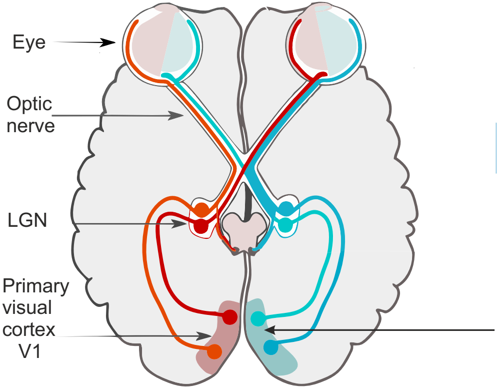
Модель зрительного восприятия контуров с учетом их ориентации и толщины

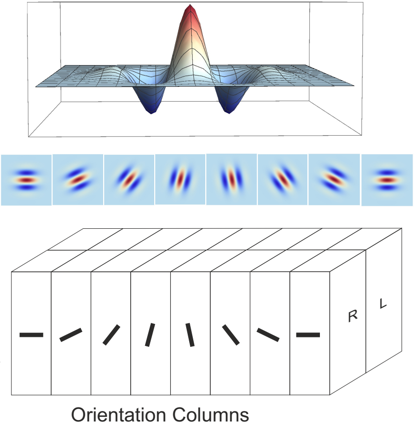
Алексей Павлович Маштаков
(доклад основан на совместной работе с И.А. Галяевым)

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН

Международная конференция SCDG2024
«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры»,
посвященная 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского
10 сентября 2024, г. Екатеринбург

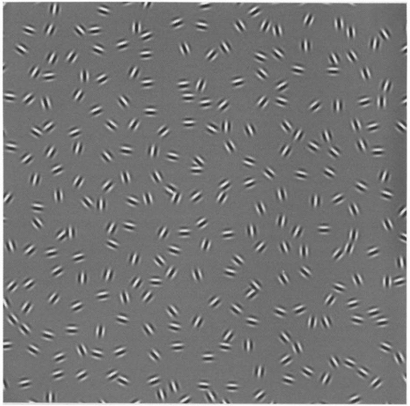
Восприятие зрительной информации человеком

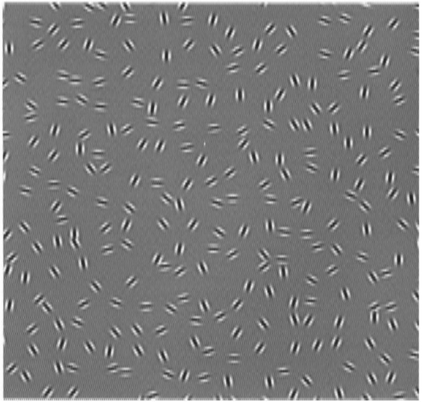




$$G_{(\theta,\sigma)}(x,y) = \mathrm{e}^{-\left(x_\theta^2+y_\theta^2\right)} \cos y_\theta,\ x_\theta = \mathrm{e}^{-\sigma}\left(x\cos\theta + y\sin\theta\right),\ y_\theta = \mathrm{e}^{-\sigma}\left(-x\sin\theta + y\cos\theta\right).$$

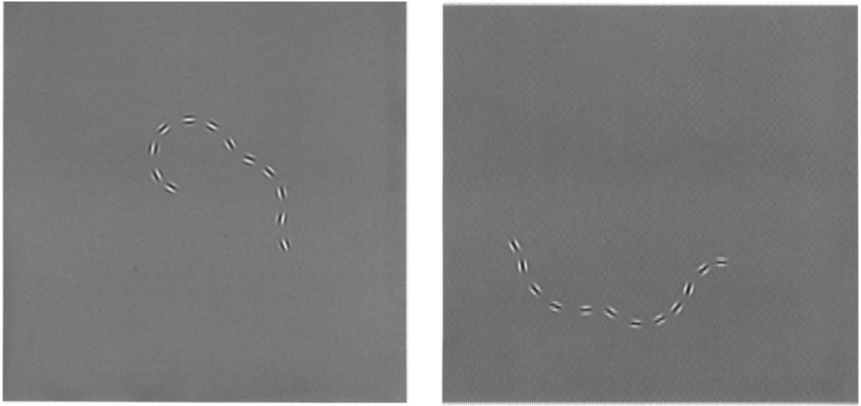
Восприятие контуров обозреваемого изображения





- D.J. Field, A. Hayes, R. Hess. Contour integration by the human visual system: Evidence for a local “association field”, Vision Research, 1993.

Восприятие контуров обозреваемого изображения



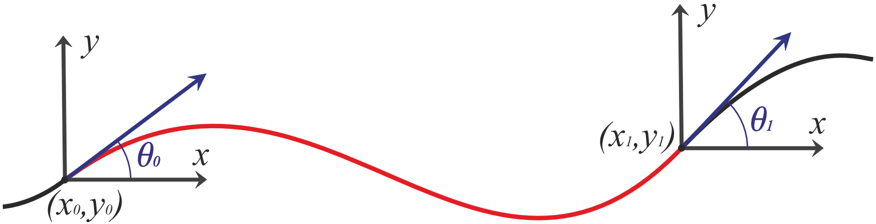
- D.J. Field, A. Hayes, R. Hess. Contour integration by the human visual system: Evidence for a local “association field”, Vision Research, 1993.

Классическая модель Петито-Читти-Сарти

- J. Petitot, 2003, группа Гейзенберга;
- G. Citti and A. Sarti, 2006, группа SE(2);
- Восстановленная дуга имеет минимальную длину в пространстве (x, y, θ):

$$\int \sqrt{\xi^2\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\dot{\theta}^2}dt \to \min, \text{ при условии } \theta = \arg\left(\dot{x} + \mathrm{i}\ \dot{y}\right).$$

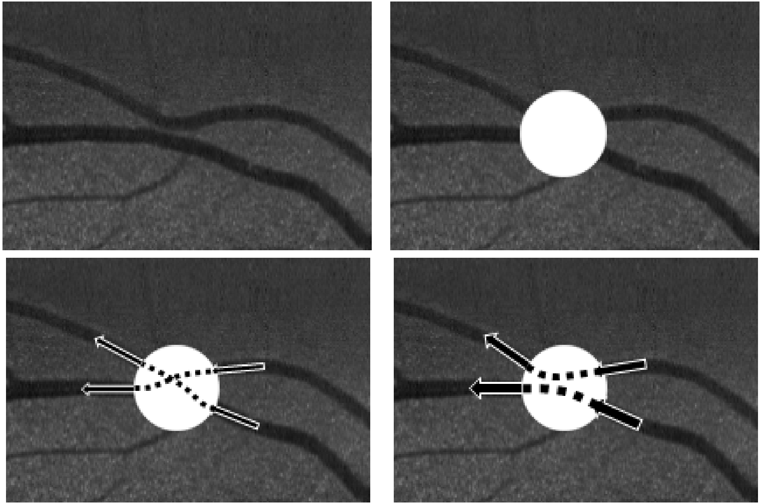
- Ю.Л. Сачков, 2011, оптимальный синтез на SE(2).



Уточнение модели: анализ толщины контуров

- D.H. Hubel and T.N. Wiesel, 1959. Вторичные «привитые» переменные: ориентация, масштаб (толщина), кривизна и другие.
- C.T. Blakemore, F. Campbell, F. On the existence of neurones in the human visual system selectively sensitive to the orientation and size of retinal images, 1969.
- S.C. Dakin, R.F. Hess, Contour integration and scale combination processes in visual edge detection, 1999.
- A. Sarti, G. Citti, J. Petitot. The symplectic structure of the primary visual cortex, 2008 (модель с учетом толщины):
    - пространство состояний — группа подобий плоскости SIM(2);
    - распределение наследуется из классической модели;
    - интегральные кривые в частных случаях;
    - задача о минимуме энергии не рассматривалась.
- в настоящей работе явно определена метрика и исследована задача о геодезических.

Уточнение модели: анализ толщины контуров

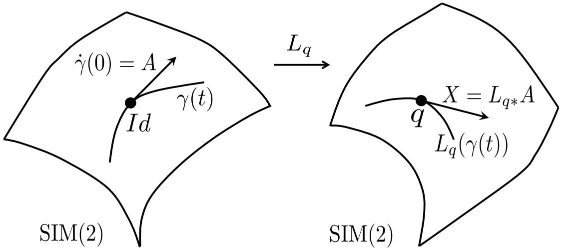


Группа подобий плоскости

- Группа преобразований подобия плоскости:

$$\mathrm{SIM}(2) = \left\{ q = \begin{pmatrix} e^{\sigma}\cos\theta & -e^{\sigma}\sin\theta & x \\ e^{\sigma}\sin\theta & e^{\sigma}\cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y)\in\mathbb{R}^2, \theta\in S^1, \sigma\in\mathbb{R} \right\}.$$

- Алгебра Ли $\mathrm{sim}(2) = \mathrm{span}\left(\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{\mathrm{Id}}, \left.\frac{\partial q}{\partial y}\right|_{\mathrm{Id}}, \left.\frac{\partial q}{\partial \theta}\right|_{\mathrm{Id}}, \left.\frac{\partial q}{\partial \sigma}\right|_{\mathrm{Id}} \right) = \mathrm{span}\,(A_1, A_2, A_3, A_4)$
- Базисные левоинвариантные векторные поля $X_i(q) = L_{*q}A_i, \quad L_q h = qh$



Субриманова структура на группе SIM(2)

- Левоинвариантное распределение $\Delta = \operatorname{span}(X_1, X_3, X_4)$:

$$X_1(q) = \mathrm{e}^{\sigma}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad X_3(q) = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad X_4(q) = \frac{\partial}{\partial\sigma},$$

$$X_2(q) = \mathrm{e}^{\sigma}\left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\right)$$ — запрещенное направление.

- Левоинвариантная метрика

$$\mathcal{G} = \omega^1 \otimes \omega^1 + \alpha^2\omega^3 \otimes \omega^3 + \beta^2\omega^4 \otimes \omega^4, \qquad \langle\omega^i, X_j\rangle = \delta_{ij}$$

- Далее рассматривается частный случай $\alpha = \beta = 1$.

Задача оптимального управления

Управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1\, \mathrm{e}^{\sigma} \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1\, \mathrm{e}^{\sigma} \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_3, \\ \dot{\sigma} = u_4, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &(x, y, \theta, \sigma) = q \in \mathrm{SIM}(2), \\ &(u_1, u_3, u_4) \in U, \\ &U = \left\{ (u_1, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u_1^2 + u_3^2 + u_4^2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

По заданным q_0, $q_1 \in \mathrm{SIM}(2)$ требуется найти управления $u_1(t)$, $u_3(t)$, $u_4(t)$ такие, что траектория $\gamma : [0, T] \to \mathrm{SIM}(2)$ переводит систему из q_0 в q_1 за минимальное время

$$T \to \min.$$

Управление u класса $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^3)$, а траектория γ есть липшицева кривая на $\mathrm{SIM}(2)$.

Существование решения

Теорема. Для любых граничных условий $q_0, q_1 \in \mathrm{SIM}(2)$ существует субриманова кратчайшая (оптимальная траектория) соединяющая их.

Существование обеспечивается теоремой Рашевского-Чжоу и теоремой Филиппова. Скобки Ли базисных полей:

$$[X_1, X_3] = -X_2, \;\; [X_1, X_4] = -X_1, \;\; [X_2, X_3] = X_1, \;\; [X_2, X_4] = -X_2.$$

Система полного ранга:

$$\mathrm{Lie}_q(X_1, X_3, X_4) = \mathrm{span}(X_1(q), [X_3, X_1](q), X_3(q), X_4(q)) = T_q \, \mathrm{SIM}(2)\,.$$

Принцип максимума Понтрягина (ПМП)

Необходимое условие оптимальности — ПМП.

- Функция Понтрягина имеет вид

  $$H_u(p,q) = \langle p, u_1 X_1(q) + u_3 X_3(q) + u_4 X_4(q)\rangle = u_1\, \mathrm{e}^{\sigma}(p_1\cos\theta + p_2\sin\theta) + u_3 p_3 + u_4 p_4,$$

  где (p_1, p_2, p_3, p_4) — координаты на $T_q^*\,\mathrm{SIM}(2)$, соответствующие (x, y, θ, σ).
- Пусть $(u(t), q(t))$, $t \in [0, T]$ есть оптимальный процесс. Тогда существует липшицева кривая $p(t)$, для которой выполняются следующие условия:

  - условие нетривиальности $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \neq 0$;

  - гамильтонова система $\dot{p} = -\dfrac{\partial H_u}{\partial q}$, $\dot{q} = \dfrac{\partial H_u}{\partial p}$;

  - условие максимума $H = \max\limits_{u \in U} H_u(p(t), q(t))$.

Случай $H = 0$ называется анормальным; $H = 1$ называется нормальным.

Принцип максимума Понтрягина (ПМП)

- Левоинвариантные гамильтонианы $h_i(p,q) = \langle p, X_i(q) \rangle$:

$$h_1 = \mathrm{e}^{\sigma} \left(p_1 \cos\theta + p_2 \sin\theta \right), \quad h_2 = \mathrm{e}^{\sigma} \left(p_1 \sin\theta - p_2 \cos\theta \right), \quad h_3 = p_3, \quad h_4 = p_4.$$

- Функция Понтрягина $H_u = u_1 h_1 + u_3 h_3 + u_4 h_4$.
- Гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \, \mathrm{e}^{\sigma} \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \, \mathrm{e}^{\sigma} \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_3, \\ \dot{\sigma} = u_4, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_1 = u_3 h_2 + u_4 h_1, \\ \dot{h}_2 = -u_3 h_1 + u_4 h_2, \\ \dot{h}_3 = -u_1 h_2, \\ \dot{h}_4 = -u_1 h_1, \end{cases}$$

Анормальные экстремали $H = 0$

Теорема. Аномальные экстремальные траектории имеют вид

$$x(t) = y(t) = \theta(t) = 0, \quad \sigma(t) = \int\limits_0^t u_4(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

где $u_4(\cdot)$ — произвольная интегрируемая функция со значениями ± 1.

Теорема. Аномальные оптимальные траектории имеют вид

$$x(t) = y(t) = \theta(t) = 0, \quad \sigma(t) = \pm t.$$

Нормальная гамильтонова система $H = 1$

- Экстремальные управления $u_i = h_i$.
- Гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{x} = h_1 \, e^{\sigma} \cos\theta, \\ \dot{y} = h_1 \, e^{\sigma} \sin\theta, \\ \dot{\theta} = h_3, \\ \dot{\sigma} = h_4, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_1 = h_3 h_2 + h_4 h_1, \\ \dot{h}_2 = -h_3 h_1 + h_4 h_2, \\ \dot{h}_3 = -h_1 h_2, \\ \dot{h}_4 = -h_1^2. \end{cases}$$

- Первые интегралы:

$$H = h_1^2 + h_3^2 + h_4^2, \quad g_1 = e^{-\sigma} \left(h_1 \cos\theta - h_2 \sin\theta \right), \quad g_2 = e^{-\sigma} \left(h_2 \cos\theta + h_1 \sin\theta \right).$$

Симплектическое слоение

- Сопряженная система

$$\dot{h}_1 = h_3 h_2 + h_4 h_1, \quad \dot{h}_2 = -h_3 h_1 + h_4 h_2, \quad \dot{h}_3 = -h_1 h_2, \quad \dot{h}_4 = -h_1^2$$

- Бивектор Пуассона P

$\{,\}$	h_1	h_2	h_3	h_4
h_1	0	0	$-h_2$	$-h_1$
h_2	0	0	h_1	$-h_2$
h_3	h_2	$-h_1$	0	0
h_4	h_1	h_2	0	0

- Нульмерные слои $\det P = 0$ при $h_1 = h_2 = 0$
- Четырехмерные слои $\det P = 4$ при $h_1^2 + h_2^2 > 0$

Нормальные экстремали в частном случае

Теорема. Если начальное значение ковектора имеет вид

$$h_{10} = h_{20} = 0, \quad h_{30}^2 + h_{40}^2 = 1,$$

то соответствующая экстремальная траектория имеет вид

$$x(t) = y(t) = 0, \;\; \theta(t) = h_{30}\, t, \;\; \sigma(t) = h_{40}\, t.$$

Нормальные экстремали в общем случае

Теорема. Решение сопряженной системы в общем случае $h_{10}^2 + h_{20}^2 > 0$, $h_{40} < 0$ имеет следующую асимптотику:

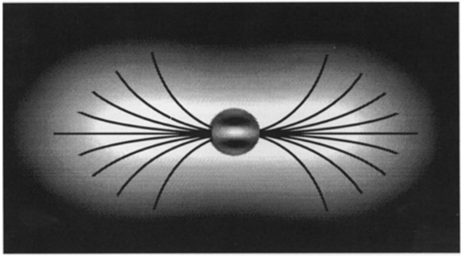
$$\lim_{t\to\infty} h_1(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} h_2(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} h_3(t) = h_{31}, \quad \lim_{t\to\infty} h_4(t) = h_{41}, \qquad h_{31}^2 + h_{41}^2 = 1.$$

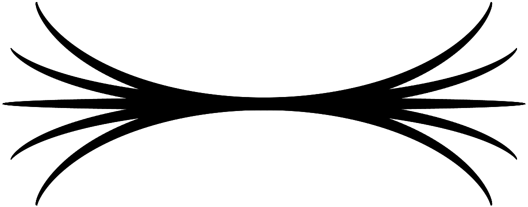
Доказательство. Обозначим $r(t) = h_1^2(t) + h_2^2(t)$. В силу системы выполнено

$$\dot r(t) = 2h_4(t)r(t) \;\Rightarrow\; r(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t 2h_4(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\, r(0).$$

Поскольку $\dot h_4(t) = -h_1^2(t) \le 0$ и $h_4(0) = h_{40} < 0$, имеем $\int_0^t 2h_4(\tau)\,\mathrm{d}\tau \le 2h_{40}t \to -\infty$. Следовательно, $\mathrm{e}^{\int_0^t 2h_4(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \to 0$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} h_1(t) = \lim\limits_{t\to\infty} h_2(t) = 0$. В силу монотонности и ограниченности $h_4(t)$, имеем $\lim\limits_{t\to\infty} h_4(t) = h_{41}$. В силу гамильтониана имеем $\lim\limits_{t\to\infty} h_3(t) = h_{31}$.

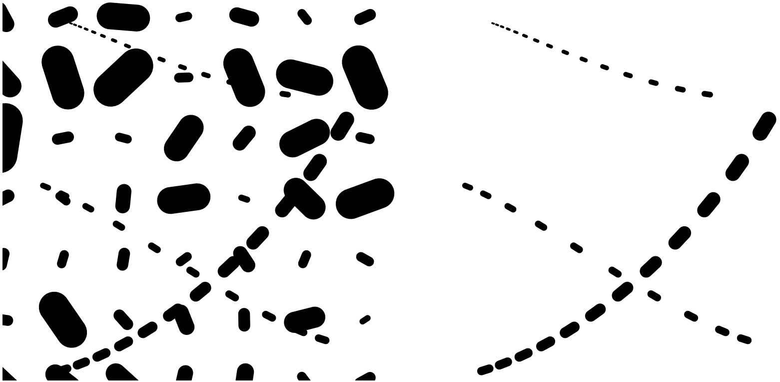
Моделирование поля ассоциаций





Слева: иллюстрация поля ассоциаций из работы [D.J. Field, A. Hayes, R. Hess, 1993].
Справа: поле ассоциаций с помощью субримановых геодезических на SIM(2).

Моделирование поля ассоциаций



Субриманово расстояние в SIM(2) для перцептивной группировки паттернов с различными положениями, ориентациями и размерами.

Заключение

- Модель Петито-Читти-Сарти с учетом толщины контуров.
- Пространство положений, направлений и толщин — группа подобий плоскости.
- Левоинвариантное распределение касательных подпространств моделирует возможные пути установления нейронной связи.
- Субриманово расстояние пропорционально энергии, затраченной на активацию промежуточных нейронов между двумя возбужденными граничными нейронами.
- Исследована субриманова задача на SIM(2).
- Существование субримановых кратчайших.
- Принцип максимума Понтрягина.
- Экстремали.

Спасибо за внимание!