Кривизна и изометрии лоренцевой плоскости Лобачевского*

Ю. Л. Сачков
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
Переславль-Залесский
e-mail: yusachkov@gmail.com

14 июля 2023 г.

Аннотация:
Исследуются левоинвариантные лоренцевы структуры на двумерной разрешимой неабелевой группе Ли. Описаны их связность Леви-Чивиты, секционная кривизна и изометрии, инфинитезимальные и глобальные.

1 Введение

Лоренцева геометрия есть математическое основание теории относительности [1–3]. Она отличается от римановой тем, что здесь информация может распространяться вдоль кривых с векторами скорости из некоторого острого конуса. Естественной является задача отыскания лоренцевых длиннейших, максимизирующих функционал типа длины вдоль допустимых кривых. Поэтому важным вопросом является описание лоренцевых длиннейших и свойств соответствующей функции лоренцева расстояния, включая кривизну и изометрии.

В этой заметке исследуются левоинвариантные лоренцевы структуры на единственной связной односвязной неабелевой двумерной группе Ли. В предыдущей работе [9] для этих структур представлено описание лоренцевых длиннейших, расстояния и сфер. В данной работе показано, что указанные структуры имеют постоянную кривизну, поэтому они локально изометричны модельным пространствам постоянной кривизны (пространству Минковского $\mathbb{R}^2_1$, пространству де Ситтера $\mathbb{S}^2_1$ или пространству анти-де Ситтера $\widetilde{\mathbb{H}^2_1}$). В случае нулевой кривизны построено явное изометричное вложение в двумерное пространство Минковского. Также исследованы изометрии указанных лоренцевых структур, как инфинитезимальные, так и глобальные.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, https://rscf.ru/project/22-11-00140/.

2 Постановка задачи

Пусть $G = \mathrm{Aff}_+(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ есть группа собственных аффинных функций на прямой — плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости [7, 8]. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли левоинвариантных векторных полей на группе Ли G. Рассмотрим левоинвариантный репер $X_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, X_2 = y\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{g}$.

Напомним некоторые понятия лоренцевой геометрии [1, 2, 5]. Левоинвариантная лоренцева структура на группе Ли G есть невырожденная квадратичная форма g индекса 1 на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Элемент $X \in \mathfrak{g}$ называется времениподобным, если $g(X) < 0$. Ориентацией времени называется любой времениподобный элемент $X_0 \in \mathfrak{g}$. Обозначим линейную форму $g_0(X) = g(X, X_0)$, $X \in \mathfrak{g}$. Левоинвариантная лоренцева задача оптимального управления на группе G имеет вид

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q = (x, y) \in G, \tag{1}$$

$$u = (u_1, u_2) \in U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid g(u) \leqslant 0,\ g_0(u) \leqslant 0\}, \tag{2}$$

$$q(0) = q_0 = \mathrm{Id} = (0, 1), \quad q(t_1) = q_1, \qquad l = \int_0^{t_1} \sqrt{|g(u)|}\, dt \to \max. \tag{3}$$

Решение $q(t)$ задачи (1)–(3) называется лоренцевой длиннейшей. Оптимальное значение этой задачи $\sup l = d(q_1) \in [0, +\infty]$ называется лоренцевым расстоянием от точки q_0 до точки q_1, если q_1 достижима из q_0 для системы (1), (2) за неотрицательное время. Множество $S(R) = \{q \in G \mid d(q) = R\}$ есть лоренцева сфера радиуса $R \in [0, +\infty]$.

Множество задач (1)–(3) параметризуется матрицами $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|A| > 0$, такими, что $g(u) = -(au_1 + bu_2)^2 + (cu_1 + du_2)^2$, $g_0(u) = au_1 + bu_2$. Обозначим матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

3 Кривизна

Теорема 1. *Связность Леви-Чивиты D левоинвариантной лоренцевой структуры g на группе $G = \mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$ задается следующим образом:*

$$D_{X_i} X_j = \mu_{ij} X_1 + \nu_{ij} X_2, \qquad i, j = 1, 2,$$

$$(\mu_{11}, \nu_{11}) = -\frac{1}{|A|^2}(-g_{12}g_{11}, g_{11}^2), \qquad (\mu_{12}, \nu_{12}) = -\frac{1}{|A|^2}(-g_{22}g_{11}, g_{12}g_{11}),$$

$$(\mu_{21}, \nu_{21}) = -\frac{1}{|A|^2}(-g_{12}^2, g_{11}g_{12}), \qquad (\mu_{22}, \nu_{22}) = -\frac{1}{|A|^2}(-g_{22}g_{12}, g_{12}^2),$$

$$g_{11} = g(X_1) = c^2 - a^2, \quad g_{12} = g(X_1, X_2) = cd - ab, \quad g_{22} = g(X_2) = d^2 - b^2.$$

Теорема 2. *Левоинвариантная лоренцева структура g на группе $G = \mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$ имеет постоянную секционную кривизну $K = \dfrac{g(X_1)}{|A|^2}$.*

Следствие 1. *Левоинвариантная лоренцева структура g на группе $G = \mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$ локально изометрична пространству Минковского $\mathbb{R}^2_1$ (при $K = 0$), пространству де Ситтера $\mathbb{S}^2_1$ (при $K > 0$) или пространству анти-де Ситтера $\widetilde{\mathbb{H}}^2_1$ (при $K < 0$).*

4 Изометрии

4.1 Векторные поля Киллинга и изометрии группы $\mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$

Вычислим алгебру Ли $i(G)$ векторных полей Киллинга (инфинитезимальных симметрий) для левоинвариантных лоренцевых структур на группе $G = \mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$. По теореме 2 такие лоренцевы структуры имеют постоянную кривизну, поэтому $\dim i(G) = 3$. Левые сдвиги на группе Ли G являются очевидными изометриями. Они порождены правоинвариантными векторными полями на G:

$$\widetilde{X}_1(q) = R_{q*}X_1(\mathrm{Id}) = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \widetilde{X}_2(q) = R_{q*}X_2(\mathrm{Id}) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

где $R_q \ : \ \bar{q} \mapsto \bar{q}q$ — правый сдвиг на G. Поэтому $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ суть векторные поля Киллинга. Для описания трехмерной алгебры Ли $i(G)$ остается найти только одно векторное поле Киллинга, линейно независимое от $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$.

Лемма 1. *Если $X \in \mathrm{Vec}(G)$ есть векторное поле Киллинга такое, что $X(\mathrm{Id}) = 0$, то X касается лоренцевых сфер $S(R)$, $R \in [0, +\infty]$.*

Лемма 2. *Следующее векторное поле касается лоренцевых сфер $S(R)$, $R \in (0, +\infty)$:*

(1) $K < 0 \quad \Rightarrow \quad X_- = \left(y^2 + w^2\right)\frac{\partial}{\partial w} + 2wy\frac{\partial}{\partial y}$, $w = \frac{x-\nu(y-1)}{\lambda}$, $\lambda = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\Delta}$, $\nu = \frac{\beta\delta-\alpha\gamma}{\Delta}$, $\Delta = \delta^2 - \gamma^2$,

(2) $K > 0 \quad \Rightarrow \quad X_+ = \left(y^2 + w^2\right)\frac{\partial}{\partial w} + 2wy\frac{\partial}{\partial y}$, $w = \frac{x+\nu(y-1)}{\lambda}$, $\lambda = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\Delta}$, $\nu = \frac{\beta\delta-\alpha\gamma}{\Delta}$, $\Delta = \gamma^2 - \delta^2$,

(3) $K = 0 \quad \Rightarrow \quad X_0 = w\frac{\partial}{\partial w} + y(1-y)\frac{\partial}{\partial y}$, $w = \frac{x+g(y-1)}{f}$, $f = -\frac{\alpha-s_1\beta}{2\gamma}$, $g = -\frac{\alpha+s_1\beta}{2\gamma}$, $s_1 = \mathrm{sgn}\,\gamma$.

Теорема 3. *Пусть $K \neq 0$. Тогда $i(G) = \mathrm{span}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, X_\pm)$, где $\pm = \mathrm{sgn}\,K$, и $X_\pm$ задается пунктами (1), (2) леммы 2. Таблица коммутаторов в этой алгебре Ли есть*

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = \widetilde{X}_1, \quad [\widetilde{X}_1, X_\pm] = \mp\frac{2\nu}{\lambda}\widetilde{X}_1 + \frac{2}{\lambda}\widetilde{X}_2,$$
$$[\widetilde{X}_2, X_\pm] = \frac{2(\lambda^2 - \nu^2)}{\lambda}\widetilde{X}_1 \pm \frac{2\nu}{\lambda}\widetilde{X}_2 + X_\pm.$$

Алгебра Ли $i(G)$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$ группы Ли $\mathrm{SL}(2)$ унимодулярных матриц порядка 2.

Теорема 4. *Пусть $K = 0$. Тогда $i(G) = \mathrm{span}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, X_0)$, где X_0 задается пунктом (3) леммы 2. Таблица коммутаторов в этой алгебре Ли есть*

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = \widetilde{X}_1, \quad [\widetilde{X}_1, X_0] = \widetilde{X}_1, \quad [\widetilde{X}_2, X_0] = 2g\widetilde{X}_1 - \widetilde{X}_2 + X_0.$$

Алгебра Ли $i(G)$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{sh}(2)$ группы Ли $\mathrm{SH}(2)$ гиперболических движений плоскости.

Предложение 1. (1) *Алгебра Ли полных полей Киллинга двумерна и порождена векторными полями* $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$.

(2) *Компонента связности единицы в группе Ли изометрий лоренцевой группы* $\mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$ *двумерна и состоит из левых сдвигов на этой группе.*

4.2 Изометрическое вложение $\mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^2_1$ в случае $K = 0$

Теорема 5. *Пусть* $K = 0$. *Отображение* $i : \mathrm{Aff}_+(\mathbb{R}) \to \Pi \subset \mathbb{R}^2_1$, $\Pi = \left\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{R}^2_1 \mid s_1\widetilde{y} + \widetilde{x} < 1/\gamma\right\}$,

$$i(x, y) = (\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{y} - \frac{w}{\gamma}\right), \frac{s_1}{2}\left(\frac{y-1}{y} + \frac{w}{\gamma}\right)\right),$$

есть изометрия.

Авторы выражают благодарность Л.В. Локуциевскому, Д.В. Алексеевскому, Н.И. Жуковой и Э. Ле Донне за полезные обсуждения рассматриваемых вопросов.

Список литературы

[1] Wald, R.M.: *General Relativity*, Univ. Chicago Press (1984)

[2] Beem, J.K., Ehrlich, P.E., Easley, K.L.: *Global Lorentzian Geometry.* Monographs Textbooks Pure Appl. Math. 202, Marcel Dekker Inc. (1996)

[3] Müller, O., Sànchez, M. An Invitation to Lorentzian Geometry. *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.* 115, 153–183 (2014)

[4] J.A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, AMS, 2011.

[5] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, 1983.

[6] А.О. Иванов, А.А. Тужилин, *Лекции по классической дифференциальной геометрии*, М.: Логос, 2009

[7] И.Р. Шафаревич, А.О. Ремизов, *Линейная алгебра и геометрия*, М.: Физматлит, 2009

[8] В.Е. Подран, *Модели геометрии Лобачевского*, М.: URSS, 2021

[9] Ю. Л. Сачков, Лоренцева геометрия на плоскости Лобачевского, *Матем. заметки*, 114:1 (2023), 154–157