

СУБРИМАНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ТРЕХМЕРНОМ НИЛЬМНОГООБРАЗИИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

А.А. Глуцюк, Ю.Л. Сачков

В данной заметке мы изучаем проекцию левоинвариантной субримановой структуры на трехмерной группе Гейзенберга G на компактное однородное пространство группы G — трехмерное нильмногообразие Гейзенберга M . Субриманова структура на M локально изометрична структуре на G , поэтому локальные объекты (геодезические и сопряженные точки) переносятся с G на M естественной проекцией. Однако глобальные свойства, такие как динамика геодезических и время разреза, различаются. Мы исследуем эти глобальные вопросы. Описана динамическая характеристика геодезического гамильтонова потока для M , периодические и плотные орбиты и свойства аналитической интегрируемости. Получены точные двусторонние границы субриманова расстояния в G и на этой основе оценки времени разреза на субримановых геодезических в M . Полный текст доказательств основных результатов представлен в [2].

Динамика и свойства оптимальности проекции евклидова геодезического потока с абелевой группы Ли $\mathbb{R}^n$ на ее компактное однородное пространство — тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ — хорошо известны [3]. В этой работе мы стремимся построить аналогичную теорию для простейшего некоммутативного аналога этой структуры на торе — проекции левоинвариантной субримановой структуры на 3-мерной группе Гейзенберга на 3-мерное нильмногообразие Гейзенберга. В том же смысле как субриманова группа Гейзенберга доставляет простейшую некоммутативную неголономную версию евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, это нильмногообразие есть некоммутативная версия тора $\mathbb{T}^3$.

Группа Гейзенберга есть пространство $G = \{(a, b, c)\} \cong \mathbb{R}^3$ с групповой операцией $(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + a_1 b_2)$. Рассмотрим дискретную подгруппу $H = \mathbb{Z}^3$ и ее фактор (пространство правых смежных классов) $M := H \backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$. Обозначим через $\pi : G \rightarrow M$ каноническую проекцию $g \mapsto Hg$.

Рассмотрим субриманову структуру на G с левоинвариантным полем ортонормированных реперов $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}$, где $a = x$, $b = y$, $c = z + \frac{xy}{2}$. Геодезические этой структуры, выходящие из единичного элемента $\text{Id} \in G$, — либо прямые в плоскости $\{z = 0\}$, исходящие из начала координат, либо спирали переменного наклона

$$(x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{\sin(\theta + \delta t) - \sin \theta}{\delta}, \frac{\cos \theta - \cos(\theta + \delta t)}{\delta}, \frac{\delta t - \sin \delta t}{2\delta^2} \right), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \delta \neq 0. \quad (1)$$

Рассмотрим также субриманову структуру на M , индуцированную канонической проекцией π . Геодезические на M имеют вид $\pi(g(t))$, где $g(t)$ — геодезические на G .

Для $\lambda \in TN$ положим $h_j(\lambda) := \langle \lambda, X_j \rangle$, $j = 1, 2, 3$, $X_3 := \frac{\partial}{\partial z} = [X_1, X_2]$. Субримановы геодезические на многообразии N (G или M) суть проекции траекторий гамильтонова потока на T^*N с функцией Гамильтона $F = (h_1^2 + h_2^2)/2$, $j = 1, 2, 3$, $\lambda \in T^*N$, являющейся нормальным гамильтонианом принципа максимума Понтрягина [1]. Он имеет первые интегралы F и h_3 . Их совместное множество уровня $S_\delta := \{F = \frac{1}{2}, \quad h_3 = \delta\}$ естественно изоморфно произведению $S^1 \times N$, $S^1 = \mathbb{R}_\theta / 2\pi\mathbb{Z}$, где $\theta = \arccos \frac{h_1}{h_2}$. Ограничение на S_δ гамильтоновой системы имеет вид

$$(\dot{\theta}, \dot{a}, \dot{b}, \dot{c}) = (\delta, \cos \theta, \sin \theta, a \sin \theta). \quad (2)$$

Исследование в разделе 2 выполнено Ю.Л.Сачковым в Институте программных систем им. А.К.Айламазяна РАН за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, <https://rscf.ru/project/22-11-00140/>

Проекция $G \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(a, b, c) \mapsto (a, b)$, индуцирует проекцию $p : M \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

1. Динамика субриманова геодезического потока на M . Проекция $p(\Gamma)$ каждой геодезической-спирали Γ в M — стягиваемая замкнутая кривая $\gamma \subset \mathbb{T}^2$; Γ замкнута при $\delta^2 \in \pi\mathbb{Q}$ и плотна на поверхности $p^{-1}(\gamma)$ при $\delta^2 \notin \pi\mathbb{Q}$. Это легко следует из (1).

Теорема 1. 1) Проекция на M каждой геодезической-прямой в G в плоскости $z = 0$, исходящей из Id и имеющей иррациональный (рациональный) тангенс угла наклона в координатах (x, y) , плотна в многообразии M (соответственно, периодически).

2) Поток (2) на $S^1 \times M$ с $\delta \neq 0$ сопряжён со стандартным δ -поток, заданным полем $(\dot{\theta}, \dot{a}, \dot{b}, \dot{c}) = (\delta, 0, 0, \frac{1}{2\delta})$, диффеоморфизмом, изотопным тождественному.

3) Гамильтонов поток на $T^*M \setminus \{F = 0\}$ аналитически интегрируем по Лиувиллю на дополнении к гиперповерхности $\{h_3 = 0\}$, а на всём $T^*M \setminus \{F = 0\}$ это неверно.

Утверждение 1) теоремы 1 сводится к плотности последовательности точек на торе $(\{2rn\}, \{rn^2\}) \in \mathbb{T}^2$, следующей из результата Г.Фюрстенберга, см. [3, лемма 2.1].

Решая систему (2), мы строим семейство диффеоморфизмов $F_\nu : S^1 \times G \rightarrow S^1 \times G$, $\nu \in [0, 1]$, сохраняющих координату θ , $F_0 = \text{Id}$, сопрягающих поток (2) со стандартным δ -поток. Доказывается его H -эquivариантность, а значит, F_ν определены на $S^1 \times M$.

2. Оценки времени разреза на M . Обозначим через d и d' субримановы расстояния на G и M , а через $t_{\text{cut}}(q(\cdot))$ время разреза на геодезической $q(\cdot)$, т.е. время, после которого геодезическая дуга перестаёт минимизировать длину. Пусть $q_0 = \pi(\text{Id}) \in M$. Обозначим шар $B'_t = \{q \in M \mid d'(q_0, q) \leq t\}$, $t \geq 0$. Пусть $\bar{t} = \inf\{t > 0 \mid B'_t = M\}$. Имеют место равенства $\bar{t} = \sup\{d'(q_0, q_1) \mid q_1 \in M\} = \sup\{t_{\text{cut}}(q(\cdot)) \mid q(\cdot) \subset M \text{ геодезическая т.ч. } q(0) = q_0\}$. Пусть $\bar{g} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, $\tilde{g} = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \in G$ таковы, что $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \frac{1}{2}$ и $\tilde{a} = 1$, $\tilde{b} = \tilde{c} = 0$, тогда $d(\tilde{g}, \bar{g}) \approx 0.91$.

Теорема 2. Выполнены неравенства $d(\tilde{g}, \bar{g}) \leq \bar{t} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 1024\pi^2})} \approx 3.56$.

Для доказательства теоремы 2 сначала на основе формул (1) получена оценка

$$\sqrt{\frac{\sqrt{r^4 + 48z^2} + r^2}{2}} \leq d(\text{Id}, g) \leq \sqrt{\frac{\sqrt{r^4 + 64\pi^2 z^2} + r^2}{2}}, \quad (3)$$

где $g = (x, y, z) \in G$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Затем построено покрытие фундаментальной области в группе G эллипсоидом, определяемым верхней оценкой в (3).

Пусть $B_t(g) = \{q \in G \mid d(g, q) \leq t\}$, $t \geq 0$, $g \in G$. Обозначим $\hat{t} = \sup\{t > 0 \mid B_t(h_1) \cap B_t(h_2) = \emptyset \ \forall h_1 \neq h_2 \in G\}$. Число $\hat{t}$ связано с временем разреза на геодезической $g(\cdot)$ в G с началом Id и ее проекции $g'(\cdot)$ в M : 1) $t_{\text{cut}}(g'(\cdot)) \leq t_{\text{cut}}(g(\cdot))$; 2) Если $t_{\text{cut}}(g(\cdot)) \geq \hat{t}$, то $\hat{t} \leq t_{\text{cut}}(g'(\cdot)) \leq t_{\text{cut}}(g(\cdot))$; 3) Если $t_{\text{cut}}(g(\cdot)) < \hat{t}$, то $t_{\text{cut}}(g'(\cdot)) = t_{\text{cut}}(g(\cdot))$. Из нижней оценки в (3) вытекает

Следствие 1. Выполняется равенство $\hat{t} = \frac{1}{2}$.

Список литературы

- [1] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge Univ. Press, 2019 [2] A. Glutsyuk, Yu. Sachkov, 2024, <https://arxiv.org/abs/2406.16065> [3] А. Каток, Б. Хасселблат *Введение в современную теорию динамических систем*. Пер.с англ. М.: МЦНМО, 2005.

А. А. Глущюк (A. A. Glutsyuk)

ENS de Lyon (UMPA, UMR 5669 du CNRS), Lyon, France

НИУ "Высшая Школа Экономики," Москва

Высшая Школа Современной Математики в МФТИ, Москва

E-mail: aglutsyu@ens-lyon.fr

Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский

Российский университет дружбы народов, Москва

E-mail: yusachkov@gmail.com