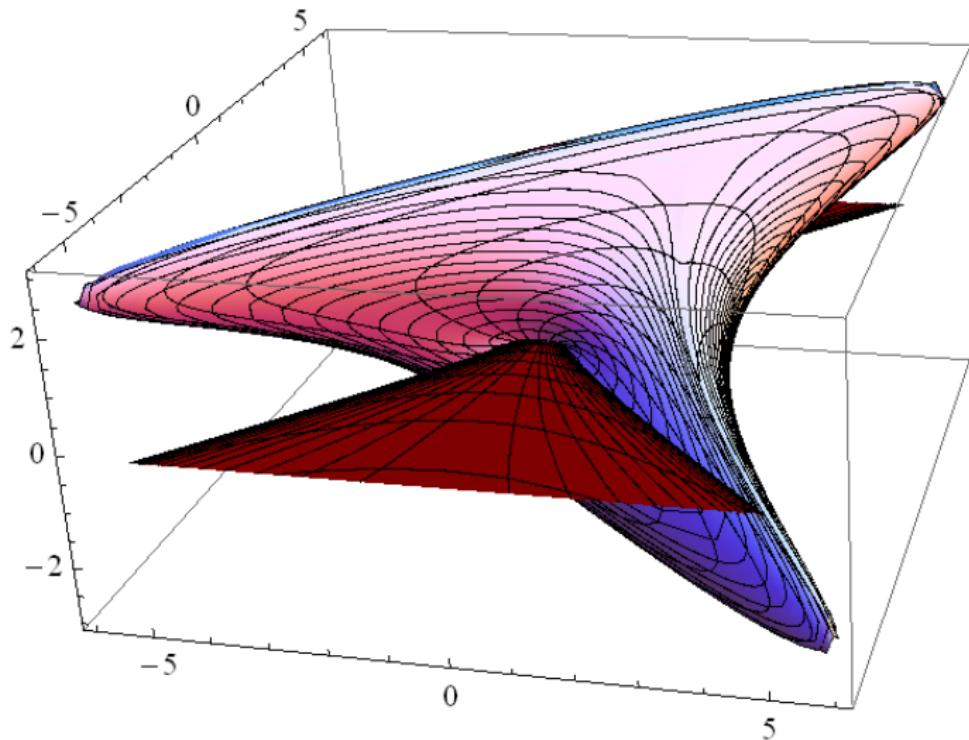
Матрёшка полусфер радиуса π и 2π



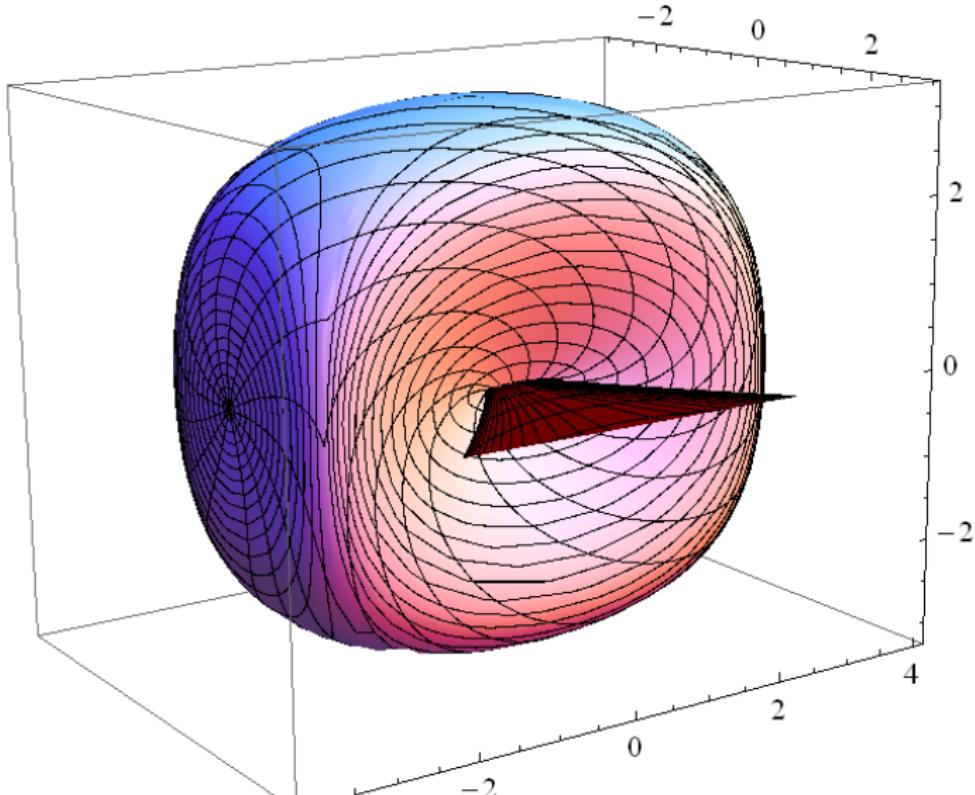
Матрёшка полусфер радиуса π , 2π и 3π



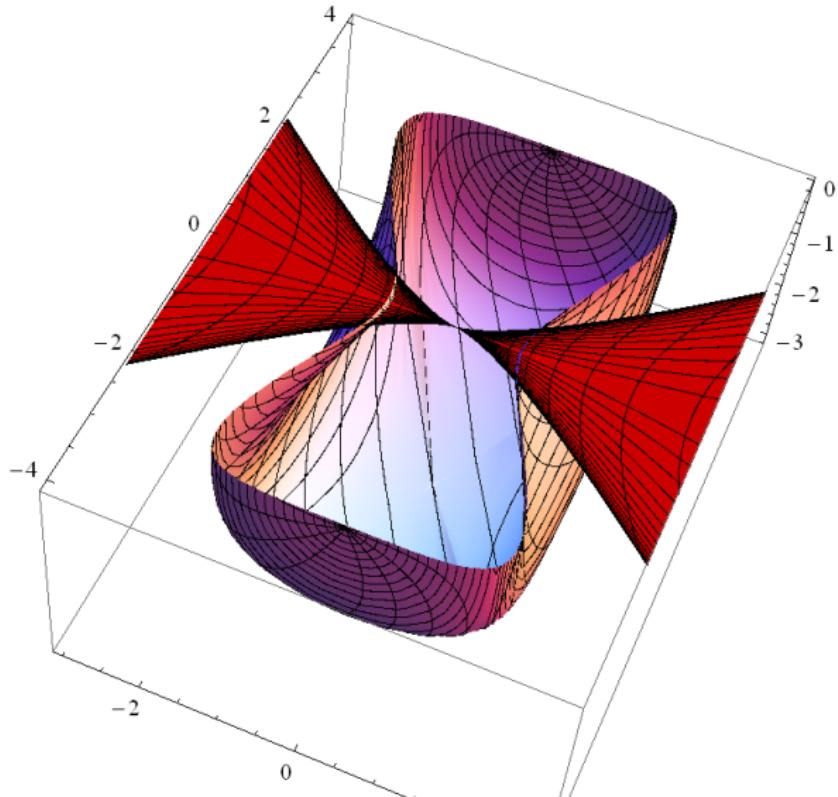
Сфера радиуса π и множество разреза
в исходных координатах (x, y, z)



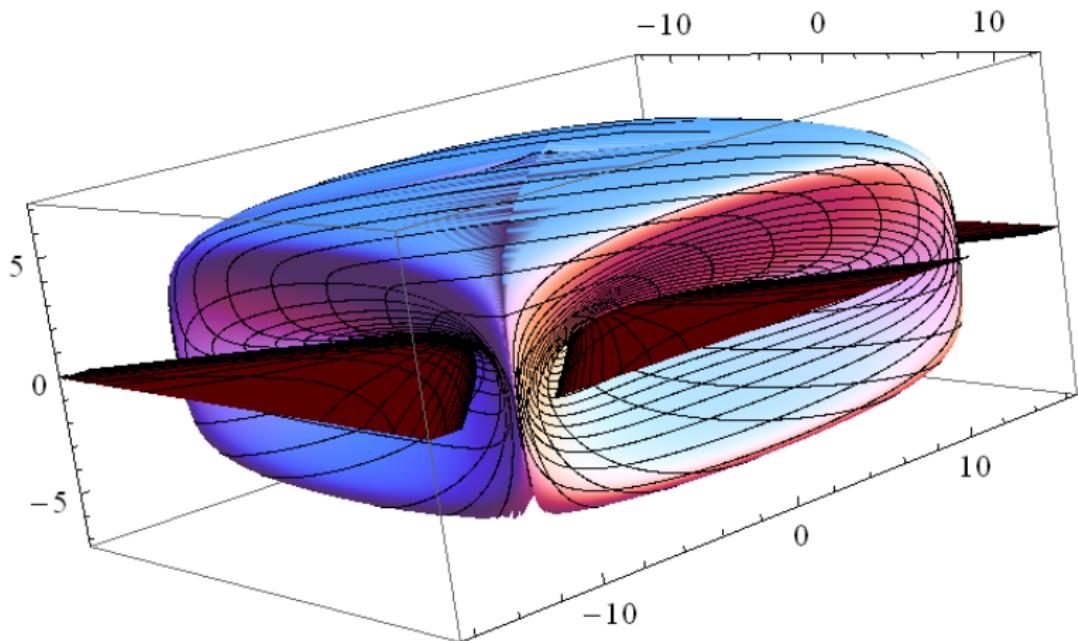
Сфера радиуса π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



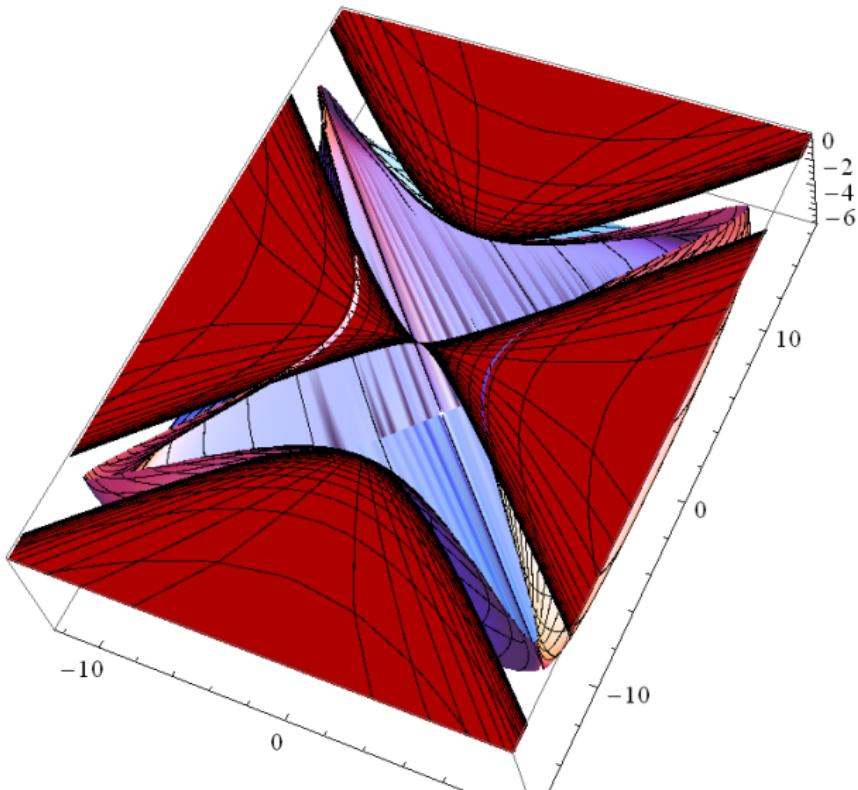
Полуфера радиуса π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



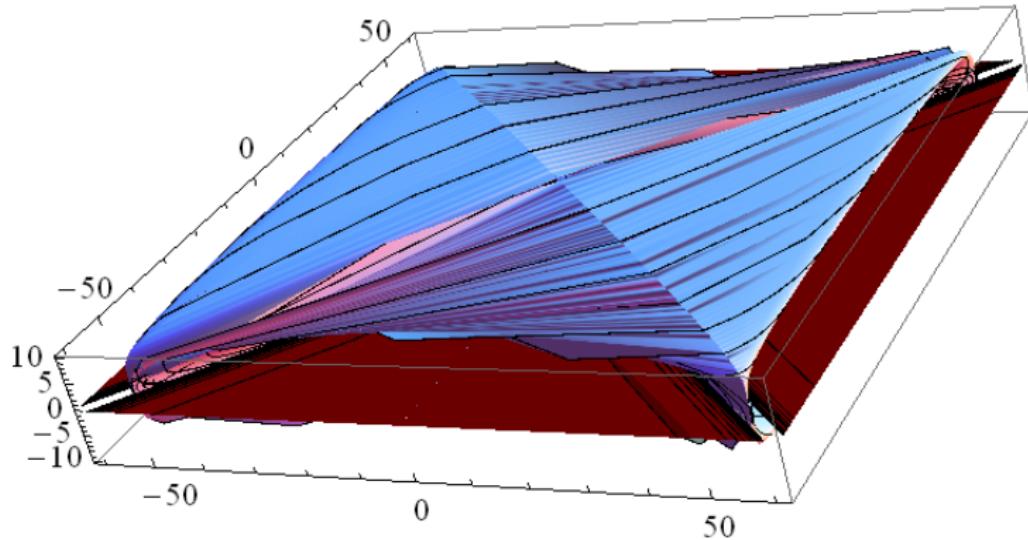
Сфера радиуса 2π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



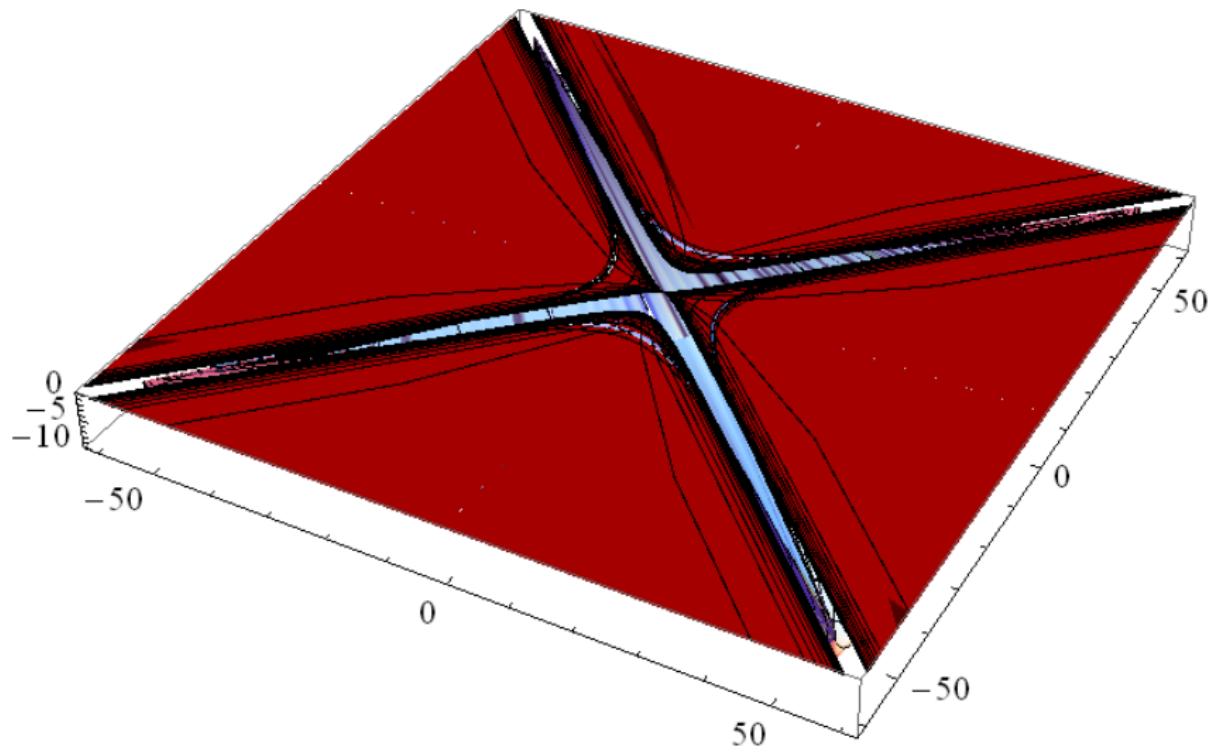
Полуфера радиуса 2π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



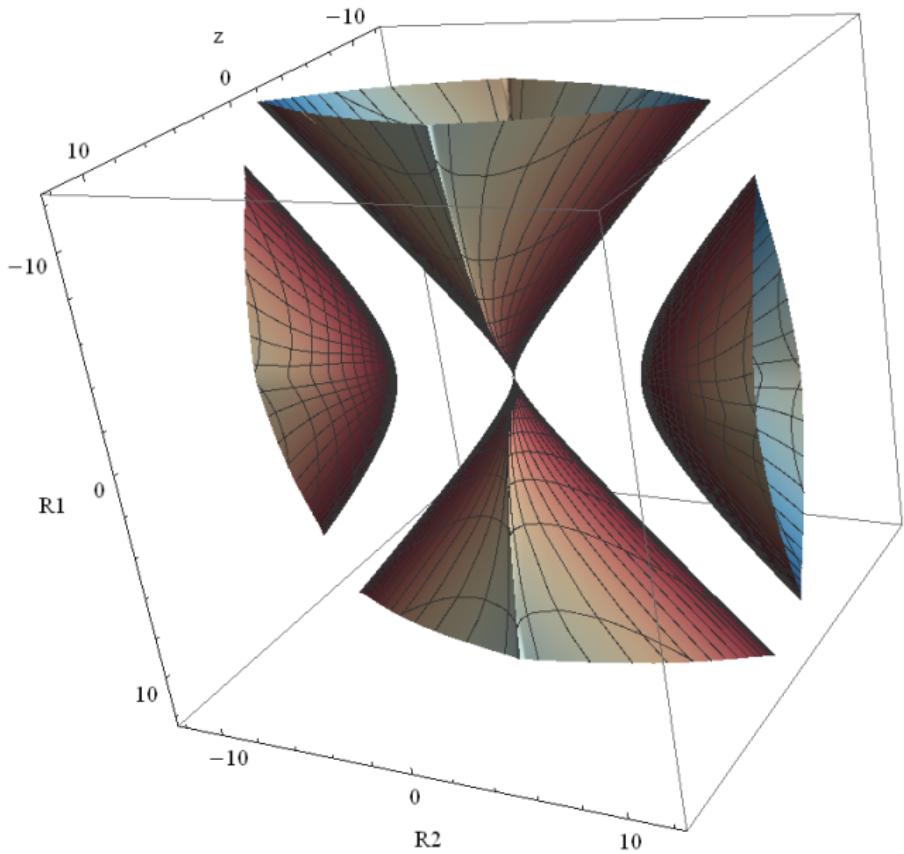
Сфера радиуса 3π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



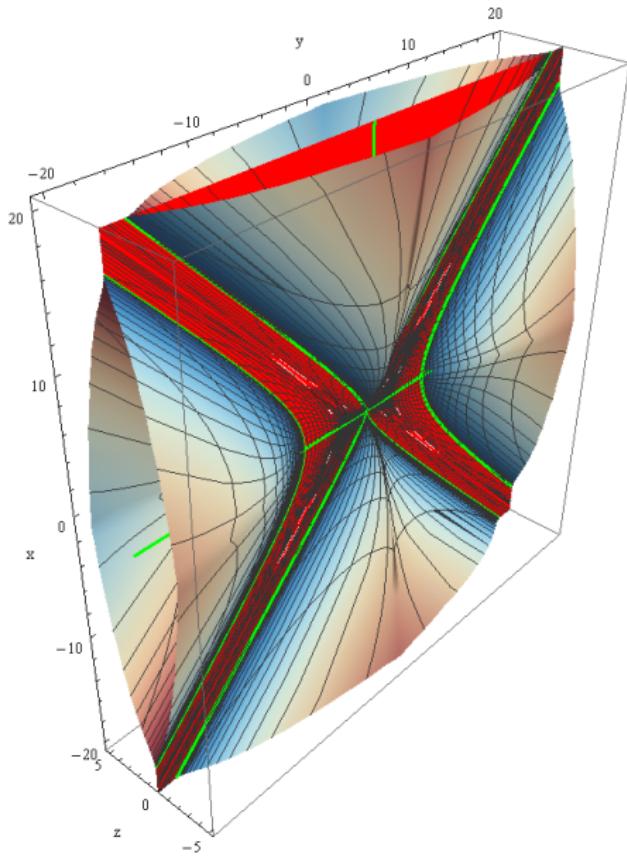
Полуфера радиуса 3π и множество разреза
в выпрямляющих координатах (R_1, R_2, z)



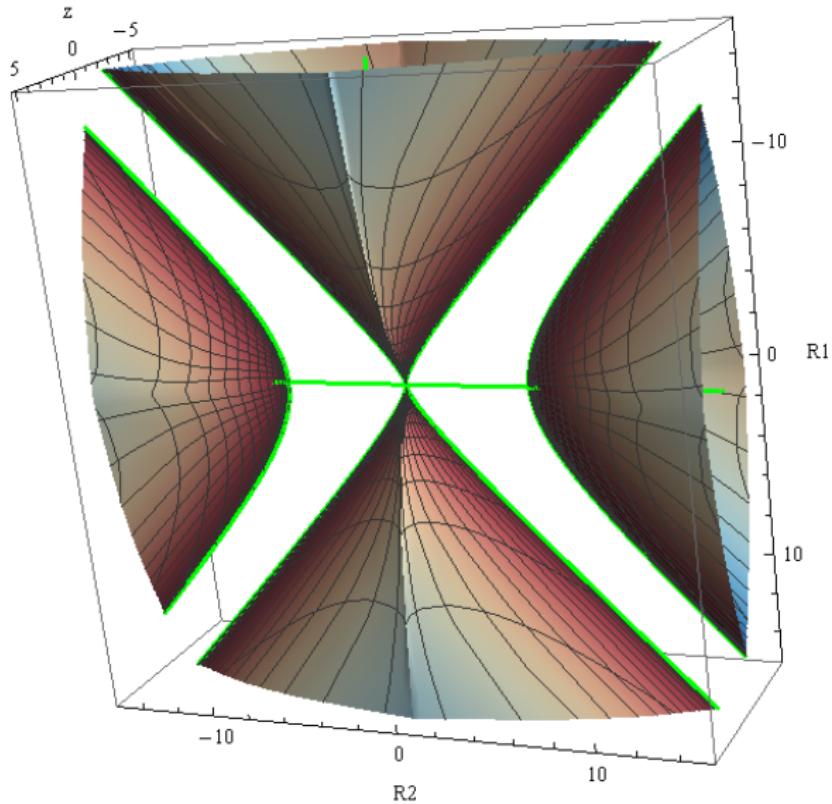
Первая каустика



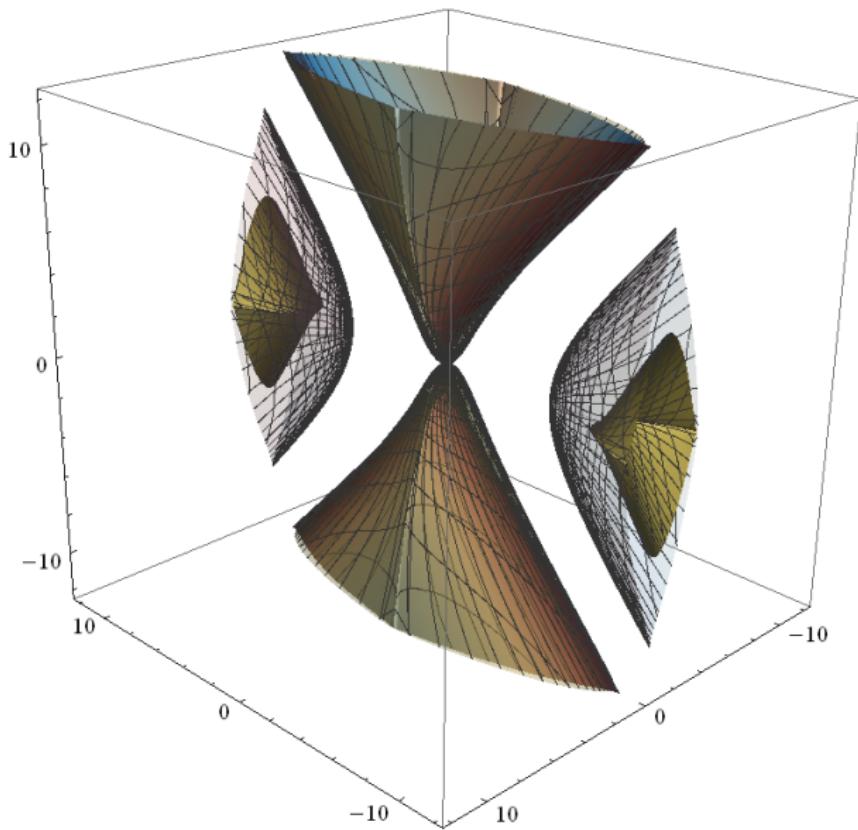
Первая каустика и множество разреза



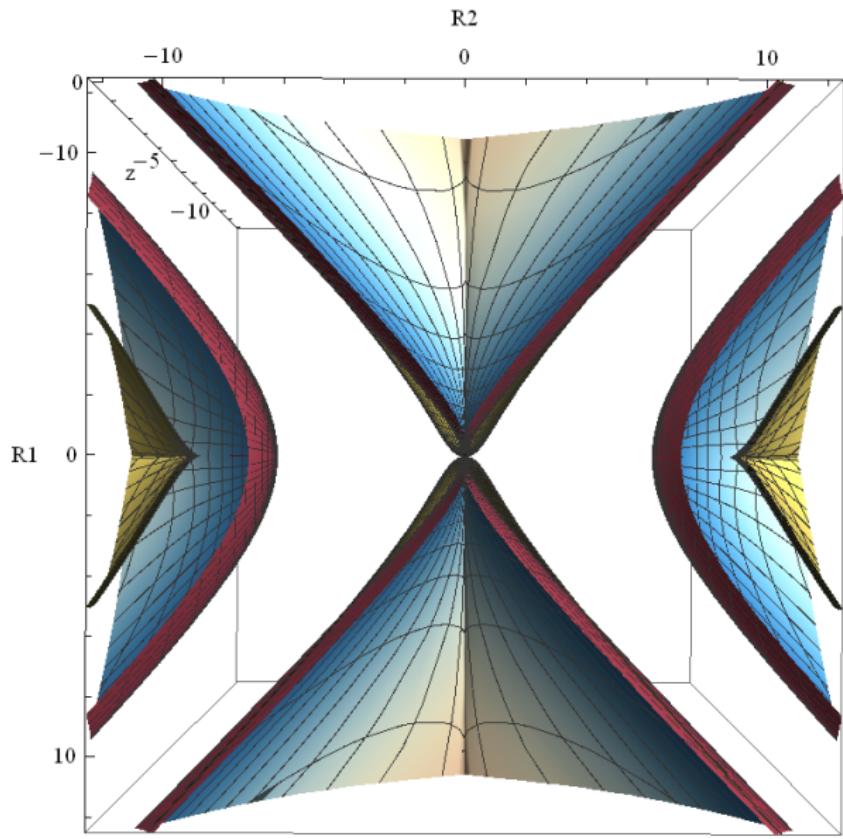
Ребра возврата первой каустики



Первая и вторая каустики



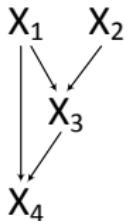
Первая и вторая каустики в разрезе



Группа Энгеля

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y & z & v \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$X_1(q) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$



$$X_3 = [X_1, X_2],$$

$$X_4 = [X_1, X_3],$$

$$[X_2, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_4] = 0.$$

Нильпотентная СР структура с вектором роста $(2, 3, 4)$,
единственна с точностью до растяжений

Принцип максимума Понtryгина

- Аномальные траектории: e^{tX_2} $([X_2, \Delta^2] = 0)$
- Нормальные экстремали:

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -\alpha \sin \theta, \quad \dot{\alpha} = 0,$$

$$\dot{q} = -\sin \theta X_1(q) + \cos \theta X_2(q),$$

$$\lambda = (\theta, c, \alpha) \in C = T_{q_0}^* M \cap \{H = 1/2\} = S_\theta^1 \times \mathbb{R}_{c,\alpha}^2.$$

- Интеграл энергии $E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos \theta \in [-|\alpha|, +\infty)$.
- $\theta(t)$, $c(t)$, $q(t)$: параметризация функциями Якоби.
- $\theta = \pi n$, $c = 0 \Rightarrow \dot{q} = \pm X_2(q)$, \Rightarrow аномальные траектории нестрого аномальны.

Симметрии и первое время Максвелла

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} \cong (\mathbb{Z}_2)^3.$$

Теорема

- $E = -\pm\alpha \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = +\infty,$
- $|E| < |\alpha| > 0 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = \frac{2p_1(k)}{\sqrt{|\alpha|}},$
 $k = \sqrt{(E + |\alpha|)/(2|\alpha|)},$
- $E > |\alpha| > 0 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = 2kK(k),$
 $k = \sqrt{2|\alpha|/(E + |\alpha|)},$
- $\alpha = 0, E > 0 \Rightarrow t_{\text{Max}}(\lambda) = \frac{\sqrt{2}\pi}{E},$

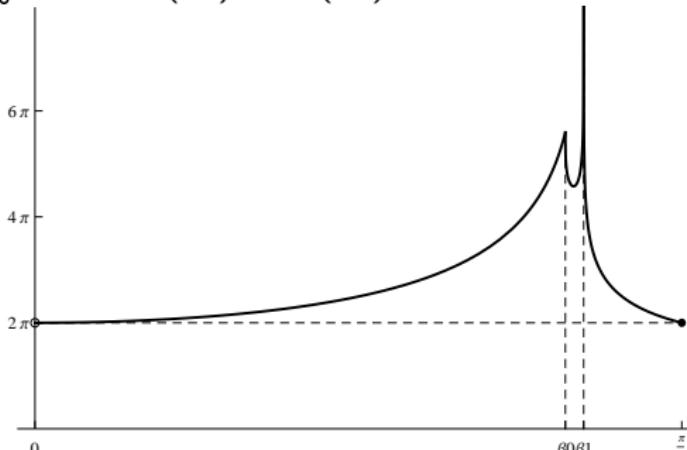
$$p_1(k) = \min\{p > 0 \mid \text{cn}(p, k)(\mathsf{E}(p, k) - p) - \text{dn}(p, k)\text{sn}(p, k) = 0$$

или $p = 2K(k)\}.$

Сопряженное время и время разреза

Теорема

- $t_{\text{conj}}(\lambda) \geq t_{\text{Max}}(\lambda), \lambda \in C,$
- $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}(\lambda), \lambda \in C,$
- $t_{\text{cut}} \circ \varepsilon^i = t_{\text{cut}}, \quad \varepsilon^i \in G,$
- $\vec{H}_v t_{\text{cut}} = 0,$
- $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm \alpha}$ непрерывна, $t_{\text{cut}}|_{E \neq \pm \alpha, E_0}$ гладкая,
 $E_0 = 2k_0^2 - 1, 2E(k_0) - K(k_0) = 0, k_0 = 0.9089\dots$



Глобальная структура экспоненциального отображения и множество разреза

- $\tilde{N} = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t < t_{\text{Max}}(\lambda), \sin(\gamma_{t/2}) \neq 0\} = \cup_{i=1}^4 D_i,$
- $\tilde{M} = \text{Exp}^{-1}(\tilde{N}) = \{xz \neq 0\} = \cup_{i=1}^4 M_i.$

Теорема

$\text{Exp} : D_i \rightarrow M_i$ — диффеоморфизм, $i = 1, \dots, 4$.

$$\text{Cut} \subset M' = M \setminus \tilde{M} = \{q \in \mathbb{R}^4 \mod xz = 0\}.$$

Результаты:

- Диффеоморфные стратификации M' , $N' = \hat{N} \setminus \tilde{N}$,
- Диффеоморфная структура $\text{Exp} : N' \rightarrow M'$
- Глобальное описание Cut

Сфера $S = S_1(q_0)$

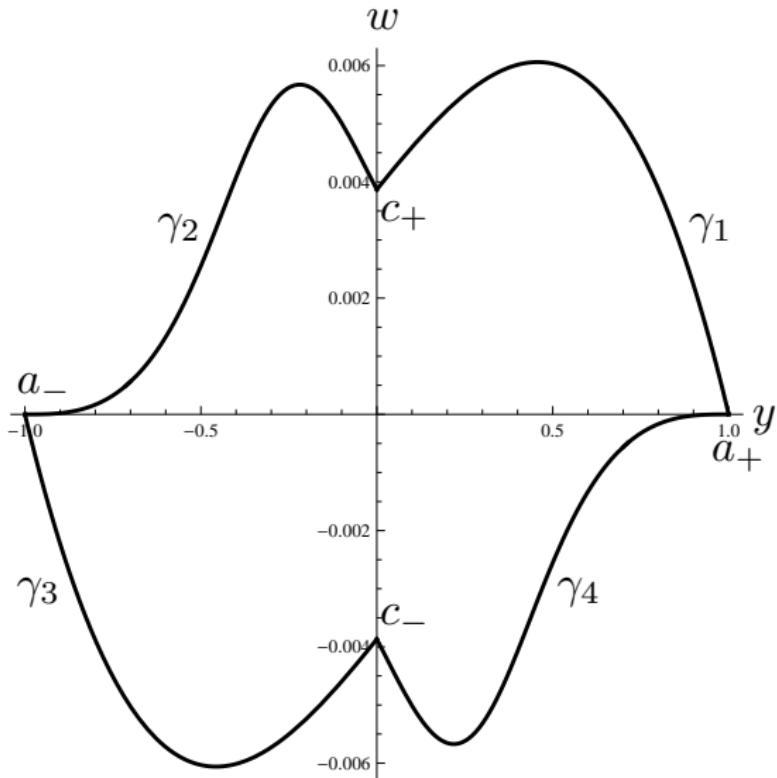
Теорема

- $\widehat{S} = S \cap \{x = z = 0\}$ есть замкнутая непрерывная кривая, охватывающая начало координат,
- $\widehat{S} \cap \{yw \neq 0\} = \cup_{i=1}^4 \gamma_i$ гладкие кривые ($w = v - y^3/6$),
- $\widehat{S} \cap \text{Abnorm} = \{a_-, a_+\}, \quad \widehat{S} \cap \text{Conj} = \{c_-, c_+\}$,
- \widehat{S} негладкая, липшицева в окрестности точек a_\pm и c_\pm ,
- в окрестности точки a_+ пересечение $\widehat{S} \cap \{w < 0\}$ есть график плоской функции

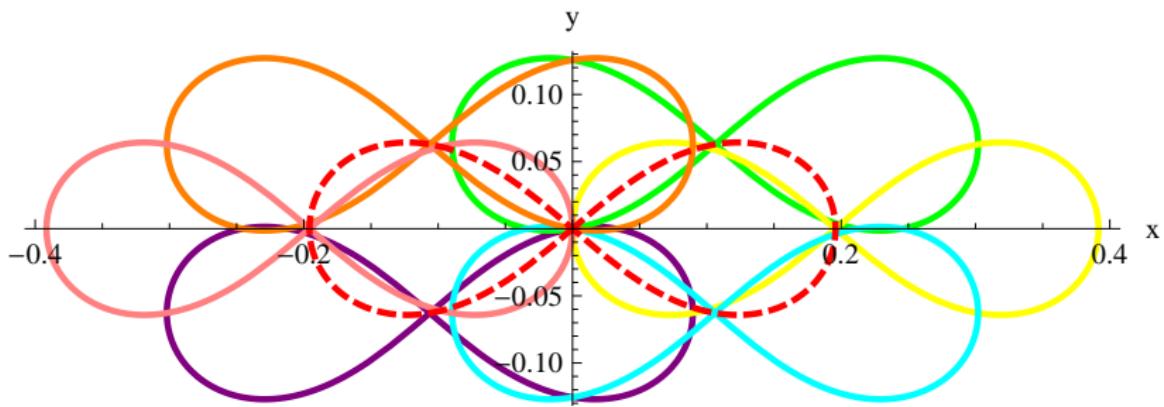
$$w = w_2(y) = -\frac{Y^3}{6} + CY^3 e^{-\frac{2}{Y}}(1 + o(1)), \quad Y = \frac{1-y}{2},$$

- \widehat{S} несубаналитична в окрестности точек a_\pm , поэтому и сфера S несубаналитична.

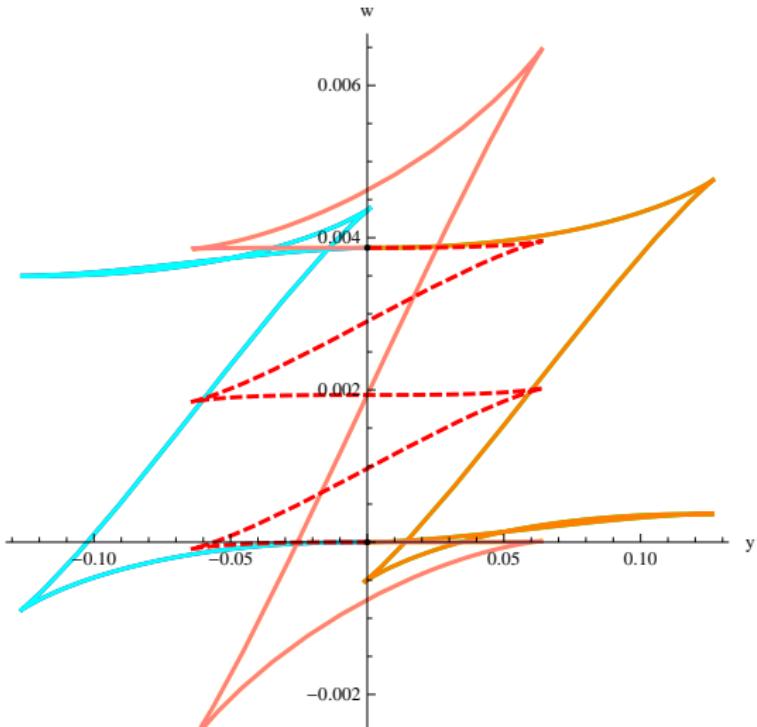
Пересечение $\widehat{S} = S \cap \{x = z = 0\}$



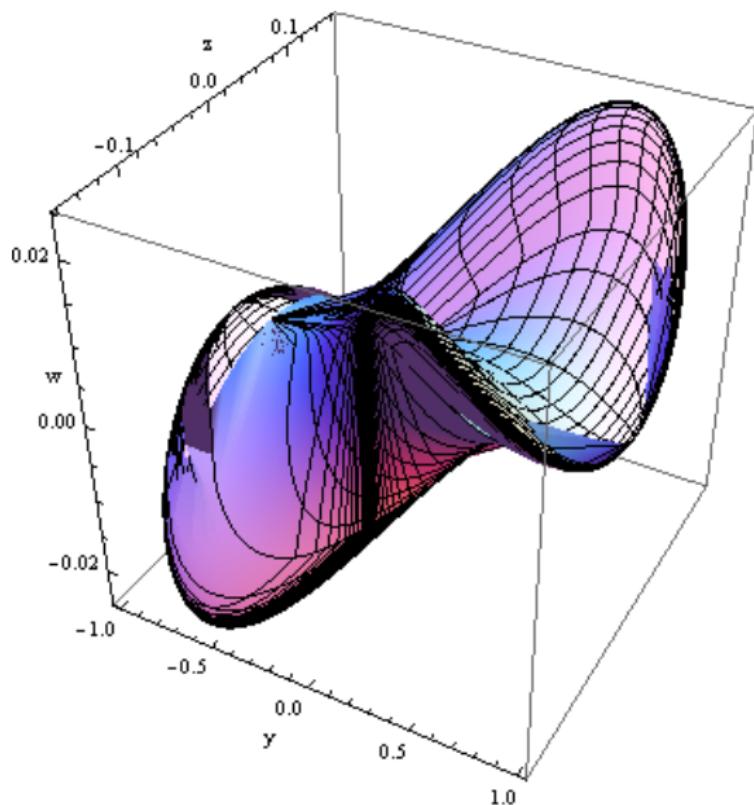
Однопараметрическое семейство кратчайших,
приходящих в сопряженную точку c_{\pm} на сфере,
проекция на (x, y)



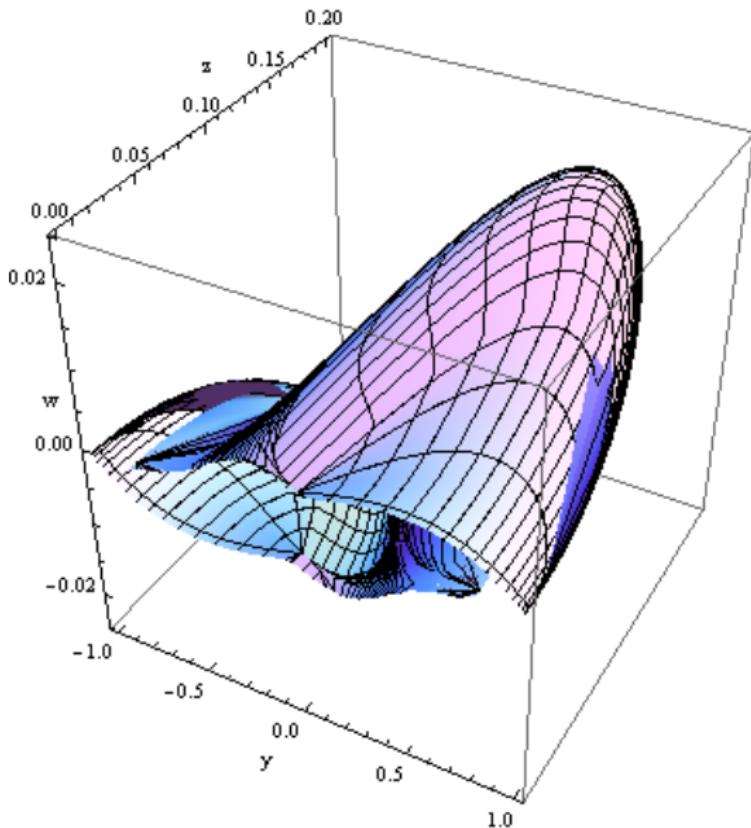
Однопараметрическое семейство кратчайших,
приходящих в сопряженную точку c_{\pm} на сфере,
проекция на (y, w)



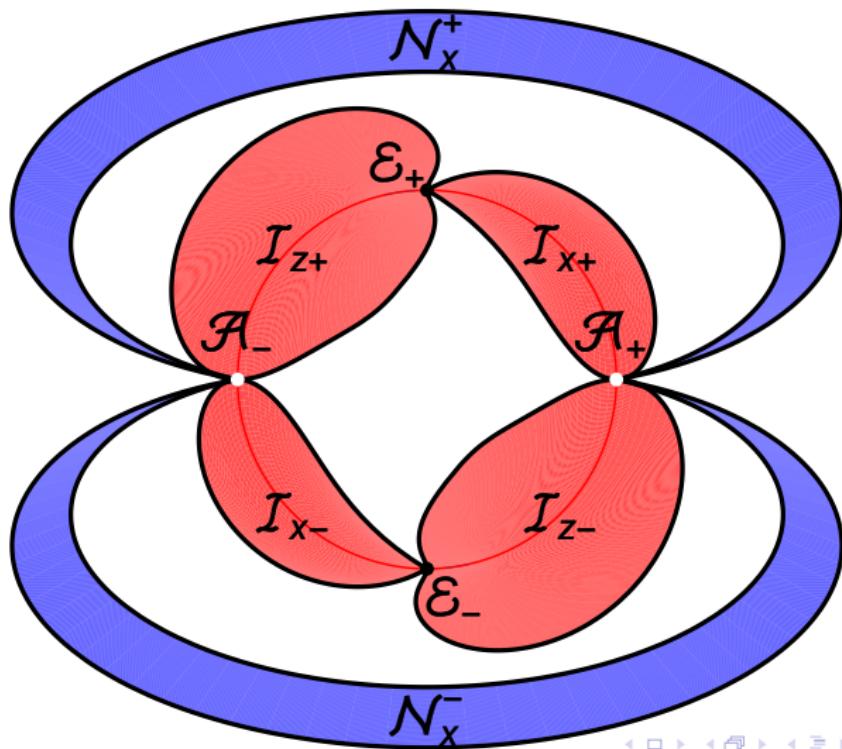
Сфера $S \cap \{x = 0\}$



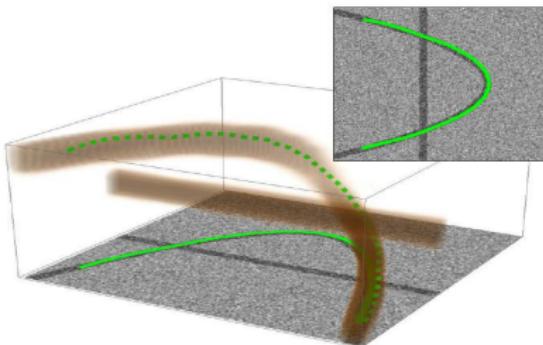
Полусфера $S \cap \{x = 0, z > 0\}$



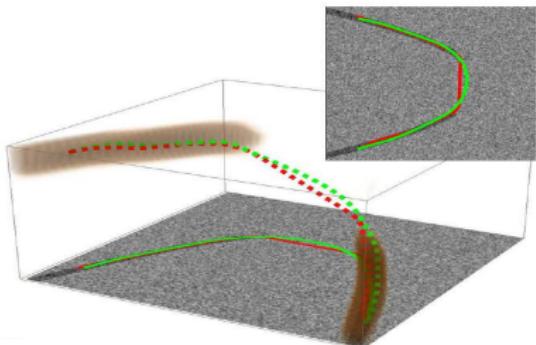
Стратификация множества разреза в факторе по дилатациям



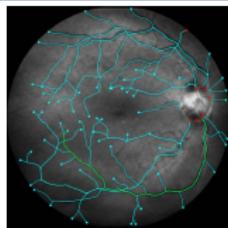
Субримановы геодезические в обработке изображений



Пересекающиеся линии
разъединяются



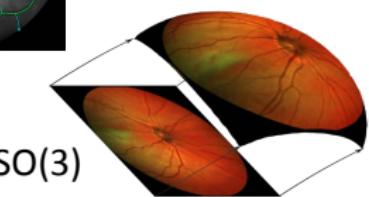
Восстановление поврежденных контуров
на основе модели зрения человека



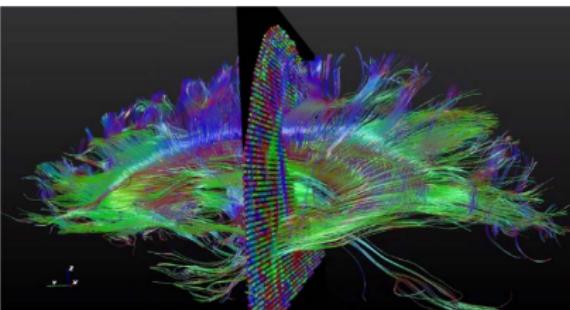
$SE(2)$

Субримановы геодезические
на группах Ли

Приложение в анализе
медицинских изображений



$SO(3)$



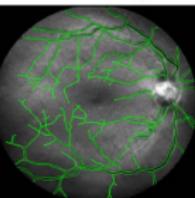
$SE(3)$

Геодезические на $SE(2)$ адаптированные к изображению

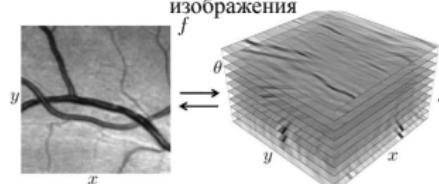
Искривление сосудов при диабетической ретинопатии



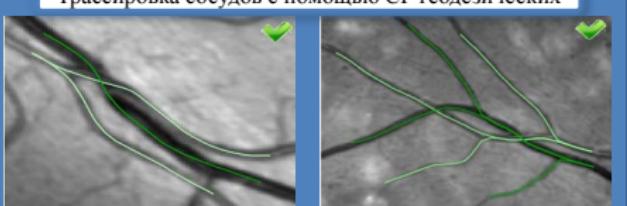
Трассировка сосудов



Функция внешней цены из изображения



Трассировка сосудов с помощью СР геодезических

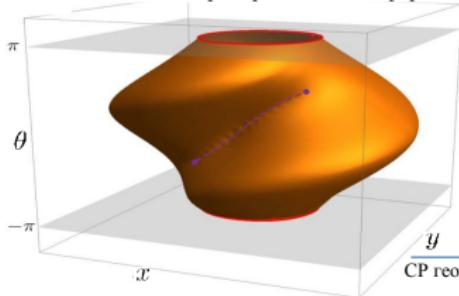


$$(x, y, \theta) \in SE(2) = \mathbb{R}^2 \times S^1,$$

Постановка задачи

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= u_1 (\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) + u_2 \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \gamma(0) &= e, \quad \gamma(T) = g \in SE(2), \\ (u_1(t), u_2(t)) &\in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

Распространение СР-сфер



$$l = \int_0^T \mathcal{C}(x(t), y(t), \theta(t)) \sqrt{\xi^2 u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \rightarrow \min.$$

СР расстояние от единицы $e = (0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} W(g) &:= \inf \{l(\gamma(t)) \mid \gamma(0) = e, \gamma(T) = g, \\ \dot{\gamma}(t) &\in \text{span}\{\mathcal{A}_1|_{\gamma(t)}, \mathcal{A}_2|_{\gamma(t)}\}, t \in [0, T]\}. \end{aligned}$$

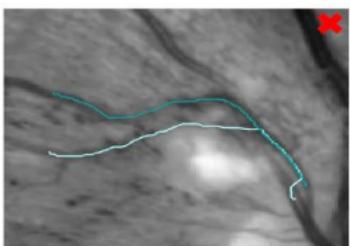
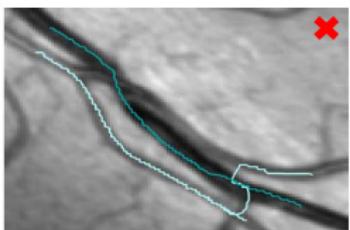
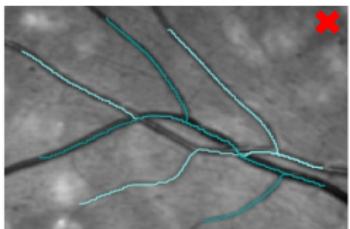
$W(g)$ удовлетворяет системе Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\begin{cases} \sqrt{(\xi^{-2} |\mathcal{A}_1 W(g)|^2 + |\mathcal{A}_2 W(g)|^2)} = \mathcal{C}(g), \text{ for } g \neq e, \\ W(e) = 0, \end{cases}$$

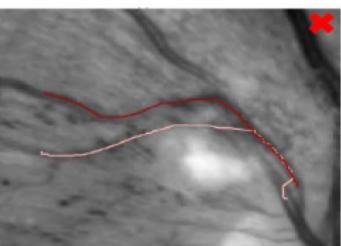
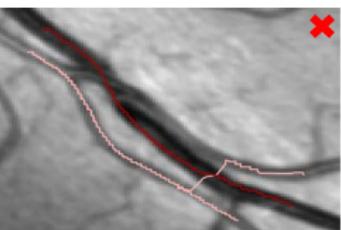
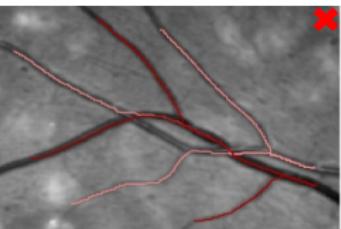
СР геодезические - наискорейший спуск по W в горизонтальных направлениях $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$

Сравнение с классическими методами

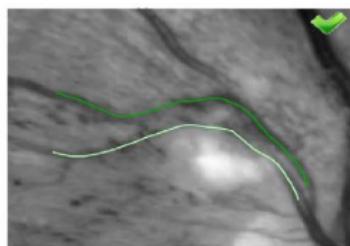
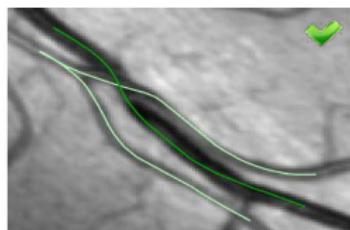
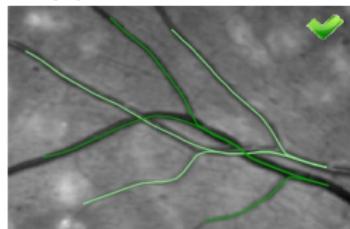
\mathbb{R}^2 - Riemannian



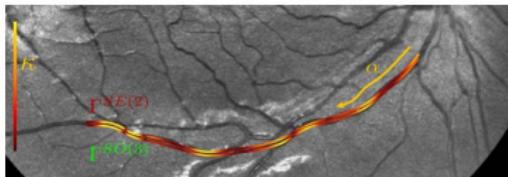
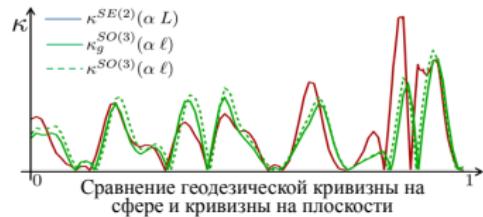
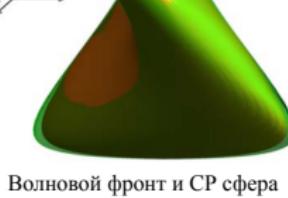
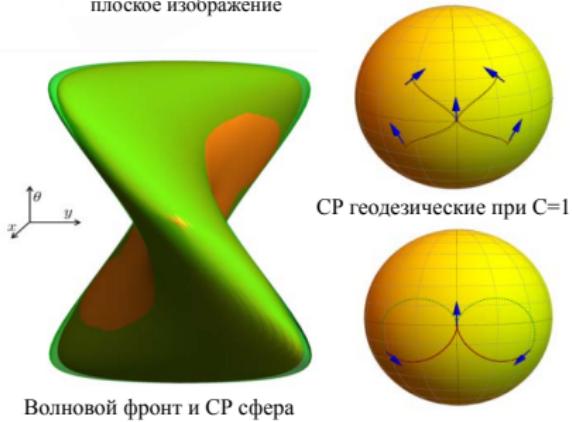
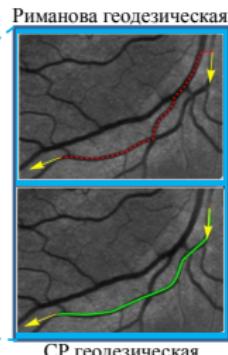
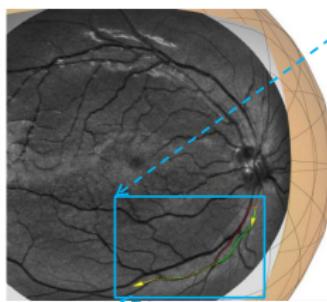
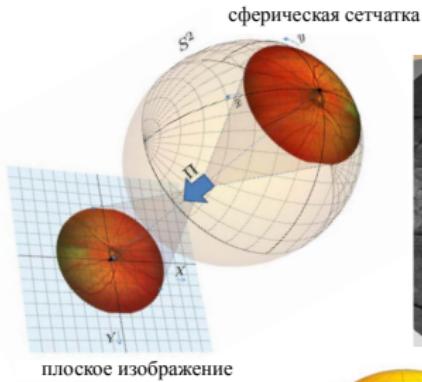
$SE(2)$ - Riemannian



$SE(2)$ - Sub-Riemannian

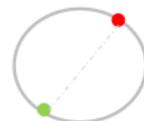
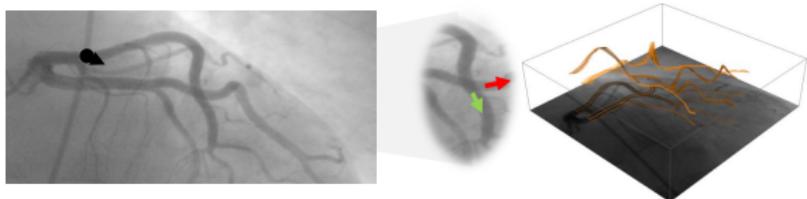


Геодезические на $SO(3)$ для сферических изображений

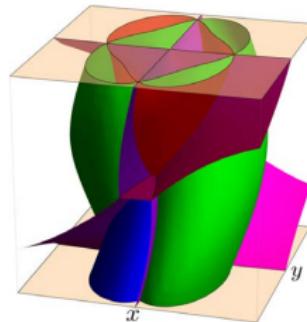
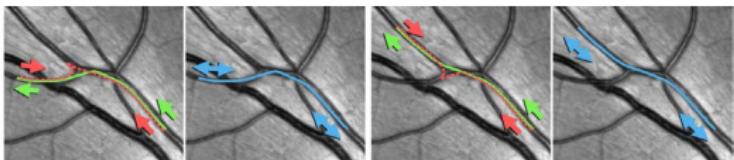


Устранение точек возврата: геодезические на $PTR(2)$

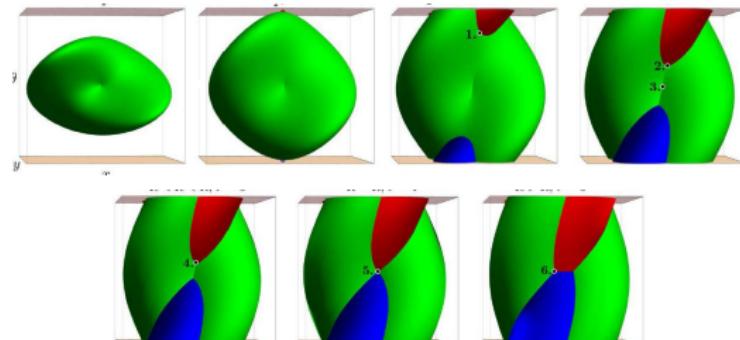
Устранение эффекта точек
возврата при поиске
кровеносных сосудов на
изображении сетчатки глаза
человека



$$(x, y, \theta) \in PT(\mathbb{R}^2)$$
$$PT(\mathbb{R}^2) \equiv \mathbb{R}^2 \times P^1$$
$$P^1 = S^1 / \sim$$



Множество разреза



Субримановы сферы

Геодезические на $SE(3)$ для трехмерных изображений

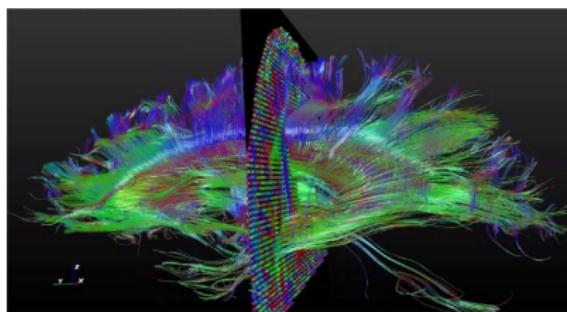
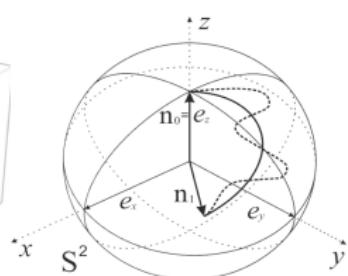
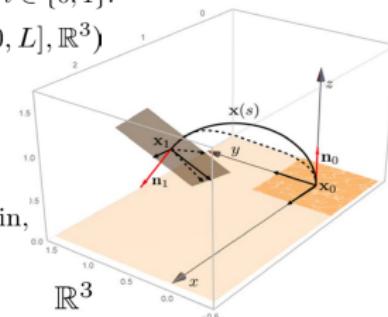
Дано $\xi > 0$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}_i \in S^2$, $i \in \{0, 1\}$.

Найти гладкую кривую $\mathbf{x} \in C^\infty([0, L], \mathbb{R}^3)$

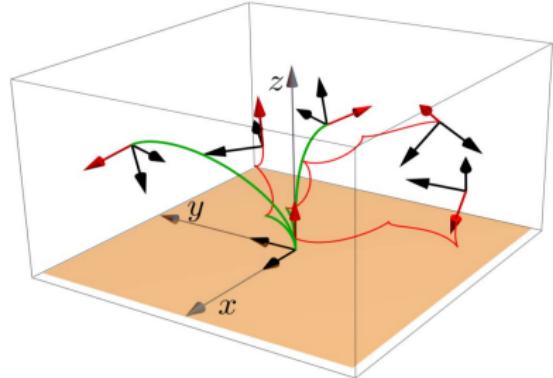
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(L) = \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^3,$$
$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{n}_0, \mathbf{x}'(L) = \mathbf{n}_1 \in S^2,$$

$$E(\mathbf{x}) := \int_0^L \sqrt{\xi^2 + \kappa^2(s)} \, ds \rightarrow \min,$$

где $\kappa(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$.

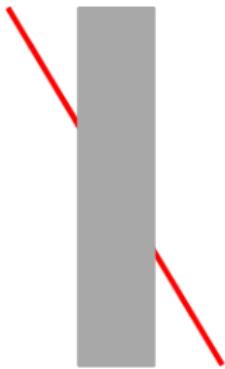


Задача трассировки нервных волокон на МРТ
снимках головного мозга человека



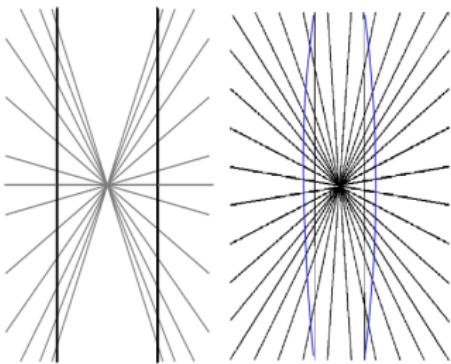
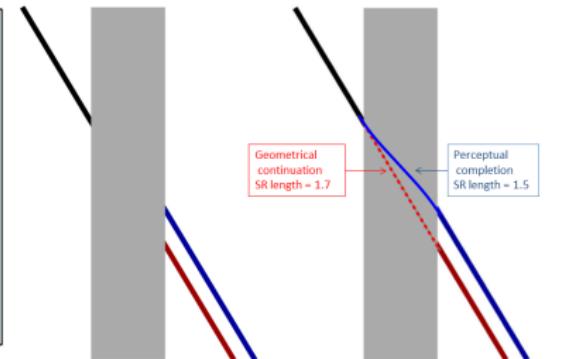
СР геодезические при $C=1$

Моделирование и объяснение зрительных иллюзий

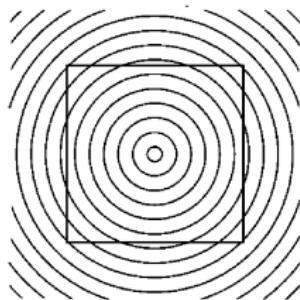


Иллюзия Поггендорфа

Идея:
Иллюзорный контур создается зрительной системой, как геодезическая в СР метрике, индуцированной зрительным сигналом.



Иллюзия Геринга



Иллюзия Орбисона