Задача быстродействия на группе движений плоскости с управлением в круговом секторе

Алексей Павлович Маштаков и **Юрий Леонидович Сачков**

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН

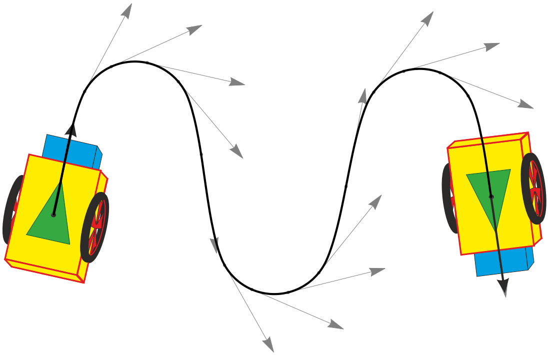
Совещание «Математика в эпоху суперкомпьютеров»
в рамках Национального суперкомпьютерного форума
Переславль-Залесский, 27.11.2023

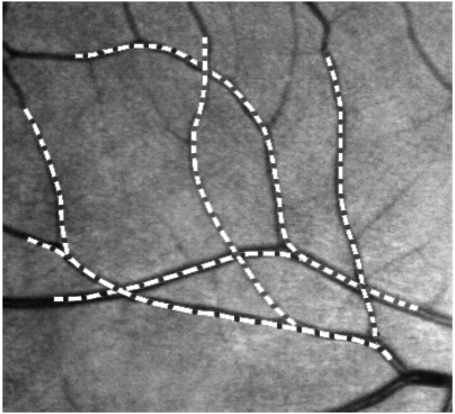
План доклада

1. Мотивация: обработка изображений и робототехника
2. Постановка задачи
3. Существование решения
4. Принцип максимума Понтрягина
5. Экстремали
6. Оптимальность экстремалей
7. Заключение

Мотивация

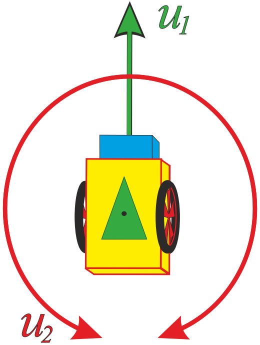
- Управление машиной с ограничением на минимальный радиус поворота.
- Поиск выделяющихся кривых. Например, поиск сосудов на фото сетчатки глаза.

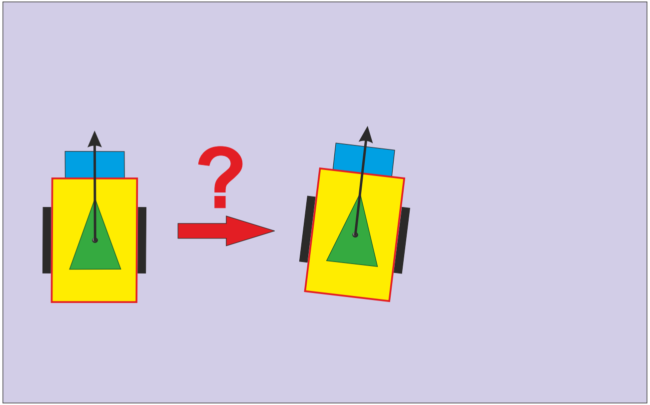




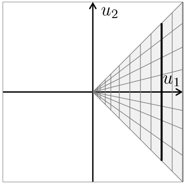
Задача быстродействия

Модель машины на плоскости. Состояние q — центральная точка и угол ориентации.
Два управления: линейная u_1 и угловая u_2 скорость, $(u_1, u_2) \in U$.
По заданным состояниям q_0, q_1 найти движение из q_0 в q_1 за минимальное время.

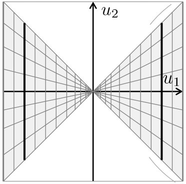




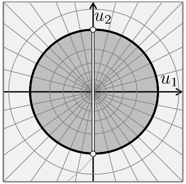
Множество допустимых управлений



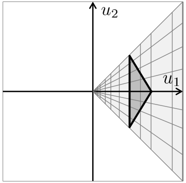
Dubins (1957)



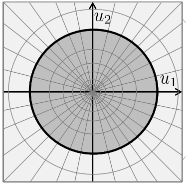
Reeds-Shepp (1990)



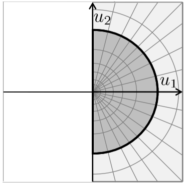
Berestovskii (1994)



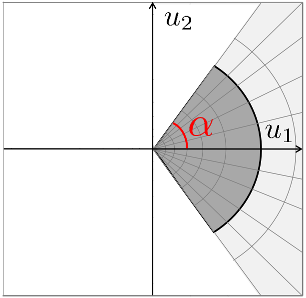
Ardentov (Next talk)



Sachkov (2010)



Duits (2018)



This work

Задача быстродействия на SE_2 с управлением в секторе

Управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \qquad \left| \qquad \begin{array}{l} (x, y, \theta) = q \in \mathrm{SE}_2 = M, \\ (u_1, u_2) \in U, \\ U = \{(r\cos\phi, r\sin\phi) \,\big|\, 0 \le r \le 1,\ |\phi| \le \alpha\}. \end{array} \right.$$

По заданным $q_0,\ q_1 \in M$ требуется найти управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ такие, что траектория $\gamma : [0, T] \to M$ переводит систему из q_0 в q_1 за минимальное время

$$\gamma(0) = q_0, \quad \gamma(T) = q_1, \qquad T \to \min.$$

Управление u класса $L^\infty([0, T], U)$, а траектория γ есть липшицева кривая на M.

Существование решения

Теорема. В задаче быстродействия левоинвариантной управляемой системой на группе движений плоскости с управлением в круговом секторе с углом раствора $\leq \pi$ **оптимальное управление существует для любых граничных условий**.

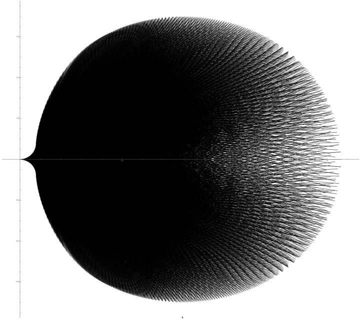
Существование обеспечивается теоремой Филиппова в силу компактности и выпуклости множества значений допустимых управлений и полной управляемости.

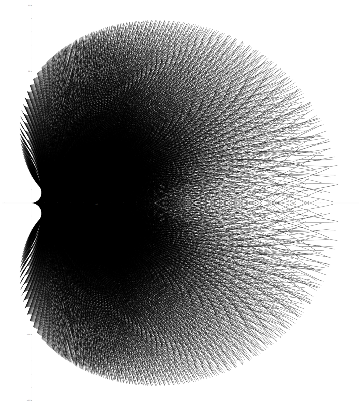
Полная управляемость доказывается методом насыщения Ли.
Пусть $\hat{\mathcal{F}} = \{ X_1 + wX_2 | \, |w| \leq \operatorname{tg} \alpha \}$. *Векторное поле* $X_1 + wX_2$, $w \neq 0$ *имеет периодическую траекторию. Тогда,* $-(X_1 + wX_2) \in \mathrm{LS}(\hat{F})$. *Получаем* $-wX_2 = -(X_1 + wX_2) + X_1 \in \mathrm{LS}(\hat{F})$. *Следовательно,* $\pm X_2 \in \mathrm{LS}(\hat{F})$, $\pm X_1 \in \mathrm{LS}(\hat{F})$.
Таким образом, $\mathrm{LS}(\hat{\mathcal{F}}) = \mathrm{Lie}(X_1, X_2)$.

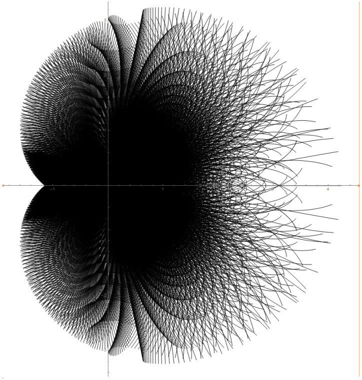
Управляемая система не является локально управляемой за малое время.

$x(t) = \int_0^t u_1(\tau) \cos \theta(\tau) \, \mathrm{d}\,\tau \geq 0$ для малого $t > 0$.

Множество достижимости







Принцип максимума Понтрягина (ПМП)

Необходимое условие оптимальности — ПМП.

- Обозначим $(p_1, p_2, p_3) \in T_q^* M \simeq \mathbb{R}^3$. Функция Понтрягина имеет вид

$$H_u = u_1(p_1 \cos\theta + p_2 \sin\theta) + u_2 p_3.$$

- Пусть $(u(t), q(t))$, $t \in [0, T]$ есть оптимальный процесс. Тогда существует липшицева кривая $p(t)$, для которой выполняются следующие условия:

  - условие нетривиальности $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0$;
  - гамильтонова система $\dot{p} = -\dfrac{\partial H_u}{\partial q}$, $\dot{q} = \dfrac{\partial H_u}{\partial p}$;
  - условие максимума $H = \max\limits_{u \in U} H_u(p(t), q(t)) \in \{0, 1\}$.

Случай $H = 0$ называется анормальным; $H = 1$ называется нормальным.

Принцип максимума Понтрягина для левоинвариантной задачи

Левоинвариантные гамильтонианы $h_i = \langle \lambda, X_i \rangle$, $\lambda \in T^*M$:

$$h_1 = p_1 \cos\theta + p_2 \sin\theta, \quad h_2 = p_3, \quad h_3 = p_1 \sin\theta - p_2 \cos\theta.$$

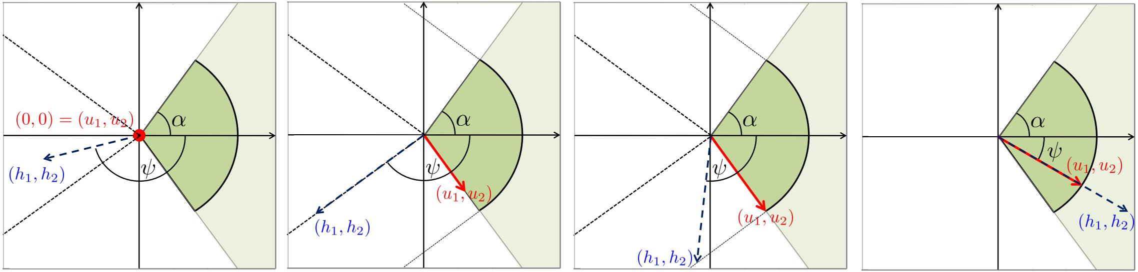
Функция Понтрягина $H_u = u_1 h_1 + u_2 h_2$.
Гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_1 = -u_2 h_3, \\ \dot{h}_2 = u_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = u_2 h_1. \end{cases}$$

Условие максимума

Пусть $h_1 = \rho\cos\psi$, $h_2 = \rho\sin\psi$, $\psi \in (-\pi, \pi]$, $\rho > 0$. Гамильтониан $H = \max\limits_{u \in U} u_1 h_1 + u_2 h_2$.

- При $|\psi| \in (\frac{\pi}{2} + \alpha, \pi]$: $H = 0$, $u_1 = u_2 = 0$.
- При $|\psi| = \frac{\pi}{2} + \alpha$: $H = 0$, $u_1 = r\cos\alpha$, $u_2(t) = r\sin\alpha$.
- При $\pm\psi \in (\alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha)$: $H = h_1\cos\alpha \pm h_2\sin\alpha$, $u_1 = \cos\alpha$, $u_2 = \pm\sin\alpha$.
- При $|\psi| \leq \alpha$: $H = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, $u_1 = \cos\psi$, $u_2 = \sin\psi$.
- При $\rho = 0$: $H = 0$ для любых $(u_1, u_2) \in U$.



Анормальные экстремали

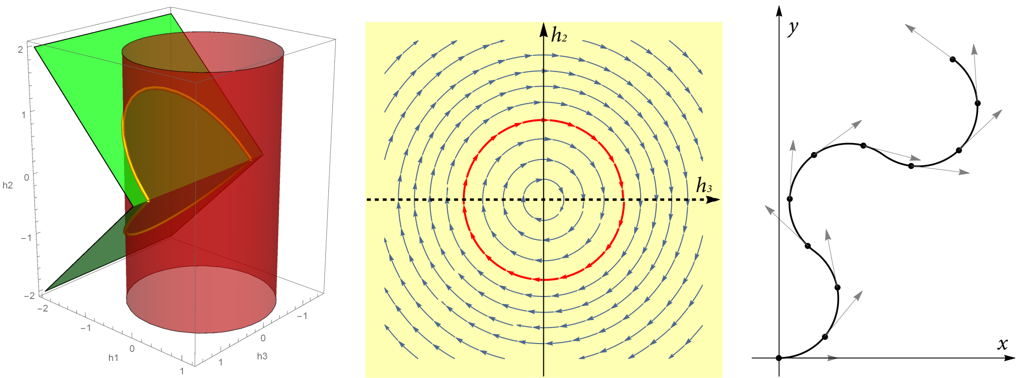
Гамильтониан $H = 0$ тогда и только тогда, когда $|\psi| \in [\frac{\pi}{2} + \alpha, \pi]$.
Анормальные экстремали

- при $|\psi| > \frac{\pi}{2} + \alpha$: тривиальны;
- при $|\psi| = \frac{\pi}{2} + \alpha$: соответствуют движению машины по половине дуги окружности минимально возможного радиуса с произвольной скоростью $r(t) = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \in L^\infty([0, T], [0, 1])$;
  в моменты переключения направление обхода (по или против часовой стрелке) меняется вместе со знаком ψ, первый момент переключения происходит не позже половины дуги, следующие переключения происходят ровно через половину дуги.

Анормальные экстремали

- не являются оптимальными, если $r(t) < 1$ для некоторого $t \in [0, T]$;
- не являются строго анормальными при $r(t) \equiv 1$ до первого момента переключения.

Анормальный случай



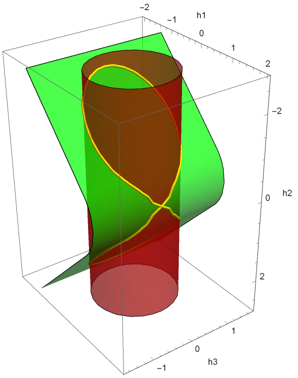
гамильтониан

$$0 = H = \begin{cases} h_1 \cos\alpha + |h_2| \sin\alpha, & \text{при } |\psi| > \alpha, \\ \sqrt{h_1^2 + h_2^2}, & \text{при } |\psi| \le \alpha. \end{cases}$$

функция Казимира

$$E = h_1^2 + h_3^2.$$

Нормальный случай: первые интегралы гамильтоновой системы



гамильтониан $H = \begin{cases} h_1 \cos\alpha + |h_2| \sin\alpha, & \text{при } |\psi| > \alpha, \\ \sqrt{h_1^2 + h_2^2}, & \text{при } |\psi| \leq \alpha. \end{cases}$

функция Казимира
$E = h_1^2 + h_3^2.$

Редукция системы техникой выпуклой тригонометрии

Полярное множество к U есть $U^o = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^{2*} \,|\, u_1 h_1 + u_2 h_2 \leq 1 \ \forall (u_1, u_2) \in U\}$:

$$U^o = \left\{ (\overbrace{\rho\cos\psi}^{=h_1}, \overbrace{\rho\sin\psi}^{=h_2}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{при } |\psi| \leq \alpha : \rho \in [0,1], \\ \text{при } \alpha < \psi < \alpha + \frac{\pi}{2} : \ h_1\cos\alpha + h_2\sin\alpha \leq 1, \\ \text{при } -\alpha - \frac{\pi}{2} < \psi < -\alpha : \ h_1\cos\alpha - h_2\sin\alpha \leq 1 \end{array} \right\}$$

Функции выпуклой тригонометрии

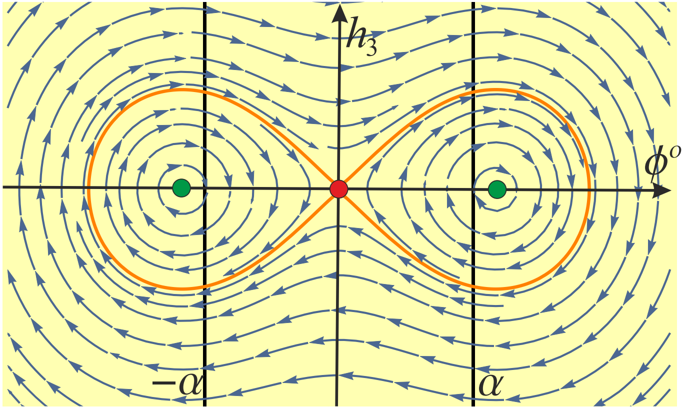
$$\begin{array}{l} \text{при } |\phi^o| \leq \alpha : \ \cos_{U^o}\phi^o = \cos\phi^o, \ \sin_{U^o}\phi^o = \sin_{U^o}\phi^o; \\ \text{при } |\phi^o| > \alpha : \ \cos_{U^o}\phi^o = \cos\alpha - \sin\alpha(\phi^o - \alpha), \ \sin_{U^o}\phi^o = \operatorname{sign}(\phi^o)\,(\sin\alpha + \cos\alpha(\phi^o - \alpha)) \end{array}$$

Вдоль экстремальных траекторий $u_1 = \cos\phi$, $u_2 = \sin\phi, h_1 = \cos_{U^o}\phi^o$, $h_2 = \sin_{U^o}\phi^o$. Обозначим $K(\phi^o) = \frac{1}{2}\cos^2_{U^o}\phi^o$. Функция Казимира $E = \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_3^2}{2} = \frac{h_3^2}{2} + K(\phi^o)$ есть полная энергия консервативной системы с одной степенью свободы

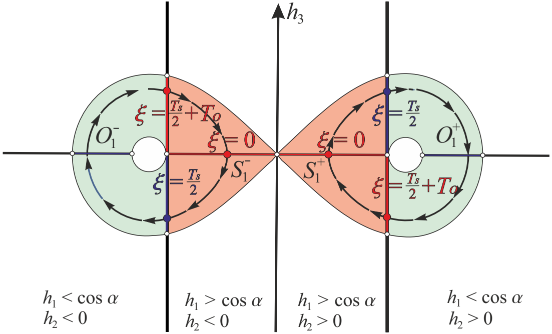
$$\dot{\phi^o} = h_3, \quad \dot{h}_3 = -K'(\phi^o).$$

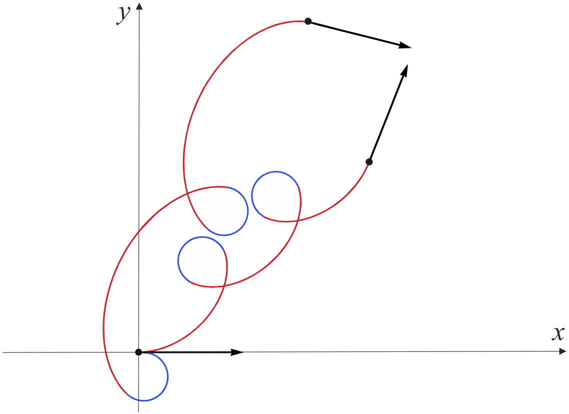
Фазовый портрет на поверхности уровня гамильтониана

- $E = 0 \Rightarrow (\phi^o, h_3) \equiv (\pm(\alpha + \cot\alpha), 0)$ устойчивое равновесие;
- $E \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow$ траектория $(\phi^o, h_3)(t)$ периодична;
- $E = \frac{1}{2} \Rightarrow (\phi^o, h_3) \equiv (0, 0)$ неустойчивое равновесие, либо $(\phi^o, h_3)(t)$ сепаратриса.

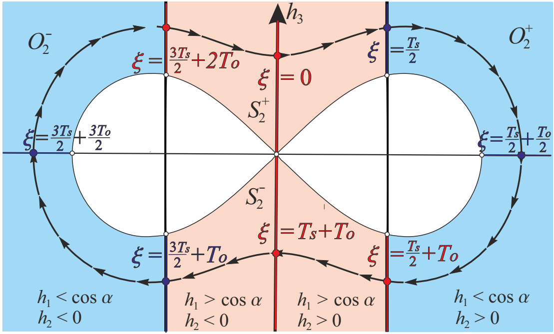


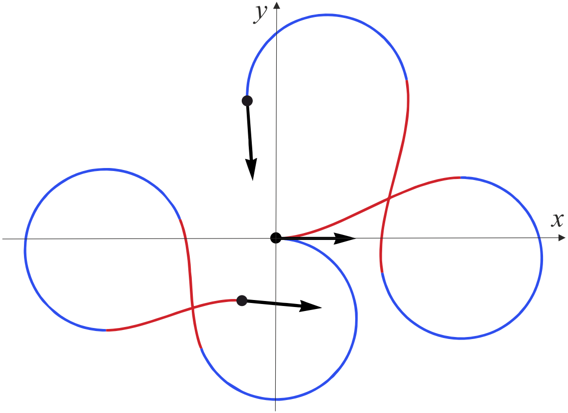
Экстремальные траектории в области C_1



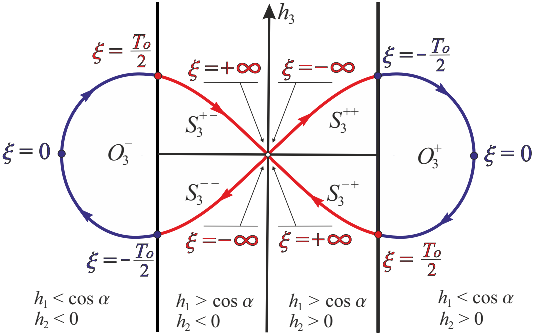


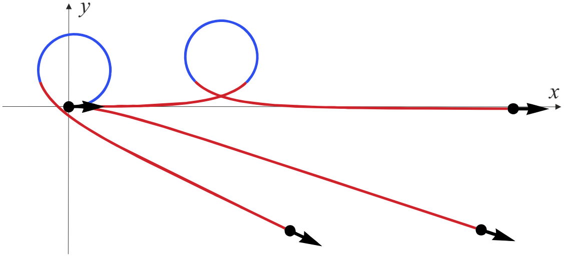
Экстремальные траектории в области C_2



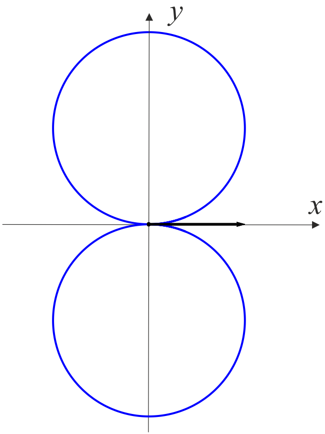


Экстремальные траектории в области C_3





Экстремальные траектории в областях C_4 и C_5



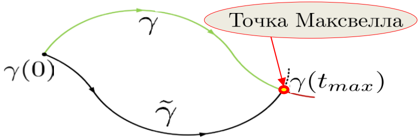
Оптимальность экстремальных траекторий

- Короткие дуги экстремальных траекторий γ оптимальны.
- Время разреза вдоль γ:

$$t_{cut} = \sup\{\tau > 0 \mid \gamma(t) \ \text{ оптимальна при } \ t \in [0, \tau]\}.$$

- Время Максвелла t_{max}:

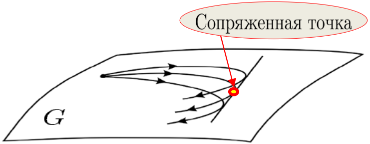
$$\exists\ \tilde{\gamma} \not\equiv \gamma\ : \begin{cases} \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0), \\ \gamma(t_{max}) = \tilde{\gamma}(t_{max}) \end{cases}$$



- Сопряженное время t_{conj}:

  Сопряженная точка — критическое значение Exp:

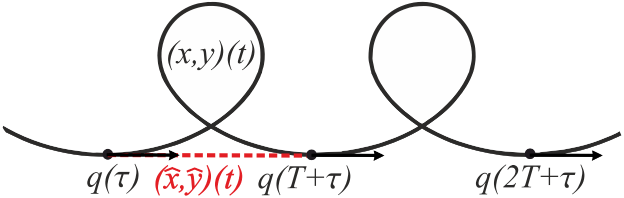
  $\frac{\partial\,\mathrm{Exp}}{\partial(\lambda, t)}(\lambda_0, t_{conj}) = 0.$



- Верхняя граница времени разреза:

$$t_{cut} \le \min(t_{max}, t_{conj}).$$

Оптимальность экстремальных траекторий



В области C_1: $t_{cut} \leq 2(T_o + T_s)$

В области C_2: $t_{cut} \leq 4(T_o + T_s)$

В области C_3: $t_{cut} = \infty$ для траекторий без переключений

В области C_4: $t_{cut} = T_o$

В области C_5: $t_{cut} = \infty$

Заключение

Результаты:

- Левоинвариантная задача быстродействия на SE_2 с управлением в секторе.
- Приложения в робототехнике и обработке изображений.
- Доказательство существования решения.
- Явные формулы для экстремальных управлений и траекторий.
- Оптимальность экстремалей.

Публикации:

1. [1] А.П. Маштаков, Ю.Л. Сачков, *Экстремальные траектории в задаче быстродействия на группе движений плоскости с допустимым управлением в круговом секторе*, Труды МИАН, 2023.
2. [2] A. Mashtakov, Yu. Sachkov, *Time-Optimal Problem in the Roto-Translation Group with Admissible Control in a Circular Sector*, Mathematics, 2023.

Спасибо за внимание!