

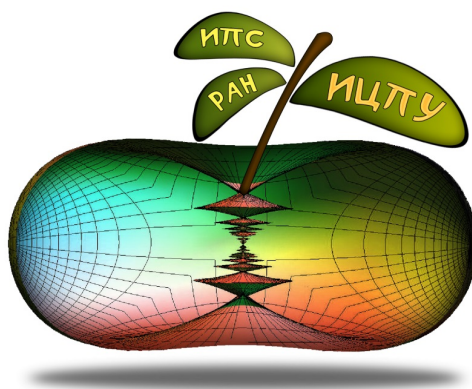
Математический Институт им. В. А. Стеклова РАН  
Университет города Переславля им. А. К. Айламазяна  
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН  
Институт компьютерных исследований, Ижевск



НАУЧНОЕ СОВЕЩАНИЕ  
«Неголономные дни в Переславле»

6-8.08.2015

SCIENTIFIC WORKSHOP  
«Nonholonomic days in Pereslavl»



Тезисы докладов  
Abstracts of talks

Переславль-Залесский 2015  
Pereslavl-Zalessky 2015

## **Программный комитет**

А. А. Аграчев (сопредседатель)

В. В. Козлов (сопредседатель)

С. В. Болотин

А. В. Борисов

А. А. Килин

Л. В. Локуциевский

И. С. Мамаев

Ю. Л. Сачков

## **Организационный комитет**

С. М. Абрамов (сопредседатель)

Ю. Л. Сачков (сопредседатель)

А. А. Ардентов

Е. Ф. Сачкова

М. В. Шустова

Математический Институт им. В. А. Стеклова РАН  
Университет города Переславля им. А. К. Айламазяна  
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН  
Институт компьютерных исследований, Ижевск

НАУЧНОЕ СОВЕЩАНИЕ  
«Неголономные дни в Переславле»

6-8.08.2015

SCIENTIFIC WORKSHOP  
«Nonholonomic days in Pereslavl»

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ  
ABSTRACTS OF TALKS



Переславль-Залесский 2015  
Pereslavl-Zalessky 2015

УДК 517.97

**Научное совещание «Неголономные дни в Переславле»,**  
ИПС им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, 6-8 августа  
2015 г. Изд-во «Университет города Переславля», 2015.

**Редакционная коллегия:**

Ю. Л. Сачков, доктор физико-математических наук

А. А. Ардентов, кандидат технических наук

В сборник включены тезисы докладов, представленных на научном совещании «Неголономные дни в Переславле».

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

Proceedings of the workshop include abstracts of talks presented at Scientific Workshop «Nonholonomic days in Pereslavl».

Intended for researchers, students, and graduate students.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>А. А. Аграчев</b> , Особые траектории в субримановой геометрии . . . . .	7
<b>А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков</b> , Полное описание экспоненциального отображения в субримановой задаче на группе Энгеля . . . . .	8
<b>И. А. Богаевский</b> , Релятивистские субримановы структуры: классификация и нормальные формы . . . . .	10
<b>С. В. Болотин</b> , Задача оптимального управления катящимся шаром с помощью роторов . . . . .	12
<b>А. В. Борисов</b> , Иерархия динамики и гамильтонизация неголономных систем . . . . .	13
<b>М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский, Р. Хильдебранд</b> , Типичность фрактально-хаотической структуры интегральных воронок в гамильтоновых системах с разрывной правой частью . . . . .	14
<b>Л. В. Локуциевский, Ю. Л. Сачков</b> , Неинтегрируемость в левоинвариантных субримановых задачах . . . . .	19
<b>И. С. Мамаев</b> , Управление движением тела в идеальной жидкости при наличии циркуляции вокруг тела . . . . .	21
<b>А. В. Подобряев</b> , Риманова задача на $SO(3)$ в случае Лагранжа . . . . .	22
<b>Ю. Л. Сачков</b> , Оптимальное качение сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания . . . . .	26

<b>В. А. Юмагужин</b> , Дифференциальные инварианты на решениях уравнений Эйнштейна-Максвелла . . . . .	27
<b>A. P. Mashtakov</b> , Sub-Riemannian problems on 3D Lie groups with applications to retinal image processing . . . . .	28

# Особые траектории в субримановой геометрии

А. А. Аграчев

*Математический институт им. В. А. Стеклова, SISSA*

*agrachevaa@gmail.com*

В докладе будет сделан общий обзор основных результатов по особым траекториям в субримановой геометрии.

# Полное описание экспоненциального отображения в субримановой задаче на группе Энгеля

А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков

*ИПС им. А. К. Айламазяна РАН*

*aaa@pereslavl.ru, yusachkov@gmail.com*

Рассматривается левоинвариантная нильпотентная субриманова задача на группе Энгеля с вектором роста (2,3,4). Субриманова задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, & q &= (x, y, z, v)^T \in \mathbf{R}^4, & (u_1, u_2) &\in \mathbf{R}^2, \\ X_1 &= \left(1, 0, -\frac{y}{2}, 0\right)^T, & X_2 &= \left(0, 1, \frac{x}{2}, \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^T, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Векторные поля  $X_1, X_2$  порождают алгебру Ли, называемую алгеброй Энгеля. Задача является нильпотентной, т. е. задает нильпотентную (нелинейную) аппроксимацию всем субримановым задачам в 4-мерном пространстве с двумерным управлением. Например, с помощью аппроксимации задачи оптимального управления колесным роботом с одним прицепом можно построить решения для конструктивной задачи управления роботом с прицепом.

В работе [1] с помощью принципа максимума Понтрягина была получена параметризация экстремальных траекторий. Таким образом, было определено экспоненциальное отображение  $\text{Exp}$ , переводящее точку сопряженного пространства  $\lambda \in C$  и время  $t \in \mathbb{R}_+$  в соответствующую точку экстремальной траектории  $q(t) = \text{Exp}(\lambda, t)$ .



Описаны дискретные симметрии экспоненциального отображения и соответствующие множества Максвелла, что позволило найти первое время Максвелла, дающее глобальную верхнюю оценку времени разреза вдоль экстремальных траекторий  $t_{\text{cut}}(\lambda) \leq t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$  (в соответствующей точке разреза экстремальная траектория теряет свою глобальную оптимальность). Кроме того, в работе [2] была исследована локальная оптимальность полученных экстремальных траекторий. Оказалось, что полученное первое время Максвелла доставляет также нижнюю оценку сопряженного времени (времени потери локальной оптимальности экстремальной траектории):  $t_{\text{MAX}}^1(\lambda) \leq t_{\text{conj}}^1(\lambda)$ .

Найденное первое время Максвелла задает разбиение прообраза и образа экспоненциального отображения на подобласти. В работе [3] было доказана теорема, что сужение отображения на эти подобласти есть диффеоморфизм. Для доказательства теоремы использовалась теорема Адамара о глобальном диффеоморфизме. В результате было доказано, что  $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{MAX}}^1(\lambda)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Сачков, А. А. Ардентов, Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля, Матем. сб., 2011, Т.202, № 11, 31–54.
2. A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov, Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group, Journal of Mathematical Sciences, 2013, vol.195, no.3, 369–390.
3. A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov, Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group, ESAIM: COCV, 2015, vol.21, no.4, 958–988.

# Релятивистские субримановы структуры: классификация и нормальные формы

**И. А. Богаевский**

*МГУ им. М. В. Ломоносова*

*ibogaevsk@gmail.com*

Субриманова структура на трёхмерном многообразии — это управляемая система, допустимые скорости которой образуют эллипс с центром в нуле. Если центр эллипса находится не в нуле, то получается управляемая система с дрейфом, равным этой самой центральной скорости эллипса. С релятивистской точки зрения такая управляемая система с дрейфом описывается полем квадратичных конусов, лежащих в трёхмерных гиперплоскостях некоторого распределения на четырёхмерном пространстве–времени. Именно такое поле квадратичных конусов на пространстве–времени называется релятивистской субримановой структурой.

Если пространство–время — тривиально расширенная группа Гейзенберга, то неголономные левоинвариантные релятивистские субримановы структуры разбиваются на три класса эквивалентности относительно автоморфизмов группы: эллиптический, гиперболический и параболический. Первые два — общего положения, а третий — исключительный.

Классическая левоинвариантная субриманова структура на группе Гейзенберга, изученная Вершиком и Гершковичем, попадает в эллиптический класс левоинвариантных релятивистских субримановых структур. Множество достижимости для неё хорошо известно,

мы же изучаем множество достижимости гиперболической структуры, получая для него явные формулы. Оказывается, что множество достижимости в этом случае инвариантно относительно гиперболических поворотов, аналогично инвариантности относительно обычных поворотов в эллиптическом случае.

Кроме того, мы находим нормальные формы первых двух членов квазиоднородного разложения в общей точке типичной (уже не левоинвариантной) релятивистской субримановой структуры на четырёхмерном пространстве–времени. При этом — в духе теории относительности — мы расширяем группу эквивалентности, перемешивая пространственные и временную координаты. Оказывается, что первый квазоднородный член наших нормальных форм определяет левоинвариантную эллиптическую или гиперболическую релятивистскую структуру, а нетривиальный второй член разрушает внутреннюю симметрию (относительно обычных или гиперболических поворотов соответственно) первого члена.

# Задача оптимального управления катящимся шаром с помощью роторов

**С. В. Болотин**

*Математический институт им. В. А. Стеклова*

*bolotin@mi.ras.ru*

При фиксированном значении интеграла Маркеева, задача управления качением шара Чаплыгина с помощью трех внутренних роторов сводится к задаче субримановой геометрии. Уравнения Пуанкаре для экстремалей имеют достаточно простую форму. В случае динамически симметричного шара они интегрируются в эллиптических функциях.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. A. V. Borisov, A. A. Kilin, I.S. Mamaev, Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere, Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol.16, no.5, 465–483.
2. S. V. Bolotin, The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors, Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol.17, no.6, 559–570.

# Иерархия динамики и гамильтонизация неголономных систем

**А. В. Борисов**

*Институт компьютерных исследований*

*borisov@rcd.ru*

Рассматривается общий формализм динамики неголономной системы и его связь с гамильтоновой теорией и с теорией обратимых систем. Для конкретных примеров, связанных с качением тел, указана иерархия динамики с зависимости от геометрических и инерционных параметров системы. Приведены конкретные примеры различных тензорных инвариантов. Обсуждается вопрос гамильтонизации неголономных систем, указаны различные методы гамильтонизации, как восходящие к классическим работам Чаплыгина, так и к новым идеям, возникшим в теории интегрируемости и дифференциальной геометрии.

**Типичность фрактально-хаотической структуры  
интегральных воронок в гамильтоновых системах  
с разрывной правой частью**

**М. И. Зеликин, Л. В. Локуцкий, Р. Хильдебранд**

*МГУ им. М. В. Ломоносова  
механико-математический факультет*

*mzelikin@mtu-net.ru*

Основным инструментом для решения детерминированных задач оптимального управления является принцип максимума Понтрягина (ПМП). Он позволяет свести задачу управления к отысканию решений гамильтоновой динамической системы. Предположим, управление  $u$  принимает значения в некотором множестве  $\Omega$ . Тогда гамильтониан  $\mathcal{H}$ , определяющий динамику, задается как максимум  $\mathcal{H}(x, p) = \max_{u \in \Omega} H(x, p, u)$  по всем управлениям  $u \in \Omega$  функции Понтрягина  $H$ , а оптимальное управление (если оно существует) доставляет максимум  $H$ .

На открытом всюду плотном подмножестве параметров  $(x, p)$  максимум  $H$  по  $u \in \Omega$  достигается в единственной точке и гладко зависит от этих параметров. На этом подмножестве гамильтониан  $\mathcal{H}$  является гладким, однако на границе этого подмножества производные  $\mathcal{H}$  могут, вообще говоря, рваться. Чаще всего гамильтониан  $\mathcal{H}$  является непрерывной кусочно-гладкой функцией, причем кокасательное расслоение разбивается на непересекающиеся области  $A_1, \dots, A_k$ , на которых гамильтониан задается гладкими функциями  $H_1, \dots, H_k$  соответственно. Динамическая система описывается обыкновенными

дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. На докладе будет обсуждаться ситуация, когда множество  $\Omega$  является выпуклым многогранником, а области  $A_i$  – это в точности те области, где управление обязано находиться в соответствующей вершине  $v_i$  многогранника  $\Omega$ . Множество точек, где производная  $\mathcal{H}$  разрывна, является стратифицированным многообразием, каждая страта которого отвечает некоторой грани многогранника  $\Omega$ .

Траектория гамильтоновой системы, которая не покидает область гладкости гамильтониана, называется *регулярной*. Если траектория переходит из одной области гладкости  $A_i$  в другую  $A_j$ , тогда соответствующее оптимальное управление меняется скачком с вершины  $v_i$  многогранника  $\Omega$  на вершину  $v_j$ . Этот процесс называется *переключением*, а поверхность разрыва правой части системы называется *поверхностью переключения*. Обычно оптимальная траектория пересекает поверхность переключения трансверсально, в этом случае оптимальное управление называют *бэнг-бэнг управлением*. Тем не менее, иногда возникают траектории,двигающиеся вдоль поверхности разрыва правой части системы. Их принято называть *особыми траекториями*. Обычно единственность решения теряется в окрестности особых траекторий и множество регулярных траекторий может соединиться с особой в одной и той же точке, или, наоборот, сойти с нее. Такая ситуация возможна из-за того, что правая часть гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений терпит разрыв.

Для особых траекторий, лежащих на гиперповерхности переключе-

чения<sup>1</sup>, возможно определить *порядок*, в зависимости от того, какого порядка скобки Пуассона от присоединенных гладких частей  $H_i$  обнуляются на особой траектории. Порядок может быть *локальным* или *глобальным*, в зависимости от того, обнулились ли скобки на самой особой траектории или целиком в ее окрестности. Хорошее обобщение этих определений (так называемый *натуральный порядок*) дано в [1]. Если натуральный порядок траектории является четным числом, то регулярные траектории не могут соединяться с особой кусочно гладким образом. В этом случае регулярные траектории вращаются вокруг особой и пересекают поверхность переключения в счетном числе точек за конечное время таким образом, что точка соединения неособой траектории и особой является точкой накопления. Этот феномен называется *чаттерингом* и он достаточно хорошо изучен для случая, когда ровно две области гладкости гамильтониана смыкаются по гладкой гиперповерхности.

На докладе будет рассмотрена ситуация, когда три области гладкости  $A_1, A_2, A_3$  смыкаются по многообразию  $\mathcal{S}_{123}$  коразмерности 2. Эта ситуация эквивалентна задаче оптимального управления с двумерным управлением из треугольника<sup>2</sup>. В общем случае особые экстремали для  $n$ -мерного управления были изучены в [2]. В этом случае вместо порядка правильно говорить о флаге порядков. В настоящей работе мы рассматриваем особую траекторию полного второго порядка. Эту работу можно рассматривать как продолжение рабо-

---

<sup>1</sup>Это эквивалентно рассмотрению задачи с одномерным управлением в окрестности особой траектории.

<sup>2</sup>Случай, когда множество допустимых управлений  $\Omega$  является шаром, удивительным образом оказался тесно связан с теорией Галуа. Подробнее см. [2,3].



ты [4], в которой впервые данная задача была рассмотрена и было доказано наличие феномена чаттеринга. Здесь же мы рассматриваем еще один феномен, возникающий в данной задаче. А именно, хаотическое поведение ограниченных частей оптимальных траекторий системы. Данный феномен не был ранее обнаружен в задачах оптимального управления и является совершенно новым. Основным элементом доказательства является важный новый математический объект: система обыкновенных дифференциальных уравнений на все скобки Пуассона до четвертого порядка между ограничениями  $H_i$  гамильтониана  $\mathcal{H}$  на области гладкости  $A_i$ . Мы называем такую систему *ниспадающей системой* скобок Пуассона.

Наше исследование не ограничено только задачами оптимального управления, но также включает в себя весь класс кусочно гладких гамильтоновых систем в случае, когда на стыке трех областей гладкости гамильтониана  $\mathcal{H}$  лежит особая траектория второго порядка. В частности, будет рассмотрена максимально подробно линейно-квадратичная задача оптимального управления, оптимальный синтез в которой является прототипом для общего случая. Эта задача является модельной для общей гамильтоновой системы с кусочно-гладким гамильтонианом, потому что их ниспадающие системы совпадают.

Подробное изложение полученных результатов можно найти в [5] или arXiv:1506.02320.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Локуциевский, Гамильтоновость потока особых траекто-

рий, Матем. сб., 2014, Т.205, № 3, 133–160.

2. М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский и Р. Хильдебранд, Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением, Тр. МИАН, 2012, № 277, 74–90.

3. М. И. Зеликин, Д. Д. Киселев и Л. В. Локуциевский, Оптимальное управление и теория Галуа, Матем. сб, 2013, Т.204, № 11, Москва, Наука, 83–98.

4. M. I. Zelikin, N. V. Melnikov and R. Hildebrand, Topological structure of a typical fibre of optimal synthesis for chattering problems, P. Steklov Inst. Math., 2001, no. 233, 116–142.

5. М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский и Р. Хильдебранд, Типичность фрактально-хаотической структуры интегральных воронок в гамильтоновых системах с разрывной правой частью, Современная математика, фундаментальные направления, 2015, № 56, 5–128.

**Неинтегрируемость  
в левоинвариантных субримановых задачах**

**Л. В. Локуцкий, Ю. Л. Сачков**

*МГУ им. М. В. Ломоносова, ИПС им. А. К. Айламазяна РАН*

*lion.lokut@gmail.com, yusachkov@gmail.com*

Последнее время активно изучаются геодезические левоинвариантных субримановых задач на нильпотентных группах Ли и, в частности, на группах Карно. Высокий интерес к этим задачам связан, в первую очередь, с классической теоремой Громова о нильпотентизации, которая утверждает, что метрика в окрестности точки в произвольной субримановой задаче приближается левоинвариантной субримановой метрикой на группе Карно  $\mathfrak{G}$ , отвечающей нильпотентному касательному конусу  $\mathfrak{g}$  в этой точке. Подробно исследуются поля геодезических на группах Карно, их локальная и глобальная оптимальность, особенности сфер и многое другое. Каждая такая задача имеет две наиболее важных целых характеристики: число образующих в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  и ее глубина (максимальная длина отличной от 0 скобки в  $\mathfrak{g}$ ). Оказывается, что задачи одинаковой глубины часто имеют сходную природу. Так, например, все задачи глубины 1 тривиальны. Во всех задачах глубины 2 аномальные траектории неоптимальны, а геодезический поток интегрируется в элементарных функциях. В задачах глубины 3 некоторые аномальные траектории, наоборот, оптимальны, а геодезический поток интегрируется уже в эллиптических функциях Якоби.

Классически, исследование любой левоинвариантной субримано-

вой задачи начинается с интегрирования геодезического потока, так как явные формулы для геодезических являются отправной точкой для всех дальнейших вычислений. На докладе планируется обсудить новый результат, касающийся субримановой задачи на простейшей свободной группе Карно глубины 4. Данная группа имеет вектор роста  $(2,3,5,8)$ . Нам удалось доказать, что гамильтонова система геодезического потока в этой задаче является неинтегрируемой по Лиувиллю. Этот результат, по-видимому, доказывает невозможность изучения по стандартной схеме субримановых задач на свободных группах Карно глубины 4 и больше. В том числе, теряется надежда на получение какой-либо информации об общих субримановых задачах глубины 4 и больше с помощью теоремы Громова.

**Управление движением тела в идеальной жидкости  
при наличии циркуляции вокруг тела**

**И. С. Мамаев**

*Институт компьютерных исследований*

*mamaev@rcd.ru*

Рассматривается вопрос управления твердым телом, движущимся в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Исследование свободной динамики этих систем восходит к Кирхгофу и сводится к конечномерной гамильтоновой системе. Рассмотрен ряд механизмов управления, связанных с перемещением внутренних масс и добавлением роторов; учитывается влияние циркуляции и доказаны утверждения об управляемости системы, базирующиеся на применении теоремы Рашевского-Чжоу. Также исследован ряд особых траекторий движения (гейтов), которые необходимо использовать для управления. Сформулирован ряд задач, связанных с оптимальным управлением такого сорта системами.

# Риманова задача на $SO(3)$ в случае Лагранжа

А. В. Подобрыв

ИПС им. А. К. Айламазяна РАН

*alex@alex.botik.ru*

Рассмотрим левоинвариантную риманову метрику на группе  $SO(3)$ . Естественная геометрическая задача заключается в описании кратчайших такой метрики. Пусть  $I_1, I_2, I_3$  — собственные значения соответствующей квадратичной формы. Если из отрезков длин  $I_1, I_2, I_3$  можно составить треугольник, то эта задача имеет механическую интерпретацию — свободное вращение закрепленного в точке твердого тела. Ниже рассматривается *случай Лагранжа*  $I_1 = I_2$ .

Параметризация геодезических на  $SO(3)$  хорошо известна, но их глобальная оптимальность до сих пор не изучалась. Л. Бейтсом и Ф. Фассо [1] были описаны сопряженные точки (критические значения экспоненциального отображения). В настоящей работе найдено множество разреза и уравнения для времени разреза (времени потери оптимальности).

Пусть  $\{e_1, e_2, e_3\}$  — ортонормированный относительно формы Киллинга базис  $\mathfrak{so}_3$ , в котором рассматриваемая риманова метрика имеет собственные значения  $I_1, I_2, I_3$ . Пусть  $p_1, p_2, p_3$  — соответствующие импульсы (то есть координаты в пространстве  $\mathfrak{so}_3^*$  в базисе, двойственном базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$  относительно формы Киллинга). Обозначим  $\bar{p}_i = \frac{p_i}{|p|}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Параметр  $\eta = \frac{I_1}{I_3} - 1 > -1$  отвечает за «сплюснутость» твердого тела в механической интерпретации.

**Теорема 1.** Пусть  $\tau_{cut}(\eta, \bar{p}_3)$  минимальный положительный ко-

рень уравнения

$$\cos \tau \cos(\tau \eta \bar{p}_3) - \bar{p}_3 \sin \tau \sin(\tau \eta \bar{p}_3) = 0,$$

тогда

(1) если  $\eta \geq -\frac{1}{2}$ , то время разреза равно  $\frac{2I_1 \tau_{cut}(\eta, \bar{p}_3)}{|p|}$ .

(2) если  $\eta < -\frac{1}{2}$ , то время разреза равно

$$\begin{cases} \frac{2\pi I_1}{|p|}, & \text{если } \frac{1}{2\eta} \leq |\bar{p}_3| < 1, \\ \frac{2I_1 \tau_{cut}(\eta, \bar{p}_3)}{|p|}, & \text{если } |\bar{p}_3| < \frac{1}{2\eta}. \end{cases}$$

## Теорема 2.

(1) Если  $\eta \geq -\frac{1}{2}$ , то множество разреза есть проективная плоскость  $\mathbb{R}P^2$ , состоящая из осевых симметрий.

(2) Если  $\eta < -\frac{1}{2}$ , то множество разреза состоит из двух компонент:  $\mathbb{R}P^2$  и отрезка

$$J_\eta = \{\exp(\pm \varphi e_3) \mid \varphi \in [2\pi(1 + \eta), \pi]\}.$$

Доказательство основано на методе Ю. Л. Сачкова, примененного им для решения задачи об эйлеровых эластичках [2]. Рассматривается группа симметрий гамильтонова векторного поля принципа максимума Понтрягина. Ищутся точки Максвелла, соответствующие симметриям (то есть точки, в которые в один и тот же момент времени приходят симметричные друг-другу геодезические). Далее оказывается, что сопряженное время больше либо равно времени достижения найденных точек Максвелла. Показывается, что экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом области, ограниченной временем Максвелла, на дополнение к замыканию найденного

множества Максвелла в  $SO(3)$ . Тем самым оказывается, что замыкание множества Максвелла является в действительности множеством разреза.

Для аналогичной задачи на  $SU(2)$  Т. Сакаи [3] показал, что множество разреза является двумерным диском при  $\eta > 0$ . Для  $\eta < 0$  имеется гипотеза, выдвинутая М. Бергером в книге [4], что множество разреза является отрезком. Тем же методом удастся решить риманову задачу на  $SU(2)$  в случае Лагранжа и доказать гипотезу М. Бергера.

Имеется связь с субримановой задачей на группе  $SO(3)$ , исследованной У. Боскаином и Ф. Росси [5]. Оказывается, что при  $I_3 \rightarrow \infty$  сопряженное время, множество сопряженных точек, время разреза и множество разреза в римановой задаче сходятся к тем же объектам в субримановой задаче.

Описанные здесь результаты подробно изложены в [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Bates, F. Fassò, The Conjugate Locus for the Euler Top. I. The Axisymmetric Case, International Mathematical Forum, 2007, vol.2, no.43, 2109–2139.
2. Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in the Euler elastic problem, Journal of Dynamical and Control Systems, 2008, vol.14, no.2, 169–234.
3. T. Sakai, Cut loci of Berger's sphere, Hokkaido Mathematical Journal, 1981, vol.10, 143–155.
4. M. Berger, A panoramic view of Riemannian geometry, Springer, 2002.



5. U. Boscain, F. Rossi, Invariant Carnot-Caratheodory metrics on  $S^3$ ,  $SO(3)$ ,  $SL(2)$  and Lens Spaces, SIAM, Journal on Control and Optimization, 2008, vol.47, 1851–1878.

6. A.V. Podobryaev, Yu.L. Sachkov, Cut locus of a left invariant Riemannian metric on  $SO(3)$  in the axisymmetric case.

URL: <http://arxiv.org/pdf/1504.05472v2.pdf>

## Оптимальное качение сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания

Ю. Л. Сачков

*ИПС им. А. К. Айламазяна РАН*

*yusachkov@gmail.com*

В докладе будут представлены результаты по следующей задаче оптимального управления. Рассматривается кинематическая модель сферы, катящейся по плоскости без прокручивания и проскальзывания. Состояние системы описывается контактной конфигурацией — точкой касания сферы и ее ориентацией в объемлющем трехмерном пространстве. Требуется перекатить сферу из заданной начальной контактной конфигурации в заданную конечную контактную конфигурацию вдоль кратчайшей кривой на плоскости.

Будут представлены результаты, полученные по этой задаче Хаммерсли, Артурсом и Уолшем, Джурджевичем, а также автором с учениками.

# Дифференциальные инварианты на решениях уравнений Эйнштейна-Максвелла

В. А. Юмагужин

*ИПС им. А. К. Айламазяна РАН*

*yuma@diffiety.botik.ru*

Как известно, система уравнений Эйнштейна-Максвелла инвариантна относительно псевдогруппы диффеоморфизмов пространства-времени  $\text{Diffeo}$ , а её решения под действием этих диффеоморфизмов преобразуются в новые решения.

В докладе будет представлено полное описание поля рациональных скалярных дифференциальных инвариантов уравнений Эйнштейна-Максвелла относительно псевдогруппы  $\text{Diffeo}$ . Эти инварианты разделяют орбиты решений относительно действия псевдогруппы  $\text{Diffeo}$ .

Будет получено фактор-уравнение, множеством решений которого является множество орбит решений. В частности, будет получено решение проблемы эквивалентности решений уравнений Эйнштейна-Максвелла.

Полученные инварианты будут использованы для вычисления некоторых точных решений.

# Sub-Riemannian problems on 3D Lie groups with applications to retinal image processing

A. P. Mashtakov

*Eindhoven University of Technology*

*alexey.mashtakov@gmail.com*

The talk focuses on the application of sub-Riemannian geodesics on 3-dimensional Lie groups to image analysis. Namely, the analysis of photographs of the retina of the human eye. Two problems will be discussed:

- (A) a sub-Riemannian (SR) problem in  $SE(2)$  with given external cost,
- (B) a sub-Riemannian (SR) problem in  $SO(3)$  with cusplless spherical projection constraint.

Both problems have applications in image analysis, namely their solutions provide a method for completion of corrupted contours in flat and spherical images. The restored arc given by solution of (A) represents data driven sub-Riemannian geodesics in  $SE(2)$ , i.e. the curves minimizing the sub-Riemannian length weighted by an external cost induced by the image. Problem (B) is the spherical extension of problem (A). Solution to these problems are applied to retinal vessel tracking, relevant for early diagnosis of diabetic retinopathy and glaucoma.

- (A) SR problem in  $SE(2)$  with given external cost  $C: SE(2) \rightarrow$

$[\delta, 1]$ ,  $\delta > 0$ , is given by the following optimal control problem:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= u_1(\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y)|_{\gamma} + u_2 \partial_{\theta}|_{\gamma}, & \gamma(0) &= \text{Id}, \quad \gamma(T) = g, \\ l(\gamma(\cdot)) &= \int_0^T C(\gamma(t)) \sqrt{\beta^2 u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

where  $\gamma(t) \in \text{SE}(2)$ ,  $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\beta > 0$ .

We propose an algorithm for solving this problem that consists of two steps. The first step is producing the distance map in  $\text{SE}(2)$  while the second step is finding a solution to the boundary value problem (BVP) via steepest descent backtracking. We compute the distance map as the stationary viscosity solution of the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation, derived via the Pontryagin Maximum Principle (PMP). We use an upwind finite differences discretization scheme for solving the HJB equation while the steepest descent is computed by numerical integration of the horizontal part of PMP. The comparison with the exact solution in case  $C(g) \equiv 1$ , that was given by Yu.L. Sachkov [1], demonstrates high accuracy of the obtained solution. In this case the algorithm produces globally optimal trajectories. Finally, examples of vessel tracking in retinal images will be shown. (Joint research with E.J. Bekkers, R. Duits and G.R. Sanguinetti).

(B) We consider the problem of minimizing  $\int_0^l \sqrt{\beta^2 + k_g^2(s)} ds$ , for a smooth curve  $\gamma(s)$  on a unit sphere with fixed boundary points and directions. The total length  $l$  is free,  $s$  denotes the spherical arclength,  $k_g$  denotes the geodesic curvature of  $\gamma$ , and  $\beta > 0$  is given. By lifting the curve in extended three-dimensional space of positions  $(x, y) \in S^2$  and orientations  $\theta \in S^1$ , one can reformulate this problem as the problem of finding SR-geodesics in  $\text{SO}(3)$  with cusplless spherical projections. This

problem can be seen as a modified version of the cortical model by J. Petitot [2], G. Citti and A. Sarti [3], taking into account the curvature of the retina. Our motivation is the fact that the retina is not flat, which can be important both for cortical modeling and for processing retinal images. We derive SR-geodesics and evaluate the first cusp time, i.e. the instance of time where the spherical projection of a SR-geodesic has a cusp. Parametrization of the set of endpoints reachable by geodesics with cusplless spherical projections is provided. In contrast to the SR-problem in SE (2) there exist non-optimal SR-geodesics with cusplless projections. (Joint research with I. Beschastnyi, R. Duits and Yu.L. Sachkov).

#### *REFERENCES*

1. Yu. L. Sachkov, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2011, vol.17, 293–321.
2. J. Petitot, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure. J. Physiol. Paris 97, 2003, 265–309.
3. G. Citti, A. Sarti, A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space. J. Math. Imaging Vis. 2006, vol.24, 307–326.



Научное издание

## *Труды конференции*

Сборник тезисов докладов научного совещания  
«Неголономные дни в Переславле»,  
ИПС им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский,  
6-8 августа 2015 г.

Для научных работников, аспирантов и студентов

Редакционная коллегия сборника: Ю. Л. Сачков, А. А. Ардентов

Подписано к печати 05.08.2015

Издательство «Университет города Переславля», 2015

Тираж 30 экз.

