

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В α -ПЛОСКОСТИ ГРУШИНА

Ю. Л. Сачков^{1,2}, Е. Ф. Сачкова³,

^{1,3} *Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН*

² *Российский университет дружбы народов*

e-mail: ¹ *yusachkov@gmail.com*, ³ *efsachkova@mail.ru*,

Поступила в редакцию ..2024 г., после доработки ..2024 г.; принята к публикации ..2024 г.

Для α -плоскости Грушина описаны оптимальные траектории, время разреза и множество разреза.

Ключевые слова: α -плоскость Грушина, оптимальный синтез.

DOI: , EDN:

1. ВВЕДЕНИЕ

В субримановой геометрии [1, § 9.2] хорошо известна плоскость Грушина, представляющая простейший пример почти риманова многообразия: такое многообразие риманово в дополнении к особому подмногообразию коразмерности один. Естественное обобщение этого примера есть α -плоскость Грушина, когда вырождение на особом множестве имеет порядок $\alpha \geq 1$. Экстремальные траектории в этом случае были параметризованы в работе [2], и на этой основе их оптимальность исследована в работе [3]. В данной заметке мы проводим независимое исследование оптимальности экстремальных траекторий на основе качественного подхода, не использующего параметризацию этих траекторий.

1. Постановка задачи. Задача оптимального управления для классической плоскости Грушина ставится следующим образом [1, § 9.2]:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q = (x, y) \in M = \mathbb{R}^2, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}$.

Естественное обобщение этой задачи (α -плоскость Грушина) [2, 3] ставится так же, но для векторных полей

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = |x|^\alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 1. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) называется почти римановой задачей на α -плоскости Грушина.

Обозначим функцию цены в этой задаче — почти риманово расстояние — как $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(\cdot) \text{ траектория системы (1), (2)}\}$. Особым множеством называется множество точек $q \in M$, в которых множество допустимых скоростей $\{\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2\}$ неполномерно: $Z = \{q = (x, y) \in M \mid x = 0\}$. Если $q_0 \in M \setminus Z$, то задача локально превращается в риманову. Поэтому особый интерес представляет случай $q_0 \in Z$, который только и рассматривается в данной работе.

2. Симметрии. Задача имеет очевидные симметрии — отражения

$$(x, y) \mapsto (-x, y), \quad (x, y) \mapsto (x, -y), \quad (x, y) \mapsto (-x, -y). \quad (4)$$

Векторные поля X_1 , X_2 не зависят от y , поэтому симметриями являются также параллельные переносы

$$(x, y) \mapsto (x, y + a), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Другая однопараметрическая группа симметрий дается потоком векторного поля

$$V = x \frac{\partial}{\partial x} + (1 + \alpha) y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (x, y) \mapsto e^{tV}(x, y) = (e^t x, e^{(1+\alpha)t} y), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

так как $[V, X_1] = -X_1$, $[V, X_2] = -X_2$. Поэтому оптимальный синтез и, в частности, расстояние d инвариантны относительно симметрий (4), (5) и однородны порядка 1 относительно симметрии (6): $d(e^{tV}(q_0), e^{tV}(q_1)) = e^t d(q_0, q_1)$, $q_i \in M$, $t \in \mathbb{R}$. Учитывая симметрию (5), будем далее полагать $q_0 = (0, 0)$.

3. Существование решений. Система (1) вполне управляема в каждой из римановых полуплоскостей $\{q \in M \mid \text{sign } x = \pm 1\}$ так как в них множество допустимых скоростей полномерно. Переместиться между этими полуплоскостями можно вдоль полей $\pm X_1$. Поэтому система (1) вполне управляема. Отметим, что в точках $q \in Z$ условие теоремы Рашевского-Чжоу [4, § 5.3], [5, § 2.2.4] выполнено только при $\alpha \in 2\mathbb{N}$. Все условия теоремы Филиппова [4, § 10.3], [5, § 3.1.2] выполнены, поэтому оптимальные траектории существуют.

4. Экстремальные траектории. Как обычно в субримановой геометрии, перейдем от минимизации длины (2) к минимизации энергии $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt$. Применим к полученной задаче принцип максимума Понтрягина [4, § 3], [5, § 5.2], [6, § 12.4], [7, § 3.2.2]. Анормальные траектории постоянны и нестрого анормальны. Для параметризации нормальных экстремальных траекторий положим $X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$ и обозначим линейные на слоях кокасательного расслоения T^*M гамильтонианы: $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, 3$, $\lambda \in T^*M$. Тогда максимизированный гамильтониан принципа максимума Понтрягина есть $H = h_1^2 + |x|^{2\alpha} h_3^2 \equiv 1$, и гамильтонова система для нормальных экстремалей есть

$$\dot{h}_1 = -\alpha \text{sign } x |x|^{2\alpha-1} h_3^2, \quad \dot{h}_3 = 0, \quad \dot{x} = h_1, \quad \dot{y} = |x|^{2\alpha} h_3. \quad (7)$$

Гамильтониан H есть первый интеграл, поэтому при каждом $h_3 \neq 0$ независимая подсистема уравнений (7) для переменных h_1 и x имеет фазовый портрет типа центр.

Если $h_3 = 0$, то $h_1 \equiv \text{constant} \neq 0$, $x = h_1 t$, $y = 0$. Пусть $h_3 \neq 0$. При интегрировании системы (7) методом разделения переменных получаем уравнение $\frac{dx}{\sqrt{H - h_3^2 |x|^{2\alpha}}} = \pm dt$, в котором левая часть интегрируется в общем случае в гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$. С другой стороны, в работе [2] система (7) проинтегрирована в терминах некоторых обобщенных тригонометрических функций. Однако мы не будем использовать явную параметризацию экстремальных траекторий и исследуем оптимальность экстремальных траекторий опираясь только на качественные методы.

Воспользовавшись симметрией $(h_3, y) \mapsto (-h_3, -y)$ системы (7), будем далее считать $h_3 > 0$. После замены переменных $X = x h_3^{1/\alpha}$, $Y = y h_3^{1+1/\alpha}$, $H_1 = h_1$, $s = t h_3^{1/\alpha}$ гамильтонова система (7) принимает форму

$$H'_1 = -\alpha \text{sign } X |X|^{2\alpha-1}, \quad X' = H_1, \quad Y' = |X|^{2\alpha}, \quad (8)$$

с первым интегралом $H = H_1^2 + |X|^{2\alpha} \equiv 1$. Так как $H = 1$, имеем $H_1(0) = H_1^0 = \pm 1$. Воспользовавшись симметрией $(H_1, X) \mapsto (-H_1, -X)$, получаем $H_1^0 = 1$. Первые два уравнения системы (8) имеют в плоскости (H_1, X) фазовый портрет типа центр, поэтому для любого $\alpha \geq 1$ существует единственное число $s_* = s_*(\alpha) > 0$ такое, что

$$X(s) > 0 \text{ при } s \in (0, s_*), \quad X(s_*) = 0. \quad (9)$$

Поэтому первый положительный корень функции $x(t)$ есть $t_* = s_* h_3^{-1/\alpha}$.

5. Оптимальность экстремальных траекторий.

Теорема 1.

- (1) Если $h_3 = 0$, то экстремальная траектория $q(t)$ оптимальна на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 > 0$.
- (2) Если $h_3 \neq 0$, то экстремальная траектория $q(t)$ оптимальна на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 \in (0, t_*]$, и неоптимальна при $t_1 > t_*$, где $t_* = s_* |h_3|^{-1/\alpha}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай (2). Пусть $h_3 \neq 0$. Рассмотрим экспоненциальное отображение

$$\begin{aligned} \text{Exp} : (\lambda, t) &\mapsto q(t), & \text{Exp} : \tilde{N} &\rightarrow M, & \tilde{N} &= (T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}) \times \mathbb{R}_+, \\ \lambda &= (h_3, h_1^0), & h_3 &\in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & h_1^0 &= \pm 1. \end{aligned}$$

При любом $h_3 \neq 0$ экстремальные траектории $\text{Exp}(h_3, 1, t)$ и $\text{Exp}(h_3, -1, t)$ симметричны относительно оси y и пересекаются на этой оси при $t = t_*$. Поэтому точка пересечения $\text{Exp}(h_3, 1, t_*)$ есть точка Максвелла [5, §3.3.5], и эти траектории неоптимальны при $t > t_*$. Докажем теперь, что любая траектория $\text{Exp}(h_3, 1, t)$ оптимальна при $t \in [0, t_1]$, $t_1 \in (0, t_*)$.

Учитывая симметрии задачи, будем считать, что $h_1^0 = 1$ и $h_3 > 0$, и будем обозначать $\text{Exp}(h_3, t) := \text{Exp}(h_3, 1, t)$. Пусть $N = \{(h_3, t) \in \mathbb{R}^2 \mid h_3 > 0, t \in (0, t_*)\}$, $D = \{(x, y) \in M \mid x, y > 0\}$. Докажем, что $\text{Exp} : N \rightarrow D$ есть диффеоморфизм, для этого воспользуемся следующей теоремой Адамара о глобальном диффеоморфизме:

Теорема 2. [8], [9, §6.2] Пусть $F : X \rightarrow Y$ есть гладкое отображение между гладкими многообразиями одинаковой размерности, такое, что X, Y связны, Y односвязно, F невырождено и собственное. Тогда F есть диффеоморфизм.

Сначала докажем, что $\text{Exp}(N) \subset D$. Так как $h_3 > 0$ и $t \in (0, t_*)$, то $x(t) > 0$ в силу неравенства (9). Из ОДУ (8) следует, что $y(t) > 0$. Поэтому $\text{Exp}(N) \subset D$.

Очевидно, что N и D связны, а D односвязно. Покажем, что $\text{Exp}|_N$ невырождено, то есть якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, h_3)}$ отличен от нуля в области N . Имеем $\frac{\partial x}{\partial t} = H_1$, $\frac{\partial y}{\partial t} = h_3^{-1} X^{2\alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial h_3} = -\frac{1}{\alpha} h_3^{-1-1/\alpha} X + \frac{\partial s}{\partial h_3} H_1 h_3^{-1/\alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial h_3} = -(1 + \frac{1}{\alpha}) h_3^{-2-1/\alpha} Y + \frac{\partial s}{\partial h_3} X^{2\alpha} h_3^{-1-1/\alpha}$, откуда $J = h_3^{-2-1/\alpha} \alpha^{-1} J_1$, $J_1 = X^{2\alpha+1} - (\alpha+1) Y H_1$. Дифференцируя в силу ОДУ (8), получаем $J_1' = \alpha X^{2\alpha-1} J_2$, $J_2 = H_1 X + (\alpha+1) Y$. Дифференцируя еще раз, получаем $J_2' = H_1^2 + X^{2\alpha} > 0$, поэтому $J|_N > 0$, т.е. $\text{Exp}|_N$ невырождено.

Теперь покажем, что отображение $\text{Exp} : N \rightarrow D$ собственное. Это равносильно следующему условию: если последовательность $\{(h_3^n, t^n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset N$ не содержится ни в каком компакте в N , то ее образ $q^n = \text{Exp}(h_3^n, t^n)$ не содержится ни в каком компакте в D . Пусть последовательность $\{(h_3^n, t^n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset N$ не содержится ни в каком компакте в N , обозначим $s^n = (h_3^n)^{1/\alpha} t^n \in (0, s_*)$. Тогда она содержит подпоследовательность, для которой выполнено одно из следующих условий:

1. $h_3^n \rightarrow \bar{h}_3 \in (0, +\infty)$, $s^n \rightarrow 0$,
2. $h_3^n \rightarrow 0$, $s^n \rightarrow 0$,
3. $h_3^n \rightarrow 0$, $s^n \rightarrow \bar{s} \in (0, s_*)$,
4. $h_3^n \rightarrow 0$, $s^n \rightarrow s_*$,
5. $h_3^n \rightarrow \bar{h}_3 \in (0, +\infty)$, $s^n \rightarrow s_*$,
6. $h_3^n \rightarrow +\infty$, $s^n \rightarrow s_*$,
7. $h_3^n \rightarrow +\infty$, $s^n \rightarrow \bar{s} \in (0, s_*)$,

8. $h_3^n \rightarrow +\infty$, $s^n \rightarrow 0$.

Покажем, что в каждом из этих случаев последовательность $q^n = (x^n, y^n)$ содержит подпоследовательность, на которой выполнено одно из условий $x^n \rightarrow 0$, $x^n \rightarrow +\infty$, $y^n \rightarrow 0$, $y^n \rightarrow +\infty$, т. е. q^n не содержится ни в каком компакте в D .

1. Имеем $X(s^n) \rightarrow X(0) = 0$, поэтому $x^n = \frac{X(s^n)}{(h_3^n)^{1/\alpha}} \rightarrow 0$.
2. Последовательность $t^n = \frac{s^n}{(h_3^n)^{1/\alpha}} > 0$ содержит подпоследовательность одного из следующих видов: $t^n \rightarrow 0$, $t^n \rightarrow \bar{t} \in (0, +\infty)$, $t^n \rightarrow +\infty$.
 - (а) Если $t^n \rightarrow 0$, то $x^n = x(h_3^n, t^n) \rightarrow x(0, 0) = 0$.
 - (б) Если $t^n \rightarrow \bar{t} \in (0, +\infty)$, то $y^n = y(h_3^n, t^n) \rightarrow y(0, \bar{t}) = 0$.
 - (с) Пусть $t^n \rightarrow +\infty$. При необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{s^n\}$ убывает. Существует $K \in \mathbb{N}$ такое, что $s^K < \frac{s_*}{2}$, поэтому $H_1(s) > 0$ для всех $s \in [0, s^K]$. Значит, $H_1|_{[0, s^K]} \geq \varepsilon := \min_{[0, s^K]} H_1 > 0$. Следовательно,

$$X(s^n) = \int_0^{s^n} H_1(s) ds \geq \varepsilon s^n = \varepsilon t^n (h_3^n)^{1/\alpha}, \quad x^n = \frac{X(s^n)}{(h_3^n)^{1/\alpha}} \geq \varepsilon t^n \rightarrow +\infty.$$

3. Имеем $X(s^n) \rightarrow X(\bar{s}) \in (0, +\infty)$, и $x^n = \frac{X(s^n)}{(h_3^n)^{1/\alpha}} \rightarrow +\infty$.
4. Имеем $Y(s^n) \rightarrow Y(s_*) = \int_0^{s_*} |X(s)|^{2\alpha} ds \in (0, +\infty)$, и $y^n = \frac{Y(s^n)}{(h_3^n)^{1+1/\alpha}} \rightarrow +\infty$.
5. Имеем $X(s^n) \rightarrow X(s_*) = 0$, откуда $x^n = \frac{X(s^n)}{(h_3^n)^{1/\alpha}} \rightarrow +0$.
6. Имеем $X(s^n) \rightarrow X(s_*) = 0$, откуда $x^n = \frac{X(s^n)}{(h_3^n)^{1/\alpha}} \rightarrow +0$.
7. Имеем $X(s^n) \rightarrow X(\bar{s}) \in (0, +\infty)$, откуда $x^n = \frac{X(s^n)}{(h_3^n)^{1/\alpha}} \rightarrow +0$.
8. Имеем $X(s^n) \rightarrow X(0) = 0$, откуда $x^n = \frac{X(s^n)}{(h_3^n)^{1/\alpha}} \rightarrow +0$.

Поэтому отображение $\text{Exp} : N \rightarrow D$ собственное. По теореме Адамара это отображение есть диффеоморфизм. В силу существования оптимальных траекторий, любая траектория $\text{Exp}(h_3, t)$, $h_3 \neq 0$, $t \in [0, t_1]$ оптимальна для любого $t_1 \in (0, t_*)$.

Осталось рассмотреть случай $t = t_*$. В этом случае в точку $\text{Exp}(h_3, t_*)$ приходят две траектории, симметричные относительно оси y , с одинаковым значением функционала времени. Поэтому обе они оптимальны.

Теперь рассмотрим случай (1). Если $h_3 = 0$, то экстремальная траектория есть прямая $q(t) = (h_1^0 t, 0)$. Из доказанного выше включения $\text{Exp}(N) \subset D$ следует, что при $h_3 \neq 0$ и $t > 0$ экстремальные траектории не пересекают координатную ось $\{y = 0\}$. Поэтому в каждую точку этой оси приходит единственная (с точностью до перепараметризации) экстремальная траектория — прямая $q(t) = (h_1^0 t, 0)$. В силу существования оптимальной траектории $q(t)$ оптимальна на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 > 0$. Теорема доказана.

Следствие.

- (1) Для любой траектории $\text{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda = (h_3, h_1^0) \in T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}$, время разреза (время потери оптимальности) есть $t_{\text{cut}} = t_* = |h_3|^{-1/\alpha} s_* \in (0, +\infty]$.

- (2) Множество разреза $Cut = \{Exp(\lambda, t_{cut}(\lambda)) \mid \lambda \in T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}\}$ есть $Cut = \{(x, y) \in M \mid x = 0, y \neq 0\}$.

Замечание. Оптимальность экстремальных траекторий на α -плоскости Грушина впервые исследована в работе [3] на основе аналогичных рассуждений, но с использованием явной параметризации экстремальных траекторий, полученных в работе [2]. Новизна нашего доказательства — в том, что оно чисто качественное, использующее лишь свойства гамильтоновой системы (7), но не ее явное интегрирование.

Для 2-плоскости Грушина на Рис. 1 изображена почти риманова сфера радиуса 2 $\{q \in M \mid d(q_0, q) = 2\}$ и ее радиусы (оптимальные траектории, приходящие в точки этой сферы), а на Рис. 2 — волновые фронты $\{Exp(\lambda, R) \mid \lambda \in N\}$ для разных значений R .

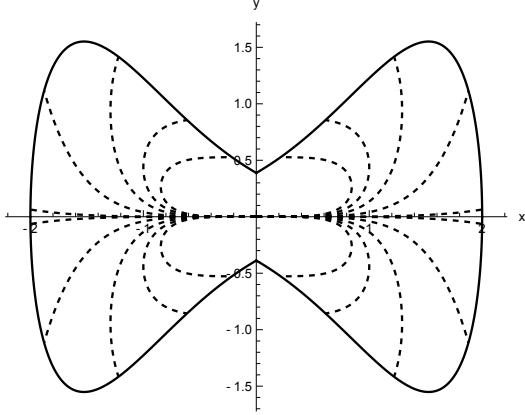


Рис. 1: Сфера радиуса 2 и ее радиусы

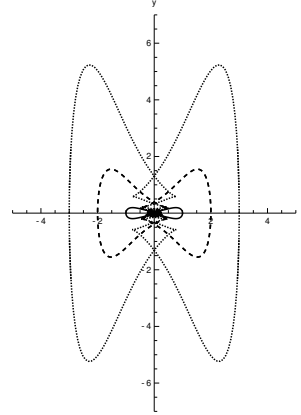


Рис. 2: Волновые фронты

6. Заключение. В этой работе представлено качественное исследование оптимальных траекторий на α -плоскости Грушина, не использующее явное интегрирование гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина. Насколько нам известно, это первое такого рода исследование в теории оптимального управления. Например, даже в субримановой задаче на группе Гейзенберга оптимальность исследуется на основе явного интегрирования гамильтоновой системы [1, §13.2]. Мы надеемся, что представленный в данной работе качественный подход к построению оптимального синтеза может быть полезен в других задачах оптимального управления, где явное интегрирование гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина затруднительно или вовсе невозможно. Этот подход может быть применен в задачах небольшой размерности, с большой группой симметрий.

Благодарность. Авторы благодарны анонимному рецензенту за полезные замечания по изложению в данной работе.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00140).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agrachev, A. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint / A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. — Cambridge Univ. Press, 2019. — P. 745.

2. Chang, D. -C. SubRiemannian geodesics in the Grushin plane/ D. -C. Chang, Y. Li // The Journal of Geometric Analysis —2012. —V. 22, № 3. — P. 800–826.
3. Borza, S. Distortion coefficients of the α -Grushin plane/ S. Borza // The Journal of Geometric Analysis —2022. —V. 32, № 78. — P. 1–28.
4. Аграчев, А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. —М. : Физматлит, 2005. — 392 с.
5. Сачков, Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления/ Ю.Л. Сачков. — М. : URSS, 2021. —160 с.
6. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов/ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко. — М. : Наука, 1961. — 384 с.
7. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М. : Наука, 1988. — 280 с.
8. Hadamard, J. Les surfaces a courbures opposees et leurs lignes géodésique / J. Hadamard // J. Math. Pures Appl. — 1898. — № 4 — P. 27–73.
9. Krantz, S. G. The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications / S. G. Krantz, H. R. Parks. — Birkhauser, 2001. — P. 148.

OPTIMAL TRAJECTORIES IN THE GRUSHIN α -PLANE

Yu. L. Sachkov^{1,2}, E. F. Sachkova³

^{1,3} *Institute of Programm Systems named after A.K. Ailamazyan RAS*

² *RUDN University*

e-mail: ¹ *yusachkov@gmail.com*, ³ *efsachkova@mail.ru*,

For the Grushin α -plane, optimal trajectories, cutting time, and cutting set are described.

Keywords: Grushin α -plane, optimal synthesis.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00140).

REFERENCES

1. Agrachev, A., Barilari, D., Boscain, U., *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge Univ. Press, 2019.
2. Chang, D.-C. and Li, Y., SubRiemannian geodesics in the Grushin plane, *The Journal of Geometric Analysis*, 2012, vol. 22, no 3, pp. 800–826.
3. Borza, S., Distortion coefficients of the α -Grushin plane, *The Journal of Geometric Analysis*, 2022, vol. 32, no 78, pp. 1–28.
4. Agrachev, A.A. and Sachkov, Yu.L., *Geometric control theory*, Moscow: Fizmatlit, 2005.
5. Sachkov, Yu.L., *Introduction to Geometric Control Theory*, Moscow: URSS, 2021.
6. Pontryagin, L.S., Boltyansky, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko E.F., *Mathematical theory of optimal processes*, Moscow: Nauka, 1961.
7. Clark, F., *Optimization and nonsmooth analysis*, Moscow: Nauka, 1988.
8. Hadamard, J., Les surfaces a courbures opposees et leurs lignes géodésique, *J. Math. Pures Appl*, 1898, no 4, pp. 27–73.
9. Krantz, S.G. and Parks, H.R., *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*, Birkhauser, 2001.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. ФИО: Сачков Юрий Леонидович
2. Дата рождения: 23.11.1964
3. Место работы: Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
4. Занимаемая должность: Руководитель исследовательского центра процессов управления
5. Ученое звание и степень: д.ф.-м.н., доцент
6. Служебный адрес: Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
7. Телефон (с кодом города): 89108250143
8. Домашний адрес:
9. Телефон (с кодом города):
10. Электронный адрес: yusachkov@gmail.com
11. Факс:
12. Основные направления научных исследований: математическая теория управления
13. Название статьи: Оптимальные траектории в α -плоскости Грушина
14. УДК: 517.977
15. Раздел (рубрика), к которому относится статья:

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

1. ФИО: Сачкова Елена Федоровна
2. Дата рождения: 01.05.1964
3. Место работы: Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
4. Занимаемая должность: старший научный сотрудник
5. Ученое звание и степень: к.т.н.
6. Служебный адрес: Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
7. Телефон (с кодом города): 89806594796
8. Домашний адрес:
9. Телефон (с кодом города):
10. Электронный адрес: efsachkova@mail.ru
11. Факс:
12. Основные направления научных исследований: математическая теория управления
13. Название статьи: Оптимальные траектории в α -плоскости Грушина
14. УДК: 517.977
15. Раздел (рубрика), к которому относится статья:

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ