# Субриманова задача на центральном расширении группы движений плоскости

**Алексей Павлович Маштаков**, Иван Андреевич Галяев

**Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН**,
Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН

«Системный анализ: моделирование и управление»
Международная конференция, посвященная памяти академика А.В. Кряжимского
23 января 2024, г. Москва

# План доклада

1. Базовые понятия
2. Постановка задачи оптимального управления
3. Мотивация: модель зрения
    1. Некоторые аспекты физиологии зрения человека
    2. Математическая модель Петито-Читти-Сарти восприятия контуров изображения
    3. Обобщенная модель с учетом толщины контуров
4. Исследование задачи оптимального управления:
    1. Существование решения
    2. Принцип максимума Понтрягина
    3. Экстремали
5. Заключение

# Базовые понятия

- $G$ — группа Ли, $e$ — единичный элемент, $L_q h = qh$ — левый сдвиг.
- $\Delta \subset TG$ – левоинвариантное подрасслоение (распределение),
  $\mathcal{G}$ — левоинвариантное скалярное произведение на $\Delta$.
- Левоинвариантная субриманова (СР) структура $(\Delta, \mathcal{G})$ на группе $G$ задается $\Delta = \operatorname{span}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_d)$, $\mathcal{G}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = \delta_{ij}$, где $\mathcal{A}_i|_q = L_{*q} A_i$, $A_i \in T_e G$.
- $\gamma : [0, T] \to G$ – горизонтальная (допустимая) кривая, если

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)} \text{ для почти всех } t \in [0, T].$$

- СР кратчайшие — горизонтальные кривые $\gamma$ минимальной длины

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\, dt \to \min .$$

- СР структура имеет полный ранг, если $\operatorname{Lie}(\mathcal{A}_1|_q, \ldots, \mathcal{A}_d|_q) = T_q G$.

# Теория оптимального управления для поиска СР кратчайших

- Задача оптимального управления

$$\dot{\gamma}(t) = u_1(t)\ \mathcal{A}_1|_{\gamma(t)} + \ldots + u_d(t)\ \mathcal{A}_d|_{\gamma(t)}$$
$$\gamma(0) = e, \qquad \gamma(T) = g_1$$
$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{u_1(t)^2 + \ldots + u_d(t)^2}\, dt \to \min$$
$$(u_1(t), \ldots, u_d(t)) \in \mathbb{R}^d,$$

- Принцип Максимума Понтрягина: гамильтонова система на геодезические

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda), \quad \lambda \in T^*G$$

- Эктремальная траектория — субриманова геодезическая:

$$\mathrm{Exp} : (\lambda_0, t) \mapsto \gamma(t)$$

- Оптимальная траектория — субриманова кратчайшая. Условия оптимальности высших порядков, симметрии, точки разреза.

# Центральное расширение группы собственных движений плоскости

- Центральное расширение группы собственных движений плоскости:

$$\overline{\mathrm{SE}}_2 = \left\{ q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \theta\in\mathrm{SO}_2,\ k\in\mathbb{R}^+ \right\}.$$

- Алгебра Ли $\overline{\mathrm{se}}_2 = \mathrm{span}(f_1, f_2, f_3, f_4)$, где $f_3 = [f_1, f_2]$, $f_4$ — центральный элемент.
- Согласно классификации Almeida [2014] существует двухпараметрическое семейство СР структур энгелева типа на $\overline{\mathrm{SE}}_2$. Такие структуры определяются ортонормированным репером $(\xi_1, \xi_2)$:

$$A_1 = \sqrt{\beta} f_1, \quad S_2 = \alpha\sqrt{\beta} f_1 - \frac{1}{\sqrt{\beta}} f_3 - \frac{1}{\beta} f_4, \quad \alpha \geq 0, \beta > 0.$$

- Базисные левоинвариантные векторные поля $\mathcal{A}_i(q) = L_{*q} A_i, \quad L_q h = qh$

# Задача оптимального управления

Управляемая система:

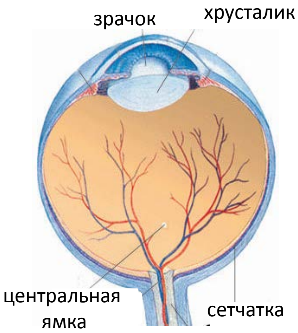
$$\left\{\begin{aligned} \dot\theta &= \sqrt{\beta}u_1 + \alpha\sqrt{\beta}u_2, \\ \dot x &= \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{\beta}}u_2, \\ \dot y &= -\tfrac{\cos\theta}{\sqrt{\beta}}u_2, \\ \dot k &= -ku_2, \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} &(x,y,\theta) = q \in \overline{\mathrm{SE}}_2 = M, \\ &(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

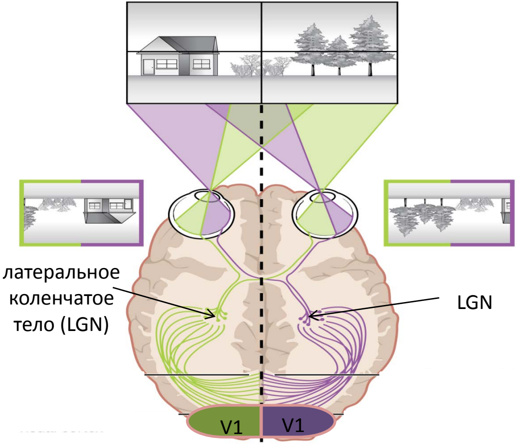
По заданным $q_0$, $q_1 \in M$ требуется найти управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ такие, что траектория $\gamma : [0,T] \to M$ переводит систему из $q_0$ в $q_1$ и имеет минимальную длину

$$\gamma(0) = q_0, \quad \gamma(T) = q_1, \qquad \int_0^T \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)} d\tau \to \min .$$

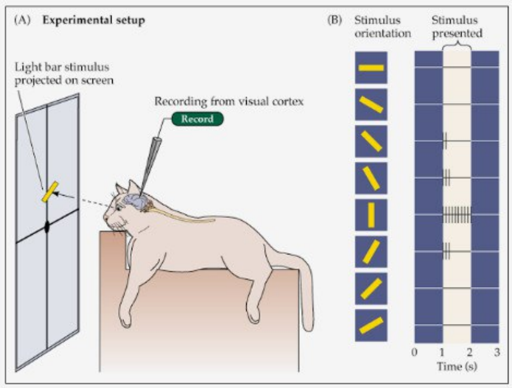
Управление $u$ класса $L^\infty([0,T],\mathbb{R}^2)$, а траектория $\gamma$ есть липшицева кривая на $M$.

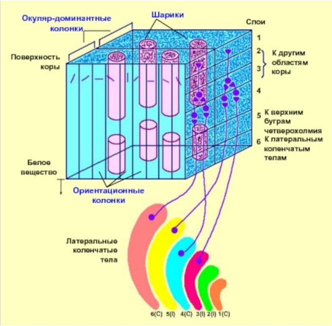
# Мотивация: Восприятие зрительной информации человеком



# Строение зрительной коры V1 млекопитающих



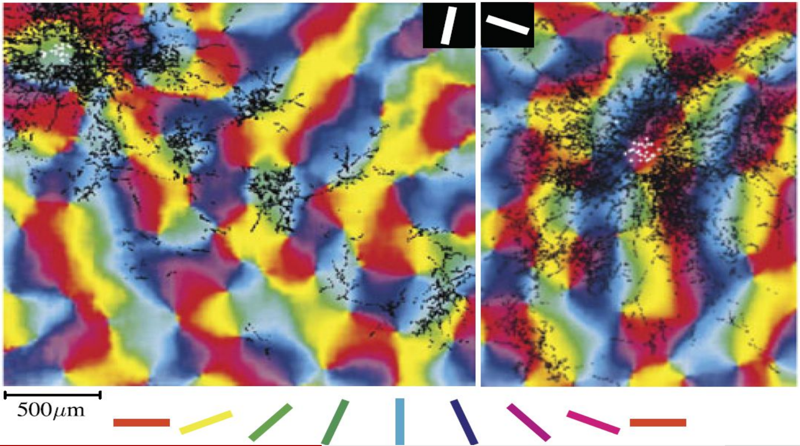




Адаптировано из Алмазова Т.А. Обработка визуальной информации: от сетчатки до V1, Психиатрия & Нейронауки, 2018.

D.H. Hubel and T.N. Wiesel, Receptive fields of single neurones in the cat's striate cortex, 1959.
Nobel prize in 1981.

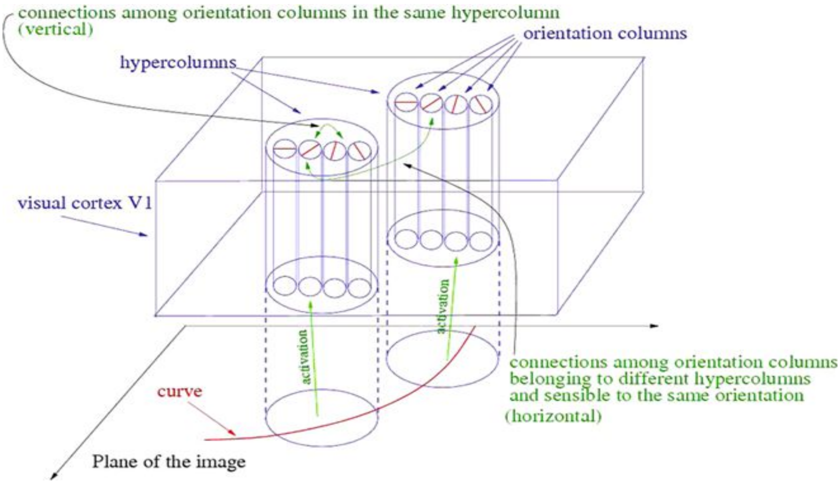
1

# Горизонтальная связь между далекими точками с похожей ориентацией




Replicated from Bosking, W.H., et al., Orientation selectivity and the arrangement of horizontal connections in tree shrew striate cortex. J. Neuroscience, 1997

# Математическая модель Петито-Читти-Сарти

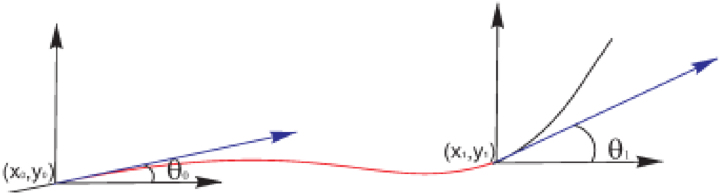



Replicated from R. Duits, U. Boscain, F. Rossi, Y. Sachkov, Association Fields via Cuspless Sub-Riemannian Geodesics in SE(2), JMIV, 2013.

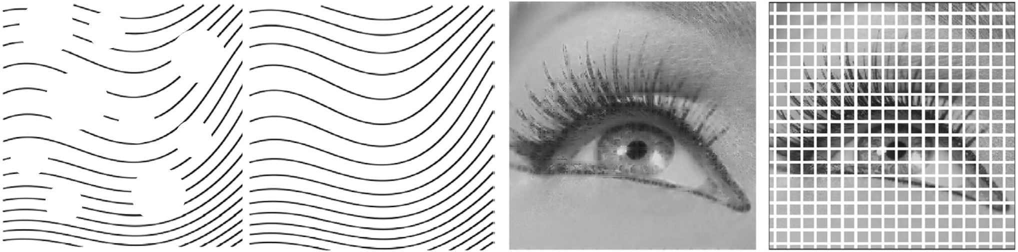
# Вариационный принцип восстановления поврежденных контуров

- Субримановы структуры в нейрогеометрии зрения:
  - J. Petitot, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure, 2003. (Группа Гейзенберга)
  - G. Citti and A. Sarti, A Cortical Based Model of Perceptual Completion in the Roto-Translation Space, 2006. (Группа $SE(2)$)
- Восстановленная дуга имеет минимальную длину в пространстве $(x, y, \theta)$:

$$\int \sqrt{\xi^2 \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \dot{\theta}^2} dt \to \min, \text{ при условии } \dot{\theta} = \arg\left(\dot{x} + \mathrm{i}\ \dot{y}\right)$$



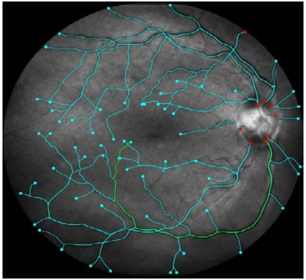
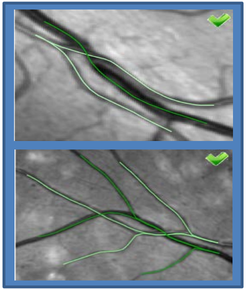
# Приложение: восстановление поврежденных изображений




**[1]** A. Mashtakov, A. Ardentov, Yu. Sachkov, *Parallel Algorithm and Software for Image Inpainting via Sub-Riemannian Minimizers on the Group of Roto-translations*, NMTMA, 2013.

**[2]** Boscain, U.V., Chertovskih, R., Gauthier, JP. et al. Highly Corrupted Image Inpainting Through Hypoelliptic Diffusion, JMIV, 2018.

# Приложение: поиск выделяющихся кривых на изображении

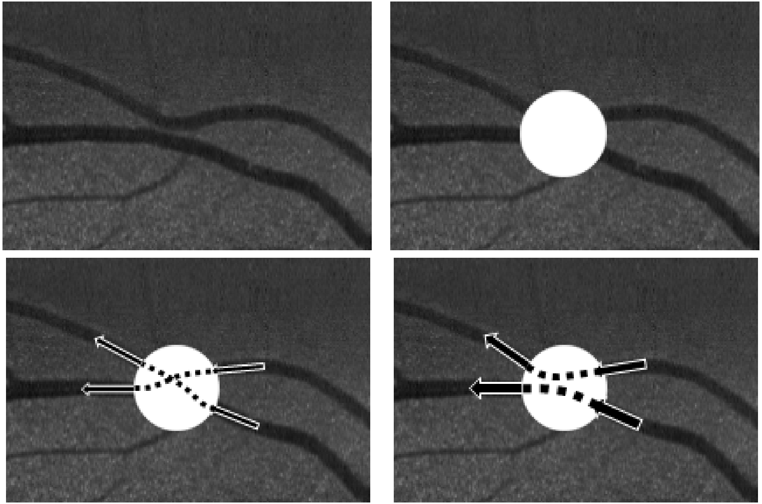




[1] E.J. Bekkers, R. Duits, A. Mashtakov and G.R. Sanguinetti, *Data-driven Sub-Riemannian Geodesics in* SE(2), Proc. SSVM, 2015.

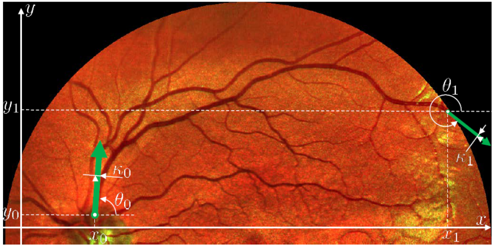
[2] E.J. Bekkers, R. Duits, A. Mashtakov and G.R. Sanguinetti, *A PDE Approach to Data-driven Sub-Riemannian Geodesics in* SE(2), SIIMS, 2015.

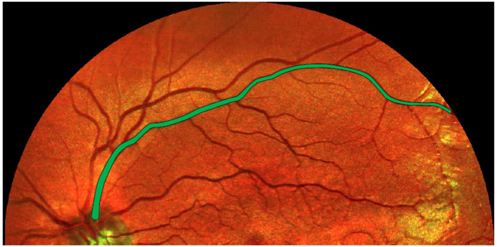
[3] G. Sanguinetti, R. Duits, E. Bekkers, M. Janssen, A. Mashtakov, J-M. Mirebeau, *Sub-Riemannian Fast Marching in* SE(2), Proc. CIARP, 2015.

# Уточнение модели: анализ толщины контуров



# Уточнение модели: анализ толщины контуров



# Задача оптимального управления

Управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \sqrt{\beta} u_1 + \alpha \sqrt{\beta} u_2, \\ \dot{x} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\beta}} u_2, \\ \dot{y} = -\frac{\cos\theta}{\sqrt{\beta}} u_2, \\ \dot{k} = -k u_2, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (x, y, \theta) = q \in \overline{\mathrm{SE}}_2 = M, \\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \}. \end{array}$$

По заданным $q_0$, $q_1 \in M$ требуется найти управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ такие, что траектория $\gamma : [0, T] \to M$ переводит систему из $q_0$ в $q_1$ и имеет минимальную длину

$$\gamma(0) = q_0, \quad \gamma(T) = q_1, \qquad \int_0^T \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)} d\tau \to \min .$$

Управление $u$ класса $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^2)$, а траектория $\gamma$ есть липшицева кривая на $M$.

# Существование решения

**Теорема.** Для любых граничных условий $q_0, q_1 \in \overline{\mathrm{SE}}_2$ существует субриманова кратчайшая (оптимальная траектория) соединяющая их.

*Существование обеспечивается теоремой Рашевского-Чжоу и теоремой Филиппова.*

$$X_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{\beta} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\beta}} \\ \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\beta}} \\ -\dfrac{k}{\beta} \end{pmatrix}, \quad X_3 = [X_1, X_2], \quad X_4 = [X_1, X_3].$$

$\operatorname{rank}(X_1, X_2, X_3, X_4) = 4.$

# Принцип максимума Понтрягина (ПМП)

Необходимое условие оптимальности — ПМП.

- Функция Понтрягина имеет вид

$$H_u = \langle p, \sum_{i=1}^{2} u_i \mathcal{A}_i \rangle + \nu \sqrt{\sum_{i=1}^{2} u_i^2}, \quad p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in T^*M, \ \nu \leq 0.$$

- Пусть $(u(t), q(t))$, $t \in [0, T]$ есть оптимальный процесс. Тогда существует липшицева кривая $p(t)$, для которой выполняются следующие условия:

  - условие нетривиальности $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + \nu^2 \neq 0$;
  - гамильтонова система $\dot{p} = -\dfrac{\partial H_u}{\partial q}, \ \dot{q} = \dfrac{\partial H_u}{\partial p}$;
  - условие максимума $H = \max\limits_{u \in U} H_u(p(t), q(t))$.

Случай $\nu = 0$ называется анормальным; $\nu = 1$ называется нормальным.

# Анормальные экстремали

- Левоинвариантные гамильтонианы $h_i = \langle \lambda, \mathcal{A}_i \rangle$, $\lambda \in T^*M$.
- Функция Понтрягина $H_u = u_1 h_1 + u_2 h_2 \to \max \Leftrightarrow h_1 = h_2 \equiv 0$.

**Теорема.** Аномальные экстремальные траектории имеют вид

$$\left( 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int\limits_0^t u_2(\tau)d\tau, \frac{1}{\beta} e^{-\int\limits_0^t u_2(\tau)d\tau} \right),$$

где $\beta > 0$ — постоянный параметр исходной системы, а $u_2(\cdot)$ — произвольная вещественнозначная интегрируемая функция.

Натурально параметризованная анормальная экстремальная траектория оптимальна тогда и только тогда, когда $u_2(t) \equiv \pm 1$.

# Нормальная гамильтонова система

- Левоинвариантные гамильтонианы $h_i = \langle \lambda, \mathcal{A}_i \rangle$, $\lambda \in T^*M$.
- Функция Понтрягина $H_u = u_1 h_1 + u_2 h_2 - \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \to \max \Leftrightarrow u_i = h_i$.
- Гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \sqrt{\beta} h_1 + \alpha \sqrt{\beta} h_2, \\ \dot{x} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\beta}} h_2, \\ \dot{y} = -\frac{\cos\theta}{\sqrt{\beta}} h_2, \\ \dot{k} = -\frac{k}{\beta} h_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3, \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = (h_1 + \alpha h_2) h_4 \\ \dot{h}_4 = -\beta (h_1 + \alpha h_2) h_3. \end{cases}$$

# Интегрируемость по Лиувиллю

Первые интегралы:

- $H = h_1^2 + h_2^2$,
- $b = \cos\theta h_3 - h_4 \sin\theta$,
- $c = \cos\theta h_4 + h_3 \sin\theta$,
- $K = \beta h_2 + h_4$.

**Теорема** Нормальная гамильтонова система интегрируема по Лиувиллю для всех $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$

# Частный случай $\alpha = 0$, $\beta = 1$

Первые интегралы:

- Гамильтонова система

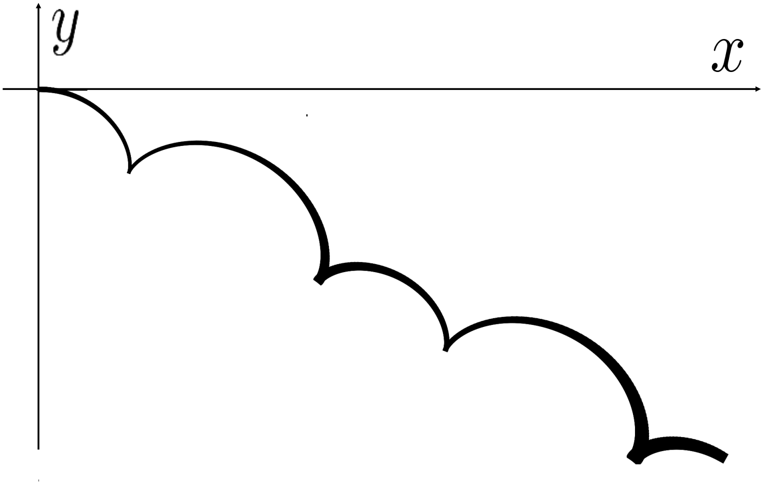
$$\begin{cases} \dot\theta = h_1, \\ \dot x = h_2 \sin\theta, \\ \dot y = -h_2 \cos\theta, \\ \dot k = -k h_2., \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot h_1 = -h_2 h_3, \\ \dot h_2 = h_1 h_3, \\ \dot h_3 = h_1 h_4, \\ \dot h_4 = -h_1 h_3. \end{cases}$$

- Вертикальная часть сводится к

$$\ddot h_2 = 2h_2^3 - 3h_2^2(h_2(0)+h_4(0)) + h_2(2h_2(0)h_4(0) - h_1^2(0) - h_3^2(0)) + (h_1^2(0)+h_2^2(0))(h_2(0)+h_4(0)).$$

- Явное выражение в эллиптических функциях Якоби.

# Экстремали



# Заключение

- Обобщение модели Петито-Читти-Сарти путем добавления анализа толщины контуров.
- Пространство положений, направлений и толщин — центральное расширение группы движений плоскости $\overline{\mathrm{SE}}_2$.
- Левоинвариантное распределение касательных подпространств моделирует возможные пути установления нейронной связи.
- Субриманово расстояние пропорционально энергии, затраченной на активацию промежуточных нейронов между двумя возбужденными граничными нейронами.
- Семейство субримановых структур полного ранга на $\overline{\mathrm{SE}}_2$.
- Существование субримановы кратчайших на $\overline{\mathrm{SE}}_2$.
- Принцип максимума Понтрягина.
- Экстремали.

Спасибо за внимание!