

УДК 517.977

Экстремальные траектории в задаче быстрогодействия на группе движений плоскости с допустимым управлением в круговом секторе*

А. П. Маштаков^a, Ю. Л. Сачков^a

Поступило 06.03.2023; после доработки 12.04.2023; принято к публикации 19.04.2023

Рассматривается задача быстрогодействия для модели машины, которая может двигаться вперед по плоскости и поворачивать с заданным минимальным радиусом поворота. Траектории такой системы применимы при обработке изображений для обнаружения выделяющихся кривых. Доказаны управляемость и существование оптимальных траекторий. На основе необходимого условия оптимальности — принципа максимума Понтрягина выведена гамильтонова система для экстремалей. Проведен качественный анализ гамильтоновой системы, и получены явные выражения для экстремальных управлений и траекторий.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tm4341>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается модель идеализированной машины (мобильного робота), движущейся по плоскости (рис. 1). Машина имеет два параллельных колеса, равноудаленных от центра оси колесной пары. Оба колеса имеют независимые приводы, которые могут вращаться так, что соответствующее качение колес происходит без проскальзывания. Конфигурация системы описывается тройкой $q = (x, y, \theta) \in \mathbb{M} = \mathbb{R}^2 \times S^1$, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — центральная точка, а $\theta \in S^1$ — угол ориентации машины на плоскости. Таким образом, конфигурационное пространство \mathbb{M} образует группу Ли собственных евклидовых движений плоскости $SE_2 \simeq \mathbb{M} = \mathbb{R}^2 \times S^1$.

У машины есть два управления: линейная скорость u_1 и угловая скорость u_2 . Динамика в произвольной конфигурации $q \in SE_2$ определяется управляемой системой

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad (1.1)$$

где X_i — левоинвариантные векторные поля:

$$X_1(q) = (\cos \theta) \partial_x + (\sin \theta) \partial_y, \quad X_2(q) = \partial_\theta, \quad X_3(q) = (\sin \theta) \partial_x - (\cos \theta) \partial_y.$$

Различные множества допустимых значений управления $U \ni (u_1, u_2)$ в задаче быстрогодействия (ЗБ) приводят к разным моделям (рис. 2):

- если $u_1 = 1$, $|u_2| \leq \kappa$, $\kappa > 0$, то ЗБ приводит к модели машины Дубинса [8];
- если $|u_1| = 1$, $|u_2| \leq \kappa$, $\kappa > 0$, то ЗБ приводит к модели машины Ридса–Шеппа [16];

*Исследование первого автора (разделы 1, 4, 5) выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00877, <https://rscf.ru/project/22-21-00877/>.

^aИнститут программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия.

E-mail: alexey.mashtakov@gmail.com (А.П. Маштаков), yusachkov@gmail.com (Ю.Л. Сачков).

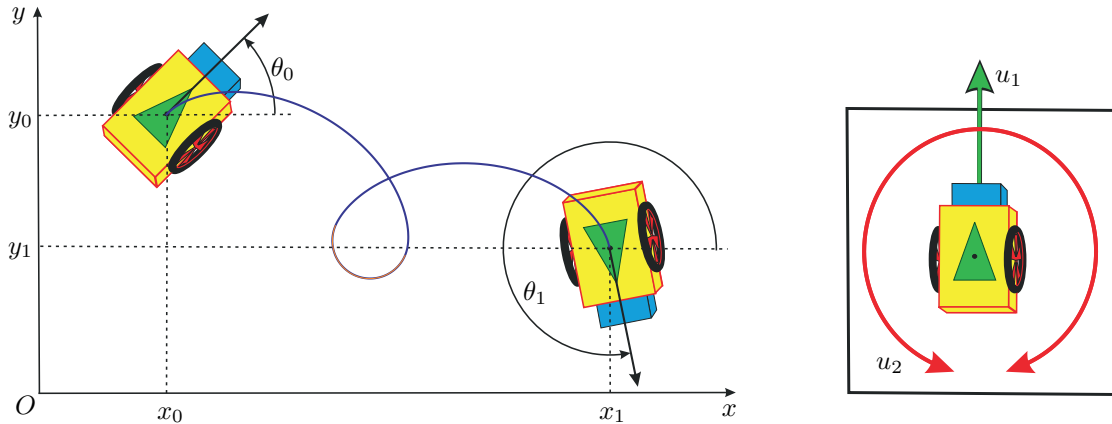


Рис. 1. Модель мобильного робота (машины), который может двигаться вперед и поворачивать с заданным минимальным радиусом поворота. Управление u_1 отвечает за движение вперед, а управление u_2 — за поворот

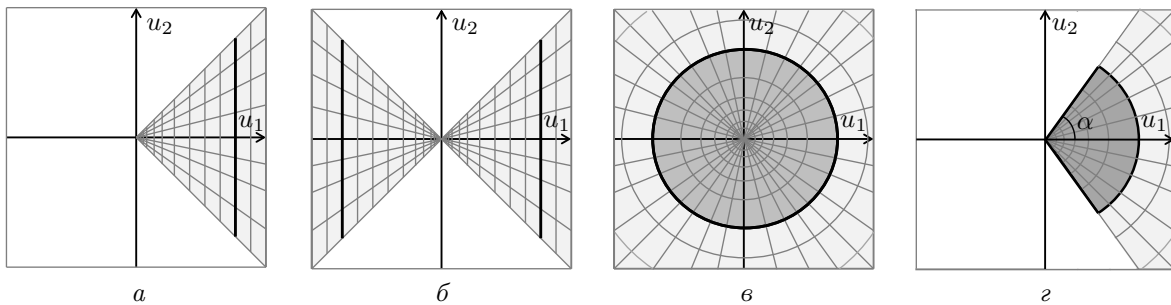


Рис. 2. Множество допустимых значений управления для различных моделей машины на плоскости: *a* — машина Дубинса [8]; *b* — машина Ридса–Шеппа [16]; *c* — субриманова модель [18]; *d* — модель, исследуемая в данной работе

- если $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$, то ЗБ приводит к модели, изученной Сачковым [18], траектории которой являются субримановыми кратчайшими;
- если $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$, $u_1 \neq 0$, то ЗБ приводит к модели, исследованной Берестовским [5];
- если $u_1 \geq 0$, $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$, то ЗБ приводит к модели машины, движущейся вперед и поворачивающей на месте, предложенной Дёйтсом [10];
- если $u_1 = r \cos \phi$, $u_2 = r \sin \phi$, $0 \leq r \leq 1$, $|\phi| \leq \alpha$, то ЗБ приводит к общей модели машины с управлением в круговом секторе, которая изучается в данной работе. В нашей модели машина может двигаться вперед по плоскости и поворачивать с заданным минимальным радиусом поворота. Такое ограничение естественно в робототехнике.

Система (1.1) появляется в робототехнике как модель мобильного колесного робота. Система также возникает при моделировании зрительной системы человека [15, 7, 9] и в обработке изображений [14, 6, 4]. Рассматриваемая модель актуальна для обнаружения выделяющихся кривых на изображениях и направлена на решение “проблемы точек возврата” из [4].

В настоящей работе изучается задача быстродействия для системы (1.1) с управлением в круговом секторе. Мы обобщаем результаты работ [12, 13], в которых был подробно исследован частный случай допустимого управления в полукруге, первоначально предложенный Дёйтсом с соавторами в [10]. К задаче применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП), и выводится гамильтонова система ПМП. Проводится качественный анализ гамильтоновой системы, и выводятся выражения для экстремальных управлений и траекторий.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для любого $\alpha \in (0, \pi/2)$ рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta, & (x, y, \theta) = q \in \text{SE}_2 = \mathbb{M}, \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta, & u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \\ \dot{\theta} = u_2, & |u_2| \leq u_1 \operatorname{tg} \alpha. \end{cases} \quad (2.1)$$

Исследуется задача быстрогодействия, в которой для заданных граничных условий $q_0, q_1 \in \mathbb{M}$ требуется найти управления $u_1(t), u_2(t) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$ такие, что соответствующая траектория $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{M}$ переводит систему из начального состояния q_0 в конечное состояние q_1 за минимальное время:

$$\gamma(0) = q_0, \quad \gamma(T) = q_1, \quad T \rightarrow \min. \quad (2.2)$$

Ввиду инвариантности относительно левого действия SE_2 без ограничения общности положим $q_0 = (0, 0, 0)$.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе доказывается, что для любого $q_1 \in \mathbb{M}$ существует оптимальная траектория, соединяющая q_0 с q_1 . Также показывается, что система (2.1) не является локально управляемой за малое время.

Определение 1. Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(\mathbb{M})$, $q_0 \in \mathbb{M}$, $t \geq 0$. Обозначим через $\mathcal{A}_{q_0, \leq t}(\mathcal{F})$ множество достижимости системы \mathcal{F} из q_0 за время $\leq t$. Система \mathcal{F} называется *локально управляемой за малое время в q_0* , если $\text{int } \mathcal{A}_{q_0, \leq t}(\mathcal{F}) \ni q_0$ при всех $t > 0$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(\mathbb{M})$, $q_0 \in \mathbb{M}$. Обозначим через $\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F})$ множество достижимости системы \mathcal{F} из q_0 (за любое неотрицательное время). Система \mathcal{F} называется *глобально управляемой из q_0* , если $\mathcal{A}_{q_0}(\mathcal{F}) = \mathbb{M}$; система называется *глобально управляемой*, если она глобально управляема из любой точки конфигурационного пространства \mathbb{M} .

Для $0 < \alpha < \pi/2$ введем множество допустимых управлений

$$U = \{(u_1, u_2) : u_1 = r \cos \phi, u_2 = r \sin \phi, 0 \leq r \leq 1, |\phi| \leq \alpha\}.$$

Пусть $\mathcal{F} = \{u_1 X_1 + u_2 X_2 : (u_1, u_2) \in U\} \subset \text{Vec}(\mathbb{M})$.

Теорема 1. Ни для какого $q \in \mathbb{M}$ система \mathcal{F} не является локально управляемой в q за малое время.

Доказательство. В силу левоинвариантности системы \mathcal{F} ограничимся случаем $q = q_0 = (0, 0, 0)$. Для любого $u \in U$ имеем $u_1 > 0$. Более того, $\theta(0) = 0$ и

$$x(t) = \int_0^t u_1(\tau) \cos \theta(\tau) d\tau > 0 \quad \text{для достаточно малых } t > 0.$$

Таким образом, $q_0 \notin \text{int } \mathcal{A}_{q_0, \leq t}(\mathcal{F})$ и система \mathcal{F} не является локально управляемой за малое время в q_0 . \square

Теорема 2. Система \mathcal{F} глобально управляема.

Доказательство. Глобальная управляемость системы \mathcal{F} следует из глобальной управляемости меньшей системы $\widehat{\mathcal{F}} = \{X_1 + wX_2 : |w| \leq \operatorname{tg} \alpha\}$. Имеем $\cos \alpha \cdot \widehat{\mathcal{F}} = \{\cos \alpha \cdot X_1 + vX_2 : |v| \leq \sin \alpha\} \subset \mathcal{F}$. Остается доказать, что $\widehat{\mathcal{F}}$ глобально управляема. С этой целью вычислим насыщение Ли $\text{LS}(\widehat{\mathcal{F}})$ (см. [17]) и покажем, что $\text{LS}(\widehat{\mathcal{F}}) = \text{Lie}(X_1, X_2)$.

Векторное поле $X_1 + wX_2$, $w > 0$, имеет периодическую траекторию

$$\theta = \theta_0 + wt, \quad x = x_0 + \frac{\sin(\theta_0 + wt) - \sin \theta_0}{w}, \quad y = y_0 + \frac{\cos \theta_0 - \cos(\theta_0 + wt)}{w}.$$

Таким образом, $-(X_1 + wX_2) \in \text{LS}(\widehat{\mathcal{F}})$, $|w| < \text{tg } \alpha$. Следовательно, $-wX_2 = -(X_1 + wX_2) + X_1 \in \text{LS}(\widehat{\mathcal{F}})$. Поэтому $\pm X_2 \in \text{LS}(\widehat{\mathcal{F}})$, а значит, $\pm X_1 \in \text{LS}(\widehat{\mathcal{F}})$. Так как $\widehat{\mathcal{F}}$ имеет полный ранг, получаем $\text{LS}(\widehat{\mathcal{F}}) \supset \text{Lie}(X_1, X_2)$, откуда следует, что $\widehat{\mathcal{F}}$ глобально управляема. Тогда и \mathcal{F} глобально управляема. \square

Далее возникает вопрос о существовании оптимальных траекторий: всегда ли существует допустимая траектория, соединяющая граничные условия за минимальное время? Для задачи (2.1) ответ положительный. В силу компактности и выпуклости множества U и глобальной управляемости системы \mathcal{F} существование оптимальных траекторий гарантируется теоремой Филиппова (см. [2]).

4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Применим необходимое условие оптимальности — ПМП (см. [1, 2]). Функция Понтрягина имеет вид

$$H_u = u_1(p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta) + u_2 p_3, \quad \text{где } (p_1, p_2, p_3) \in T_q^* \mathbb{M} \simeq \mathbb{R}^3.$$

Пусть $(u(t), q(t))$, $t \in [0, T]$, — оптимальный процесс. Тогда существует липшицева кривая $p(t)$, для которой выполняются следующие соотношения:

(1) гамильтонова система

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_u}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H_u}{\partial p};$$

(2) условие максимума

$$H_{u(t)}(p(t), q(t)) = \max_{u \in U} H_u(p(t), q(t)) = H \in \{0, 1\};$$

(3) условие нетривиальности $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0$.

Максимизированная функция Понтрягина (гамильтониан) H является первым интегралом гамильтоновой системы. Случай $H = 0$ называется аномальным, а случай $H = 1$ — нормальным.

Пусть $h_i = \langle p, X_i \rangle$: $h_1 = p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta$, $h_2 = p_3$, $h_3 = p_1 \sin \theta - p_2 \cos \theta$.

Функция Понтрягина принимает вид $H_u = u_1 h_1 + u_2 h_2$.

Гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = -u_2 h_3, \\ \dot{h}_2 = u_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = u_2 h_1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Подсистема для переменных состояния x, y, θ называется *горизонтальной* частью, а подсистема для сопряженных переменных h_1, h_2, h_3 — *вертикальной* частью гамильтоновой системы. Экстремальное управление определяется вертикальной частью, а экстремальная траектория является решением горизонтальной части.

Пусть $h_1 = \rho \cos \psi$, $h_2 = \rho \sin \psi$, $\psi \in (-\pi, \pi]$, $\rho \geq 0$. Из условия максимума получаем следующее:

- если $|\psi| \in (\pi/2 + \alpha, \pi]$, то $H = 0$, $u_1 = u_2 = 0$;
- если $\pm \psi = \pi/2 + \alpha$, то $H = 0$, $u_1 = r \cos \alpha$, $u_2 = \pm r \sin \alpha$;

- если $\pm\psi \in (\alpha, \pi/2 + \alpha)$, то $H = h_1 \cos \alpha \pm h_2 \sin \alpha$, $u_1 = \cos \alpha$, $u_2 = \pm \sin \alpha$;
- если $|\psi| \leq \alpha$, то $H = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, $u_1 = \cos \psi$, $u_2 = \sin \psi$;
- если $\rho = 0$, то $H = 0$ для любых $(u_1, u_2) \in U$.

Так как $H = 0$ тогда и только тогда, когда $|\psi| \in [\pi/2 + \alpha, \pi]$ или $\rho = 0$, аномальные экстремали имеют следующий вид. Аномальные экстремальные управления задаются формулами $u_1(t) = r(t) \cos \alpha$, $u_2(t) = \pm r(t) \sin \alpha$, где $0 \leq r(t) \leq 1$ и знак \pm меняется при увеличении угла θ на $\Delta\theta = \pm\pi$, кроме первой и последней дуг, у которых приращение угла может быть не больше π . Аномальные экстремальные траектории соответствуют движению машины по дуге окружности минимально возможного радиуса. Легко показать, что если $r(t) < 1$, то траектория не оптимальна. В самом деле, если $r(t) \in (0, 1)$ для множества времени с положительной мерой, то можно перепараметризовать траекторию с помощью параметра s , $ds = r(t) dt$. При этом сама траектория остается прежней, новые управления также допустимы и принадлежат единичной окружности, но новое время движения S становится строго меньше исходного:

$$S = \int_0^S ds = \int_0^T r(t) dt < \int_0^T dt = T.$$

Теперь исследуем нормальный случай $H = 1$, $|\psi| < \pi/2 + \alpha$. Вертикальная часть имеет первые интегралы: гамильтониан

$$1 = H = \begin{cases} h_1 \cos \alpha + |h_2| \sin \alpha & \text{при } \alpha + \frac{\pi}{2} > |\psi| > \alpha, \\ \sqrt{h_1^2 + h_2^2} & \text{при } |\psi| \leq \alpha \end{cases} \tag{4.2}$$

и функцию Казимира

$$E = \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2},$$

т.е. E постоянна вдоль любого решения любой левоинвариантной гамильтоновой системы на SE_2 .

Для описания фазового портрета вертикальной части используем технику выпуклой тригонометрии [11]. Полярное множество к U имеет вид

$$U^\circ = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^{2*} \mid u_1 h_1 + u_2 h_2 \leq 1 \ \forall (u_1, u_2) \in U\} = \\ = \left\{ \left(\underbrace{\rho \cos \psi}_{h_1}, \underbrace{\rho \sin \psi}_{h_2} \right) \left| \begin{array}{ll} \rho \in [0, 1] & \text{при } |\psi| \leq \alpha, \\ h_1 \cos \alpha + h_2 \sin \alpha \leq 1 & \text{при } \alpha < \psi < \alpha + \frac{\pi}{2}, \\ h_1 \cos \alpha - h_2 \sin \alpha \leq 1 & \text{при } -\alpha - \frac{\pi}{2} < \psi < -\alpha \end{array} \right. \right\}.$$

Соответствующие функции выпуклой тригонометрии суть

$$\cos_{U^\circ} \phi^\circ = \begin{cases} \cos \phi^\circ & \text{при } |\phi^\circ| \leq \alpha, \\ \cos \alpha - (\phi^\circ - \alpha) \sin \alpha & \text{при } |\phi^\circ| > \alpha, \end{cases} \\ \sin_{U^\circ} \phi^\circ = \begin{cases} \sin \phi^\circ & \text{при } |\phi^\circ| \leq \alpha, \\ (\sin \alpha + (\phi^\circ - \alpha) \cos \alpha) \operatorname{sgn}(\phi^\circ) & \text{при } |\phi^\circ| > \alpha. \end{cases}$$

Вдоль экстремальных траекторий имеем

$$u_1 = \cos \phi, \quad u_2 = \sin \phi, \quad h_1 = \cos_{U^\circ} \phi^\circ, \quad h_2 = \sin_{U^\circ} \phi^\circ.$$

Положим $K(\phi^\circ) = (1/2) \cos^2_{U^\circ} \phi^\circ$. Функцию Казимира E можно понимать как интеграл полной энергии (суммы потенциальной и кинетической энергий)

$$E = \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_3^2}{2} = \frac{h_3^2}{2} + K(\phi^\circ)$$

консервативной системы с одной степенью свободы (см. [3])

$$\dot{\phi}^\circ = h_3, \quad \dot{h}_3 = -K'(\phi^\circ). \quad (4.3)$$

Анализируя фазовый портрет системы (4.3), заключаем следующее:

- если $E = 0$, то $(\phi^\circ, h_3) \equiv (\pm(\alpha + \operatorname{ctg} \alpha), 0)$ — устойчивое равновесие;
- если $E \in (0, +\infty) \setminus \{1/2\}$, то траектория $(\phi^\circ, h_3)(t)$ периодическая;
- если $E = 1/2$, то либо $(\phi^\circ, h_3) \equiv (0, 0)$ — неустойчивое равновесие, либо $(\phi^\circ, h_3)(t)$ — сепаратриса седловой точки.

5. ЯВНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

В этом разделе мы выводим явные формулы для экстремалей. Поскольку $u_1 > 0$, любую траекторию системы (2.1) можно параметризовать длиной дуги на плоскости Oxy :

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)} d\tau = \int_0^t u_1(\tau) d\tau.$$

Переписывая систему (4.1) в s -параметризации, получаем

$$\begin{cases} x' = \cos \theta, \\ y' = \sin \theta, \\ \theta' = u, \end{cases} \quad \begin{cases} h'_1 = -uh_3, \\ h'_2 = h_3, \\ h'_3 = uh_1, \end{cases} \quad (5.1)$$

где штрих означает производную d/ds и $u = u_2/u_1$.

В предыдущем разделе было показано, что в зависимости от знака величины $a = |\phi^\circ| - \alpha$ имеются два различных режима. Когда a меняет знак, происходит переключение с одного режима на другой. Далее рассмотрим каждый из случаев по отдельности.

Случай $|\phi^\circ| > \alpha$. Имеем $u \equiv \pm \sin \alpha$, а соответствующие экстремальные траектории суть дуги окружностей на плоскости Oxy :

$$x(s) = \frac{1}{u} \sin(us), \quad y(s) = \frac{1}{u} (\cos(us) - 1), \quad \theta(s) = us.$$

Случай $|\phi^\circ| < \alpha$. Экстремальные траектории суть дуги субримановых геодезических. Пусть $p_1 = h_1 \cos \theta + h_3 \sin \theta$, $p_2 = h_1 \sin \theta - h_3 \cos \theta$, $p_3 = h_2$. Вертикальная часть гамильтоновой системы (5.1) принимает вид

$$p'_1(s) = 0, \quad p'_2(s) = 0, \quad p'_3(s) = p_1 \sin \theta(s) - p_2 \cos \theta(s).$$

Заметим, что функция $p_3(s)$ удовлетворяет уравнению

$$p''_3(s) = p_3(s), \quad p'_3(0) = -p_2, \quad p_3(0) = p_{30},$$

которое имеет решение $p_3(s) = p_{30} \operatorname{ch} s - p_2 \operatorname{sh} s$.

Пусть $P(s) = p'_3(s) = p_{30} \operatorname{sh} s - p_2 \operatorname{ch} s$. Положим $M = 1 + p_2^2 - p_{30}^2$. Уравнение для $\theta(s)$ интегрируется следующим образом:

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{p_3(\sigma)}{\sqrt{1 - p_3^2(\sigma)}} d\sigma = \arcsin \frac{P(s)}{\sqrt{M}} - \arcsin \frac{P(0)}{\sqrt{M}}.$$

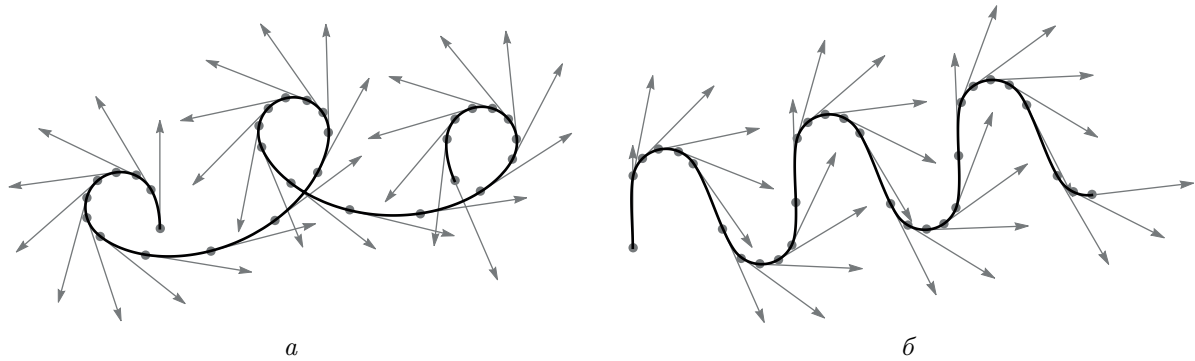


Рис. 3. Проекция на плоскость (x, y) двух различных экстремальных траекторий при $\alpha = 3\pi/7$. Серые стрелки указывают угол ориентации θ в моменты времени $t \in \{0, 0.6, 1.2, \dots, 18\}$: *a* — для начальных данных $h_1(0) = 10/17, h_2(0) = 3\sqrt{21}/17, h_3(0) = 1/2$; *б* — для начальных данных $h_1(0) = 15/17, h_2(0) = 8/17, h_3(0) = -12/5$

Заметим, что, поскольку $H = 1$, справедливо следующее соотношение:

$$p_1x(s) + p_2y(s) = \int_0^s \sqrt{1 - p_3^2(\sigma)} d\sigma = \int_0^s \sqrt{M - P^2(\sigma)} d\sigma =: g(s). \tag{5.2}$$

Запишем последний интеграл в явном виде:

$$g(s) = \begin{cases} -i\sqrt{M} \left(E\left(i(s - \alpha), \frac{M-1}{M} \right) - E\left(-i\alpha, \frac{M-1}{M} \right) \right) & \text{при } M \neq 1, p_{30} \neq 0, \\ g_c(s) & \text{при } M = 1, p_{30} \neq 0, \\ -iE(is, -p_2^2) & \text{при } p_{30} = 0, \end{cases}$$

где

$$E(\phi, m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \alpha = \operatorname{arth} \frac{p_2}{p_{30}},$$

$$g_c(s) = s_1 \left(\sqrt{1 - e^{2ss_1} p_{30}^2} - \operatorname{arth} \sqrt{1 - e^{2s_1 s} p_{30}^2} + \operatorname{arth} p_1 - p_1 \right), \quad s_1 = -\operatorname{sgn}(p_2 p_{30}).$$

С другой стороны, в силу (4.1) имеем $p_1 \sin \theta(s) - p_2 \cos \theta(s) = P(s)$. Интегрируя левую и правую части этого равенства, находим

$$p_1y(s) - p_2x(s) = \int_0^s P(\sigma) d\sigma = p_3(s) - p_{30}. \tag{5.3}$$

Пусть $f(s) = p_3(s) - p_{30}$. Объединяя (5.2) с (5.3), получаем

$$x(s) = \frac{1}{M} (p_1 g(s) - p_2 f(s)), \quad y(s) = \frac{1}{M} (p_1 f(s) + p_2 g(s)).$$

Таким образом, мы получили явные формулы для экстремальных траекторий. На рис. 3 показаны примеры двух таких траекторий.

Благодарности. Авторы благодарят анонимного рецензента за ценные комментарии, которые помогли улучшить работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry: From the Hamiltonian viewpoint. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2020. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 181).
2. АгрACHEВ А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2004.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012.
4. Bekkers E.J., Duits R., Mashtakov A., Sanguinetti G.R. A PDE approach to data-driven sub-Riemannian geodesics in SE(2) // SIAM J. Imaging Sci. 2015. V. 8, N 4. P. 2740–2770.
5. Берестовский В.Н. Геодезические левоинвариантной неголономной римановой метрики на группе движений евклидовой плоскости // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, №6. С. 1223–1229.
6. Boscain U., Gauthier J.-P., Prandi D., Remizov A. Image reconstruction via non-isotropic diffusion in Dubins/Reed–Shepp-like control systems // 53rd IEEE Conf. on Decision and Control, Los Angeles, 2014. IEEE, 2014. P. 4278–4283.
7. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // J. Math. Imaging Vis. 2006. V. 24, N 3. P. 307–326.
8. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. 1957. V. 79, N 3. P. 497–516.
9. Duits R., Boscain U., Rossi F., Sachkov Yu.L. Association fields via cuspluss sub-Riemannian geodesics in SE(2) // J. Math. Imaging Vis. 2014. V. 49, N 2. P. 384–417.
10. Duits R., Meesters S.P.L., Mirebeau J.-M., Portegies J.M. Optimal paths for variants of the 2D and 3D Reeds–Shepp car with applications in image analysis // J. Math. Imaging Vis. 2018. V. 60, N 6. P. 816–848.
11. Локуцкий Л.В. Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровой геометрии // Мат. сб. 2019. Т. 210, №8. С. 120–148.
12. Mashtakov A. Extremal controls for the Duits car // Geometric science of information: Proc. 5th Int. Conf. GSI 2021, Paris, 2021 / Ed. by F. Nielsen and F. Barbaresco. Cham: Springer, 2021. P. 73–81. (Lect. Notes Computer Sci.; V. 12829).
13. Маштакoв А.П. Задача быстрогодействия на группе движений плоскости с управлением в полукруге // Мат. сб. 2022. Т. 213, №4. С. 100–122.
14. Mashtakov A.P., Ardentov A.A., Sachkov Yu.L. Parallel algorithm and software for image inpainting via sub-Riemannian minimizers on the group of rototranslations // Numer. Math. Theory Methods Appl. 2013. V. 6, N 1. P. 95–115.
15. Petitot J. The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure // J. Physiol. Paris. 2003. V. 97, N 2–3. P. 265–309.
16. Reeds J.A., Shepp L.A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards // Pac. J. Math. 1990. V. 145, N 2. P. 367–393.
17. Сачков Ю.Л. Теория управления на группах Ли // Совр. математика. Фунд. напр. 2007. Т. 27. С. 5–59.
18. Sachkov Yu.L. Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM. Control Optim. Calc. Var. 2011. V. 17, N 2. P. 293–321.