Динамика задачи Суслова в поле тяжести: реверс и странные аттракторы

И. А. Бизяев[1], А. В. Борисов[1], А. О. Казаков[2]

[1] Институт компьютерных исследований, Ижевск
[2]НИИ ПМК ННГУ, Нижний Новгород

1. Уравнения движения

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в присутствии неголономной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) = 0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела и $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, неподвижный в теле.

Связь (1) введена Г. К. Сусловым в [1, стр. 593]. Реализация связи (1) с помощью колесиков с острыми краями обкатывающими неподвижную сферу предложена В. Вагнером [2] (см. рис.1). Острые края колесиков препятствуют скольжению колесиков в направлении, перпендикулярном их плоскости.

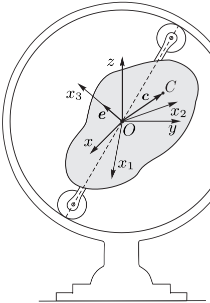


Рис. 1. Реализация задачи Суслова.

Выберем две системы координат:

— *инерциальную* (неподвижную) систему координат $Oxyz$;

— *неинерциальную* (подвижную) систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом, таким образом что $Ox_3 \| \boldsymbol{e}$, а оси Ox_1 и Ox_2 направлены так чтобы одна из компонент тензора инерции тела обращалась в нуль: $I_{12} = 0$.

Для параметризации конфигурационного пространства выберем матрицу направляющих косинусов $\mathbf{Q} \in SO(3)$, по столбцам которой стоят $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ — орты неподвижных осей Ox, Oy и Oz, спроецированные на оси подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

В подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ уравнение связи (1) и тензор инерции $\mathbf{I}$ твердого тела имеют вид

$$\omega_3 = 0,$$
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — вектор смещения центра масс тела относительно неподвижной точки O и будем считать, что вся система находится в поле тяжести с потенциалом

$$U = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{b} = -m\mathsf{g}\boldsymbol{c}$$

где m — масса твердого тела и g —- ускорение свободного падения.

Уравнения движения для $\boldsymbol{\omega}$ в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \lambda = -\frac{\left(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{e}\right)}{(\boldsymbol{e}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{e})},\end{gathered} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{e} = (0, 0, 1)$.

Дополним систему (3) кинематическими уравнениями Пуассона, описывающими эволюцию ортов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{4}$$

получим полную систему, описывающую движение твердого тела.

В уравнениях (3) и (4) отделяется замкнутая система для переменных $(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, которая с учетом связи (2) представляется в форме:

$$\begin{aligned} &I_{11}\dot{\omega}_1 = -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + b_3\gamma_2 - b_2\gamma_3, \\ &I_{22}\dot{\omega}_2 = \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + b_1\gamma_3 - b_3\gamma_1, \\ &\dot{\gamma}_1 = -\gamma_3\omega_2, \\ &\dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1, \\ &\dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Система (5) обладает интегралом энергии и геометрическим:

$$E = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \tag{6}$$

Таким образом, на фиксированном уровне интеграла энергии $E = h$ и $F_1 = 1$ система (5) определяет поток на трехмерном многообразий $\mathcal{M}_h^3$:

$$\mathcal{M}_h^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \mid E = h,\ F_1 = 1\},$$

для его интегрируемости по теореме Эйлера-Якоби [17] не хватает дополнительного первого интеграла F_2 и инвариантной меры.

Для того, чтобы по найденным решениям $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\gamma}(t)$ из (5) восстановить движение твердого тела в неподвижной системе координат $Oxyz$ нужно определить $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ из системы (4), которая сводится к уравнению для угла прецессии ψ, то есть к квадратуре

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_1(t)\gamma_1(t) + \omega_2(t)\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)}. \tag{7}$$

Поэтому свойства получившейся системы (5) во многом определяют свойства динамики всей системы.

2. Первые интегралы и инвариантная мера

В зависимости от вида тензора инерции, а также смещения центра масс твердого тела система (5) может обладать дополнительным первым интегралам, а также (возможно сингулярной) инвариантной мерой. В данном разделе будем рассматривать следующий частные случаи:

— уравновешенное твердое тело ($\boldsymbol{b} = 0$), у которого $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$;

— неуравновешенное твердое тело ($\boldsymbol{b} \neq 0$), в котором $\boldsymbol{e}$ направлен вдоль одной из главных осей инерции тела: $I_{13} = I_{23} = 0$;

— неуравновешенное твердое тело ($\boldsymbol{b} \neq 0$), у которого $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$.

2.1. Уравновешенное твердое тело ($\boldsymbol{b} = 0$)

В системе (5) уравнения для угловых скоростей ω_1 и ω_2 отделяются. Фазовый портрет на фиксированном уровне энергии $E = h$ изображен на рисунке 2, в котором прямая $I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 = 0$ целиком заполнена неподвижными точками.

На каждом уровне энергии лежат две (изолированные) неподвижные точки, одна асимптотически устойчива, другая асимптотически неустойчива (см. например [3]).

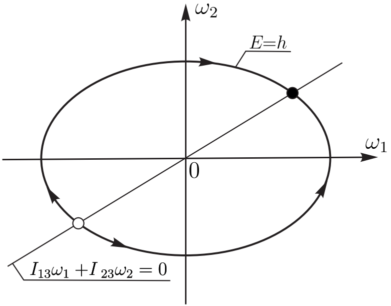


Рис. 2. Характерный фазовый портрет системы (5).

Вследствие асимптотическое поведения, в данном случае система (5) обладает инвариантной мерой с сингулярной плотностью [3]

$$\rho = (I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)^{-1}.$$

Явно проинтегрировав находим

$$\begin{gathered}
\omega_1(t) = \frac{\omega_0 I_{22}}{I_{11}I_{23}^2 + I_{22}I_{13}^2}\,\frac{2I_{13}\sqrt{I_{11}I_{22}}e^{\omega_0 t} \pm I_{11}I_{23}(1-e^{2\omega_0 t})}{1+e^{2\omega_0 t}},\\
\omega_2(t) = \frac{\omega_0 I_{11}}{I_{11}I_{23}^2 + I_{22}I_{13}^2}\,\frac{2I_{23}\sqrt{I_{11}I_{22}}e^{\omega_0 t} \pm I_{22}I_{13}(1-e^{2\omega_0 t})}{1+e^{2\omega_0 t}},\\
h = \frac{I_{11}^2 I_{22}^2 \omega_0^2}{I_{11}I_{23}^2 + I_{22}I_{13}^2}
\end{gathered} \tag{8}$$

Для найденных $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ орт $\boldsymbol{\gamma}$ определяется согласно (5) линейной неавтономной системой уравнений, которая при помощи комплексной замены переменных сводится к уравнению Риккати (см. например [2]). Тем не менее, в общем случае ее решение ветвится на комплексной плоскости времени [5] и тем самым не представляется в квадратурах.

В работе [3] отмечено, что при следующем ограничении на моменты инерции:

$$I_{13} = 0, \quad I_{11} = I_{22} + \frac{I_{23}^2}{I_{22}} k^2, \quad \text{где} \quad k = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

система (5) обладает дополнительным интегралом F_2 [3]:

$$F_2 = f_1^{(k)}(\omega_1, \omega_2)\gamma_1 + f_2^{(k)}(\omega_1, \omega_2)\gamma_2 + f_3^{(k)}(\omega_1, \omega_2)\gamma_3,$$

где коэффициенты $f_1^{(k)}$, $f_2^{(k)}$ и $f_3^{(k)}$ представляют собой полиномы нечетной степени k по скоростям ω_1 и ω_2. Например при $k = 1$ получаем:

$$f_1^{(1)} = \left(I_{22} + \frac{I_{23}^2}{I_{22}}\right)\omega_1, \quad f_2^{(1)} = I_{22}\omega_2, \quad f_3^{(1)} = I_{23}\omega_2.$$

Явное решение $\boldsymbol{\gamma}(t)$ в этом случае получено в работе [6].

Опишем движение твердого тела в абсолютном пространстве, то есть в неподвижной системе координат $Oxyz$. Неподвижным точкам системы (5) в $Oxyz$ соответствуют стационарные вращения вокруг $\boldsymbol{\omega}$. Все остальные движения твердого тела представляет собой переход от одного неустойчивого стационарного вращения к другому устойчивому. Связь такой асимптотической задачи с явлением реверса была указана в [42], где также обсуждаются аналогичные эффекты в других неголономных задачах.

При этом происходит поворот оси вращения на некоторый угол $\Delta\Phi$, который оказывается не зависит от энергии и при $I_{13} = 0$ определяется соотношением [6]:

$$\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\frac{I_{22}}{I_{23}}\right)}, \quad k^2 = \frac{I_{22}}{I_{23}}(I_{11} - I_{22}). \tag{10}$$

Таким образом при нечетных k, то есть когда имеется указанный выше интеграл ось вращения меняет направление на обратное: $\Delta\Phi = \pm\pi$.

2.2. Неуравновешенное тяжелое твердое тело ($\boldsymbol{b} \neq 0$)

Пусть центр масс твердого тела смещен относительно геометрического центра сферической оболочки (т. е. $\boldsymbol{b} \neq 0$). В этом случае систему (5) можно называть волчком Суслова (по аналогии с волчком Лагранжа).

Как показано в [15] необходимое и достаточное условие существования инвариантной меры является $I_{13}^2 + I_{23}^2 = 0$. Рассмотрим условия существования дополнительного интеграла при наличии и отсутствии инвариантной меры.

Случай $\mathbf{I_{13} = I_{23} = 0}$. Система (5) сохраняет стандартную инвариантную меру ($\rho = \mathrm{const}$), а дополнительный интеграл F_2 найден в двух случай

— случай Е. И. Харламовой ($b_3 = 0$) [16] и $F_2 = I_{11}b_1\omega_1 + I_{22}b_2\omega_2$;

— случай В. В. Козлова ($b_1 = b_2 = 0$, $I_{22} = I_{11}$) [15] и $F_2 = \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2$.

В [20] было доказано, что если центр масс смещен только вдоль Ox_3 (т.е. $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$) дополнительный мероморфный интеграл существует только при $I_{22} = I_{11}$. Отсутствие дополнительного мероморфного интеграл при более общих ограничениях на $\boldsymbol{b}$ доказано в [25, 21]).

Замечание. Задача Суслова при $I_{13} = 0$ и $I_{23} = 0$, но в различных интегрируемых потенциальных полях $U = U(\gamma_1, \gamma_2)$ обладает необычными топологическими свойствами, которые указаны в работах [22, 23, 24, 3]. При этом двумерные интегральные многообразия могут иметь род $g > 2$, то есть не являются торами. В этом случае уравнения движения можно представить в гамильтоновой форме, после замены времени $dt = \gamma_3^{-1}d\tau$, которая неопределена при $\gamma_3 = 0$.

Случай $\mathbf{I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0}$. Здесь укажем новый случай, в котором существует дополнительный интеграл F_2. В этом случае система уже неинтегрируема по теореме Эйлера-Якоби, но ее динамика является регулярной.

Если компоненты тензора инерции и смещение центра масс удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} I_{13} = 0, \quad I_{23}^2 - I_{22}(I_{11} - I_{22}) = 0, \\ b_1 = 0, \quad I_{22}b_2 + I_{23}b_3 = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

тогда система (5) обладает дополнительным интегралом

$$F_2 = (I_{22}^2 + I_{23}^2)\gamma_1\omega_1 + I_{22}(I_{22}\gamma_2 + I_{23}\gamma_3)\omega_2.$$

Отметим семейство (11) одновременно является общением семейства (9) при $k = 1$ и случая В. В. Козлова.

Таким образом система (5) при условиях (11) определяет поток без гладкой инвариантной меры на некотором двумерном многообразии

$$\mathcal{M}_{h,f}^2 = \{(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \mid E = h,\ F_1 = 1,\ F_2 = f\}.$$

Замечание. Потоки на двумерном многообразии без гладкой инвариантной меры также встречались в других неголономных системах (см., например, [10, 8]).

Открытым остается вопрос о топологическом типе $\mathcal{M}_{h,f}^2$ и структуре слоения определяемого интегралами H, F_1 и F_2.

3. Отображение Пуанкаре и инволюции

Для исследования динамики применен программный комплекс "Компьютерная динамика: Chaos", разработанный в Институте Компьютерных Исследований УдГУ и который позволяет строить карты режимов и показателей Ляпунова, исследовать бифуркации неподвижных точек, а также визуализировать движение тела.

В общем случае, уравнения (5) задают поток $\mathcal{F}$ на трехмерном многообразий

$$\mathcal{M}_h^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \mid E = h,\ F_1 = 1\}.$$

Для параметризации этого потока будем использовать переменные ω_1, γ_1 и γ_2, выражая ω_2 и γ_3 через интегралы (6):

$$(\dot{\omega}_1, \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) = \mathcal{F}(\omega_1, \gamma_1, \gamma_2)^{1}.$$

[1] При этом ω_2, а также γ_3 легко выражается через энергию и геометрический интеграл. Так как переменные ω_1 и ω_2 входят в уравнения (5) равноценно, то аналогичным образом можно записать трехмерный поток в переменных $(\omega_2, \gamma_1, \gamma_2)$

Выбрав плоскость $\gamma_1 = \mathrm{const}$ в качестве секущей трехмерного потока $\mathcal{F}$, получим двумерное отображение Пуанкаре[2]

$$(\bar{\gamma}_2, \bar{\omega}_1) = \mathcal{P}(\gamma_2, \omega_1). \tag{12}$$

Так как переменные γ_3 и ω_2 определяется через интегралы неоднозначно, то полученное отображение является многолистным (выбор знаков γ_3 и ω_2 определяет конкретный лист). Для определенности, в дальнейшем, будем выбирать лист, соответствующий положительным значениям переменной ω_2.

На сконструированном двумерном отображении Пуанкаре $\mathcal{P}$ неподвижным точкам соответствуют периодические орбиты (циклы) в исходной системе (5).

[2] Подробнее ознакомится с процедурой конструирования отображений Пуанкаре для различных задач динамики твердого тела можно по книге [46].

3.1. Обратимость и инволюции

Исследования [12, 13, 14] показывают, что наличие обратимости и количество инволюций в системе существенно влияют на тип и сложность динамики неголономных систем. Работы [12, 13] посвящены исследованиям движения твердого тела различной формы, двигающегося по поверхности без проскальзывания и верчения. В них показано, что в зависимости от геометрических и динамических свойств тела, система может обладать различным количеством инволюций, что в итоге определяет тип хаотической динамики в системе. В работе [14] представлены результаты исследования волчка Чаплыгина (динамически несимметричного шара со смещенным центром масс). При произвольном смещения центра масс этого волчка система обратима относительно единственной инволюции, а сам волчок может совершать реверс (как кельтский камень). Кроме того, в этом случае в системе удалось обнаружить странный аттрактор восьмерочного типа. Работы [26, 28, 29] посвящены исследованию движения кельтского камня. В них также отмечено, что динамика кельтского тоже связана с инволюциями.

Перейдем к исследованию обратимости в системе (5). В общем случае (при любых параметрах) система обратима только относительно одной инволюции

$$R_0 : \omega_1 \to -\omega_1, \quad \omega_2 \to -\omega_2, \quad t \to -t. \tag{13}$$

Замечание. Напомним, что система называется *обратимой* относительно *инволюции* R, если эта система инвариантна относительно замены R и обращении времени $t \to -t$, а преобразование $R \circ R$ является тождественным.

Благодаря наличию этой инволюции, фазовый портрет системы (5) обладает следующими свойствами:

- Для каждой траектории $\mathcal{F}(\gamma_1, \gamma_2, \omega_1)$ существует симметричная (относительно $Fix(R_0) = \{\omega_1 = 0\}$) траектория $\mathcal{F}^{-1}(R_0(\gamma_1, \gamma_2, \omega_1))$, находящаяся в инволюции с исходной.
- Если множество A является притягивающим, (аттрактором), то множество $R_0(A)$, будет притягивающим для потока в обратном времени $\mathcal{F}^{-1}$, то есть репеллером.

В разделе 4.1 будет показано, что благодаря описанным свойствам в системе (5) возможен реверс такого же типа, как и для кельтских камней[3].

[3] Напомним, что реверс для кельтского камня заключается в изменении направления вращении вокруг вертикальной оси на противоположное при закрутке камня вокруг этой оси в “неудобном” направлении.

Рассмотрим волчок Суслова, центр масс которого смещен только вдоль оси Ox_3, то есть $\boldsymbol{b} = (0, 0, b_3)$. В этом случае, в зависимости от тензора инерции $\mathbf{I}$, в системе (5) могут появиться дополнительные инволюции, полный перечень которых содержится ниже, в таблице:

Table 1. Дополнительные инволюции системы (5) при $\boldsymbol{b} = (0, 0, b_3)$.

	$I_{13} = 0,\ I_{23} = 0$	$I_{13} = 0,\ I_{23} \neq 0$	$I_{13} \neq 0,\ I_{23} = 0$	$I_{13} \neq 0,\ I_{23} \neq 0$
R_1: $\omega_1 \to -\omega_1$, $\gamma_1 \to -\gamma_1$, $t \to -t$	+	+	-	-
R_2: $\omega_2 \to -\omega_2$, $\gamma_2 \to -\gamma_2$, $t \to -t$	+	-	+	-

Для того, чтобы приведенные выше инволюции перенести на отображение Пуанкаре (12), нужно в качестве секущей задать многообразие, инвариантное по отношению действия инволюции. Поэтому, наиболее подходящей секущей для системы (5) является гиперплоскость $\gamma_1 = 0$. Заметим, что на отображении Пуанкаре (12) мы работаем с листом, соответствующим определенному (положительному) значению переменной ω_2, а значит некоторые инволюции (например, R_0 и R_2) не могут быть перенесены.

Таким образом, сконструированное отображение Пуанкаре (12), при выборе секущей $\gamma_1 = 0$ и дополнительном условии $I_{13} = 0$, может обладать лишь единственной инволюцией

$$r_1 : \omega_1 \to -\omega_1, \tag{14}$$

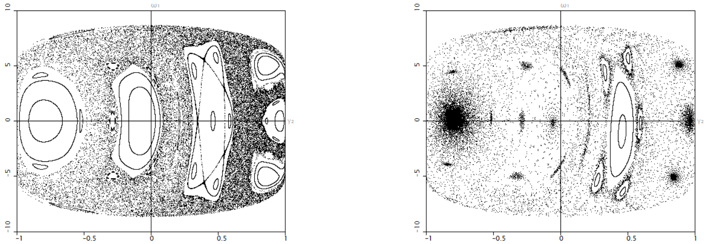
множество неподвижных точек которой образует прямую

$$Fix(r_1) = \{\omega_1 = 0\}.$$

В разделе 5 прямая $Fix(r_1)$ нам понадобится для исследования и классификации хаотической динамики. Поэтому, для удобства, введем следующие определения. Будем называть *обратимым аттрактором* предельное множество, образованное итерациями (на отображении Пуанкаре) линии $\omega_1 = 0$ в прямом времени, а *обратимым репеллером* – предельное множество, состоящее из итераций этой линии в обратном времени. По теореме Пуанкаре о возвращении [43], в случае существования гладкой инвариантной меры в системе, обратимые аттрактор и репеллер неразличимы. В противном случае, эти множества различимы, но симметричны друг другу относительно ω_1. В разделе 5 будет использована степень такой различимости для классификации хаотических режимов.

На рисунке 3 приведены фазовые портреты системы (5) при различных параметрах. Для волчка Суслова, у которого $I_{13} = 0$, отображение Пуанкаре инволютивно относительно прямой $\omega_1 = 0$ (см. рис. 3a).

В общем случае отображение Пуанкаре (12) инволюциями не обладает, причем на нем заметны сгущения точек (практически черные области) соответствующие простым аттракторам — неподвижным и периодическим точкам на отображении Пуанкаре (см. рис. 3b). Как известно, существование любых аттракторов препятствует к существованию гладкой инвариантной меры. Кроме того, наличие хаотического слоя свидетельствует об отсутствии дополнительного первого интеграла F_2.



a) $I_{13} = 0$ b) $I_{13} = 0.1$

Рис. 3. Фазовый портрет на отображении Пуанкаре (12). Все параметры кроме I_{13} выбраны следующим образом: $E = 50$, $I_1 = 4$, $I_2 = 3$, $I_{23} = 0$, $\boldsymbol{b} = (0, 0, 100)$. a) Благодаря наличию инволюции r_1 фазовый портрет на отображении Пуанкаре выглядит симметричным относительно горизонтальной оси. b) При $I_{13} \neq 0$, инволюция r_1 пропадает, а фазовый портрет на отображении Пуанкаре становится несимметричным. Более того, на отображении Пуанкаре видны сгущения траекторий вблизи асимптотически устойчивых точек различных периодов.

4. Реверс и неподвижные точки

В данном разделе мы приводим результаты исследования состояний равновесия системы (5), для неуравновешенного волчка Суслова ($\boldsymbol{b} \neq 0$), распределение масс которого задается недиагональным тензором инерции ($I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$).

4.1. Неподвижные точки приведенной системы На фиксированном уровне геометрического интеграла ($F_1 = 1$), в системе (6) при $\boldsymbol{b} \neq 0$ и $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$ можно выделить три семейства состояний равновесия.

1. Пара изолированных положений равновесия

$$\Omega_1 = \left\{ \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \gamma_1 = \pm \frac{b_1}{\sqrt{\boldsymbol{b}^2}}, \gamma_2 = \pm \frac{b_3}{\sqrt{\boldsymbol{b}^2}}, \gamma_3 = \pm \frac{b_3}{\sqrt{\boldsymbol{b}^2}} \right\}.$$

2. Однопараметрическое семейство положений равновесий вида:

$$\Omega_2 = \left\{ \omega_1 = \sin\varphi \sqrt{\frac{b_3}{A}}, \omega_2 = \cos\varphi \sqrt{\frac{b_3}{A}}, \gamma_1 = \sin\varphi, \gamma_2 = \cos\varphi, \gamma_3 = 0 \right\},$$

3. Однопараметрическое семейство положений равновесий вида:

$$\Omega_3 = \left\{ \omega_1 = -\sin\varphi \sqrt{\frac{b_3}{A}}, \omega_2 = -\cos\varphi \sqrt{\frac{b_3}{A}}, \gamma_1 = \sin\varphi, \gamma_2 = \cos\varphi, \gamma_3 = 0 \right\}.$$

Притом, переменная A и угол φ (в зависимости от знака параметра b_3) для семейств Ω_2 и Ω_3 выражаются следующим образом:

$$A = I_{13} \sin \varphi + I_{23} \cos \varphi,$$
$$\varphi \in (\widetilde{\varphi}, \pi + \widetilde{\varphi}), \text{ если } b_3 > 0$$
$$\varphi \in (\pi + \widetilde{\varphi}, 2\pi + \widetilde{\varphi}), \text{ если } b_3 < 0$$
$$\widetilde{\varphi} = -\arctan \frac{I_{23}}{I_{13}}.$$

Пара изолированных положений равновесия семейства Ω_1 лежит на фиксированном уровне интеграла энергии $h = \pm b_3$ и имеет характеристический полином вида:

$$P(\lambda) = \lambda \left(-\lambda^4 \pm \left(\frac{b_1^2 + b_3^2}{I_{22}\sqrt{\boldsymbol{b}^2}} + \frac{b_2^2 + b_3^2}{I_{22}\sqrt{\boldsymbol{b}^2}} \right) \lambda^2 - \frac{b_3^2}{I_{11} I_{22}} \right) \quad (15)$$

Заметим, что на изолированных состояниях равновесия интеграл энергии $E = h$ и геометрический интеграл $F_1 = 1$ зависимы, поэтому характеристический полином имеет лишь один нулевой корень. Анализ остальных корней уравнения (15) показывает, что одно из состояний равновесия является центром, а второе консервативным седлом.

Рассмотрим подробнее второе и третье семейства неподвижных точек. Подставив состояние равновесия из Ω_2 (или Ω_3) в уравнение (6), получим соотношение, связывающее φ с уровнем интеграла энергии $E = h$:

$$h(\varphi) = \frac{b_3}{2A}(I_{11}\sin^2\varphi + I_{22}\cos^2\varphi) + b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi. \tag{16}$$

Характерная зависимость $h(\varphi)$ в случае $b_3 > 0$ представлена на рис. 4.

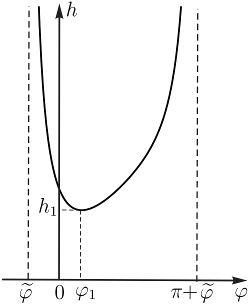


Рис. 4. Зависимость $h(\varphi)$.

Таким образом, при малых значениях параметра энергии $h < h_1$ в системе (5) отсутствуют состояния равновесия Ω_2 и Ω_3, при $h = h_1$ появляется 2 состояния равновесия, а при $h > h_1$ их становится 4.

Характеристическое уравнение для второго семейства Ω_2 состояний равновесия линеаризованной системы записывается в виде:

$$\begin{gathered} P(\lambda) = \lambda^2(p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4), \\ p_1 = -I_{11}I_{22}A, \quad p_2 = (I_{11}I_{23}\sin\varphi - I_{22}I_{13}\cos\varphi)\sqrt{Ab_3}, \\ p_3 = A(I_{11}b_1\sin\varphi + I_{22}b_2\cos\varphi) - b_3(I_{11}I_{22} + 2A^2), \\ p_4 = 2A\sqrt{Ab_3}(b_1\cos\varphi - b_2\sin\varphi) + \\ +(I_{11} - I_{22})\sqrt{Ab_3}\sin\varphi\cos\varphi + \sqrt{Ab_3}(I_{11}I_{23}\sin\varphi - I_{22}I_{13}\cos\varphi) \end{gathered} \tag{17}$$

Замечание. При $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$ след матрицы линеаризации равняется $-\frac{p_2}{p_1} \neq 0$, что свидетельствует об отсутствии гладкой инвариантной меры в системе (6) в рассматриваемом случае [15].

Замечание. Заметим, что третье семейство состояний равновесия находится в инволюции R_0 со вторым семейством. Следовательно, если состояние равновесия $O_1 \in \Omega_2$ обладает собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$, то $O_2 = R_0(O_1)$ будет принадлежать семейству Ω_3 и иметь собственные числа $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_5$. Таким образом, далее будем проводить исследования состояний равновесия принадлежащих лишь семейству Ω_2.

В общем случае, на каждом уровне интеграла энергии $E > h_1$ семейство Ω_2 содержит 2 состояния равновесия, каждое из которых имеет 3 ненулевых собственных числа $(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \lambda_3^{(i)}), i = 1, 2.$

Заметим, что коэффициенты характеристического уравнения (17) кроме параметров системы зависят от угла φ, который, в свою очередь, выражается через энергию из уравнения (16). Таким образом, аналитические исследования устойчивости состояний равновесия затруднительны.

Для численного исследования устойчивости состояний равновесия, принадлежащих семейству Ω_2 построим диаграмму устойчивости состояний равновесия на плоскости параметров (I_{23}, E), зафиксировав остальные параметры следующими значениями:

$$I_1 = 4, I_2 = 2, I_{13} = 1.5, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 100. \tag{18}$$

При указанных параметрах характеристическое уравнение всегда обладает одним действительным корнем (для определенности λ_1) и парой комплексно-сопряженных корней.

Для построения диаграммы устойчивости мы разбиваем плоскость параметров (I_{23}, E) на 200×200 точек, а каждую из точек, в зависимости от количества состояний равновесия и их типов, окрашиваем определенным цветом в соответствии со следующими правилами:

- не существует состояний равновесия – серый;
- 2 состояния равновесия, у которых $\lambda_1^{(1)} > 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(1)}) < 0$ и $\lambda_1^{(2)} < 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(2)}) < 0$ – зеленый;
- 2 состояния равновесия, у которых $\lambda_1^{(1)} < 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(1)}) > 0$ и $\lambda_1^{(2)} > 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(2)}) > 0$ – голубой.

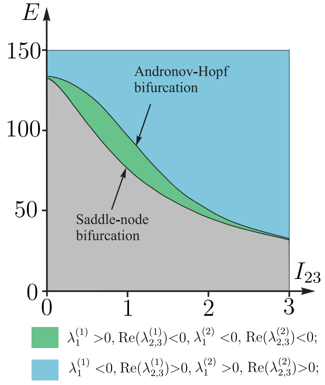


Рис. 5. Диаграмма устойчивости состояний равновесия из семейства Ω_2 при параметрах (18).

Прокомментируем построенную на рисунке 5 диаграмму устойчивости. При малых энергиях ($E < h_1$) состояния равновесия в системе отсутствуют. При достижении критического уровня энергии $E = h_1$, в системе происходит седлоузловая бифуркаций, в результате которой рождается седлоузловое состояние равновесия, распадающееся, при дальнейшем увеличении энергии, на устойчивый узел ($\lambda_1^{(1)} < 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(1)}) < 0$) и седло ($\lambda_1^{(2)} > 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(2)}) < 0$).

Далее, при увеличении энергии до значения $E = h_2$, седловое состояние равновесия претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа и (при $E > h_2$) становится вполне неустойчивым ($\lambda_1^{(2)} > 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(2)}) > 0$). Отметим, что бифуркация Андронова-Хопфа здесь может быть двух разных типов (см. раздел 5.2 для подробного описания).

4.2. Движение твердого тела в неподвижных точках

Рассмотрим абсолютные движения волчка Суслова на каждом из трех семейств состояний равновесия.

В изолированных положениях равновесия семейства Ω_1 твердое тело остается неподвижным в системе координат $Oxyz$. При этом для состояния равновесия типа седло, центр масс волчка Суслова лежит на оси Oz ниже неподвижной точки, а для состояния равновесия типа центр – выше.

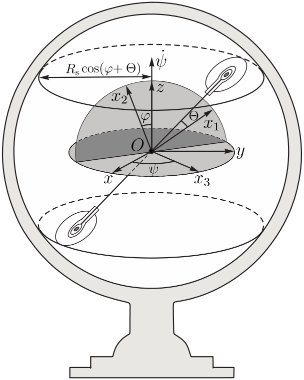


Рис. 6. Движение твердого тела на состояниях равновесия, принадлежащих семействам Ω_2 и Ω_3 системы (5)

На состояниях равновесия, принадлежащих семействам Ω_2 и Ω_3, вектора $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ коллинеарны. Поэтому волчок Суслова вращается с постоянной скоростью вокруг оси Oz. Так как на рассматриваемых семействах $\gamma_3 = 0$, ось Ox_3 всегда находится в плоскости Oxy, а параметр φ определяет угол между Oz и Ox_2. При этом уравнение прецессии (7) принимает следующий вид:

$$\dot{\psi} = \pm\sqrt{\frac{b_3}{A}}.$$

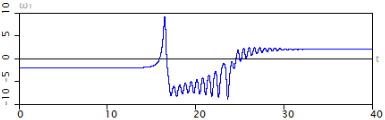
Во время вращения волчка Суслова, точка контакта колес с (неподвижной) сферой движется по окружности с центром $(0, 0, \pm R_{\mathsf{s}} \sin(\varphi + \Theta))$, где R_{s} – радиус сферы, а Θ — угол поворота оси соединяющей колеса относительно оси Ox_1 (см. рис. 6).

Замечание. Напомним, ориентация осей Ox_1 и Ox_2, а следовательно и угол Θ выбраны таким образом, чтобы одна из компонент тензора инерции обратилась в нуль ($I_{12} = 0$).

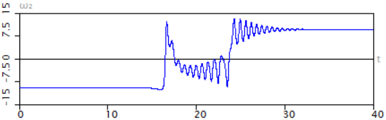
4.3. Реверс

В зависимости от количества устойчивых и неустойчивых состояний равновесия в системе (5) возможны различные типы движений волчка Суслова в абсолютном пространстве.

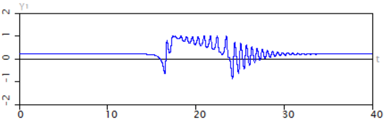
При выборе параметров, соответствующих узкой (окрашенной зеленым цветом) области на рисунке 5, в системе (помимо пары седловых) существует устойчивое O^+ и вполне неустойчивое O^- состояния равновесия, находящиеся в инволюции R_0, то есть $O^+ = R_0(O^-)$. Траектории, запущенные из окрестности вполне неустойчивого состояния равновесия O^-, могут переходить на устойчивое состояние равновесия O^+. В результате этого перехода ось вращения волчка (Ox_3) переворачивается (см. рис. 7).



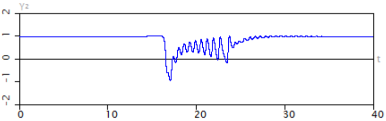
a) $\omega_1(t)$



b) $\omega_2(t)$



c) $\gamma_1(t)$



d) $\gamma_2(t)$

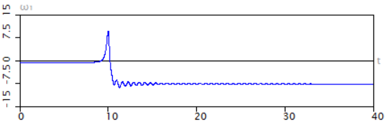
Рис. 7. Зависимость фазовых переменных от времени при запуске траектории из окрестности неустойчивого состояния равновесия при $E = 100$, $I_1 = 4$, $I_2 = 2$, $I_{13} = 1.5$, $I_{23} = 0.75$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 100$.

В абсолютном пространстве этому процессу соответствуют изменение направления вращения волчка вокруг неподвижной вертикальной оси на противоположное. Как уже указывалось такой тип реверса впервые был обнаружен при исследований кельтского камня [19, 18].

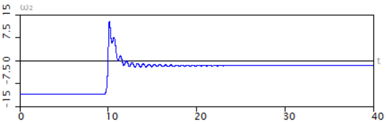
Большой области, закрашенной на рисунке 5 голубым цветом, соответствуют значения параметры, при которых в системе (5) существует пара устойчивых и пара вполне неустойчивых состояний равновесия. В этом случае, траектории, запущенные вблизи одного из неустойчивых состояний равновесия ($\widetilde{O}^-$), как показывают численные эксперименты, могут переходить на устойчивое состояние равновесия ($\widetilde{O}^+$), не находящееся (в отличии от предыдущего случая) в инволюции R_0 с исходным. При таком переходе ось вращения Ox_3 совершает поворот на угол $\Delta\varphi$ (см. рис. 8):

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{\widetilde{\gamma_1}^{(+)}}{\widetilde{\gamma_2}^{(+)}}\right) - \arctan\left(\frac{\widetilde{\gamma_1}^{(-)}}{\widetilde{\gamma_2}^{(-)}}\right).$$

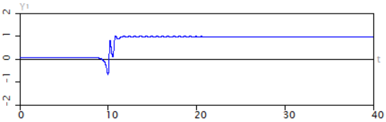
В абсолютном пространстве в этом случае происходит изменение ориентации тела в результате которой угол между осью Ox_2 и Oz изменяется на угол $\Delta\varphi$.



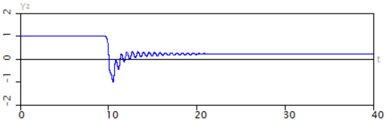
a) $\omega_1(t)$



b) $\omega_2(t)$



c) $\gamma_1(t)$



d) $\gamma_2(t)$

Рис. 8. Зависимость фазовых переменных от времени при запуске траектории из окрестности неустойчивого состояния равновесия при $E = 120$, $I_1 = 4$, $I_2 = 2$, $I_{13} = 1.5$, $I_{23} = 0.75$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 100$.

Из рисунка 4 следует, что $\Delta\varphi \to \pm\pi$ при $E \to \infty$. То есть, при очень больших энергиях волчок Суслова, запущенный в окрестности неустойчивого состояния равновесия совершает переворот и продолжает устойчиво вращаться вокруг перевернутой оси. Ранее такой эффект наблюдался для волчка Томпсона (tippe-top) [30] в натурном эксперименте, а также в неголономной модели качения динамически несимметричного эллипсоида вращения [27].

5. Хаотическая динамика

В настоящем разделе мы приводим результаты численного исследования хаотической динамики в неголономной модели Суслова и показываем, что рассматриваемая система демонстрирует сложное хаотическое поведение, тип которого существенно зависит от параметров системы, а, следовательно, и от количества инволюций.

Классификацию различных предельных (в том числе хаотических) режимов будем проводить на основе анализа карт показателей Ляпунова на плоскости параметров (I_{23}, E), зафиксировав остальные параметры системы.

Опишем схему построения карт показателей Ляпунова[4]. Мы разбиваем плоскость параметров (I_{23}, E) на 400×400 узлов, а из каждого узла запускаем траекторию на отображении Пуанкаре (12) с некоторыми начальными условиями (γ_2, ω_1). По истечении 10^4 промежуточных итераций отображения Пуанкаре, мы, на протяжении следующих $4 \cdot 10^4$ итераций, оцениваем набор ляпуновских показателей с помощью алгоритма Бенеттина [31]. В зависимости от значений λ_1, λ_2 и λ_3, мы закрашиваем соответствующий узел на карте определенным цветом.

[4] Подробно ознакомиться с методикой построения карт показателей Ляпунова, можно, например, в работах [32, 14], в которых такие карты строятся для неголономных систем, описывающих качение кельтского камня и волчка Чаплыгина, соответственно. Однако, в настоящей работе мы немного модифицировали процедуру классификации хаотических режимов.

Отметим, что система (5) обладает тремя существенными (ненулевыми) показателями $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Для исключения из рассмотрения двух нулевых показателей, соответствующих интегралам (6), мы применяем процедуру нормировки фазовых переменных на уровни интегралов [32].

Далее будем рассматривать 2 принципиально разных случая:

- $I_{13} = 0$ – система (5) обратима относительно двух инволюций: R_0 и R_1;
- $I_{13} \neq 0$ – система (5) обратима относительно единственной инволюции R_0.

5.1. Хаотическая динамика при $I_{13} = 0$

В рассматриваемом случае отображение Пуанкаре (12) симметрично относительно прямой $Fix(R_1) = \{\omega_1 = 0\}$. Для построения карты показателей Ляпунова зафиксируем параметры системы следующими значениями:

$$I_{13} = 0, \quad I_1 = 3, I_2 = 4, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 100, \tag{19}$$

а в качестве начальной точки для каждого узла карты будем использовать точку с координатами $(\gamma_2, \omega_1) = (0.9, 0.1)$. Опишем режимы, изображенные на карте (см. рис. 9).

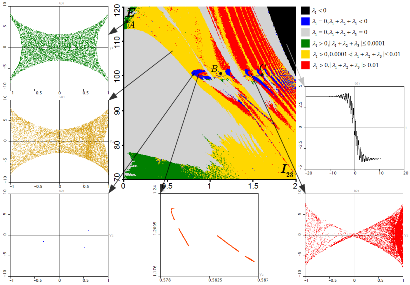


Рис. 9. Карта показателей Ляпунова и характерные фазовые портреты при различных параметрах I_{23} и E. Остальные параметры выбраны согласно (19).

Среди регулярных режимов ($\lambda_1 \leq 0$) на карте показателей Ляпунова мы будем различать:

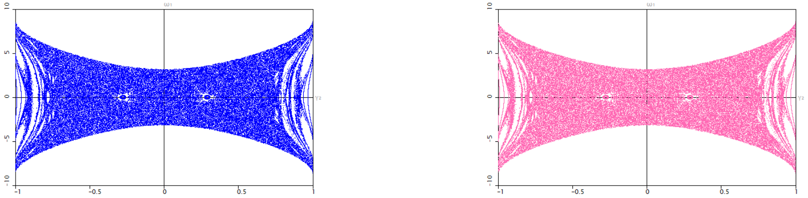
- $\lambda_1 < 0$ — состояние равновесия;
- $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ — цикл (периодическая или неподвижная точка на отображении (12));
- $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ — эллиптическая орбита (инвариантные кривые вокруг эллиптической точек или сама эллиптическая точка).

Помимо регулярных предельных режимов на карте показателей Ляпунова мы также будем классифицировать различные хаотические ($\lambda_1 > 0$) режимы. Отметим, что случай $\lambda_1 > 0, \ = 0$ соответствует консервативному хаосу (см. рис. 9 слева), в котором фазовый объем (инвариантная мера) сохраняется. В этом случае обратимый аттрактор и обратимый репеллер не различимы.

Если система (5) не обладает гладкой инвариантной мерой, то обратимый аттрактор и обратимый репеллер становятся различимыми. Следуя работе [47], открывшей новые перспективы в изучении обратимых систем, будем характеризовать степень такой различимости средней (по времени) дивергенцией, то есть суммой показателей Ляпунова (сосуществование дисипативных и консервативных эффектов в них систематически обсуждается в обзоре [48]).

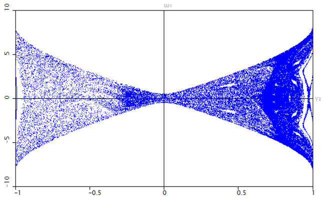
Будем классифицировать хаотические режимы следующим образом:

- $\lambda_1 > 0, \quad |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3| \leq 0.0001$. Рассматриваемый случай близок к консервативному. Обратимый аттрактор и обратимый репеллер практически неразличимы (см. рис. 10).
- $\lambda_1 > 0, \quad 0.0001 < |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3| \leq 0.01$. В этом случае обратимый аттрактор и обратимый репеллер хотя и имеют большую общую часть, но все же различимы (см. рис. 11). Как показано в работах [12, 13] с помощью построения инволютивных сетей, наряду с эллиптическими точками (существующих вследствие обратимости) в стахостическом слое присуствуют долгопериодические фокуса, граница притяжения которой имеет очень малую окрестность. Можно сказать, что поведение система в этом случае носит псевдоконсервативный характер.
- $\lambda_1 > 0, \quad 0.01 < |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3|$ Обратимый аттрактор сильно отличается от обратимого репеллера, хотя и симметричен ему (см. рис. 12). В этом случае хаотическая динамика ассоциируется со странными аттракторами.



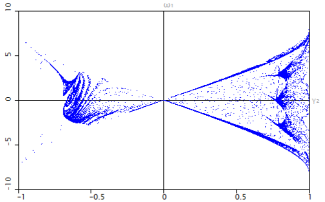
a) b)

Рис. 10. Фазовые портреты на отображении Пуанкаре при параметрах (19), $I_{23} = 0.015$, $E = 115.125$ (точка A на карте показателей Ляпунова (см. рис. 9)). (a) обратимый аттрактор и (b) обратимый репеллер практически неразличимы.



a) b)

Рис. 11. Фазовые портреты на отображении Пуанкаре при параметрах (19), $I_{23} = 1.5$, $E = 100$ (точка B на карте показателей Ляпунова (см. рис. 9)). Обратимый аттрактор и обратимый репеллер имеют большую общую часть, однако все же различимы.

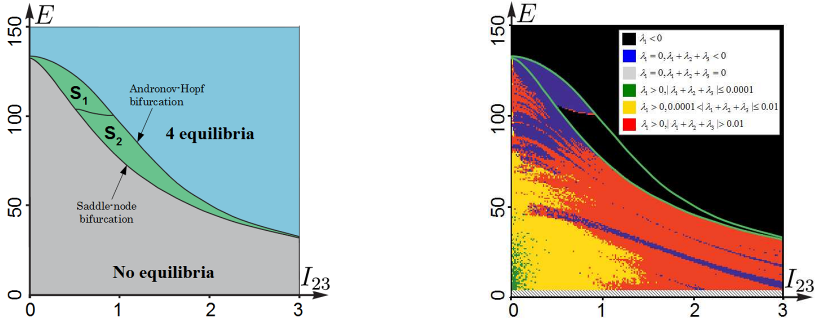


a) странный аттрактор b) странный репеллер

Рис. 12. Странный аттрактор и странный репеллер на отображении Пуанкаре (12) при $I_{23} = 1.5895$ и $E = 100$.

5.2. Хаотическая динамика при $I_{13} \neq 0$

В данном разделе, при построении карты показателей Ляпунова, будем использовать параметры системы, заданные в соответствии с (18), для того, чтобы сопоставить карту ляпуновских показателей с диаграммой устойчивости, изображенной на рисунке 5. В каждом узле карты в качестве начальной точки зададим точку с координатами $(\gamma_2, \omega_1) = (0.999, 0)$. Для кодировки режимов на карте будем использовать такую же схему, что и в разделе 5.1, лишь подчеркнув, что в рассматриваемом случае (так как отображение Пуанкаре инволюциями не обладает) понятия обратимый аттрактор и обратимый репеллер теряют смысл. Теперь сумма показателей Ляпунова характеризует степень сжатия фазового объема вдоль траектории. Для удобства, построенную ранее, диаграмму устойчивости и карту показателей Ляпунова приведем на одном рисунке 13.

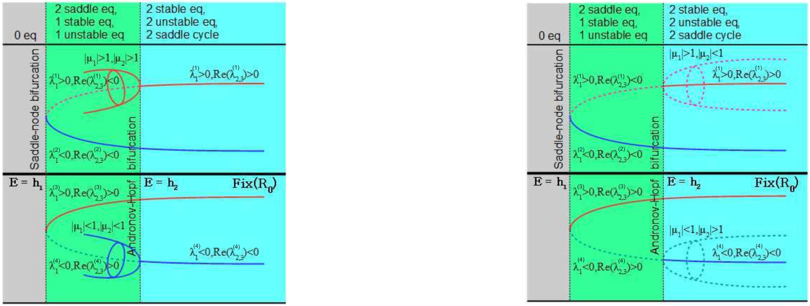


a) диаграмма устойчивости b) карта показателей Ляпунова

Рис. 13. Диаграмма устойчивости и карта показателей Ляпунова при параметрах (18)

Подробнее рассмотрим на карте область параметров (обозначим ее через $\boldsymbol{S}$), окрашенную на рисунке в зеленый цвет. Как показано в разделе 4.1 в этой области система (5) обладает парой седловых ($\lambda_1^{(1)} > 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(1)}) > 0$ и $\lambda_1^{(4)} < 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(4)}) > 0$), устойчивым ($\lambda_1^{(2)} < 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(2)}) < 0$) и неустойчивым ($\lambda_1^{(3)} > 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(3)}) > 0$) состояниями равновесия (см. рис. 14). Нижнюю границу этой области образуют параметры, при которых в системе возникает пара седлоузловых бифуркаций, а верхняя граница образована параметрами, при которых в системе возникает пара бифуркаций Андронова-Хопфа. Однако, как показывает рисунок 13b, бифуркации Андронова-Хопфа качественно различаются для верхней ($\boldsymbol{S}_1$) и нижней ($\boldsymbol{S}_2$) частей области $\boldsymbol{S}$. Так, в области $\boldsymbol{S}_1$, помимо состояний равновесия, обнаружен устойчивый цикл с мультипликаторами $|\mu_1| < 1$ и $|\mu_2| < 1$. На верхней границе области $\boldsymbol{S}_1$ этот устойчивый цикл сливается с седловым состоянием равновесия ($\lambda_1^{(4)} < 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(4)}) > 0$), в результате чего это состояние равновесия становится устойчивым ($\lambda_1^{(4)} < 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(4)}) < 0$) (см. рис. 14a)[5].

[5]Согласно инволюции R_0 бифуркация Андронова-Хопфа такого же типа происходит со вторым седловым состоянием равновесия ($\lambda_1^{(1)} > 0$, $\Re(\lambda_{2,3}^{(1)}) < 0$). После влипания вполне неустойчивого цикла это состояние равновесия становится неустойчивым ($\lambda_1^{(1)} > 0$, $\Re(\lambda_{2,3}^{(1)}) > 0$).



a) b)

Рис. 14. Бифуркационные диаграммы состояний равновесия, принадлежащих семействам Ω_2 и Ω_3; а) – для области параметров S_1 b) – для области параметров S_2.

В области S_2 устойчивый цикл обнаружить не удалось, однако мы нашли седловой цикл чуть выше верхней границы этой области. Таким образом, на верхней границе области S_2 от седловой точки, в результате субкритической бифуркации Андронова-Хопфа, отделяется седловой цикл с мультипликаторами $|\mu_1| > 1, |\mu_2| < 1$, а седловая точка становится вполне неустойчивой ($\lambda_1^{(1)} > 0, \Re(\lambda_{2,3}^{(1)}) > 0$). Для удобства, описанные бифуркации приведены на рисунке 14b.

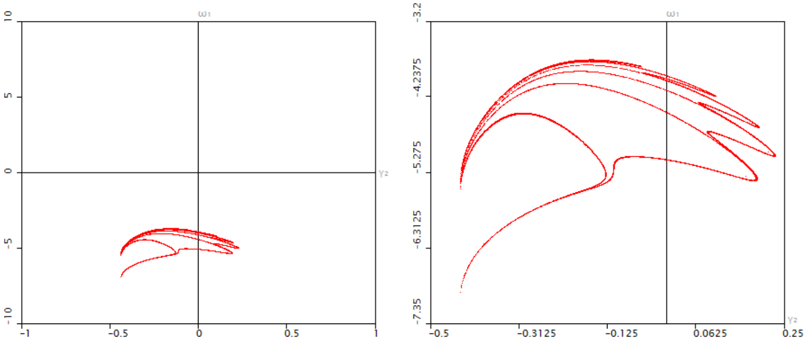
Продолжив по параметру E неподвижную точку, соответствующую обнаруженному в области S_1 устойчивому циклу, мы обнаружили последовательность бифуркаций удвоения периода, в результате которой из неподвижной точки рождается странный аттрактор типа Фейгенбаума [33] (см. рис. 15).

Обнаруженному аттрактору соответствуют следующие показатели Ляпунова.

$$\lambda_1 = 0.3978, \quad \lambda_2 = -0.0002, \quad \lambda_3 = -1.9277,$$

а, размерность аттрактора по Каплану-Йорке [32] составляет:

$$D = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|} \approx 1.2063.$$



a) b)

Рис. 15. Странный аттрактор типа Фейгенбаума, обнаруженный на границе областей S_1 и S_2 при параметрах (18), и $I_{23} = 0.675$, $E = 102.75$.

6. Задача Суслова в случае неоднородной связи

Различные обобщения (вариации) задачи Суслова рассмотрены в работах [7, 3]. В данном разделе рассмотрим случай, при котором в точке контакта колесика и неподвижной сферической оболочки присутствует постоянное (не зависящее от времени) проскальзывание s. Это проскальзывание можно интерпретировать как увод колеса по Рокару. Механика увода, связанная с деформацией колеса обсуждается в [**?**, 44].

Указанное условие приводит к неоднородной (по скоростям) неголономной связи, которая в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеет вид:

$$\omega_3 = s, \quad s = \text{const}. \tag{20}$$

Отметим, что теоретические исследования неоднородных неголономных связей начаты совсем недавно [45, 8, 41, 9]. Переписав систему уравнений (3) и (4) с учетом (20) получим уравнения движения на $\mathcal{M}^5 = \{\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ в форме

$$\begin{gathered}
I_{11}\dot{\omega}_1 = -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + (I_2 - I_3)s\omega_2 + I_{23}s^2 + b_3\gamma_2 - b_2\gamma_3, \\
I_{22}\dot{\omega}_2 = \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) - (I_1 - I_3)s\omega_1 - I_{13}s^2 + b_1\gamma_3 - b_3\gamma_1, \\
\dot{\gamma}_1 = -\gamma_3\omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1.
\end{gathered} \tag{21}$$

В случае $I_{13} = I_{23} = 0$ система (21) обладает стандартной инвариантной мерой ($\rho = \text{const}$).

Как известно (см. [8]), неголономные системы с неоднородными по скоростям связями не сохраняют энергию. Поэтому в общем случае система (21) обладает только геометрическим интегралом

$$F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1.$$

Тем не менее, можно выделить частный случай, в котором удается указать обобщение интеграла энергии — *интеграл Якоби*. В работе [8] показано, что система (21), при следующих ограничениях на параметры

$$I_{13} = I_{23} = 0, \quad I_{22} = I_{11}, \quad b_1 = b_2 = 0, \tag{22}$$

обладает интегралом Якоби:

$$H = \frac{I_{11}}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + b_3\gamma_3.$$

Отметим, что условия (22) совпадают со случаем В. В. Козлова, в котором существует дополнительный интеграл F_2 при $s = 0$ (см. раздел 5). Более того оказывается, что при $s \neq 0$ этот интеграл допускает непосредственное обобщение

$$F_2 = I_{11}(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + sI_{33}\gamma_3.$$

Таким образом, система (21) при ограничении на параметры (22), интегрируема по теореме Эйлера-Якоби.

Однако в общем случае, система (21) является неинтегрируемой. На рисунке 16 изображен фазовый портрет системы (21) на трехмерном[6] отображении Пуанкаре. Заметим, что отображение Пуанкаре (см. рис. 16) не расслаивается на инвариантные поверхности, следовательно в общем случае система (21) не обладает ни одним из двух дополнительных интегралов.

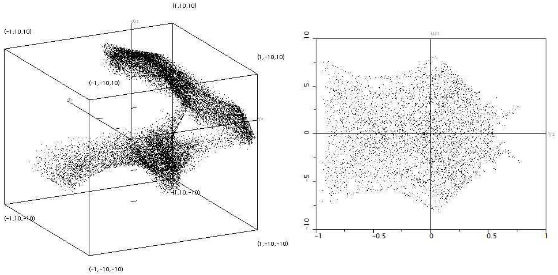


Рис. 16. Отображение Пуанкаре и его сечение плоскостью $\omega_2 = 1$ при фиксированных $I_{11} = 3$, $I_{22} = 4$, $I_{33} = 5$, $I_{13} = I_{23} = 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = 100$, $s = 1$

Замечание. Если центр масс твердого тела находится в геометрическом центре оболочки, то есть $\boldsymbol{b} = 0$ и $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$, в системе (21) отделяется замкнутая подсистема описывающая эволюцию ω_1 и ω_2, которая подробно рассмотрена в работе [9], где найдены случаи трансцендентных по скоростям первых интегралов.

[6] В случае неоднородной неголономной связи (20) система (21) не обладает интегралом энергии, поэтому отображение Пуанкаре становится трехмерным.

Литература

[1] Суслов Г. К. Теоретическая механика. // М.–Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

[2] Вагнер Г. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1941, вып. 5, с. 301–327.

[3] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 104–116.

[4] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.

[5] Козлова З. П. К задаче Суслова // Изв. АН СССР, МТТ, 1989, вып. 1, с. 13–16.

[6] Fedorov Yu. N., Maciejewski A. J., Przybylska M. Suslov problem: integrability, meromorphic and hypergeometric solutions // Nonlinearity, 2009, vol. 22, pp. 2231–2259.

[7] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The dynamics of nonholonomic systems consisting of a spherical shell with a moving rigid body inside // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 2, pp. 198-213.

[8] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The Jacobi integral in nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 3, pp. 383-400.

[9] Garcia-Naranjo, L. C., Maciejewski, A. J., Marrero, J. C., Przybylska, M. The inhomogeneous Suslov problem //Physics Letters A, 2014, vol. 378, no. 32, pp. 2389-2394.

[10] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: The absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.

[11] Козлов В. В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ, 1987, т. 51, № 4, с. 538–545.

[12] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere //Regular and Chaotic Dynamics, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277-328.

[13] Kazakov A. O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane //Regular and Chaotic Dynamics, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 508-520.

[14] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top //Regular and Chaotic Dynamics, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 718-733.

[15] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики //Успехи механики,1985, Т. 8, №. 3, С. 85-101.

[16] Харламова-Забелина Е.И. Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи // Вестн. Моск. ун-та. № 6, 1957. с. 25-34.

[17] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // Успехи математических наук, –2010 Т. 65, №. 2, с. 71-132.

[18] Walker G. T. On a curious dynamical property of celts // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1895, vol. 8, pt. 5, pp. 305–306.

[19] Walker J. The amateur scientist: The mysterious «rattleback»: A stone that spins in one direction and then reverses // Sci. Am., 1979, vol. 241, pp. 172–184.

[20] Зиглин С. Л. Об отсутствии дополнительного первого интеграла в частном случае задачи Г. К. Суслова //Успехи математических наук, 1997, Т. 52, №. 2, с. 167-168.

[21] Mahdi A., Valls C. Analytic non-integrability of the Suslov problem //Journal of Mathematical Physics, 2012, vol. 53, no. 12, pp. 122901.

[22] Fernandez O. E., Bloch A. M., Zenkov D. V. The geometry and integrability of the Suslov problem // Journal of Mathematical Physics, 2014, vol. 55, no. 11, pp. 112704.

[23] Харламова-Забелина Е. И. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки при наложении неголономной связи // Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, т. 20, вып. 1, с. 69–75.

[24] Татаринов Я.В. Разделяющиеся переменные и новые топологиечские явления в голономных и неголономных системах // Труды семинара по векторнмоу и тензорному анализу, Изд-во Московского университета, 1988, с. 160-174

[25] Maciejewski A. J., Przybylska M. Nonintegrability of the Suslov problem //Journal of mathematical physics, 2004, vol. 45, no. 3, pp. 1065-1078.

[26] Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., Strange Attractors in Rattleback Dynamics, *Uspekhi Fiz. Nauk,* 2003, vol. 173, no. 4, pp. 408–418 [*Physics-Uspekhi,* 2003, vol. 46, no. 4, pp. 393–403].

[27] Борисов А. В, Килин А. А, Мамаев И. С. Новые эффекты в динамике кельтских камней // Доклады РАН, 2006, Том 408, No 2, с. 192-195.

[28] Gonchenko, A. S., Gonchenko, S. V., and Kazakov, A. O., Richness of Chaotic Dynamics in the Nonholonomic Model of Celtic Stone, *Regul. Chaotic Dyn.,* 2013, vol. 18, no. 5, pp. 521–538.

[29] Borisov A. V., Kazakov A. O., Kuznetsov S. P. Nonlinear dynamics of the rattleback: a nonholonomic model // Physics-Uspekhi. – 2014. – Vol. 57. – No. 5. – p. 453.

[30] Kane T. R., Levinson D. A. A realistic solution of the symmetric top problem // Journal of Applied Mechanics, 1978, т. 45, № 4, с. 903–909.

[31] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., and Strelcyn, J.-M., Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: A Method for Computing All of Them: P. 1: Theory; P. 2: Numerical Application, *Meccanica,* 1980, vol. 15, pp. 9–30.

[32] Borisov, A. V., Jalnine, A. Yu., Kuznetsov, S. P., Sataev, I. R., and Sedova, J. V., Dynamical Phenomena Occurring due to Phase Volume Compression in Nonholonomic Model of the Rattleback, *Regul. Chaotic Dyn.*,2012, vol. 17, no. 6, pp. 512–532.

[33] Feigenbaum, M. J., Universal Behavior in Nonlinear Systems: Order in Chaos (Los Alamos, N. M., 1982), *Phys. D,* 1983, vol. 7, nos. 1–3, pp. 16–39.

[34] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328.

[35] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.

[36] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.

[37] Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., The Rolling of Rigid Body on a Plane and Sphere. Hierarchy of Dynamics, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 1, pp. 177–200.

[38] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The dynamics of nonholonomic systems consisting of a spherical shell with a moving rigid body inside //Regular and Chaotic Dynamics, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 198-213.

[39] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: the absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.

[40] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball //Regular and Chaotic Dynamics, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832-859.

[41] Fasso, F. and Sansonetto, N., Conservation of Energy and Momenta in Nonholonomic Systems with Affine Constraints, Preprint, arXiv:1505.01172 (2015).

[42] Kozlov V. V. The phenomenon of reversal in the Euler-Poincare-Suslov nonholonomic systems //arXiv preprint arXiv:1509.01089. – 2015.

[43] Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. – Springer Science Business Media, 2007.

[44] Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем // М. Наука, 1967, 519 с.

[45] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Geometrisation of Chaplygin's reducing multiplier theorem // Nonlinearity, 2015, vol. 28, pp. 2307–2318

[46] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

[47] Pikovsky, A. and Topaj, D., Reversibility vs. Synchronization in Oscillator Latties, *Phys. D,* 2002, vol. 170, pp. 118–130.

[48] Roberts J.A.G., Quispe G.R.W. Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems // Physics Reports, 1992, vol. 216, no. 2-3, pp. 63-177