Неинтегрируемость в левоинвариантных субримановых задачах

Локуциевский Л.В. Сачков Ю.Л.

МГУ имени М.В. Ломоносова, мехмат
ИПС имени А.К. Айламазяна РАН

2015

Layout

Пусть $q \in M$, где M – гладкое риманово многообразие.

В касательном расслоении TM задано распределение Δ линейных подпространств $\Delta(q) \subset T_qM$.

Требуется найти кратчайшую кривую $q(t)$, соединяющую две заданные точки q_0 и q_1

$$\int_0^T |\dot q(t)|\, dt \to \min \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int_0^T \dot q^2(t)\, dt \to \min$$

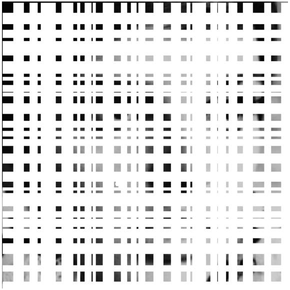
при ограничении $\dot q(t) \in \Delta\big(q(t)\big)$.

Другими словами,

$$\dot q = \sum_i u^i X_i \qquad \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i,j} g_{ij} u^i u^j \, dt \to \min$$

где $u^i \in \mathbb{R}$ – управления, а X_i – векторные поля, образующие базис распределения Δ.

- Восстановление изображений. Hubel and Wiesel (Нобелевская премия 1981) — нейроны чувствительны к направлению. Модель Citti-Petitot-Sarti (2003, 2006) — поднятие плоского изображения в 3х мерную контактную структуру.
- Мобильные роботы (классическая машина Дуббинса, роботы с прицепами, управление вращением и/или движением твердого тела)
- Оптимальное управление квантовыми системами.
- Диффузия с гипоэллиптической правой частью (через условие Хермандера и функцию Грина (heat kernel))
- Вакономная механика.



Повреждено 85% изображения

Восстановленное изображение

J.-P. Gauthier, D. Prandi, A. Remizov

Локально аппроксимационная теорема Громова (1996) утверждает, что субриманово расстояние в ε-окрестности точки (постоянного ранга) приближается с точностью до $o(\varepsilon)$ расстоянием в левоинвариантной субримановой задаче на некоторой нильпотентной группе Ли $\mathfrak{G}$.

А именно,

$$\Delta_1 = \mathrm{span} X_i \qquad \Delta_2 = \Delta_1 + \mathrm{span}[X_i, X_j] \quad \dots$$

В предположении, что размерности Δ_k постоянны в окрестности точки ν, строится градуированная нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}_\nu$. Исходная задача – это левоинвариантная субриманова задача, на соответствующей группе Ли $\mathfrak{G}_\nu$.

Важная нерешенная проблема в субримановой геометрии касается анормальных траекторий.

Согласно принципу Максимума Понтрягина, имеем

$$\mathcal{H} = -\frac{\lambda_0}{2}\sum_{i,j} g_{ij}u^i u^j + \sum_i u^i \langle p, X_i\rangle \to \max_u$$

Здесь $\lambda_0 \geq 0$ и $p \in T_q^*M$. В нормальном случае $\lambda_0 = 1$ очевидно

$$u = g^{ij}\langle p, X_i\rangle \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum g^{ij}\langle p, X_i\rangle\langle p, X_j\rangle$$

В анормальном случае $\lambda_0 = 0$, максимум $\mathcal{H}$ по не достигается, кроме случая, когда $\langle p, X_i\rangle \equiv 0$ для всех i. В последнем случая максимум достигается при любом выборе u^i, так как $\mathcal{H} \equiv 0$.

Известно следующее

- Любая нормальная геодезическая является гладкой (тривиально).
- Есть примеры анормальных траекторий, которые не являются гладкими (а всего лишь липшицевыми). Однако они не оптимальны.
- Есть примеры гладких анормальных кривых, которые (a) строго анормальны и (b) оптимальны.

Открытым остается вопрос: существует негладкая анормальная геодезическая, которая является оптимальной.

Layout

Группа Карно – это группа Ли, алгебра которой является нильпотентной с фиксированной градуировкой. Простейший пример – это группа Гейзенберга с вектором роста (2,3).

$$\mathfrak{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}(X_1, X_2, X_3), \text{ где } [X_1, X_2] = X_3.$$

В этом случае,

$$\frac{1}{2} \int_0^T u_1^2 + u_2^2 \, dt \to \min$$

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1; \\ \dot{y} = u_2; \\ \dot{z} = x u_2 - y u_1. \end{cases}$$

Поскольку задача является левоинвариантной, то геодезический поток можно рассматривать как поток на коалгебре Ли в скобке Ли-Пуассона. Получившуюся систему называют «вертикальной подсистемой».

Пусть (h_1, h_2, h_3) – координаты на $\mathfrak{g}^*$, тогда

$$H = -\frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right) + h_1 u_1 + h_2 u_2 \to \max_u$$

$$H = \frac{1}{2}\left(h_1^2 + h_2^2\right)$$

Скобка Ли-Пуассона имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & h_3 & 0 \\ -h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h_3 – казимир.

Следующая свободная нильпотентная группа Карно имеет глубину 3 и вектор роста (2,3,5):

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5), \text{ где}$$
$$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4 \text{ и } [X_2, X_3] = X_5.$$

Если на коалгебре $\mathfrak{g}^*$ ввести двойственный базис, то вертикальная подсистема для нормальных траекторий будет иметь гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\left(h_1^2 + h_2^2\right)$$

А скобка Ли-Пуассона имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & h_3 & h_4 & 0 & 0 \\ -h_3 & 0 & h_5 & 0 & 0 \\ -h_4 & -h_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Казимиры h_4, h_5 и $\frac{1}{2}h_3^2 + h_1 h_5 - h_2 h_4$. Симплектические слои двумерны и, следовательно система интегрируется в квадратурах.

Данная система обладает группой симметрий $SO(2)$:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto A_\phi \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}; \quad h_3 \mapsto h_3; \quad \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} \mapsto A_\phi \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому все слои симплектического слоения эквивалентны слоям с $h_5 = 0$. В этом случае получаем группу Энгеля, с вектором роста (2,3,4).

- Группы Карно глубины 1 тривиальны (это просто евклидово пространство). Анормальных траекторий нет, сферы аналитические.
- Группы глубины 2: геодезический поток интегрируется в элементарных функциях; анормальные траектории есть, но не оптимальны; сферы являются субаналитическими, но имеют особенности.
- Группы глубины 3: геодезический поток интегрируется уже в эллиптических функциях Якоби; анормальные траектории оптимальны, но не строго анормальны; сферы имеют особенности и не субаналитичны.

Layout

Вертикальная подсистема на самом деле является гамильтоновой системой на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$. Скобка Ли-Пуассона имеет вид

$$(\{h_i, h_j\})_{i,j=1}^8 = \begin{pmatrix} 0 & h_3 & h_4 & h_6 & h_7 & 0 & 0 & 0 \\ -h_3 & 0 & h_5 & h_7 & h_8 & 0 & 0 & 0 \\ -h_4 & -h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_6 & -h_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_7 & -h_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Казимиры h_6, h_7, h_8 и $C = h_3(h_6h_8 - h_7^2) - \frac{1}{2}h_8h_4^2 - \frac{1}{2}h_6h_5^2 + h_7^2h_4h_5$.

Данная система обладает группой симметрий $SO(2)$:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto A_\phi \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}; \quad h_3 \mapsto h_3; \quad \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} \mapsto A_\phi \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} \mapsto A_\phi \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} A_\phi^T.$$

Таким образом, можно считать, что $h_7 = 0$

Структура решений определяется следующей матрицей

$$P = \begin{pmatrix} h_4 & h_6 & h_7 \\ h_5 & h_7 & h_8 \end{pmatrix}.$$

- Если $\operatorname{rk} P = 0$, тот система совпадает с вертикальной подсистемой на группе Гейзенберга (2,3)
- Если $\operatorname{rk} P = 1$, То возможны два варианта: либо группа (2,3,5) либо группа (2,3,4,5)
- Если $\operatorname{rk} P = 2$, то есть вырожденный случай, когда

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} = 1$$

и не вырожденный случай

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} = 2.$$

Вертикальная подсистема для левоинвариантной субримановой задаче на группе Карно с вектором роста (2,3,5,8)

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3; \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3; \\ \dot{h}_3 = h_1 h_4 + h_2 h_5; \\ \dot{h}_4 = h_1 h_6 + h_2 h_7; \\ \dot{h}_5 = h_1 h_7 + h_2 h_8; \\ \dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0. \end{cases}$$

Четырехмерные симплектические слои определяются отношением собственных чисел матрицы $\begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix}$ и значением казимира C.

В общем случае при $h_7 = 0$ после замены координат

$$h_1 = \sqrt{2H}\cos\theta \qquad h_2 = \sqrt{2H}\sin\theta$$

получаем на поверхности $H = \mathrm{const}$ следующую систему

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \dot\theta & = & k + \frac{1}{2}\left(h_4^2 + \dfrac{1}{\mu}h_5^2\right) \\ \dot h_4 & = & \sqrt{2H}\cos\theta \\ \dot h_5 & = & \mu\sqrt{2H}\sin\theta \end{array}\right.}$$

Здесь H, $k = \frac{C}{h_6 h_8 - h_7^2}$ и $\mu = h_8/h_6$ параметры, причем

$$H > 0,$$

и можно считать, что

$$k = 0, \pm 1 \qquad \text{либо} \qquad H = 1$$

Случай $\mu = 1$ можно интерпретировать как плоские горизонтальные движения заряженной частицы в вертикальном магнитной поле с напряженностью $k + \frac{1}{2}(h_4^2 + h_5^2)$

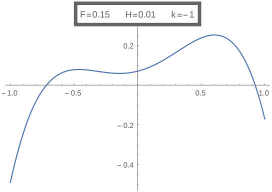
При

$$\boxed{\mu = 1}$$

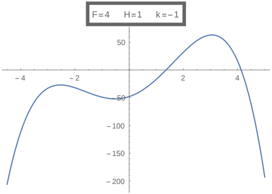
систему удалось проинтегрировать: есть дополнительный первый интеграл.

Теорема

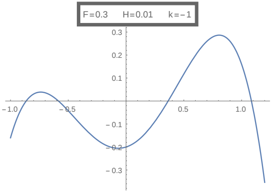
Геодезический поток на группе Карно с вектором роста (2,3,5,6) интегрируется в квадратурах (при $\mu = 1$).



Тор

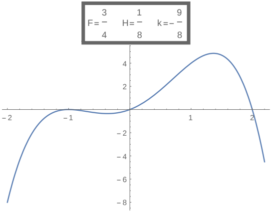


Тор

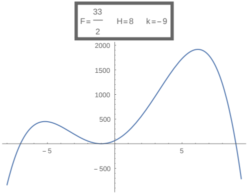


2 тора

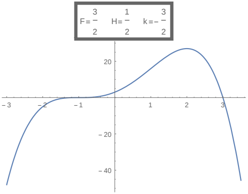
Рис.: Регулярные совместные поверхности уровня H и F



(a) Тор и окружность

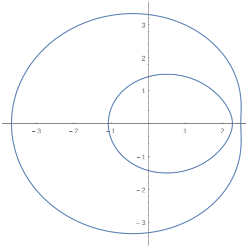


(b) Два склеенных по окружности тора

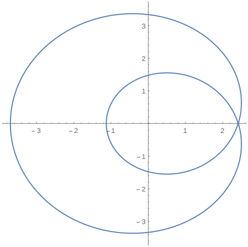


(c) Тор с особенность на окружности

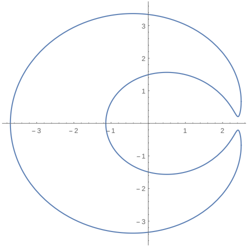
Рис.: Бифуркации совместных поверхностей уровня H и F



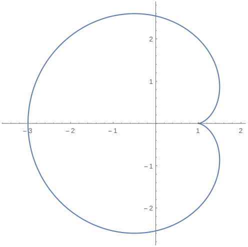
4 корня.



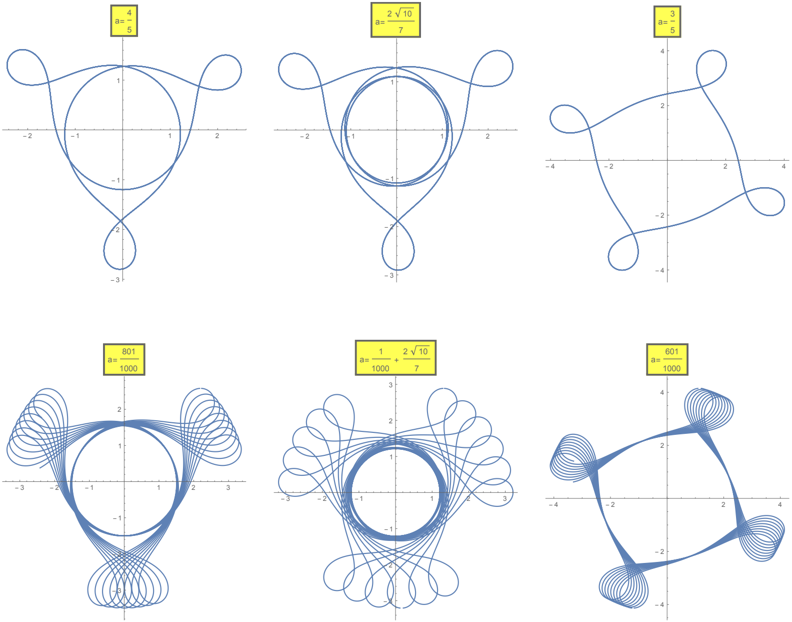
2 простых и 1 парный.



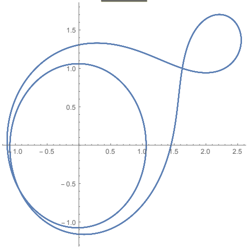
2 простых и
2 комплексных.



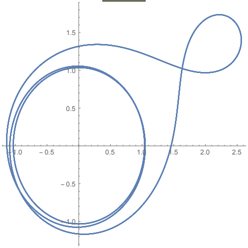
1 простой и
1 трехкратный.


$a=\frac{4}{5}$
$a=\frac{2\sqrt{10}}{7}$
$a=\frac{3}{5}$
$a=\frac{801}{1000}$
$a=\frac{1}{1000}+\frac{2\sqrt{10}}{7}$
$a=\frac{601}{1000}$

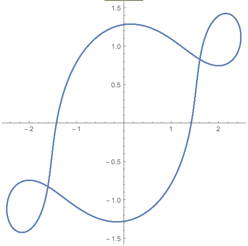
$a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$



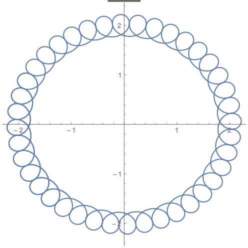
$a=\frac{\sqrt{15}}{4}$



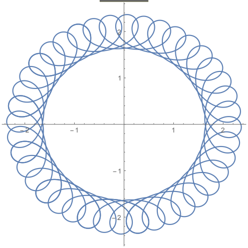
$a=\frac{\sqrt{5}}{3}$



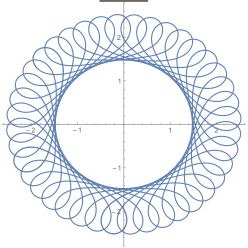
$a=\frac{9}{41}$

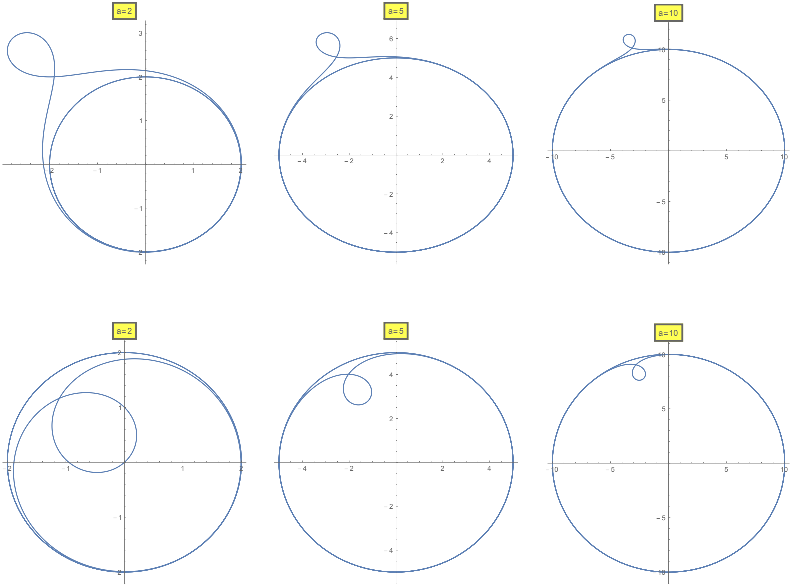


$a=\frac{\sqrt{249}}{43}$



$a=\frac{\sqrt{609}}{47}$



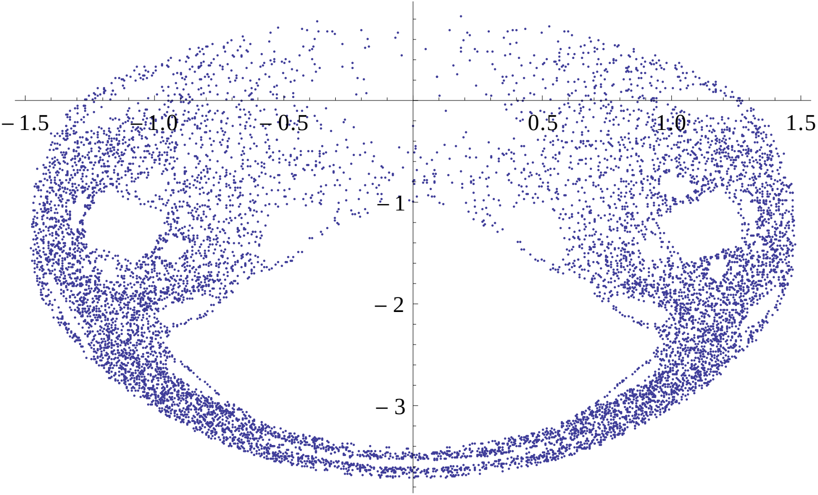

a=2
a=5
a=10
a=2
a=5
a=10

Теорема

Геодезический поток на группе Карно с вектором роста (2,3,5,6) является неинтегрируемым по Лиувиллю для некоторого открытого множества параметров μ.

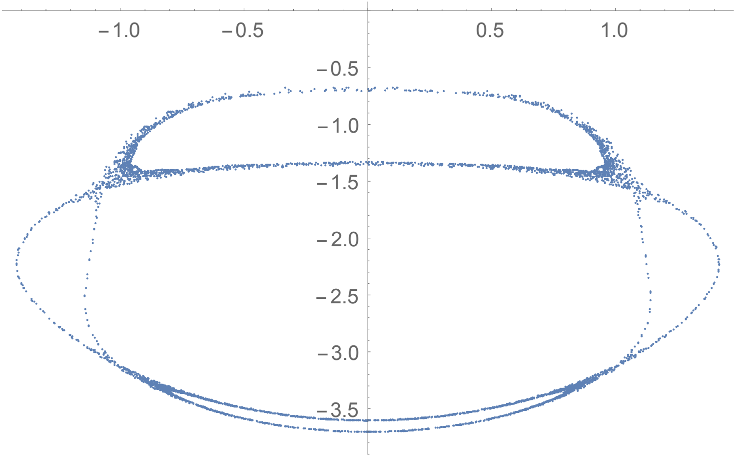
Следствие

Вертикальная подсистема свободной группы Карно глубины 4 с 2 образующими – вектор роста (2,3,5,8) – является неинтегрируемой по Лиувиллю.

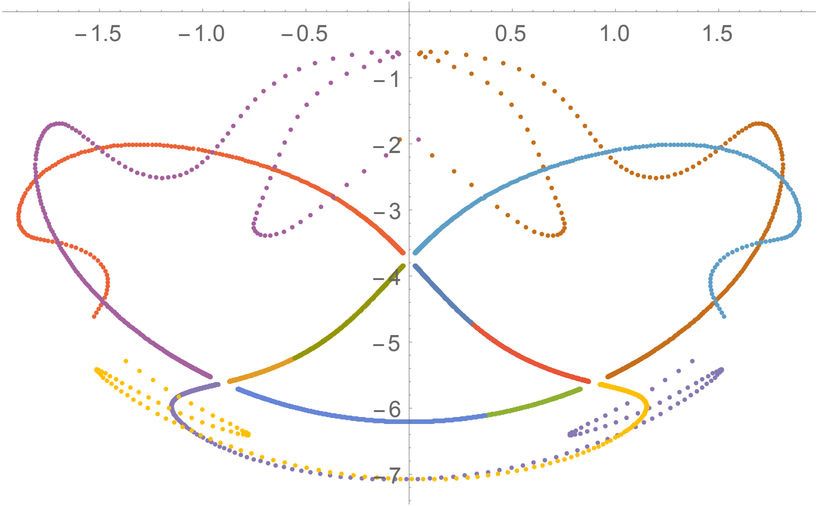


Итерации отображения последования Пуанкаре

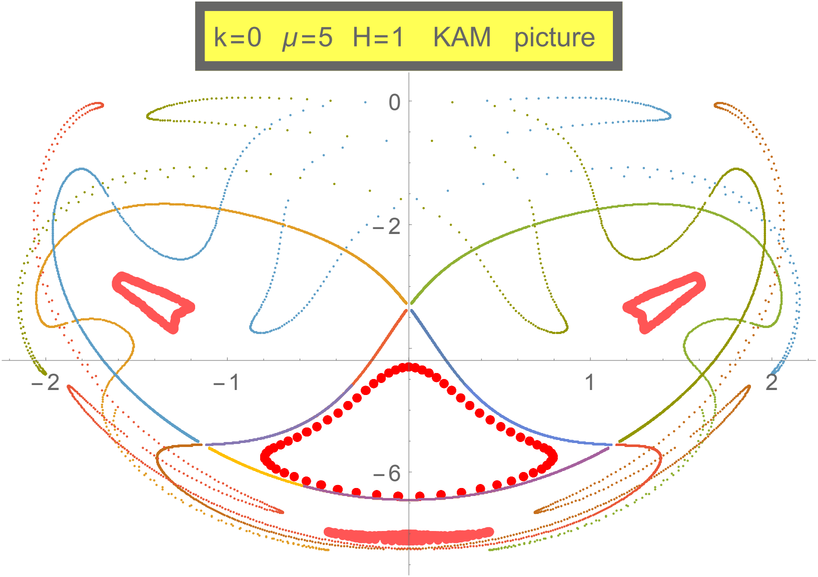
$k=0 \quad \mu=2 \quad H=1 \quad h_4^0=0 \quad h_5^0=-3.599 \quad \text{steps}=5000$



Итерации отображения последования Пуанкаре k=0.1 μ=5 H=1 Сепаратрисы для точки периода 3



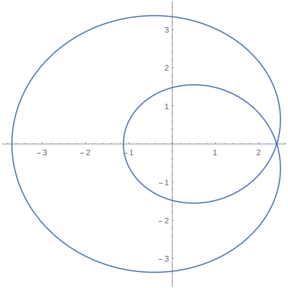
Расщепление сепаратрис по Зендеру при $k \neq 0$



Расщепление сепаратрис по Зендеру при $k = 0$

О доказательстве

В интегрируемом случаи при $\mu = 1$ совместная поверхность уровней H и F, отвечающая бифуркации 2 склеенных торов содержит выделенную периодическую траекторию и 2 пары попарно совпавших сепаратрис.



$$H = \frac{1}{2}a^2 > 0; \qquad F = \frac{1}{2} + a^2 > 0; \qquad k = -1 - \frac{1}{2}a^2 < 0;$$

Интеграл Мельникова-Пуанкаре имеет вид

$$MP = A\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi$$

где $\varphi \in (-\infty; +\infty)$ – специальный параметр, параметризующий сепаратрису. Здесь

$$A = \left(\frac{1}{4}\dot{\theta}(h_5^2 + h_4^2) + \frac{1}{2}a^2\int \sin 2\theta\, dt\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty};$$

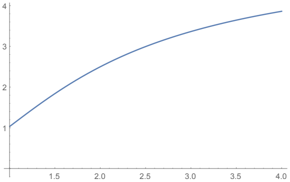
$$B = \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}h_4h_5 + \frac{1}{2}a^2\int \cos 2\theta\, dt\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty};$$

Где $(\theta(t), h_4(t), h_5(t))$ – сепаратрисное решение

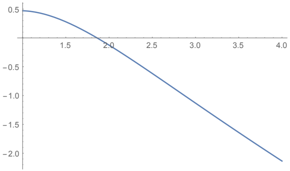
$$\begin{cases} \theta = -t + 2w; \\ h_4 = a\sin t - 2\cos(w - t); \\ h_5 = a\cos t - 2\sin(w - t); \end{cases}$$

Здесь $w = 2\operatorname{arctg} u$, и

$$\begin{cases} u_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}\,\operatorname{cth}\frac{\sqrt{a^2-1}}{2}\,t; \\ u_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}\,\operatorname{th}\frac{\sqrt{a^2-1}}{2}\,t. \end{cases}$$



Зависимость $A(a)$.



Зависимость $B(a)$.

Данные графики построены для внешней пары сепаратрис. В этом случае предельные значения $A(a)$ и $B(a)$ при $a \to 1+0$ есть

$$\frac{8\pi \sin 2}{3e^2} \qquad \text{и} \qquad -\frac{8\pi \sin 2}{3e^2}$$