

Задачи и методы геометрической теории управления

Ю.Л. Сачков

Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский
yusachkov@gmail.com

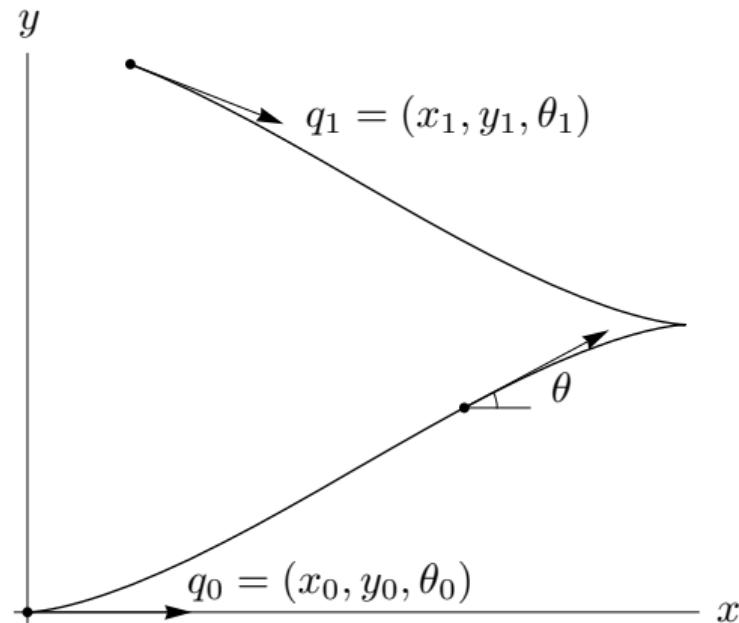
Общеинститутский семинар ИПС РАН

8 сентября 2022 г.

План доклада

1. Примеры задач оптимального управления
2. Динамические и управляемые системы
3. Задача управляемости
4. Задача оптимального управления
5. Особенности задач геометрической теории управления
6. История математической теории управления
7. Теорема об орбите и теорема Рашевского-Чжоу
8. Примеры
9. Принцип максимума Понtryгина
10. Примеры
11. Приложения к робототехнике
12. Приложения к обработке изображений
13. Литература

Управление мобильным роботом



$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Восстановление изображений

- Монокромное изображение
- Семейство изофот (линий постоянной яркости)
- Изображение повреждено в некоторых областях
- Антропоморфное восстановление поврежденных кривых

Восстановление поврежденной кривой

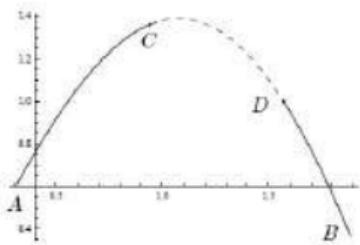


Рис.: Исходная кривая AB с поврежденной дугой CD

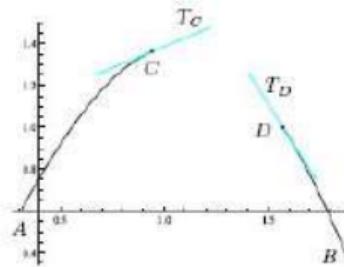


Рис.: Границные условия для восстановления дуги CD

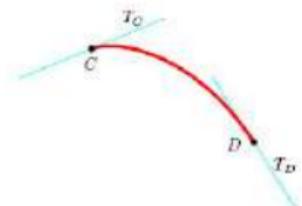


Рис.: Новая кривая \tilde{CD}

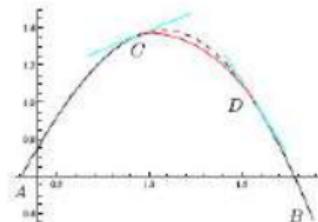


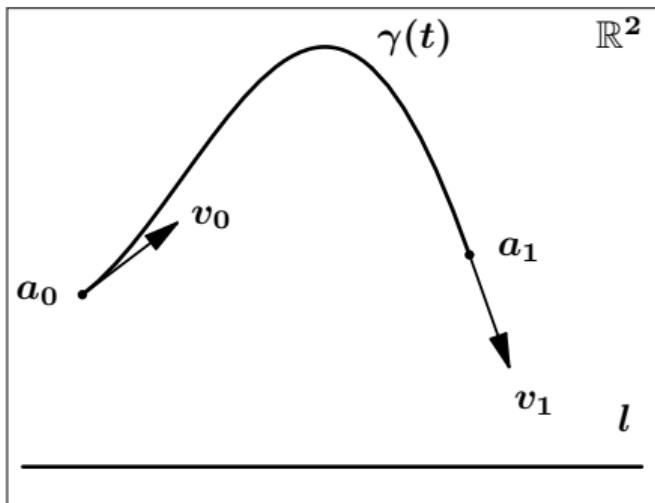
Рис.: Исходная кривая AB с поврежденной и новой дугами

Качение твердых тел

- Пара твердых тел
- Состояние системы — контактная конфигурация твердых тел (какова размерность множества состояний?)
- Качение без прокручивания и проскальзывания (какова размерность множества скоростей?)
- Критерий качества — длина кривой, пробегаемой точкой контакта тел
- Задача: оптимально перекатить тела из начальной контактной конфигурации в конечную конфигурацию
- Нетривиальны даже простейшие примеры: качение сферы по плоскости, качение сферы по сфере

Упругие стержни (эластики)

- Эластики на плоскости:



- Аналогичные задачи для эластик в пространстве, на сфере, других многообразиях.

Приложения плоских и пространственных эластик

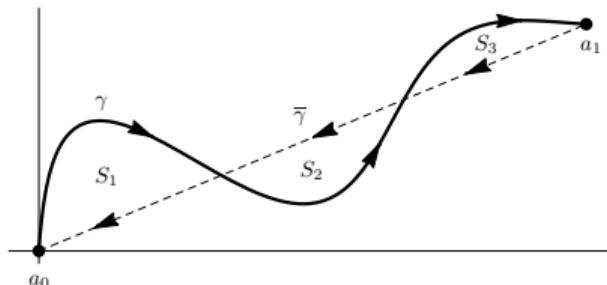
- теория упругости и сопротивление материалов (моделирование колонн, балок, упругих стержней)
- размер и форма в биологии (максимальная высота дерева, изгиб пальм под действием ветра, кривизна позвоночника, механика крыльев насекомых)
- нелинейные сплайны в теории аппроксимации
- восстановление изображений в компьютерном видении
- моделирование тонких оптических волокон и гибких соединений в микроэлектронике
- динамика оси вихря и кубическое уравнение Шредингера
- моделирование молекул ДНК

Задача Диодоны

Столько купили земли и дали ей имя Бирса,
Сколько смогли окружить бычьеи шкурой.

Вергилий «Энеида»

- Дано: $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединяющая их кривая $\bar{\gamma}$, и $S \in \mathbb{R}$.
- Найти: кратчайшую кривую $\gamma(t)$, $t \in [0, t_1]$, т.ч.:
 - $\gamma(0) = a_0$, $\gamma(t_1) = a_1$,
 - кривые γ и $\bar{\gamma}$ ограничивают на плоскости область площади S .



Обобщения задачи Диодоны

1.
 - Дано: ..., $c \in \mathbb{R}$
 - Найти: $\gamma(t)$, ..., кривые $\gamma(t)$ и $\bar{\gamma}(t)$ ограничивают на плоскости область с центром масс c .
2.
 - Дано: ..., эллипс E с центром a_0 .
 - Найти: $\gamma(t)$, ..., кривые $\gamma(t)$ и $\bar{\gamma}(t)$ ограничивают на плоскости область с эллипсом инерции E .

Приложения:

- управление роботом с 2-мя прицепами,
- качение твердых тел,
- проектирование балок с заданными характеристиками прочности.

Динамические системы

- Гладкая динамическая система (ОДУ):

$$\dot{q} = f(q), \quad q \in M.$$

- Будущее детерминировано:

$$q(0) = q_0 \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0 \quad \exists ! q(t).$$

- Пример: планета, вращающаяся вокруг Солнца.

Управляемые системы

- Семейство динамических систем с управляемым параметром:

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U.$$

- Управление $u = u(t) \in U \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f(q, u(t)), \\ q(0) &= q_0 \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0 \quad \exists! q_u(t).\end{aligned}$$

- Примеры: ракета, самолет, автомобиль, . . .

Пример: управление мобильным роботом

- Состояние $q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$, $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$,
- Простые движения:

вперед $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$, поворот на месте $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Управления: линейная скорость u_1 , угловая скорость u_2
- Управляемая система:

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f(q, u).$$

1. Задача управляемости

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U. \quad (\text{УС})$$

- Множество достижимости УС из точки $q_0 \in M$:

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{q_u(t) \mid u = u(t) \in U, q_u(0) = q_0, t \in [0, \infty)\},$$

- Множество достижимости УС из точки $q_0 \in M$ за время $t_1 \geq 0$:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{q_u(t_1) \mid u = u(t) \in U, q_u(0) = q_0, t \in [0, t_1]\}.$$

- УС называется:
 - глобально управляемой из точки $q_0 \in M$, если $\mathcal{A}_{q_0} = M$,
 - локально управляемой в точке $q_0 \in M$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad q_0 \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}$.
- Примеры: 1) Мобильный робот глобально управляем в $\mathbb{R}^2 \times S^1$,
2) Система из 2-х катящихся шаров глобально управляема?

2. Задача оптимального управления

- Пусть $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$.
- Обычно траектория, ведущая из q_0 в q_1 , неединственна. Как выбрать наилучшую из них?
- Функционал качества (энергия, длина, время, ...)

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q, u) dt.$$

- Задача оптимального управления:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f(q, u), & q \in M, & u \in U, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q, \\ J &\rightarrow \min.\end{aligned}$$

Примеры задач оптимального управления

- Управление мобильным роботом:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$J = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

- Эластики Эйлера:

$$\dot{x} = \cos \theta, \quad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1,$$

$$\dot{y} = \sin \theta, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$\dot{\theta} = u,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$J = \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Особенности задач и методов геометрической теории управления

- Язык и методы дифференциальной геометрии:
 - векторные поля, их коммутаторы и потоки,
 - гладкие многообразия,
 - группы Ли и алгебры Ли,
- Методы симплектической геометрии (гамильтоновы системы, скобки Пуассона),
- Методы теории динамических систем (интегрируемость),
- Инвариантный бескоординатный подход,
- Группы преобразований, порожденные управляемой системой.
- Приложения:
 - геометрия (риманова, лоренцева, финслерова, субриманова, сублоренцева, субфинслерова,...)
 - классическая и квантовая механика,
 - робототехника,
 - обработка изображений.

История вариационного исчисления и математической теории управления

- 17 в. И. Бернулли, Г.В.Лейбниц, Я Бернулли, И. Ньютон: задача о брахистохроне, аэродинамическая задача,
- 18 в. Л. Эйлер, Ж. Лагранж: основы вариационного исчисления, уравнение Эйлера-Лагранжа,
- 18–19 вв. А. Лежандр, У.Р. Гамильтон, К. Якоби, К. Вейерштрасс: теория второй вариации, теория Гамильтона-Якоби,
- 1950-е гг. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко: принцип максимума Понтрягина,
- 1950-е гг. Р. Беллман: динамическое программирование,
- 1970-е гг. Р. Брокетт, Х. Суссманн, В. Джарджевич: геометрическая теория управления,
- 1990-е гг. А.А.Аграчев, Ж.-П.Готье, Р. Монтгомери, У. Боскаин, Э. Ле Донне, . . . : субриманова, субфинслерова геометрия, . . .

1. Задача управляемости: Множество достижимости и коммутирование векторных полей

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U$$

- $U = \{1, 2\}$, P_i^t — поток поля $V_i := f(q, i)$, $i = 1, 2$.
- $\mathcal{A}_{q_0} = \{ P_2^{t_k} \circ P_1^{t_{k-1}} \circ \dots \circ P_2^{t_2} \circ P_1^{t_1}(q_0) \mid t_i \geq 0, k \in \mathbb{N} \}$.
- Коммутативный случай: $P_1^t \circ P_2^s = P_2^s \circ P_1^t \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$, тогда $\mathcal{A}_{q_0} = \{ P_2^s \circ P_1^t(q_0) \mid t, s \geq 0 \}$ — кусок 2-мерной поверхности.
- Пример: управление моб. роботом — поля не коммутируют!
- Как определить множество достижимости и коммутационные свойства векторных полей V_1, V_2 , не интегрируя ОДУ $\dot{q} = V_i(q)$?

Скобка Ли векторных полей

- Общий (некоммутативный) случай:

$$\begin{aligned} P_1^t \circ P_2^s &\neq P_2^s \circ P_1^t, & t, s \in \mathbb{R}, \\ P_1^t \circ P_2^t &\neq P_2^t \circ P_1^t, & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- $\varphi(t) = P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \circ P_1^t(q) \neq q$.

- Формула Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t \dot{\varphi}(0) + \frac{t^2}{2} \ddot{\varphi}(0) + o(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

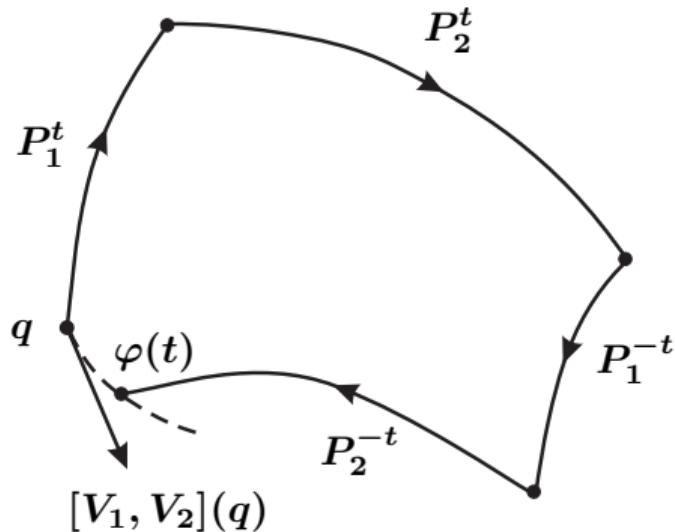
$$\varphi(0) = q,$$

$$\dot{\varphi}(0) = -V_2(q) - V_1(q) + V_2(q) + V_1(q) = 0,$$

$$\frac{\ddot{\varphi}(0)}{2} =: [V_1, V_2](q),$$

$$\varphi(t) = q + t^2 [V_1, V_2](q) + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

Скобка Ли векторных полей



$$\varphi(t) = q + t^2 [V_1, V_2](q) + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

В координатах

$$[V_1, V_2] = \frac{dV_2}{dq} V_1 - \frac{dV_1}{dq} V_2.$$

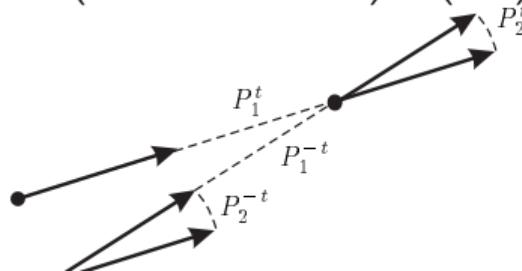
Пример: управление мобильным роботом

- Векторные поля:

$$V_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{x_1, x_2}^2 \times S_\theta^1$$

- V_1 движение вперед, V_2 поворот против часовой стрелки.

$$\begin{aligned}[V_1, V_2](q) &= \frac{d V_2}{d q} V_1(q) - \frac{d V_1}{d q} V_2(q) \\ &= 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$



Множество достижимости и алгебра Ли векторных полей

$$\dot{q} \in \{\pm V_1(q), \pm V_2(q)\}.$$

- Коммутативный случай ($[V_1, V_2] = 0$) \Rightarrow
 \mathcal{A}_q не зависит от количества переключений.
- Некоммутативный случай \Rightarrow
 - движение вдоль $\pm V_1$ и $\pm V_2$,
 - движение вдоль $\pm[V_1, V_2]$,
 - движение вдоль $\pm[V_1, [V_1, V_2]]$ и $\pm[V_2, [V_1, V_2]]$,
 - ...
- Гипотеза: $\dim \mathcal{A}_q = \dim \text{Lie}_q(V_1, V_2)$,
$$\text{Lie}_q(V_1, V_2) = \text{span}(V_1(q), V_2(q), [V_1, V_2](q), [V_1, [V_1, V_2]](q), [V_2, [V_1, V_2]](q), \dots).$$

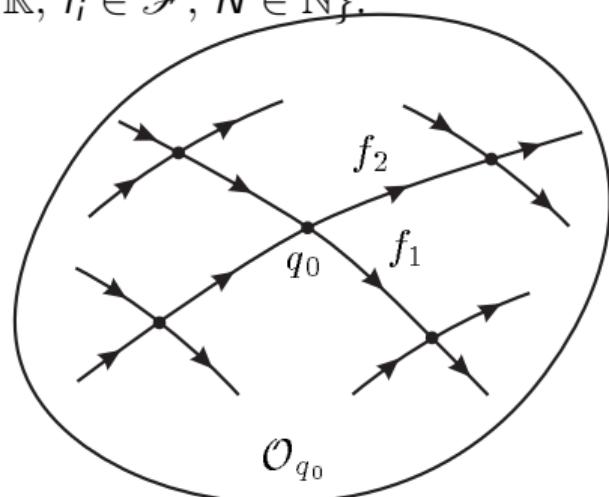
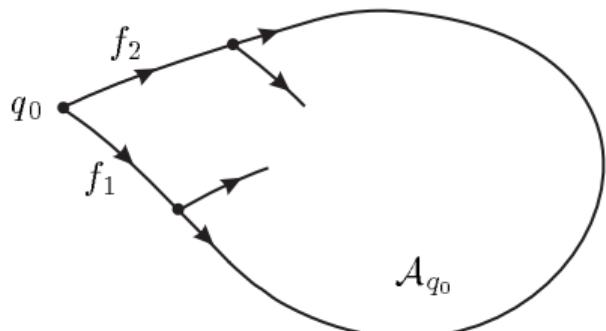
Орбита управляемой системы

- Управляемая система: любое множество векторных полей $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$
- Множество достижимости системы \mathcal{F} из точки $q_0 \in M$:

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{e^{t_N f_N} \circ \dots \circ e^{t_1 f_1}(q_0) \mid t_i \geq 0, f_i \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}\},$$

- Орбита системы \mathcal{F} из точки q_0 :

$$\mathcal{O}_{q_0} = \{e^{t_N f_N} \circ \dots \circ e^{t_1 f_1}(q_0) \mid t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}\}.$$



Свойства множеств достижимости и орбит

1. $\mathcal{A}_{q_0} \subset \mathcal{O}_{q_0}$,
2. \mathcal{O}_{q_0} имеет «более простую» структуру, чем \mathcal{A}_{q_0} ,
3. \mathcal{A}_{q_0} имеет «разумную» структуру внутри \mathcal{O}_{q_0} .

Свойства 2, 3: Теорема об орбите.

Система \mathcal{F} называется симметричной, если $\mathcal{F} = -\mathcal{F}$.

4. $\mathcal{F} = -\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{A}_{q_0} = \mathcal{O}_{q_0}$.

Теорема об орбите

Пусть M и $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$ вещественно аналитичны, $q_0 \in M$.

Теорема (Нагано-Суссманн)

- (1) Орбита \mathcal{O}_{q_0} системы \mathcal{F} есть связное подмногообразие многообразия M .
- (2) Для любой точки $q \in \mathcal{O}_{q_0}$

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{Lie}_q(\mathcal{F}),$$

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span}\{[f_N, [\dots, [f_2, f_1] \dots]](q) \mid f_i \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}\}.$$

- (3) $\dim \mathcal{O}_{q_0} = \dim \text{Lie}_{q_0}(\mathcal{F})$.

Следствие: теорема Рашевского-Чжоу

Теорема (Рашевский-Чжоу)

Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$, многообразие M связно, и

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M, \quad q \in M. \quad (1)$$

Тогда $\mathcal{O}_q = M$ для любой точки $q \in M$.

Система $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$, удовлетворяющая свойству (1), называется вполне неголономной (системой полного ранга).

Теорема (Ранговое условие управляемости)

Если многообразие M связно, а система $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ симметрична и вполне неголономна, то она глобально управляема на M .

Пример: управление мобильным роботом

$$\mathcal{F} = \{u_1 f_1 + u_2 f_2 \mid (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\} \subset \text{Vec}(\mathbb{R}^2 \times S^1),$$

$$f_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

- Система симметрична: $\mathcal{F} = -\mathcal{F}$.
- Алгебра Ли:

$$[f_1, f_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} =: f_3,$$

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span}(f_1(q), f_2(q), f_3(q)) = T_q(\mathbb{R}^2 \times S^1).$$

- Система \mathcal{F} вполне неголономна, поэтому управляема.

Пример: орбиты разной размерности

$$M = \mathbb{R}_{x,y,z}^3, \quad \mathcal{F} = \left\{ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \; y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \; z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

$$\forall q \in \mathbb{R}^3 \quad \mathcal{O}_q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = q^2\},$$

- $q \neq 0 \Rightarrow$ 2-мерная сфера,
- $q = 0 \Rightarrow$ точка.

Орбита управляемой системы — обобщение фазового портрета векторного поля.

Множества достижимости систем полного ранга

Управляемая система $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ полного ранга:

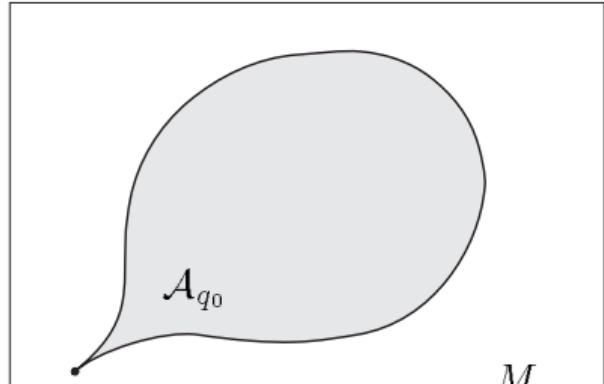
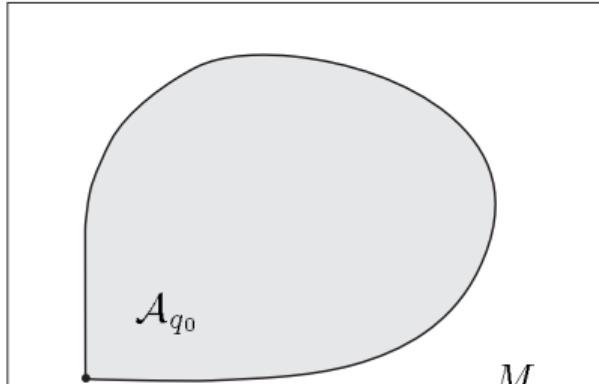
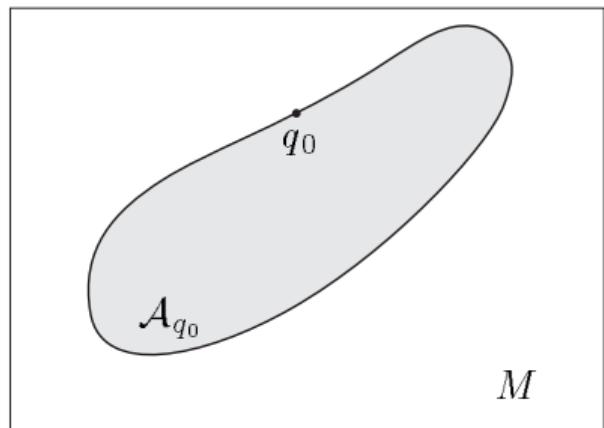
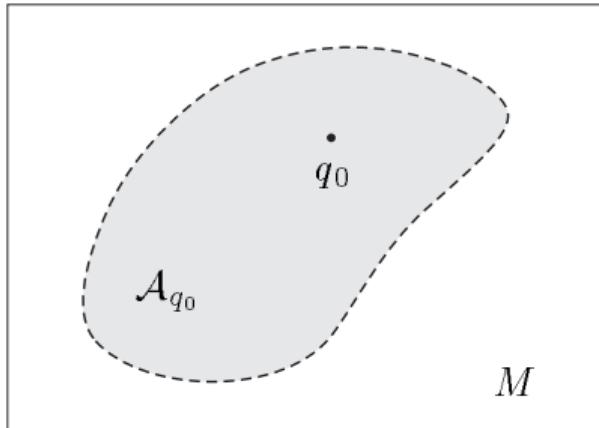
$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M \quad \forall q \in M.$$

Иначе сужение системы на ее орбиту — система полного ранга.

Множество достижимости может быть:

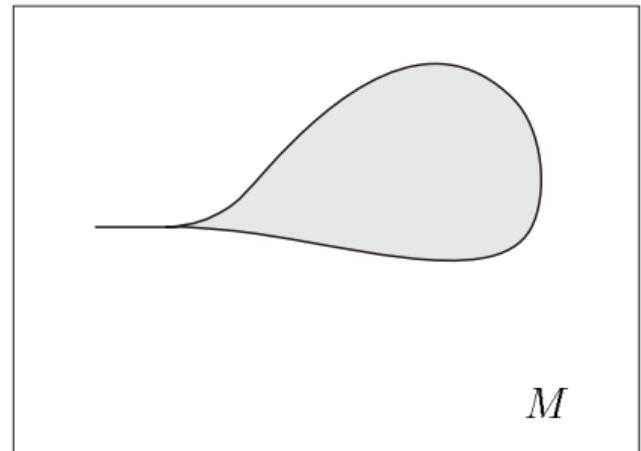
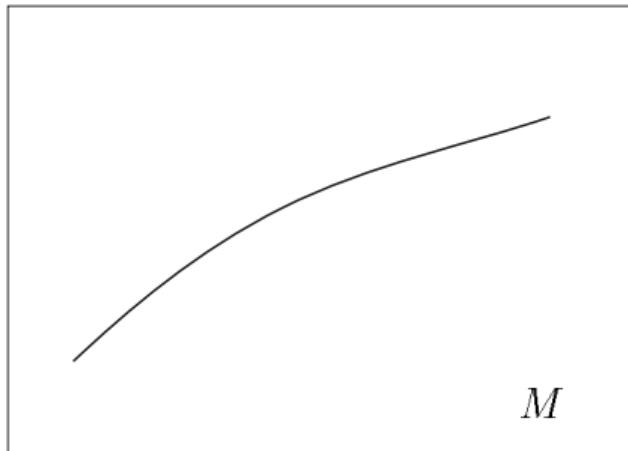
- гладким многообразием без границы,
- гладким многообразием с гладкой границей,
- гладким многообразием, имеющим границу с особенностями типа угловой точки или точки возврата.

Возможные множества достижимости



Невозможные множества достижимости

- подмножество меньшей размерности,
- множество с граничными точками, изолированными от внутренности.



Теорема Кренера

Теорема (Кренер)

Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ и $\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q M$ для всех $q \in M$. Тогда:

- (1) $\forall q \in M \quad \text{int } \mathcal{A}_q \neq \emptyset,$
- (2) $\forall q \in M \quad \text{cl}(\text{int } \mathcal{A}_q) \supset \mathcal{A}_q.$

Пример: Задача Эйлера об эластиках

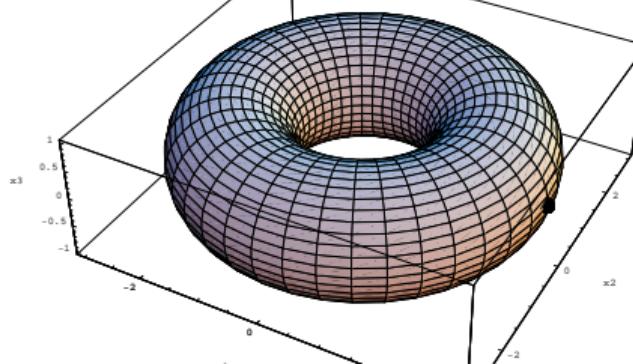
$$\dot{q} = f_1(q) + u f_2(q), \quad q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$f_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M \Rightarrow \mathcal{O}_q = M \quad \forall q \in M.$$

Из геометрических соображений на плоскости (x, y)

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{(x, y, \theta) \in M \mid (x, y, \theta) = (t_1, 0, 0) \text{ или } x^2 + y^2 < t_1^2\}.$$



Пример: Машина Маркова-Дубинса

- Модель машины: единичный вектор, расположенный в произвольной точке плоскости.
- Машина движется вперед с единичной скоростью и поворачивается с угловой скоростью, по абсолютной величине не большей единицы.
- Перевести машину из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за минимальное время.

$$\dot{x} = \cos \theta, \quad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1 = M,$$

$$\dot{y} = \sin \theta, \quad |u| \leq 1,$$

$$\dot{\theta} = u,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$t_1 \rightarrow \min .$$

Машина Маркова-Дубинса: орбита

$$\dot{q} = f_1(q) + uf_2(q), \quad q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad |u| \leq 1,$$
$$f_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$\mathcal{F} = \{f_1 + uf_2 \mid |u| \leq 1\},$$

$$[f_1, f_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} =: f_3,$$

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span}(f_1(q), f_2(q), f_3(q)) = T_q M \quad \forall q \in M,$$

$$\mathcal{O}_q = M \quad \forall q \in M.$$

Машина Маркова-Дубинса: множество достижимости

- Суженная система $\mathcal{F}_1 = \{f_1 \pm f_2\} \subset \mathcal{F}$ имеет 2π -периодические траектории:
$$\theta = \theta_0 \pm t, x = x_0 \pm (\sin(\theta_0 \pm t) - \sin \theta_0), y = y_0 \pm (\cos \theta_0 - \cos(\theta_0 \pm t)).$$
- Сдвиг вдоль полей $f_1 \pm f_2$ в отрицательном времени может быть получен как сдвиг в положительном времени.
- Введем симметричную систему

$$\mathcal{F}_2 = \{f_1 \pm f_2, -f_1 \pm f_2\},$$

$$\mathcal{A}_q(\mathcal{F}_2) = \mathcal{A}_q(\mathcal{F}_1), \quad q \in M.$$

- Система \mathcal{F}_2 имеет полный ранг, поэтому

$$\mathcal{A}_q(\mathcal{F}_2) = \mathcal{O}_q(\mathcal{F}_2) = M,$$

$$\mathcal{A}_q(\mathcal{F}) \supset \mathcal{A}_q(\mathcal{F}_2) = M \text{ для всех } q \in M.$$

- Машина Маркова-Дубинса вполне управляема.

2. Задача оптимального управления

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M = \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (3)$$

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q, u) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

t_1 закреплено.

Экстремальная задача (4):

- в бесконечномерном пространстве:
 $u(\cdot)$ кусочно-непрерывно или измеримо по Лебегу, ограничено,
- с дифференциальной связью (2),
- и краевыми условиями (3).

Принцип максимума Понtryгина (ПМП)

Семейство гамильтонианов ПМП

$$h_u^\nu(p, q) = \langle p, f(q, u) \rangle + \nu \varphi(q, u), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad u \in U, \quad p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема (ПМП)

Если траектория $q(t)$ и соответствующее управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимальны, то существуют кривая $p(t) \in \mathbb{R}^n$ и число $\nu \in \{-1, 0\}$, для которых выполнены условия:

(1) Гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial h_u^\nu}{\partial q}, \\ \dot{q} = \frac{\partial h_u^\nu}{\partial p}, \end{cases}$$

(2) условие максимума $h_{u(t)}^\nu(p(t), q(t)) = \max_{v \in U} h_v^\nu(p(t), q(t)),$

(3) условие нетривиальности $(p(t), \nu) \neq (0, 0).$

Пример: остановка поезда

- Материальная точка массы m , движущаяся по прямой под действием силы F , $|F| \leq F_{\max}$.
- В начальный момент заданы x^0 и \dot{x}^0 .
- Подобрать силу F так, чтобы точка остановилась в начале координат ($x^1 = 0$, $\dot{x}^1 = 0$) за минимальное время.

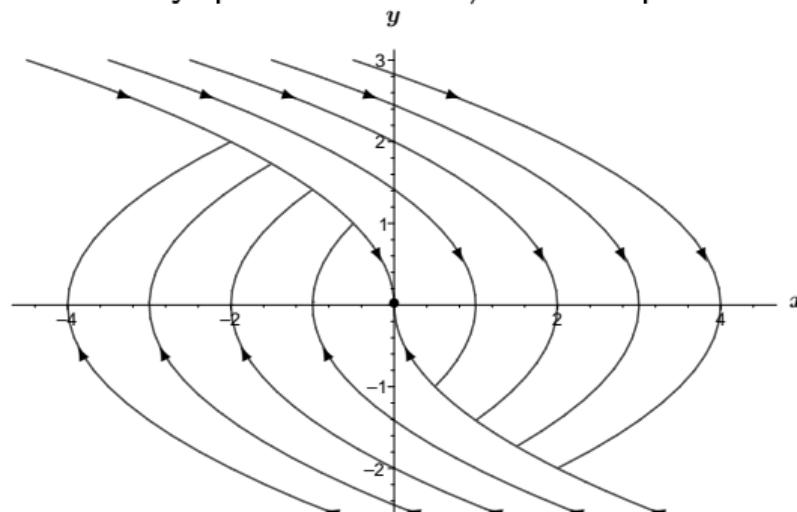
Задача быстродействия:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \dot{y} &= u, & |u| \leq 1, \\ x(0) &= x^0, & y(0) = \dot{x}^0, \\ x(t_1) &= 0, & y(t_1) = 0, \\ t_1 &\rightarrow \min.\end{aligned}$$

Остановка поезда: управляемость
 $\dot{q} = f_1(q) + uf_2(q), \quad q = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq 1,$

$$f_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

- $[f_1, f_2] = -\frac{\partial}{\partial x}$, $\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = T_q \mathbb{R}^2$,
- $\mathcal{O}_q = \mathbb{R}^2 \quad \forall q \in \mathbb{R}^2$.
- Траектории с постоянным управлением $u \neq 0$ — параболы:

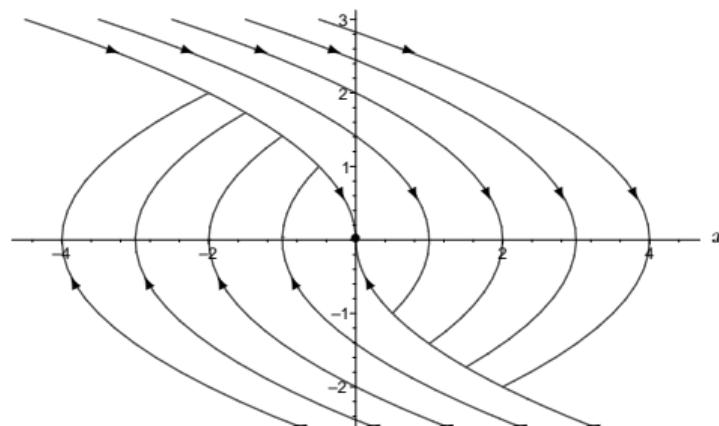


Остановка поезда: оптимальный синтез

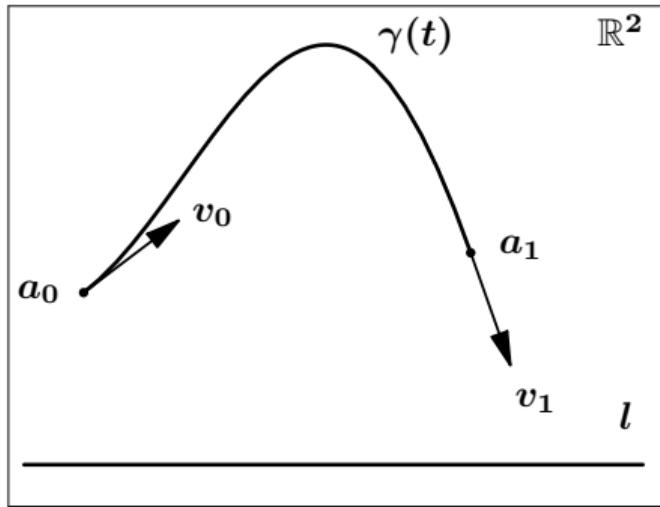
$$\Gamma_+ : \quad x = \frac{y^2}{2}, \quad x \geq 0, \quad \Gamma_- : \quad x = -\frac{y^2}{2}, \quad x \leq 0.$$

Кривая $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ разделяет плоскость \mathbb{R}^2 на две связные области: верхнюю Π_+ и нижнюю Π_- . Оптимальное управление:

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Gamma_+ \cup \Pi_-, \\ -1, & (x, y) \in \Gamma_- \cup \Pi_+. \end{cases}$$



Эйлеровы эластики



$$\dot{x} = \cos \theta, \quad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1,$$

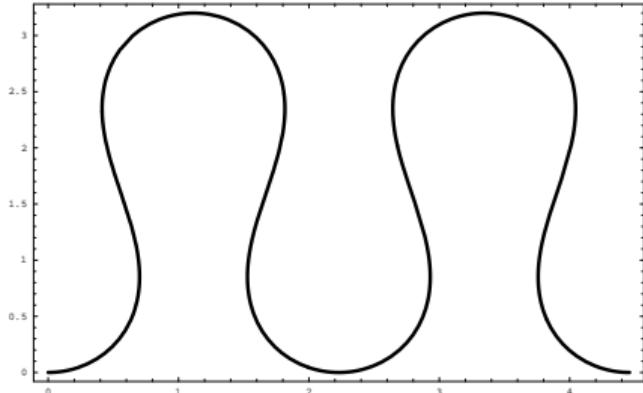
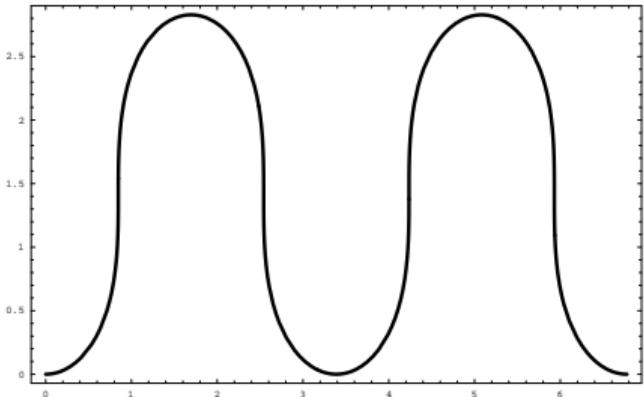
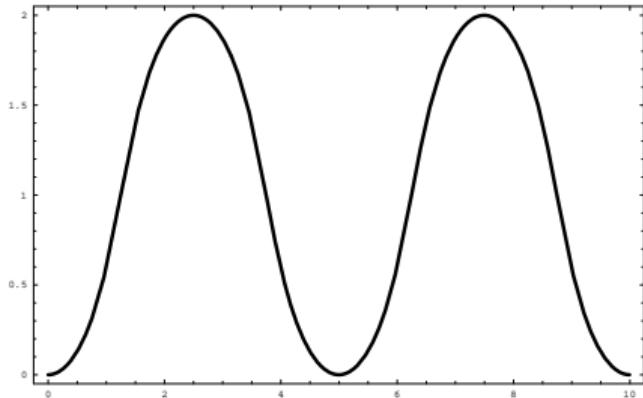
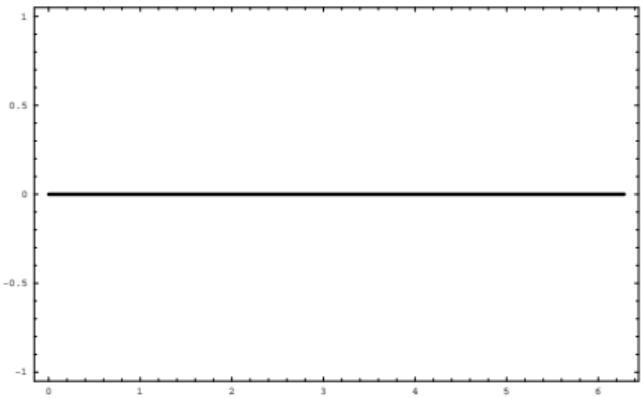
$$\dot{y} = \sin \theta, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$\dot{\theta} = u,$$

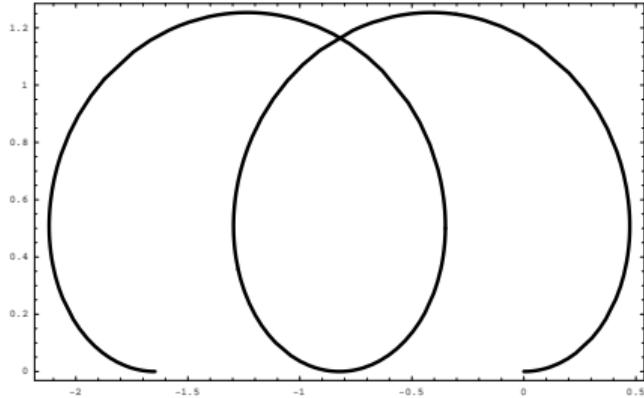
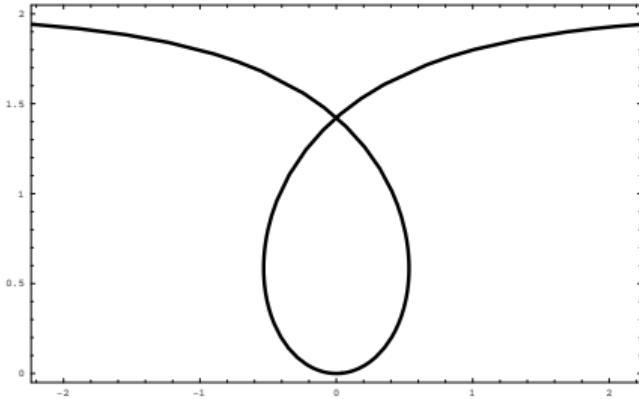
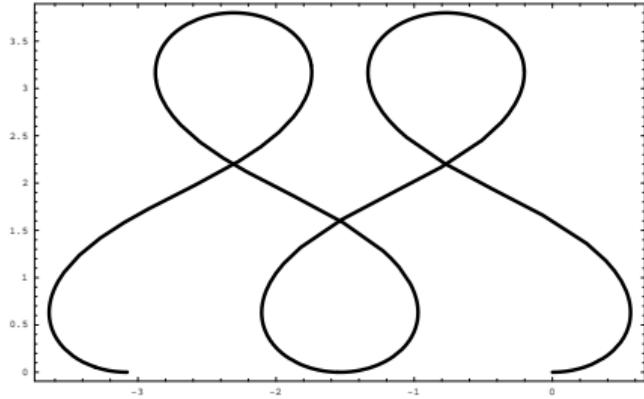
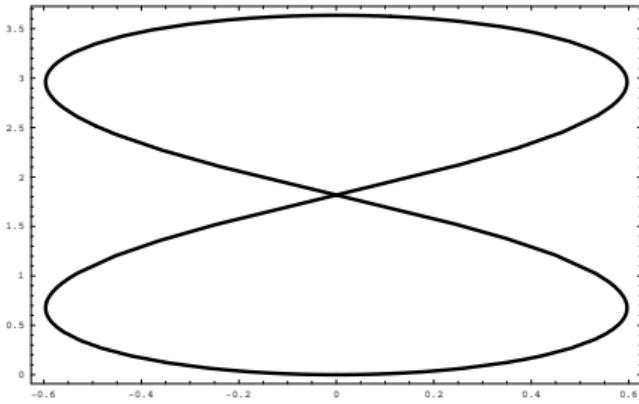
$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min$$

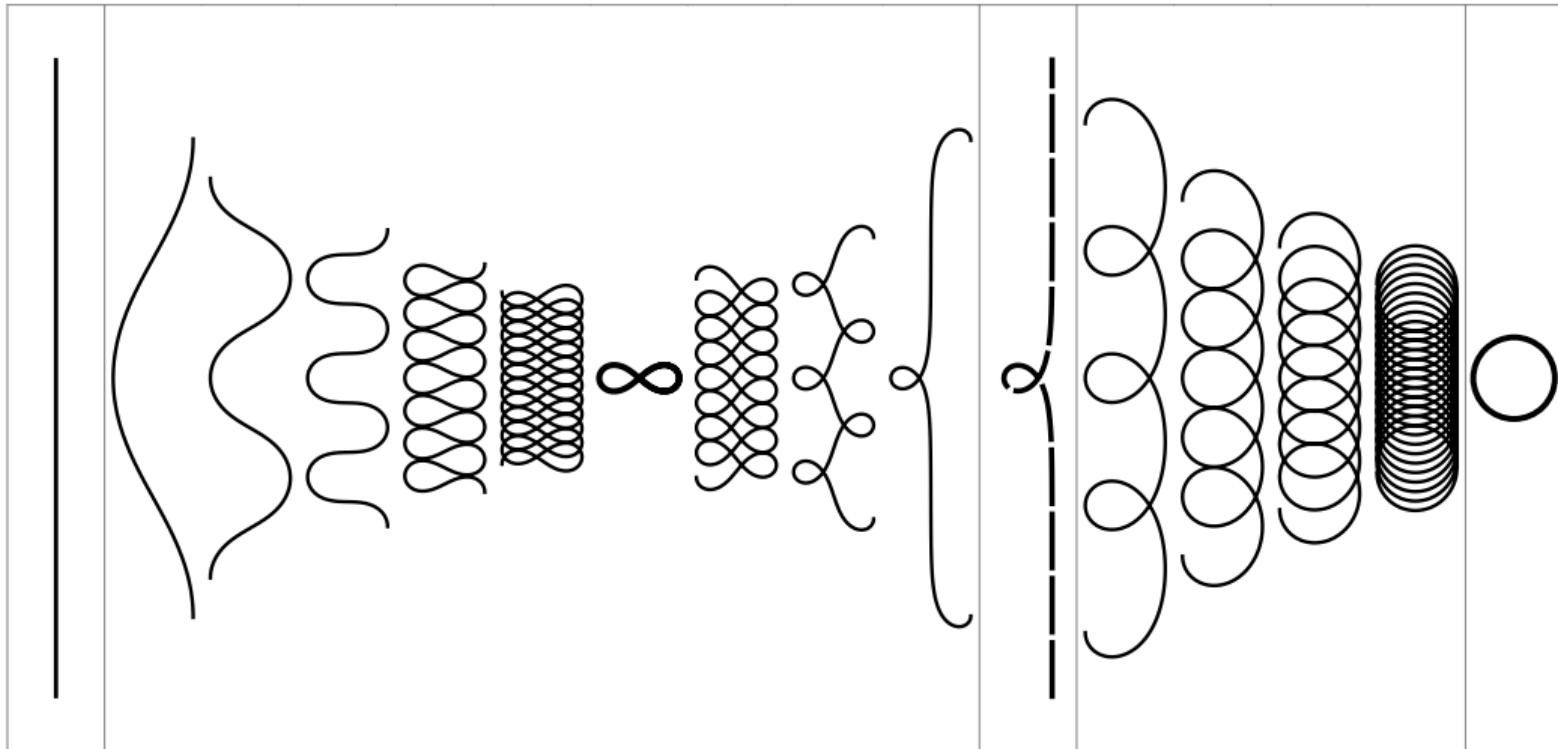
Эйлеровы эластики



Эйлеровы эластики



Семейство эластик Эйлера



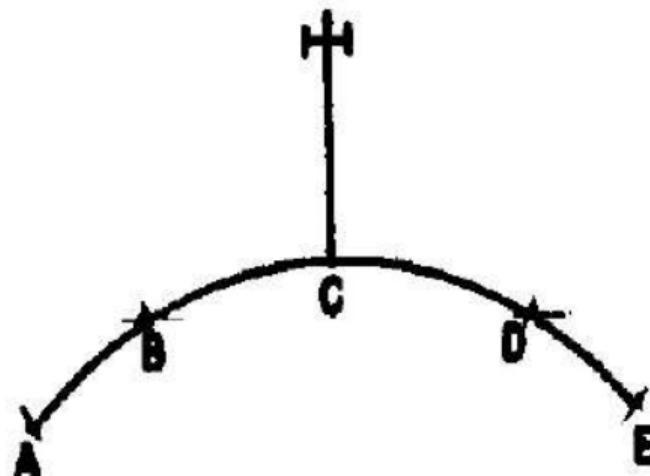
XIII век: Жорданус де Неморе

Jordanus de Nemore (Жорданус Лесной)

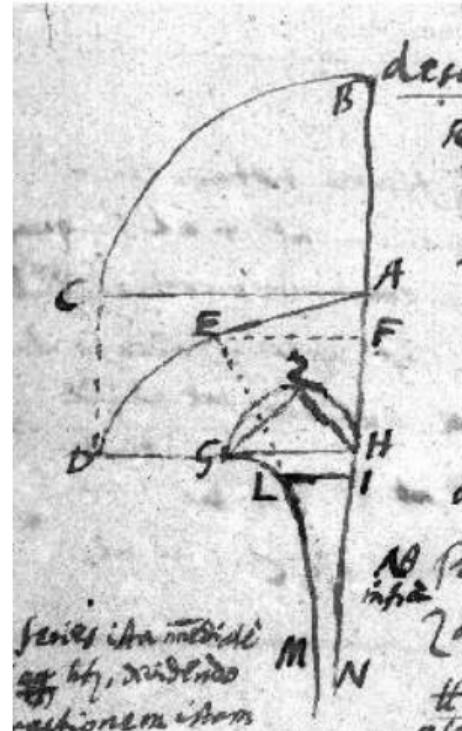
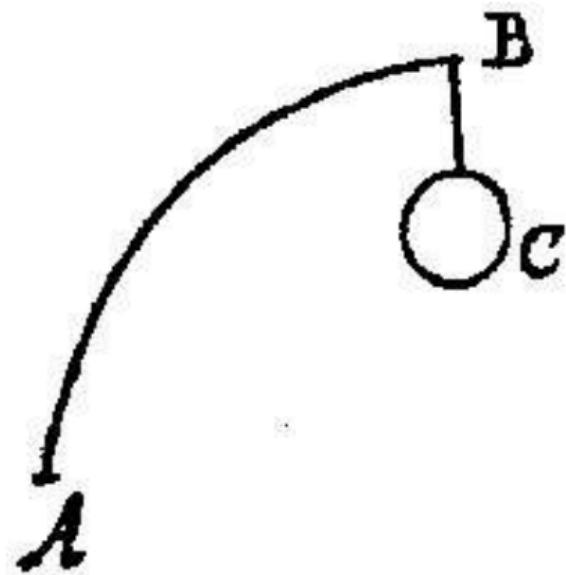
De Ratione Ponderis (*О причине веса*)

Книга 4, Предложение 13: неверное решение.

(Все) упругие кривые — окружности.



1691: Якоб Бернулли, прямоугольная эластика

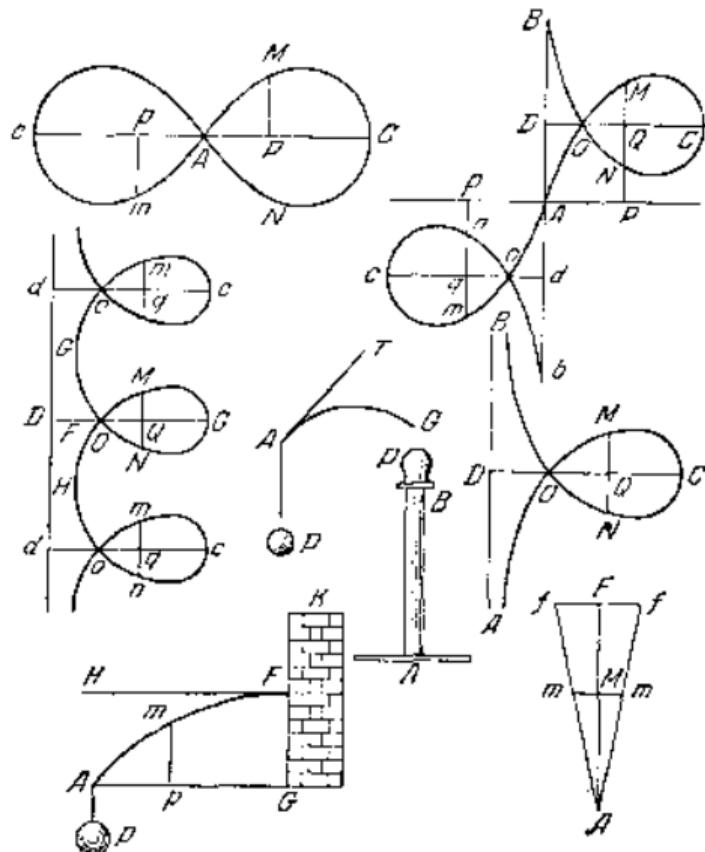


$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - \frac{4y^2}{x^2}}}, \quad ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{4y^2}{x^2}}}, \quad x \in [0, 1]$$

1744: Леонард Эйлер

- “Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле”, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук, Лозанна, Женева, 1744,
- Приложение «Об упругих кривых»:
«...в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.»
- «Среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через A и B, но и касаются в этих точках прямых, заданных по положению, определить ту, для которой значение выражения $\int \frac{ds}{R^2}$ будет наименьшим.»

Эскизы Л. Эйлера (1744 г.)



1807: Пьер Симон Лаплас

Форма поверхности капилляра
между вертикальными плоскостями

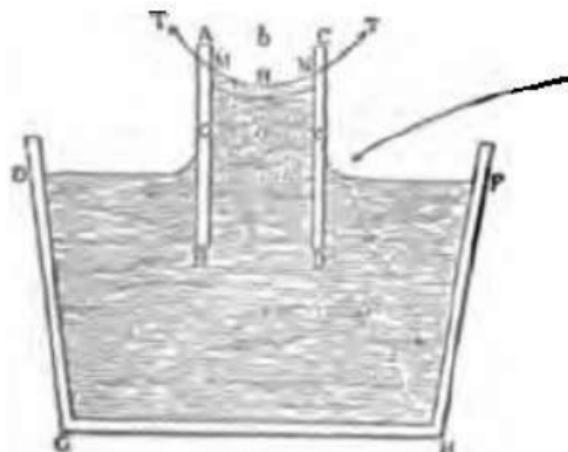


FIG. 6.

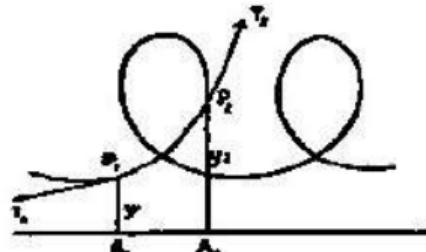
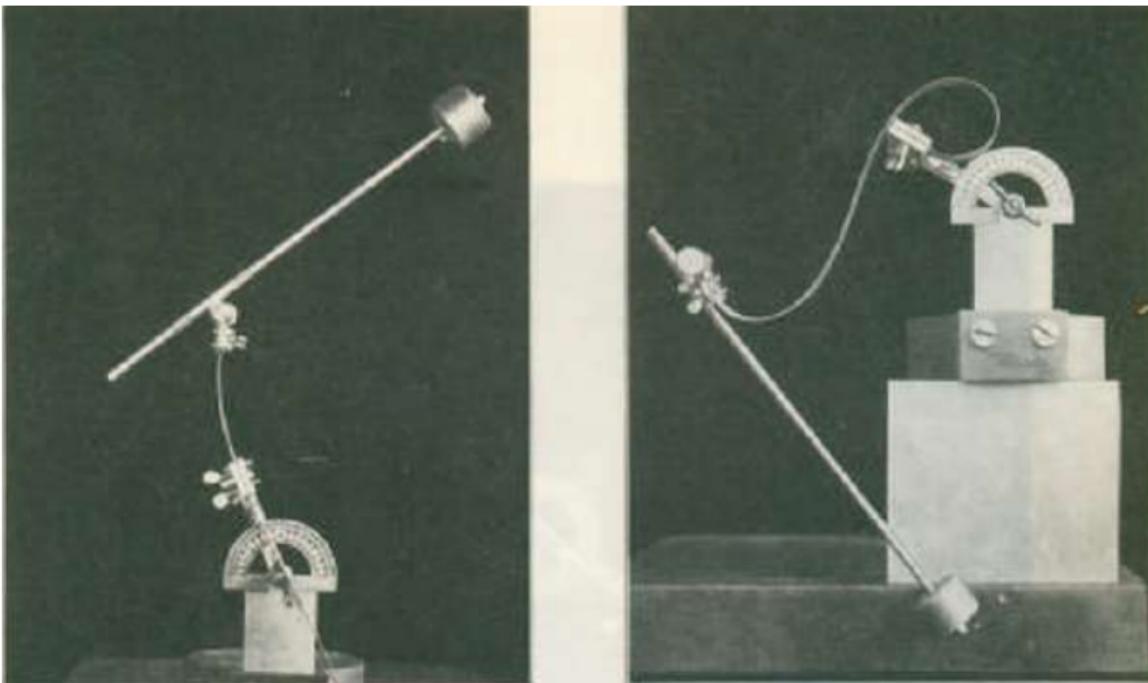


FIG. 8.

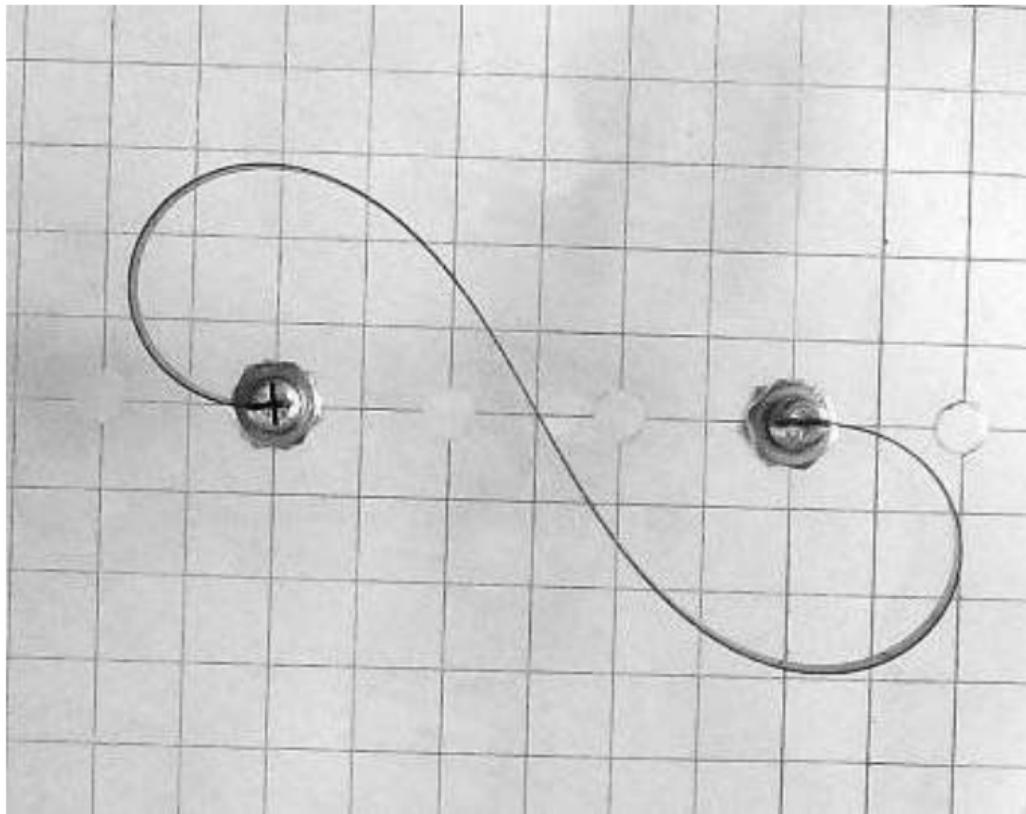
Рисунки Дж.Максвелла (Британская Энциклопедия, 1890 г.)

1906: Макс Борн

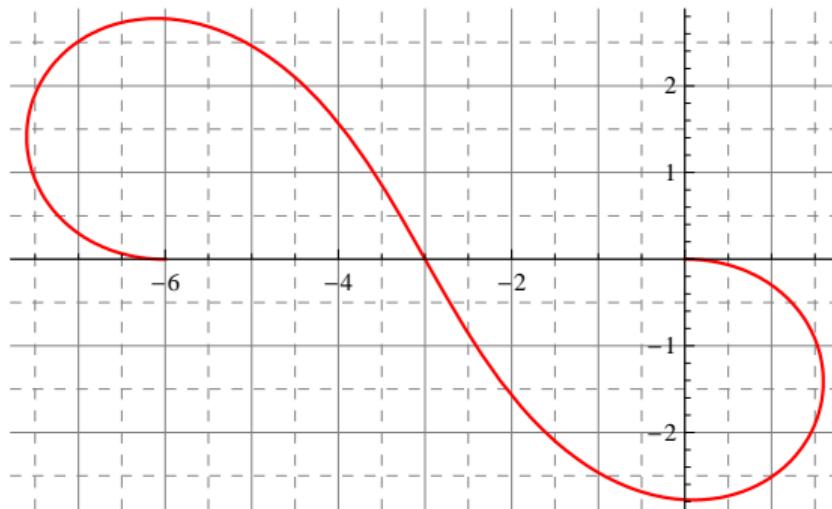
Эксперименты с упругими стержнями:



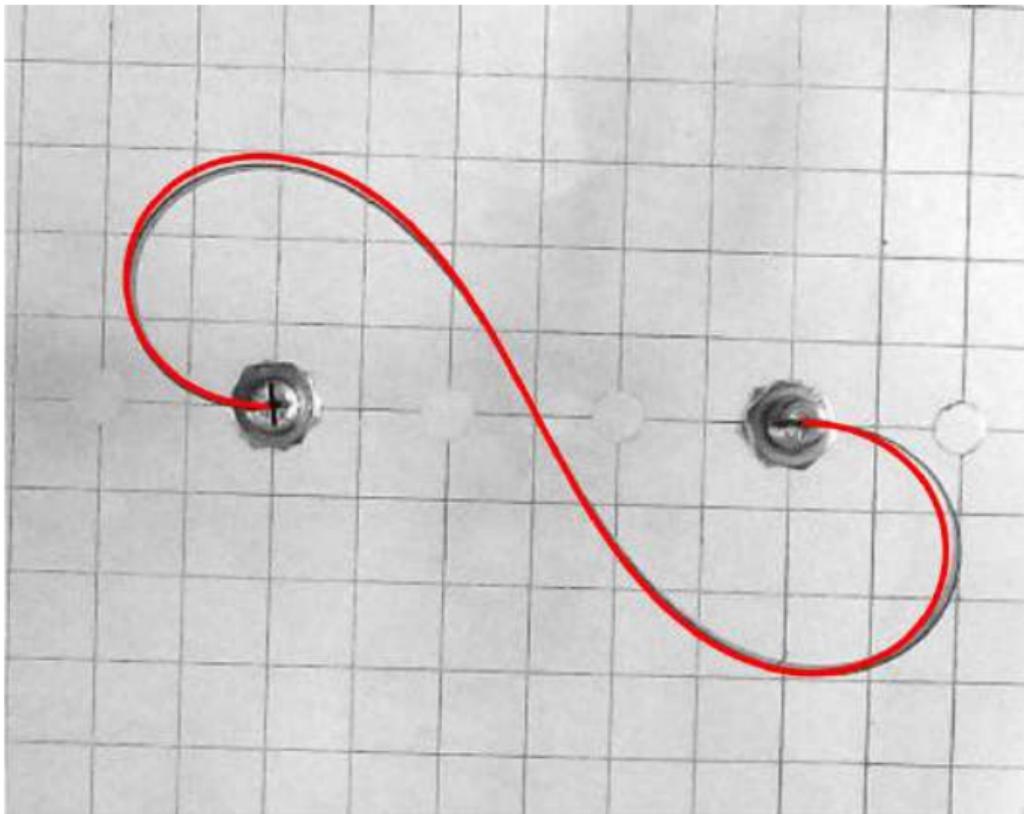
Эксперименты с эластиками



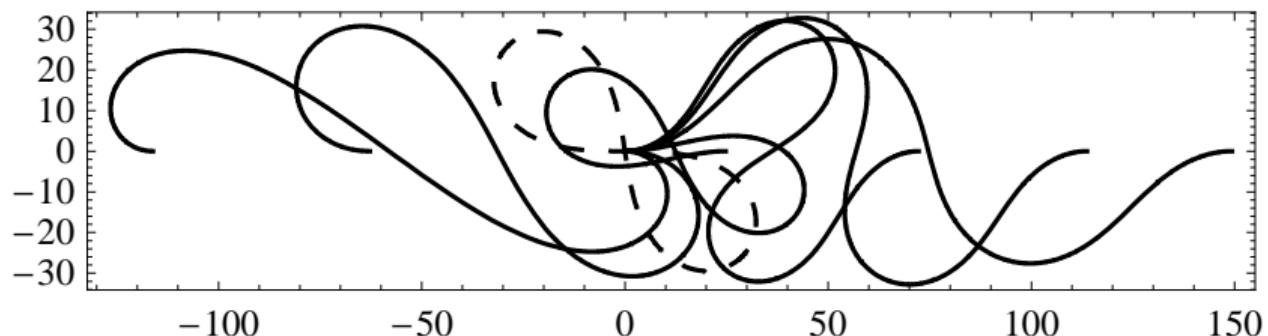
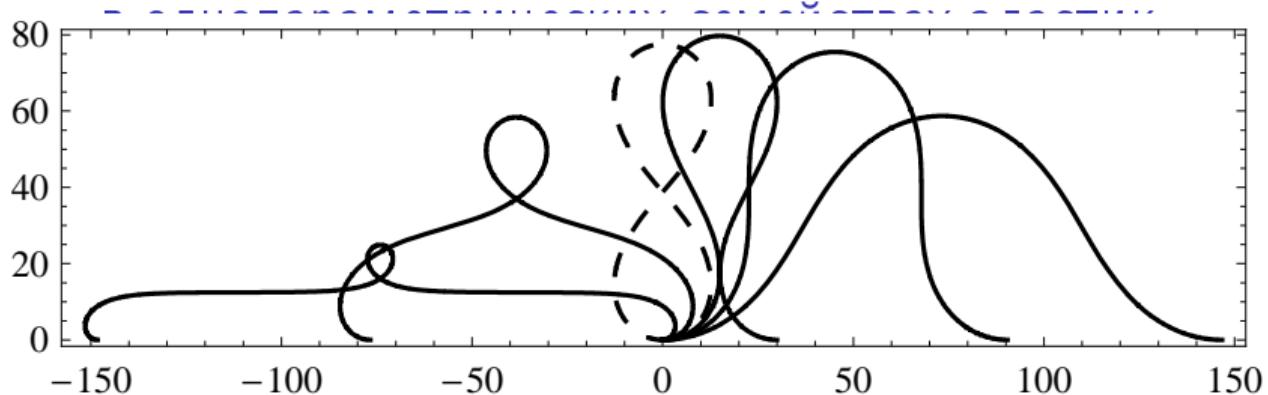
Чертеж эластики (Mathematica)



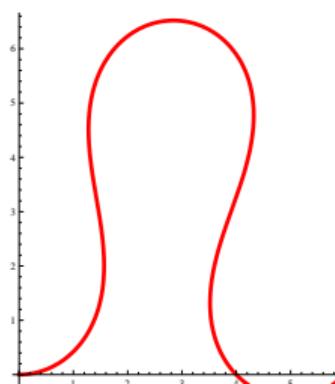
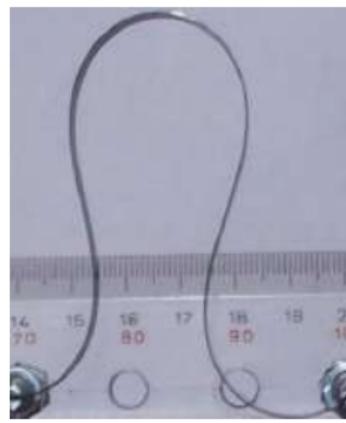
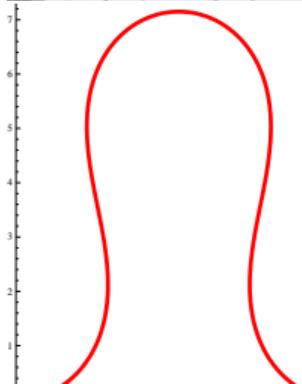
Сравнение физической и математической эластик



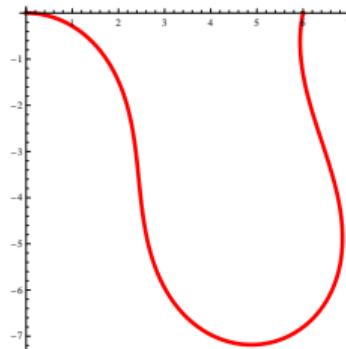
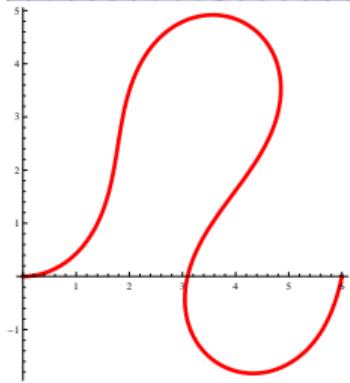
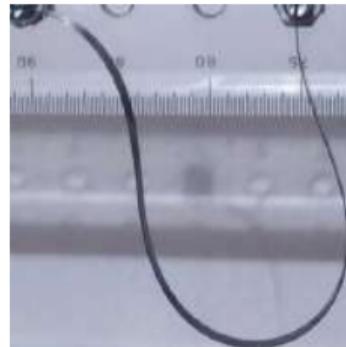
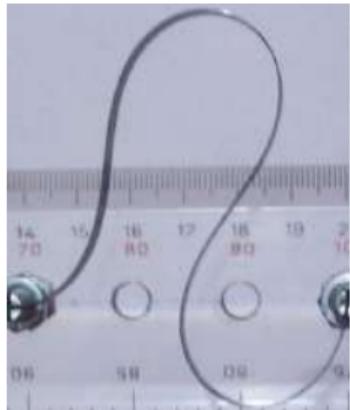
Потеря устойчивости



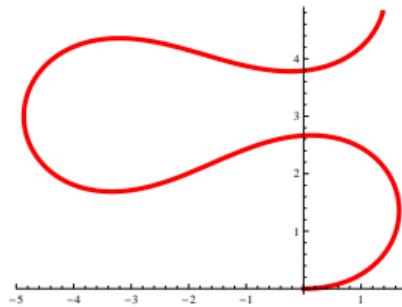
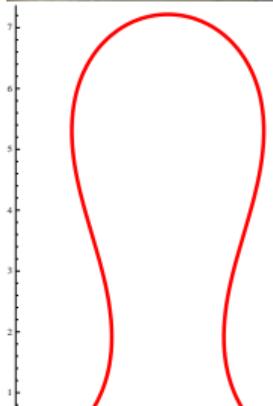
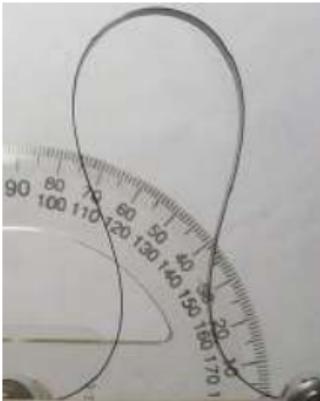
Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия А



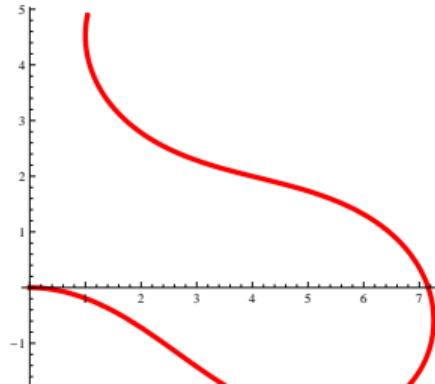
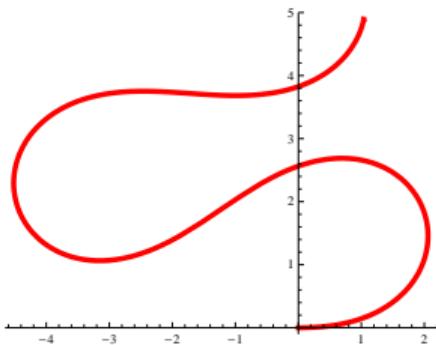
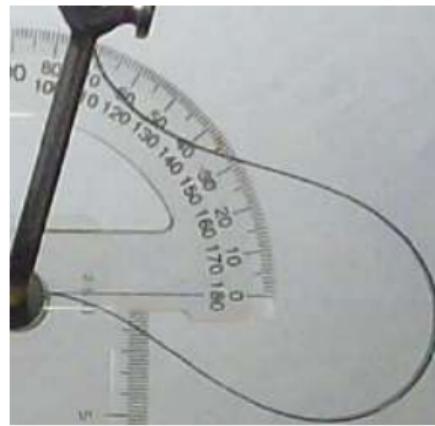
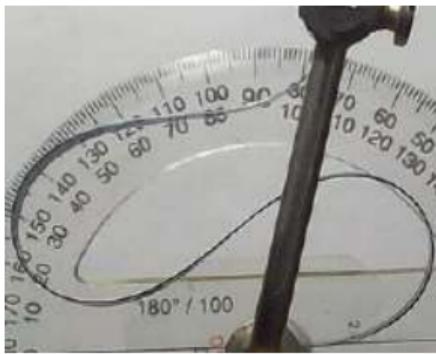
Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия А



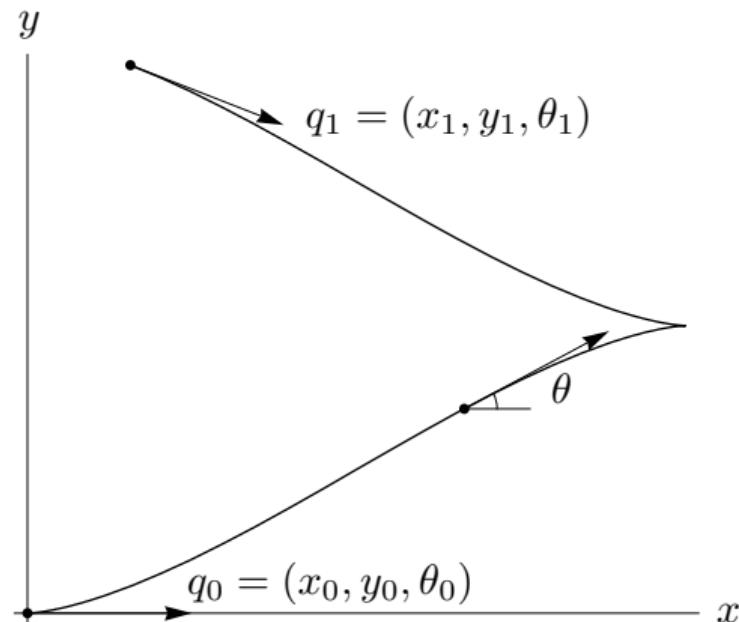
Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия В



Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия В

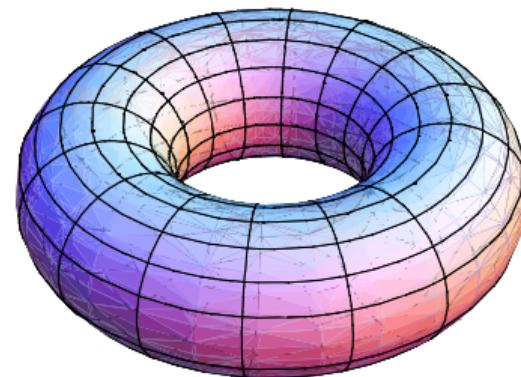
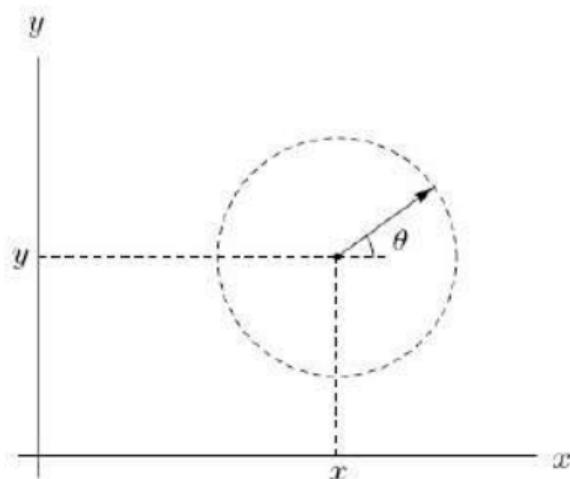


Управление мобильным роботом



$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Пространство состояний — гладкое многообразие



$$G = \{q = (x, y, \theta) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1\} = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1$$

Пространство состояний — группа движений плоскости

- $q = (0, 0, \theta)$ — поворот плоскости \mathbb{R}^2 на угол θ
- $q = (x, y, 0)$ — параллельный перенос \mathbb{R}^2 на вектор (x, y)
- $q = (x, y, \theta)$ — поворот \mathbb{R}^2 на угол θ + параллельный перенос \mathbb{R}^2 на вектор (x, y)
- $q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), q_2 = (x_2, y_2, \theta_2) \Rightarrow$
 $q_2 \cdot q_1 = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta})$:
 $\tilde{x} = x_2 + x_1 \cos \theta_2 - y_1 \sin \theta_2,$
 $\tilde{y} = y_2 + x_1 \sin \theta_2 + y_1 \cos \theta_2,$
 $\tilde{\theta} = \theta_2 + \theta_1$
- $q = (x, y, \theta) \Rightarrow$
 $q^{-1} = (-x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -\theta)$

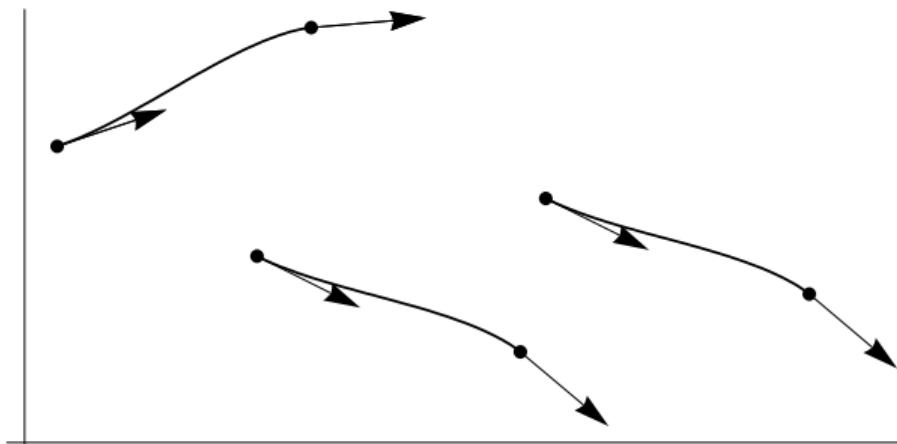
Пространство состояний G — группа Ли

- G — гладкое многообразие:
локальные координаты $q = (x, y, \theta)$
- G — группа:
 $q_2 \cdot q_1$ — композиция движений плоскости
 q^{-1} — обратное движение плоскости
- Групповые операции гладкие в локальных координатах
- $\Rightarrow G$ — группа Ли
- $G = \text{SE}(2)$

Инвариантная задача на группе Ли

$q(t) \in G$ — оптимальное решение \Rightarrow

$\forall \hat{q} \in G \quad \tilde{q}(t) = \hat{q} \cdot q(t)$ — оптимальное решение



Группы Ли

- G — группа Ли:
 - 1) G — гладкое многообразие,
 - 2) G — группа,
 - 3) групповые операции гладкие.
- Примеры групп Ли:
 - $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\},$
 - $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{\theta \in [0, 2\pi]/0 \sim 2\pi\},$
 - $\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \mid \theta_i \in S^1\},$
 - $\mathrm{GL}(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det X \neq 0\},$
 - $\mathrm{SO}(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\top = X^{-1}, \det X = 1\},$
 - $\mathrm{SE}(n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid A \in \mathrm{SO}(n), v \in \mathbb{R}^n \right\},$
 - $\mathrm{SU}(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \overline{X^\top} = X^{-1}, \det X = 1\}.$

Инвариантные задачи оптимального управления на группах Ли

$\dot{q} = f(q, u)$, $q \in G$ — группа Ли, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$

$q(0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$

$$J = \int_0^{t_1} g(q, u) dt \rightarrow \min.$$

Динамика $f(q, u)$ и функционал J инвариантны относительно сдвигов на G :

$q(t) \in G$ — оптимальная траектория \Rightarrow

$\forall \hat{q} \in G \quad \tilde{q}(t) = \hat{q} \cdot q(t)$ — оптимальная траектория

Примеры инвариантных задач на группах Ли

- Управление вращениями твердого тела: $G = \mathrm{SO}(3)$,
- Задача Диодоны: $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$,
- Задача об эластиках на плоскости или в пространстве: $G = \mathrm{SE}(2)$ или $\mathrm{SE}(3)$,
- Оптимальное качение сферы по плоскости: $G = \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$,
- Управление трехуровневой квантовой системой: $G = \mathrm{SU}(3)$,
- Управление спиновой системой из n частиц: $G = \mathrm{SU}(2^n)$,
- Моделирование квантового компьютера: $G = \mathrm{SU}(n)$.

Исследование инвариантных задач на группах Ли: сдвиг начальной точки

- $q(t)$:

$$q(0) = \text{Id} \text{ — единичный элемент } G, \quad q(t_1) = q_1$$

- $\tilde{q}(t) = ?$:

$$\tilde{q}(0) = \tilde{q}_0, \quad \tilde{q}(t_1) = \tilde{q}_1$$

- $q(t) = \tilde{q}_0^{-1} \cdot \tilde{q}(t)$:

$$q(0) = \text{Id}, \quad q(t_1) = \tilde{q}_0^{-1} \cdot \tilde{q}_1, \\ \tilde{q}(t) = \tilde{q}_0 \cdot q(t).$$

Принцип максимума Понтрягина

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f(q, u), \quad q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ \int_0^{t_1} g(q, u) dt &\rightarrow \min.\end{aligned}$$

$q(t)$ оптимальна $\Rightarrow \exists p(t) \in \mathbb{R}^n, n = \dim G$:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q), & p \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(p, q), & q \in G, \end{cases}$$

$$H(p, q) = \max_u (pf(q, u) - g(q, u))$$

Гамильтонова система принципа максимума для инвариантных задач на группах Ли

Замена сопряженных переменных $\varphi = \varphi(p, q)$:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = K(\varphi), & \varphi \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{q} = L(\varphi, q), & q \in G, \end{cases}$$

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, где $\varphi_i(p, q)$ линейные по p гамильтонианы, соответствующие полям f и их скобкам Ли.

Интегрирование гамильтоновой системы ПМП:

- 1) $\varphi = \varphi(t)$,
- 2) $q = q(t)$.

Симметрии гамильтоновой системы ПМП

$$\dot{\varphi} = K(\varphi), \tag{5}$$

$$\dot{q} = L(\varphi, q). \tag{6}$$

Диффеоморфизм $F(\varphi, q) = (\Phi, Q)$ — симметрия (5), (6), если:

$$(\varphi(t), q(t)) \text{ решение} \Rightarrow (\Phi(t), Q(t)) \text{ решение.}$$

Симметрия подсистемы (5):

$$M(\varphi) = \Phi.$$

Продолжение до симметрии полной системы (5), (6):

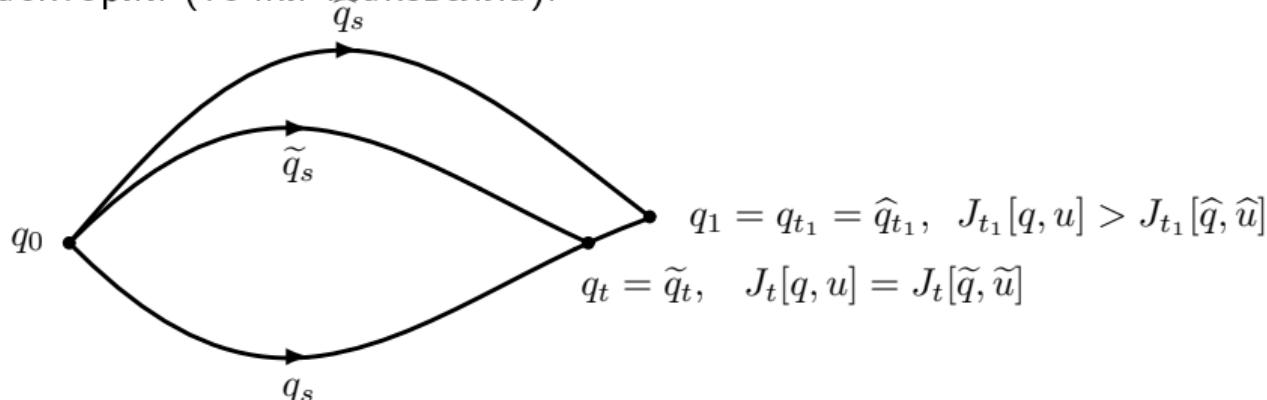
$$\Phi = M(\varphi), \quad Q = N(q)$$

Непрерывные и дискретные симметрии гамильтоновой системы ПМП

- Группа симметрий:

$$\text{Sym} = \{F(\varphi, q) \text{ — симметрии гамильтоновой системы}\},$$

- Непрерывные симметрии: понижение порядка системы,
- Дискретные симметрии: исследование оптимальности экстремальных траекторий (точки Максвелла).



Управление мобильным роботом: Задача оптимального управления

$$\dot{x} = u \cos \theta,$$

$$\dot{y} = u \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = v,$$

$$q = (x, y, \theta) \in G = \text{SE}(2),$$

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

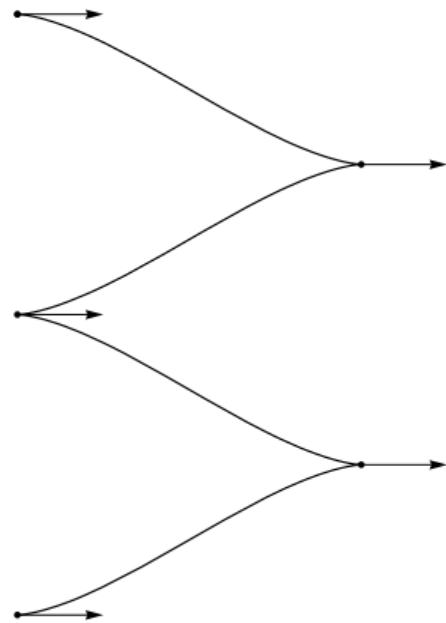
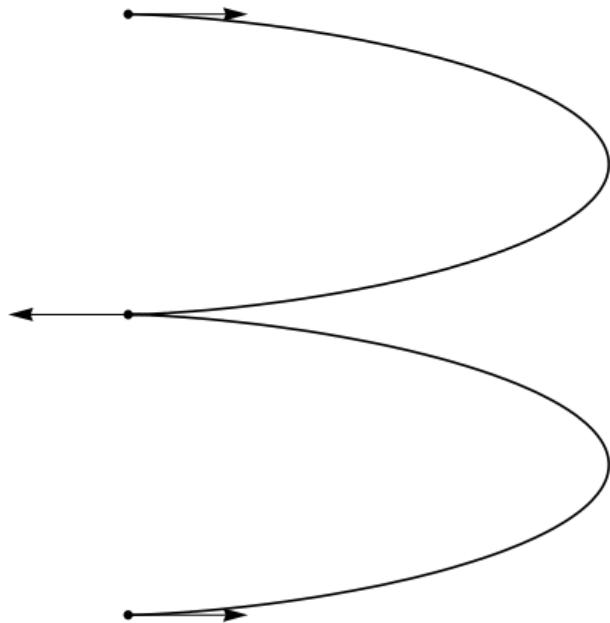
$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} dt \rightarrow \min.$$

Результаты по задаче об управлении мобильным роботом

- Существование оптимальных траекторий,
- Параметризация экстремальных траекторий (ПМП),
- Описание оптимальных траекторий:
 - Общие граничные условия \Rightarrow сведение к системам алгебраических уравнений,
 - Специальные граничные условия \Rightarrow явные решения,
- Структура оптимального синтеза и множества Максвелла,
- Субримановы сферы,
- Приложения: восстановление поврежденных изображений,
Параллельный программный комплекс для восстановления изображений.

Управление мобильным роботом: экстремальные траектории общего положения



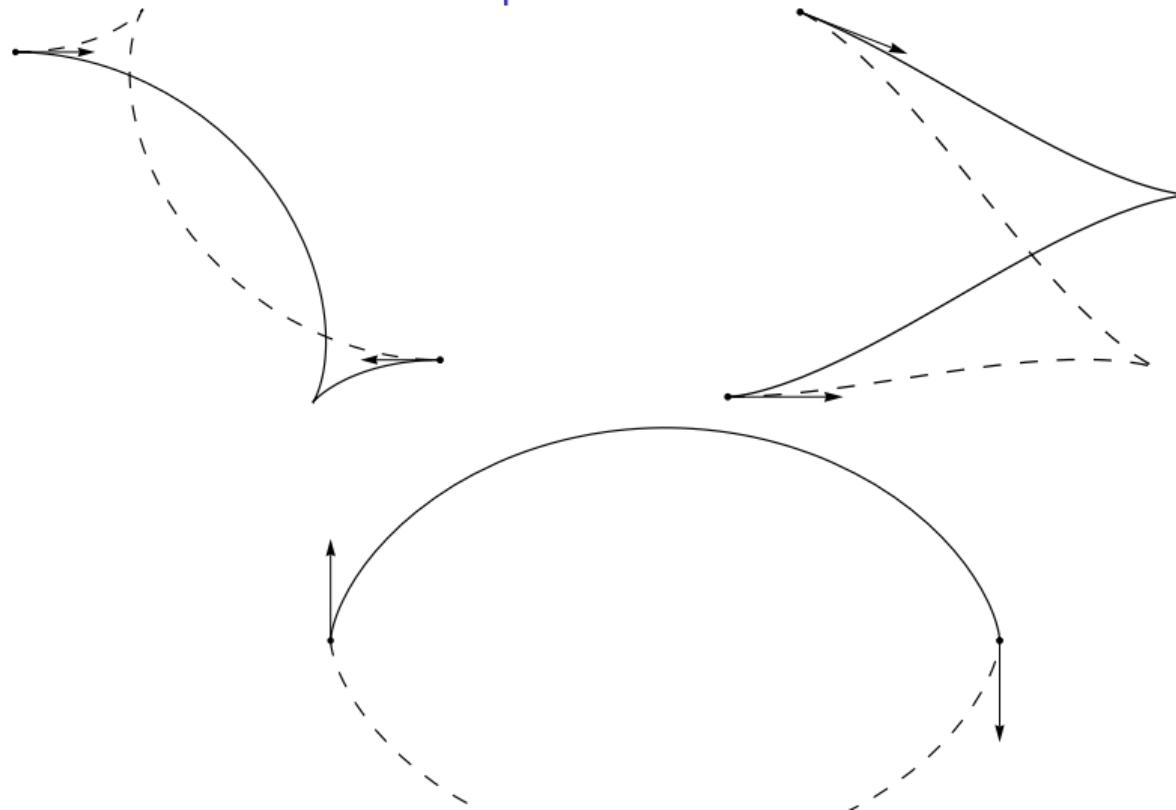
Параметризация функциями Якоби sn , cn , dn , E .

Управление мобильным роботом: экстремальные траектории специального вида



Параметризация элементарными функциями.

Точки Максвелла на экстремальных траекториях: потеря оптимальности

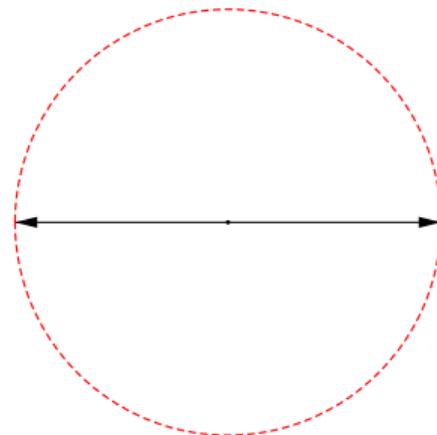


Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = 0$$

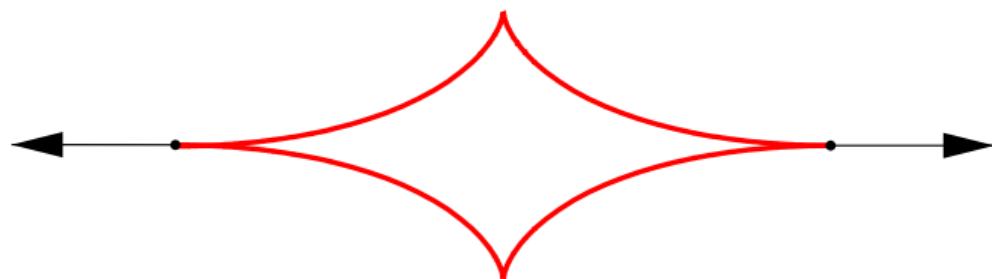


$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 \neq 0$$



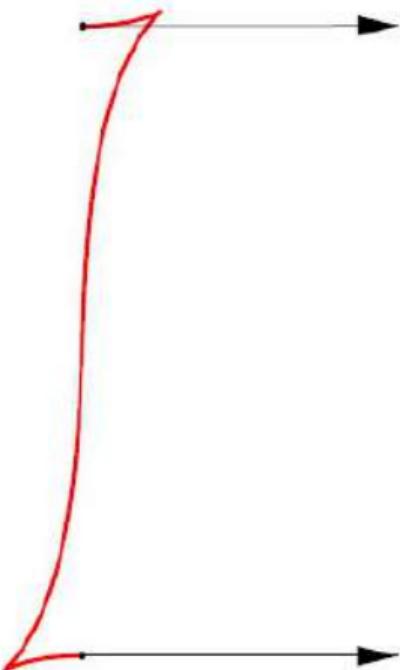
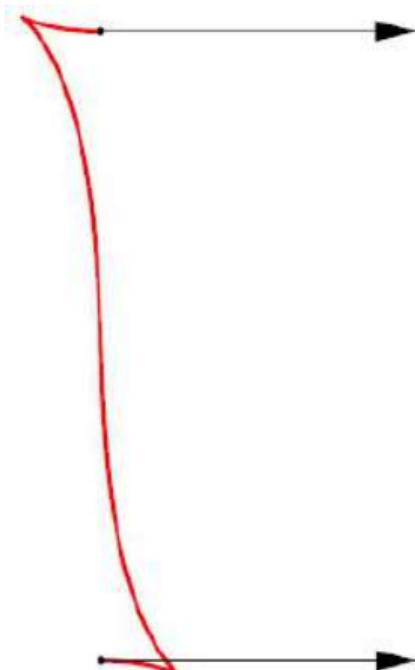
Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = \pi$$



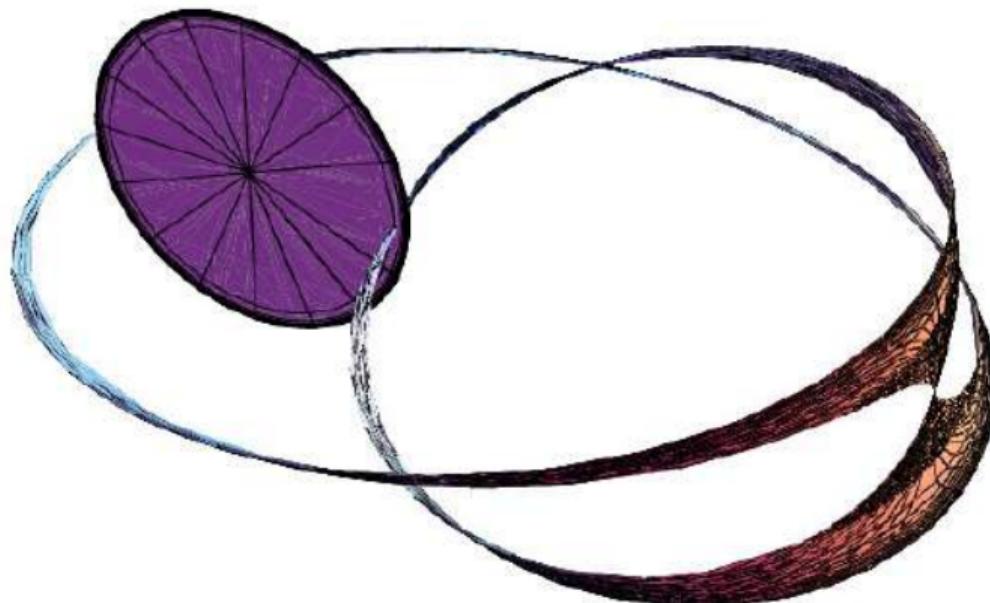
Оптимальные траектории

$$x_1 = 0, \quad y_1 \neq 0, \quad \theta_1 = 0$$



Множество Максвелла

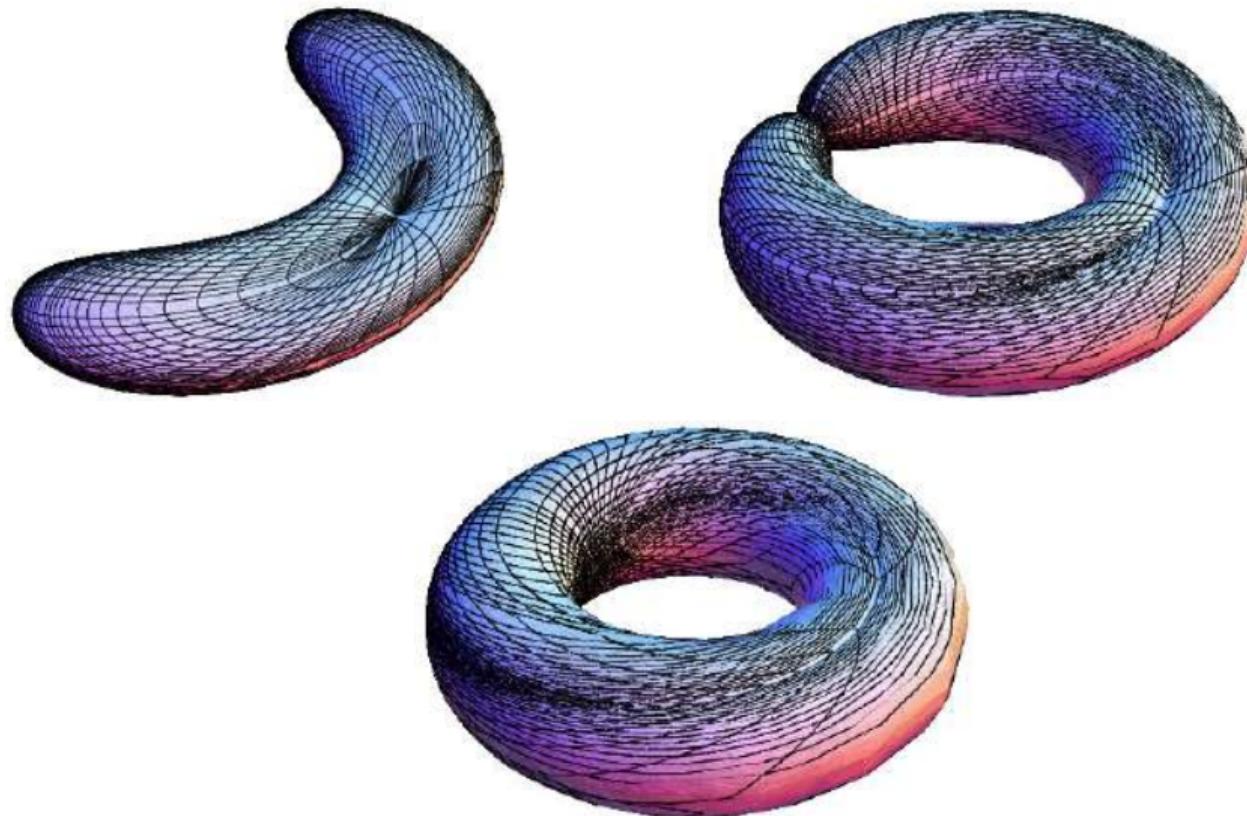
$\text{Max} = \{q_1 \in G \mid \exists > 1 \text{ оптимальной траектории } q(\cdot) : q(t_1) = q_1\}$



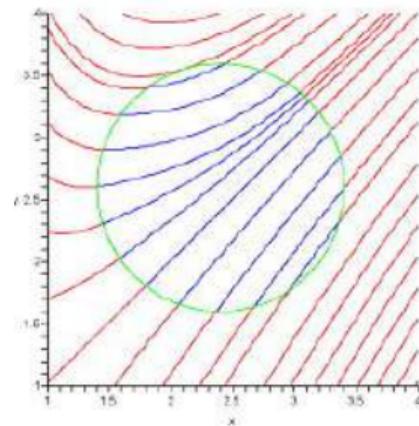
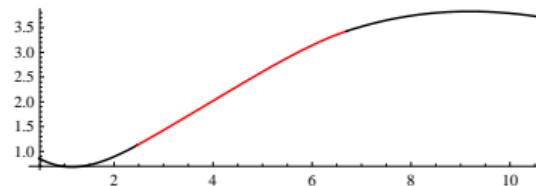
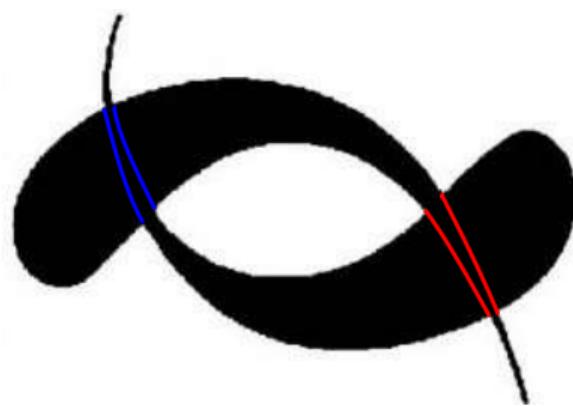
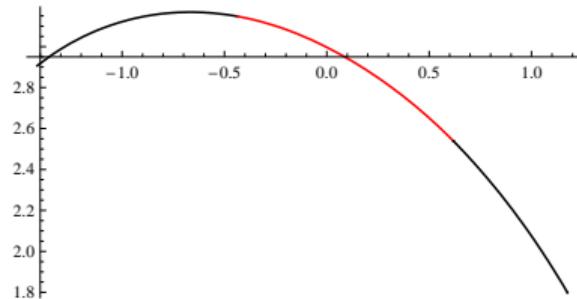
Субриманова метрика и сферы

- $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$
- $S_R = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}$
- $R = 0 \Rightarrow S_R = \{q_0\}$
- $R \in (0, \pi) \Rightarrow S_R \cong S^2$
- $R = \pi \Rightarrow S_R \cong S^2 / \{N = S\}$
- $R > \pi \Rightarrow S_R \cong \mathbb{T}^2$

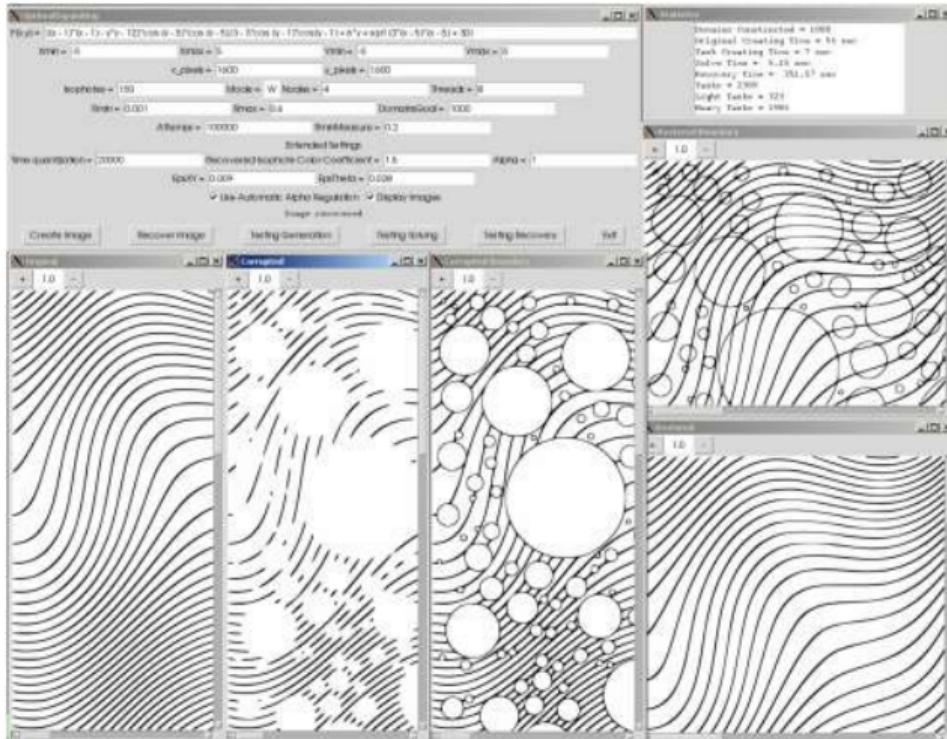
Глобальная структура субримановых сфер



Приложения: Восстановление скрытого контура



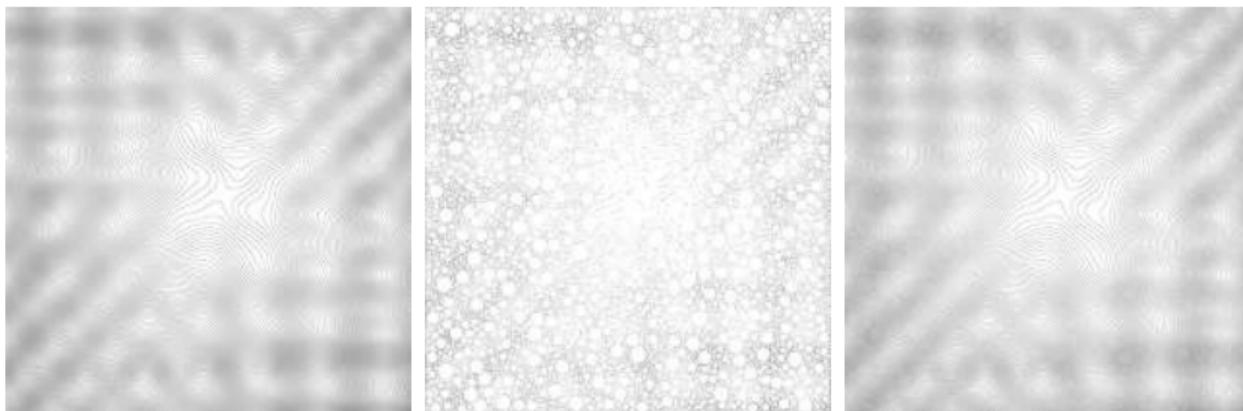
Параллельный ПК Optimallnpainting для восстановления поврежденных изображений



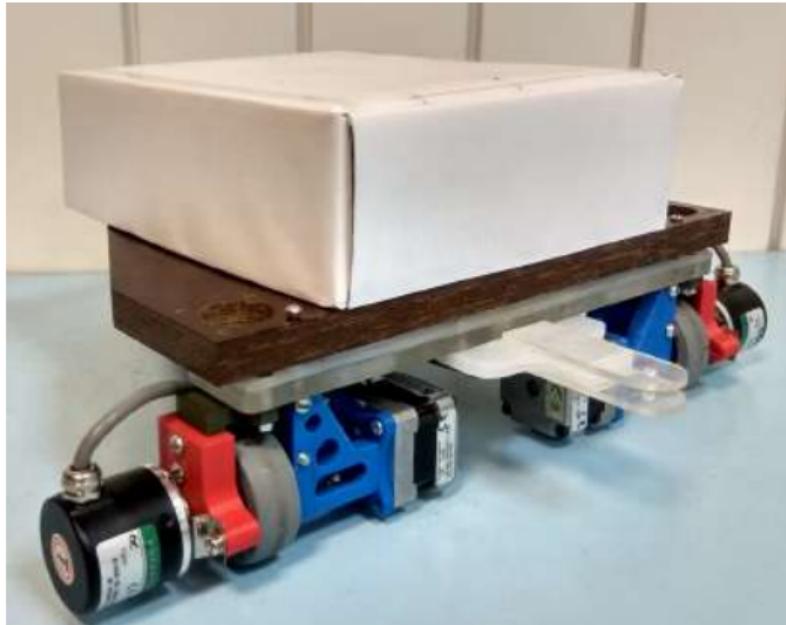
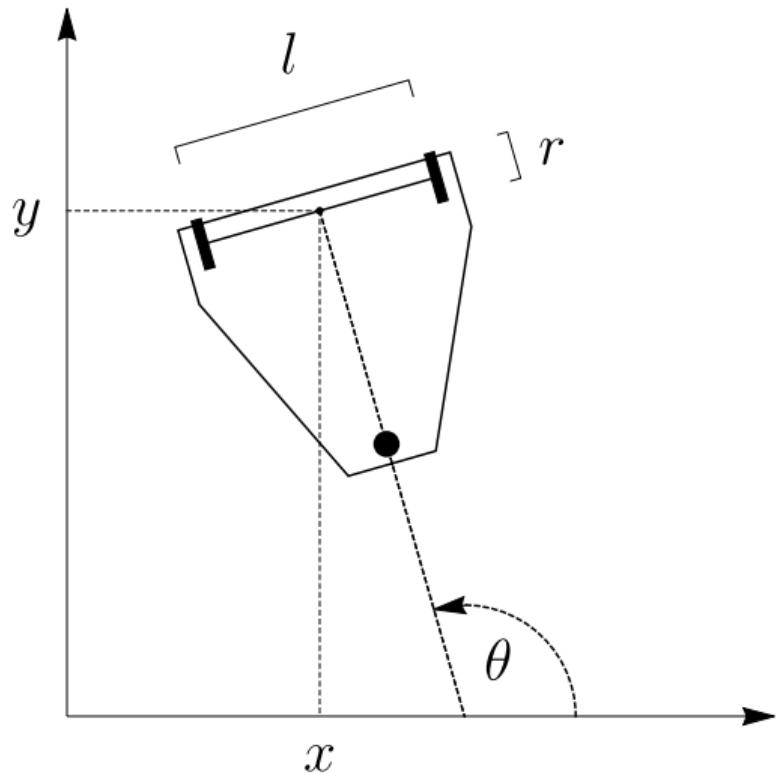
Исходное, поврежденное и восстановленное полутоновое изображение



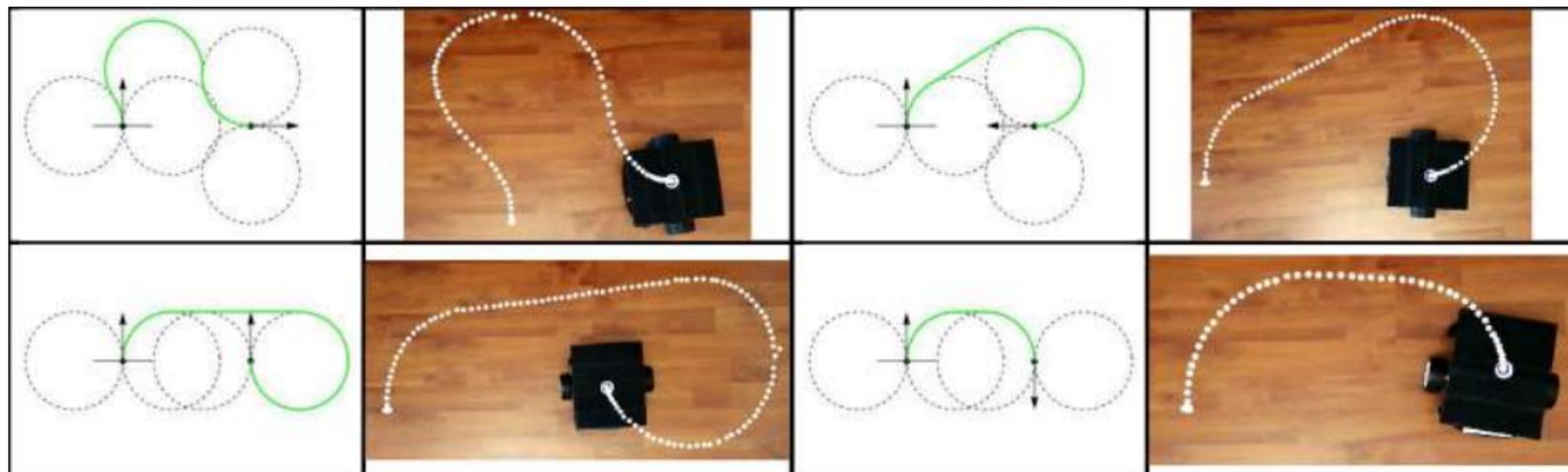
Исходное, поврежденное и восстановленное
бинарное изображение



Геометрическая модель и прототип робота с двумя приводными колёсами и одним сферическим колесом для стабилизации



Примеры парковки робота с помощью путей Маркова-Дубинса: моделирование и эксперименты



Идеальное движение робота вдоль лемнискаты Бернулли

Реальное движение робота вдоль лемнискаты Бернулли

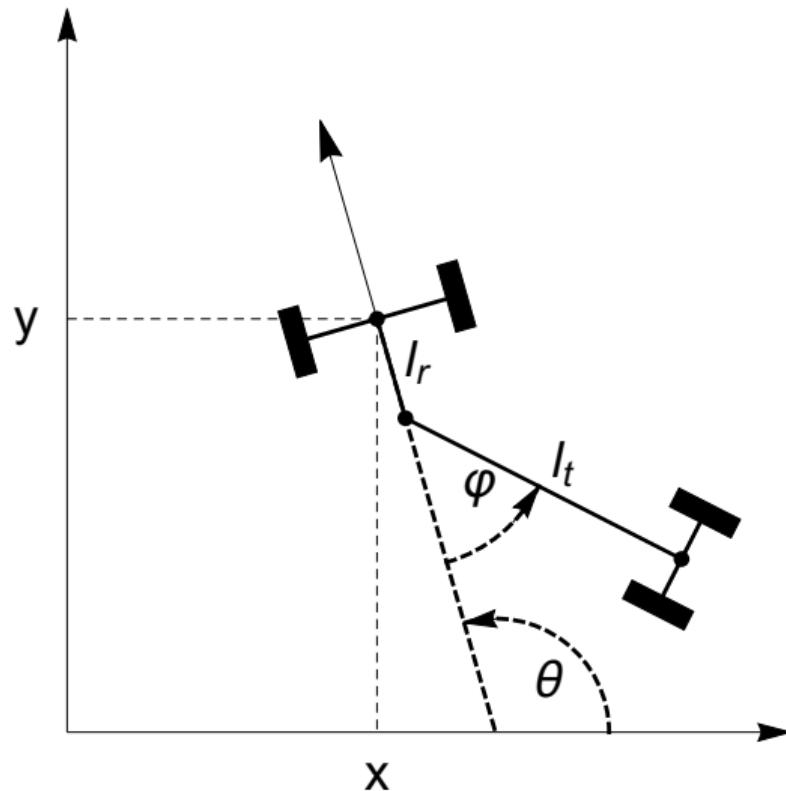
Идеальное движение робота вдоль «кардиоиды»

Реальное движение робота вдоль «кардиоиды»

Идеальное движение робота вдоль «капли»

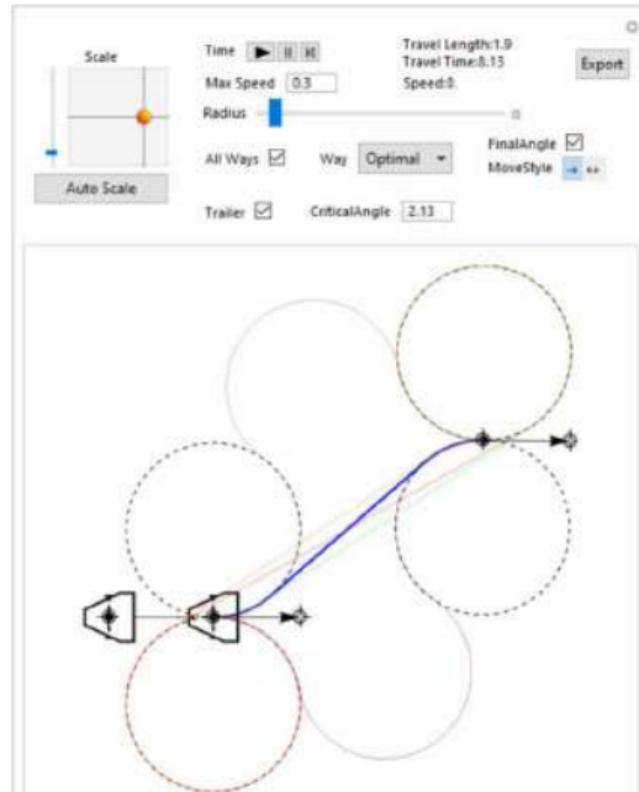
Реальное движение робота вдоль «капли»

Геометрическая модель робота с прицепом¹



¹J.-P. Laumond. Nonholonomic Motion Planning for Mobile Robots. Tutorial notes, 1998, 112 p. 98 / 110

Интерфейс, моделирующий движение робота с прицепом вдоль путей Маркова-Дубинса и Ридса Шеппа

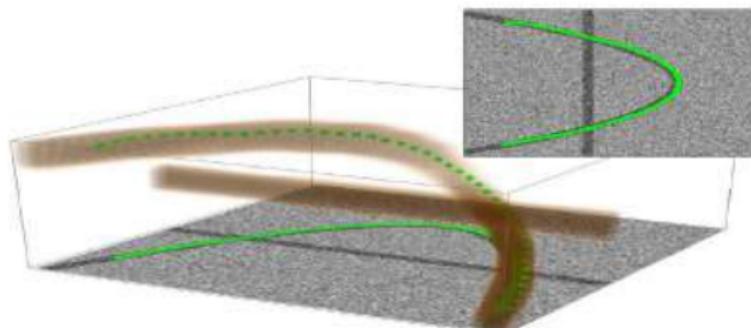


Пример перепарковки прицепа с помощью алгоритма нильпотентной аппроксимации для $(l_r, l_t) = (0, 4)$, $(\varphi_0, \varphi_1) = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$

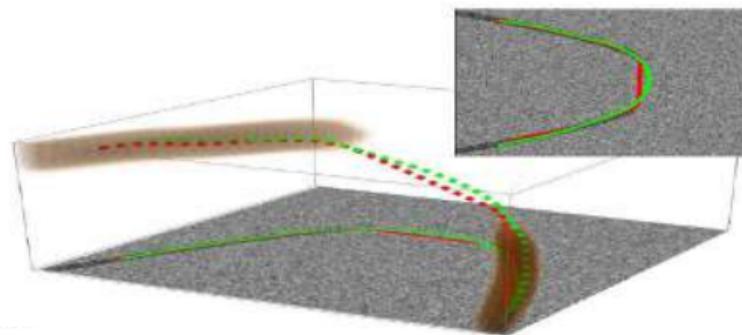
Пример перепарковки прицепа с помощью алгоритма нильпотентной аппроксимации для $(l_r, l_t) = (1, 5)$, $(\varphi_0, \varphi_1) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$

Пример парковки робота с прицепом с помощью алгоритма
нильпотентной аппроксимации для
 $(l_r, l_t) = (2, 4), q_0 = (0, 0, 0, \frac{\pi}{4}), q_1 = (-1, -1, \frac{\pi}{3}, 0)$

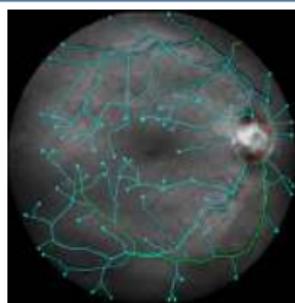
Субримановы геодезические в обработке изображений



Пересекающиеся линии
разъединяются

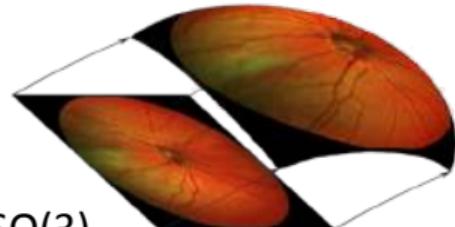


Восстановление поврежденных контуров
на основе модели зрения человека

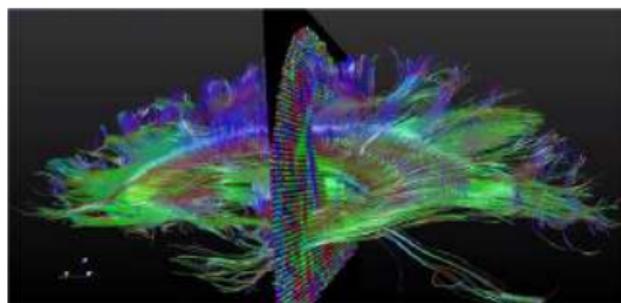


$SE(2)$

СР геодезические на группах Ли в
анализе медицинских изображений



$SO(3)$

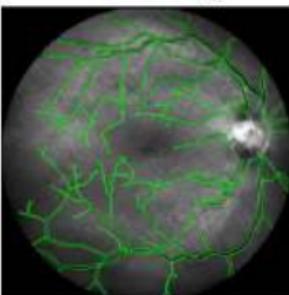


$SE(3)$

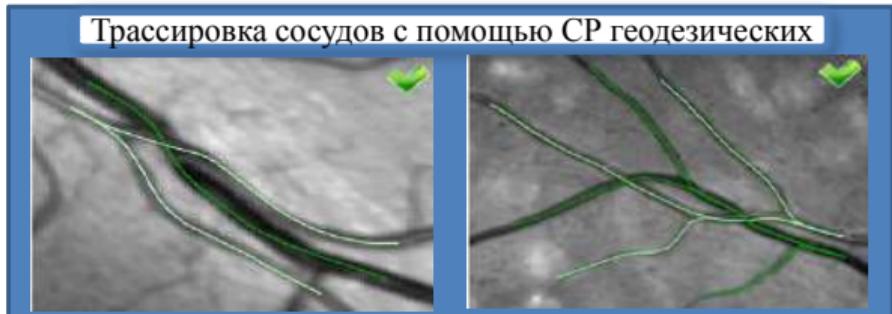
Геодезические на $SE(2)$ для плоских изображений



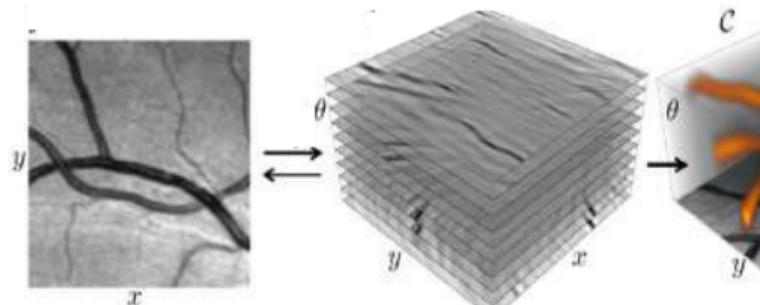
Искривление сосудов
при ретинопатии



Трассировка
сосудов



Постановка задачи

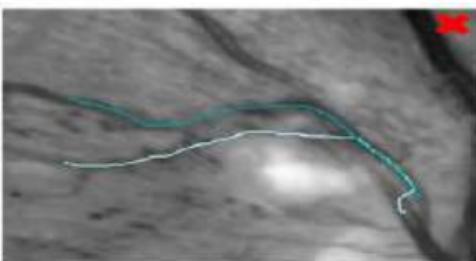
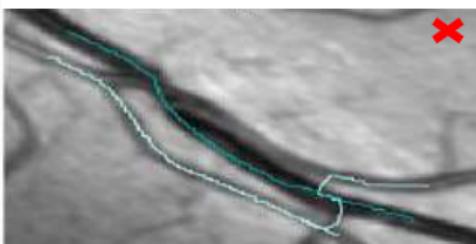


Функция внешней цены из изображения

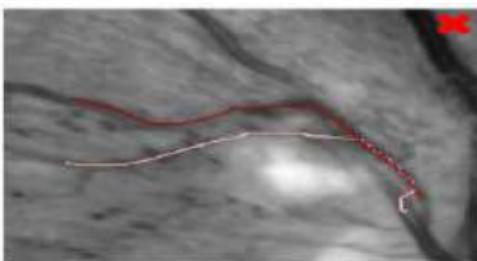
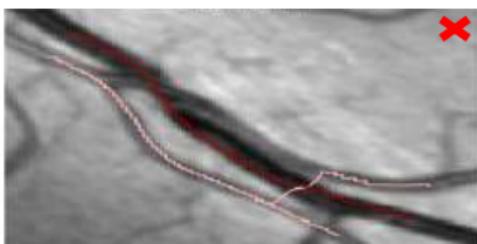
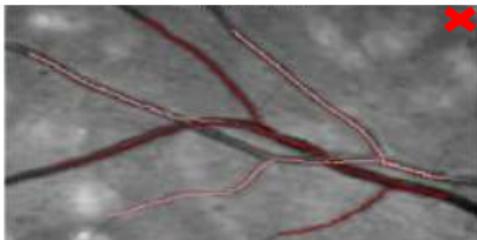
$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= u_1 (\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) + u_2 \partial_\theta, \\ \gamma(0) &= e, \quad \gamma(T) = g \in SE(2), \\ (u_1(t), u_2(t)) &\in \mathbb{R}^2, \\ l &= \int_0^T C(\gamma(t)) \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Сравнение с классическими методами

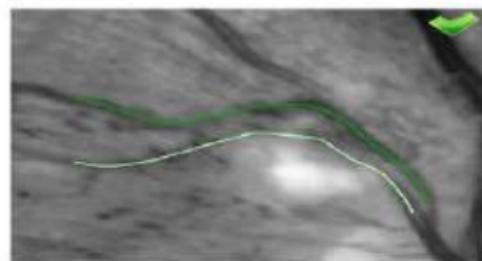
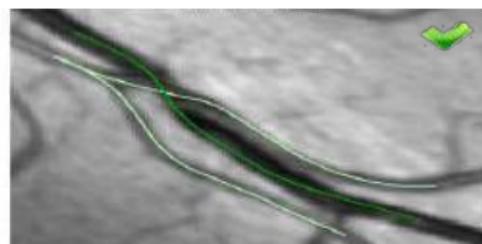
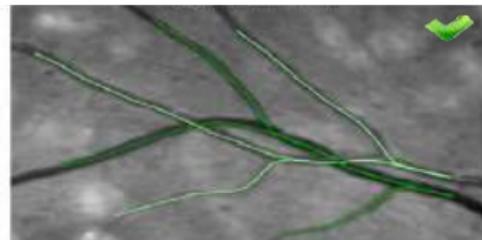
\mathbb{R}^2 - Riemannian



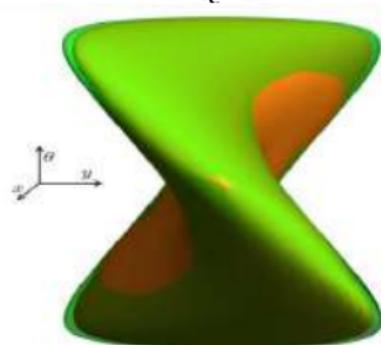
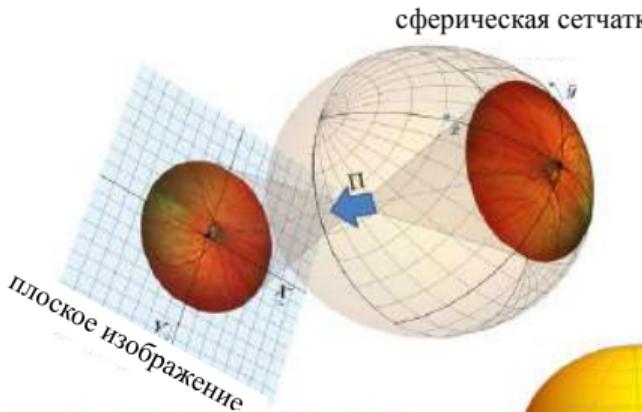
$SE(2)$ - Riemannian



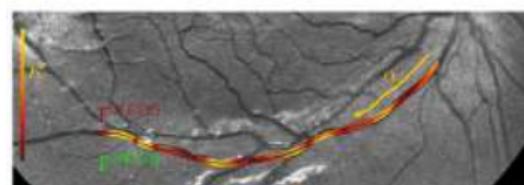
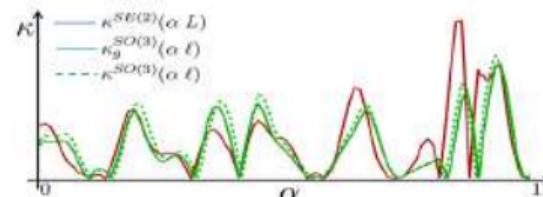
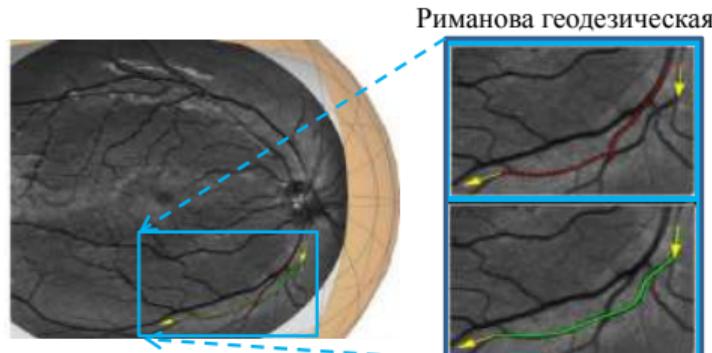
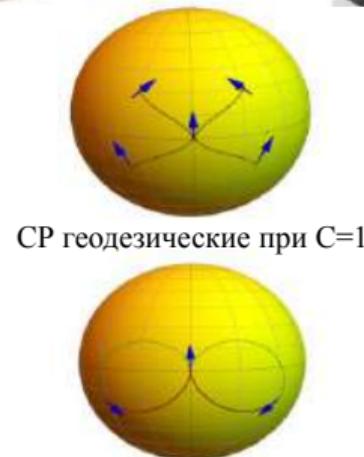
$SE(2)$ - Sub-Riemannian



Геодезические на $SO(3)$ для сферических изображений

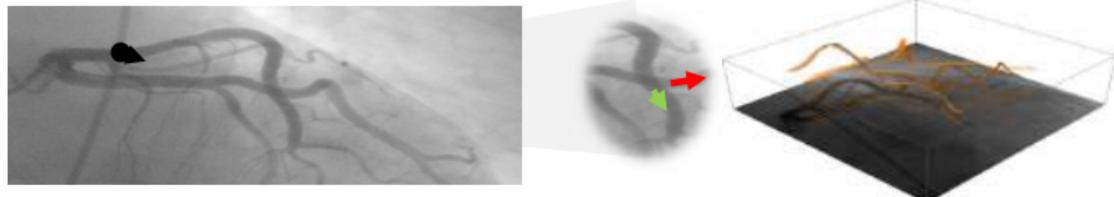


Волновой фронт и СР сфера

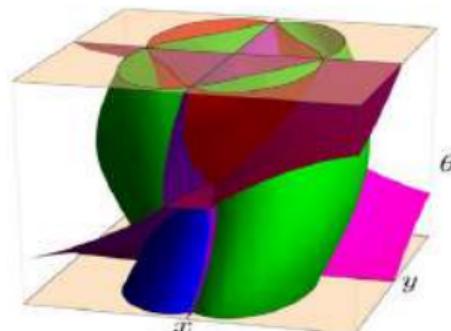
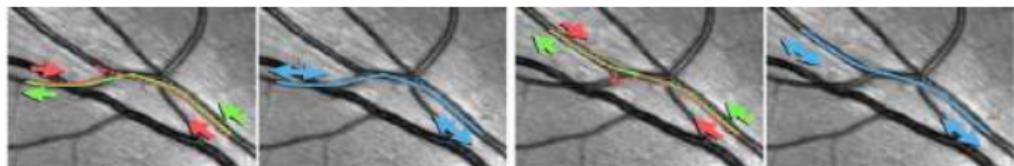


Устранение точек возврата: геодезические на PTR(2)

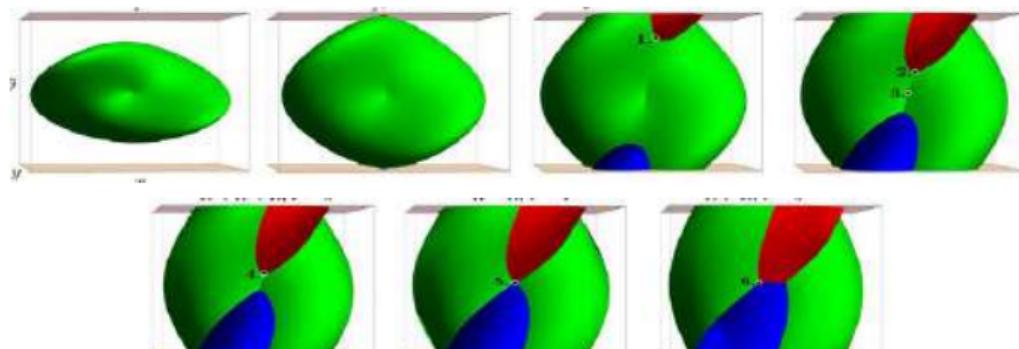
Устранение эффекта точек
возврата при поиске
кровеносных сосудов на
изображении сетчатки глаза
человека



$$(x, y, \theta) \in PT(\mathbb{R}^2)$$
$$PT(\mathbb{R}^2) \equiv \mathbb{R}^2 \times P^1$$
$$P^1 = S^1 / \sim$$



Множество разреза



Субримановы сферы

Геодезические на $SE(3)$ для трехмерных изображений

Дано $\xi > 0$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}_i \in S^2$, $i \in \{0, 1\}$.

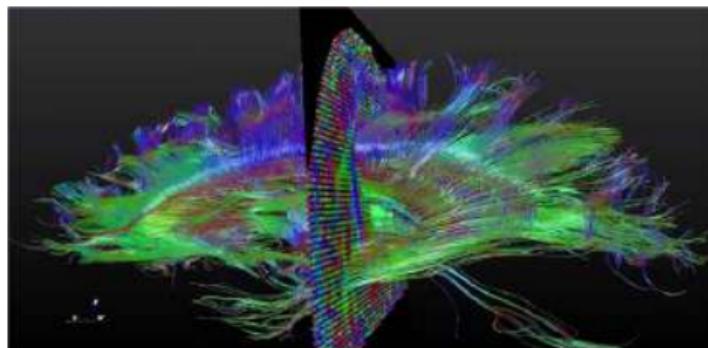
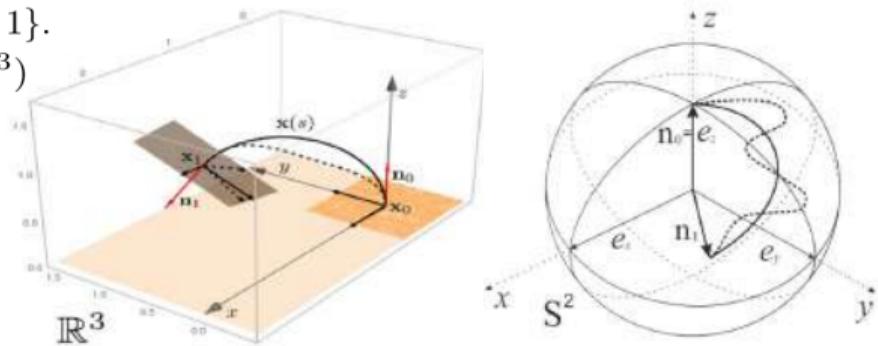
Найти гладкую кривую $\mathbf{x} \in C^\infty([0, L], \mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(L) = \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^3,$$

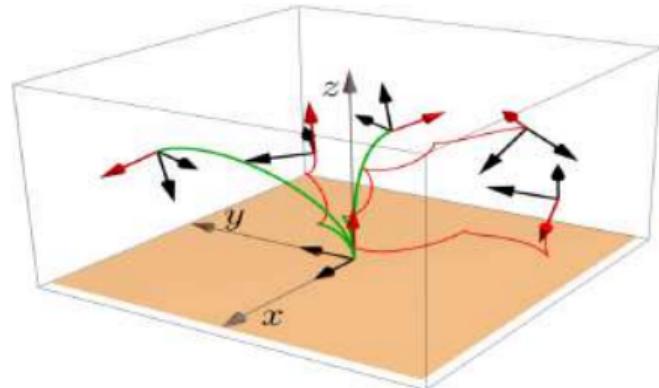
$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{n}_0, \mathbf{x}'(L) = \mathbf{n}_1 \in S^2,$$

$$E(\mathbf{x}) := \int_0^L \sqrt{\xi^2 + \kappa^2(s)} \, ds \rightarrow \min,$$

где $\kappa(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$.

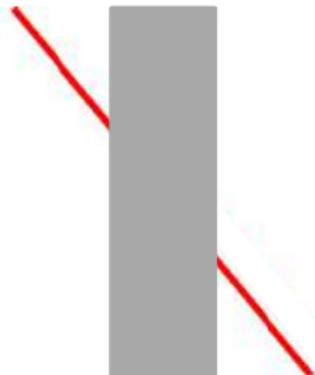


Задача трассировки нервных волокон на МРТ
снимках головного мозга человека



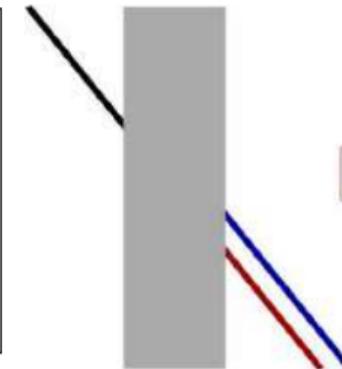
СР геодезические при $C=1$

Моделирование и объяснение зрительных иллюзий



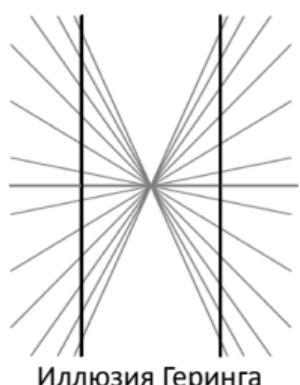
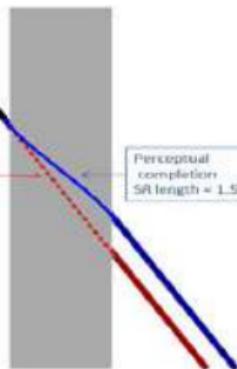
Иллюзия Поггендорфа

Идея: Иллюзорный контур создается зрительной системой, как геодезическая в СР метрике, индуцированной зрительным сигналом.

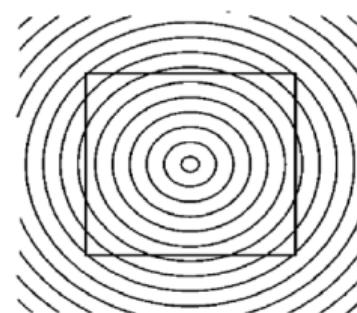
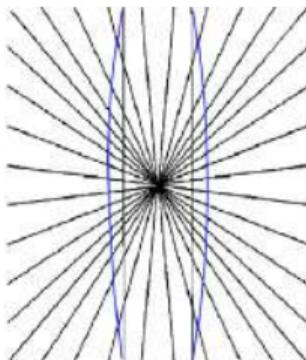


Geometrical confirmation
SR length = 1.7

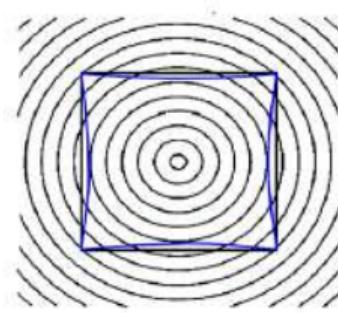
Perceptual completion
SR length = 1.5



Иллюзия Геринга



Иллюзия Орбисона



Литература

1. V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
2. R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Amer. Math. Soc., 2002
3. А.А.Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М: Физматлит, 2005. Перевод: A.A. Agrachev, Yu.L. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, Berlin Heidelberg New York Tokyo. Springer-Verlag. 2004
4. Ю.Л. Сачков, *Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах*, М: Физматлит, 2007.
5. A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge University Press, 2019.
6. Ю.Л. Сачков, *Введение в геометрическую теорию управления*, М: URSS, 2021. Перевод: Yu.L. Sachkov, *Introduction to geometric control*, Springer, 2022.
7. <http://control.botik.ru/> (веб-сайт ИЦПУ)