УДК 517.977

Алгебры Карно и субримановы структуры с вектором роста $(2,3,5,6)$[1]

Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
Переславль-Залесский

Аннотация

Описаны все алгебры Карно с вектором роста $(2,3,5,6)$, их нормальные формы, различающий их инвариант, и замена базиса, переводящая такую алгебру в нормальную форму. Для каждой нормальной формы вычислены функции Казимира и симплектические слоения на коалгебре Ли.

Описаны инвариант и нормальные формы левоинвариантных $(2,3,5,6)$-распределений. Получена классификация, с точностью до изометрий, всех левоинвариантных субримановых структур на $(2,3,5,6)$-группах Карно, приведены их модели.

Ключевые слова: субриманова геометрия, алгебры Карно, группы Карно, левоинвариантные субримановы структуры

1 Введение

Субримановы структуры [1] стратифицированы по глубине, т.е. по минимальному порядку скобок Ли, необходимому для порождения касательного пространства из векторных полей базиса. Сложность субримановых (СР) структур существенно растет с ростом их глубины. В настоящее время сколь-нибудь детально исследованы СР структуры глубины не более трех [2–8]. Поэтому представляет большой интерес систематическое исследование СР структур глубины 4. Изучение простейшей из таких структур — нильпотентной СР структуры с вектором роста $(2,3,5,8)$, см. далее пример 2, — начато в работах [9–11]. В данной работе получена полная классификация нильпотентных СР структур и распределений с вектором роста $(2,3,5,6)$. Показано, что все такие структуры суть фактор-структуры нильпотентной СР структуры с вектором роста $(2,3,5,8)$.

2 Субримановы фактор-структуры

Все алгебры Ли в данной работе рассматриваются над полем $\mathbb{R}$.

Определение 1. Нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Карно*, если:

(1) она градуирована:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(s)}, \\ &[\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(j)}] \subset \mathfrak{g}^{(i+j)}, \qquad \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\} \text{ при } k > s, \end{aligned} \tag{1}$$

(2) и порождена первой компонентой:

$$\operatorname{Lie}(\mathfrak{g}^{(1)}) = \mathfrak{g}. \tag{2}$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук

Соответствующая связная односвязная группа Ли называется *группой Карно.*

Условия (1) и (2) эквивалентны условию

$$[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(i)}] = \mathfrak{g}^{(i+1)}, \qquad \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\} \text{ при } k > s.$$

Определение 2. *Вектором роста* алгебры Карно $\mathfrak{g}$ называется вектор

$$(n_1, \ldots, n_s), \qquad n_j = \sum_{i=1}^{j} \dim \mathfrak{g}^{(i)}.$$

Вектор $(n_1, \ldots, n_s)$ есть вектор роста левоинвариантного распределения на группе Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденного подпространством $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{g}$.

Пусть M есть гладкое многообразие. *Субримманова структура* на M [1] есть пара (Δ, g), состоящая из векторного распределения $\Delta \subset TM$ и скалярного произведения g в Δ.

Пусть G — группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. *Левоинвариантная СР структура* на группе Ли G состоит из левоинвариантного распределения на G и левоинвариантного скалярного произведения в распределении. Такая структура задается подпространством $\Delta \subset \mathfrak{g}$ и скалярным произведением g в Δ. В этом случае будем говорить, что (Δ, g) есть *СР структура в алгебре* $\mathfrak{g}$.

Левоинвариантные СР структуры на группах Карно возникают как нильпотентные аппроксимации общих СР структур на гладких многообразиях [1].

Определение 3. Пусть (Δ, g) есть СР структура в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ есть такой идеал, что $\Delta \cap \mathfrak{i} = \{0\}$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ есть фактор-алгебра, а $\pi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ — каноническая проекция. Положим $\widetilde{\Delta} = \pi(\Delta)$ и $\widetilde{g}(\pi(X), \pi(Y)) = g(X, Y)$ для $X, Y \in \Delta$. Тогда $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$ есть СР структура в $\widetilde{\mathfrak{g}}$, которую будем называть *фактор-структурой* СР структуры (Δ, g).

Пример 1. Пусть $\mathfrak{g}^5$ есть свободная нильпотентная алгебра Ли с 2-мя образующими, глубины 3 (алгебра Картана) — это алгебра Карно с вектором роста $(2, 3, 5)$. Существует базис $\mathfrak{g}^5 = \operatorname{span}(X_1, \ldots, X_5)$, в котором ненулевые скобки Ли суть

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5.$$

Рассмотрим СР структуру (Δ, g) в $\mathfrak{g}^5$ с ортонормированным репером (X_1, X_2) [8]. Последовательно выбирая в качестве идеала $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}^5$ подпространства $\mathbb{R}X_5$, $\operatorname{span}(X_4, X_5)$, $\operatorname{span}(X_3, X_4, X_5)$, получим СР фактор-структуры в алгебре Энгеля (вектор роста $(2, 3, 4)$) [7], алгебре Гейзенберга (вектор роста $(2, 3)$) [2], и в двумерной коммутативной алгебре $\mathbb{R}^2$ (вектор роста (2)).

Пример 2. Пусть $\mathfrak{g}^8$ есть свободная нильпотентная алгебра Ли с 2-мя образующими, глубины 4 — это алгебра Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$, назовем ее *нильпотентной* $(2, 3, 5, 8)$*-алгеброй.* Существует базис $\mathfrak{g}^8 = \operatorname{span}(X_1, \ldots, X_8)$, в котором ненулевые скобки Ли суть

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \tag{3}$$

$$[X_1, X_4] = X_6, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_4] = X_7, \quad [X_2, X_5] = X_8. \tag{4}$$

Рассмотрим СР структуру (Δ, g) в $\mathfrak{g}^8$ с ортонормированным репером (X_1, X_2) [9–11]. Легко видеть, что эта СР структура — единственная, с точностью до автоморфизма алгебры Ли, СР структура в $\mathfrak{g}^8$ ранга 2, удовлетворяющая условию $\operatorname{Lie}(\Delta) = \mathfrak{g}^8$, назовем ее *нильпотентной СР* $(2, 3, 5, 8)$*-структурой.* Будем далее использовать двойственный базис в коалгебре Ли $(\mathfrak{g}^8)^*$:

$$\omega_1, \ldots, \omega_8 \in (\mathfrak{g}^8)^*, \qquad \omega_i(X_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, 8.$$

Цель данной работы — описать для структуры (Δ, g) все СР фактор-структуры для двумерных идеалов $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}^8$. Это в точности нильпотентные СР структуры с вектором роста $(2,3,5,6)$.

Легко видеть, что двумерное подпространство $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}^8$ есть идеал тогда и только тогда, когда $\mathfrak{i} \subset Z(\mathfrak{g}) = \operatorname{span}(X_6, X_7, X_8)$. Поэтому любая фактор-алгебра $\mathfrak{g}^8/\mathfrak{i}$ по двумерному идеалу $\mathfrak{i}$ есть алгебра Карно с вектором роста $(2,3,5,6)$. Опишем такие алгебры.

3 Алгебры Карно с вектором роста $(2,3,5,6)$

Теорема 1. (1) *В любой алгебре Карно $\mathfrak{g}$ с вектором роста $(2,3,5,6)$ можно выбрать базис $\mathfrak{g} = \operatorname{span}(Y_1, \dots, Y_6)$, в котором все ненулевые скобки Ли имеют вид:*

$$[Y_1, Y_2] = Y_3, \quad [Y_1, Y_3] = Y_4, \quad [Y_2, Y_3] = Y_5, \tag{5}$$

$$[Y_1, Y_4] = \alpha Y_6, \quad [Y_1, Y_5] = [Y_2, Y_4] = \beta Y_6, \quad [Y_2, Y_5] = \gamma Y_6, \tag{6}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

(2) *Любые две алгебры Карно с вектором роста $(2,3,5,6)$, имеющие пропорциональные тройки (α, β, γ) в (6), изоморфны между собой. Будем поэтому обозначать такие алгебры как $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$, $(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2$.*

(3) *Имеет место изоморфизм алгебр Ли*

$$\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma} \cong \mathfrak{g}^8/(\ker \omega \cap Z(\mathfrak{g}^8)), \qquad \omega = \alpha\,\omega_6 + \beta\,\omega_7 + \gamma\,\omega_8 \neq 0.$$

Доказательство. (1) Пусть $\mathfrak{g}$ есть алгебра Карно с вектором роста $(2,3,5,6)$. Выберем любой базис $\mathfrak{g}^{(1)} = \operatorname{span}(Y_1, Y_2)$ и положим

$$Y_3 = [Y_1, Y_2], \qquad Y_4 = [Y_1, Y_3], \qquad Y_5 = [Y_2, Y_3].$$

Выбирая любой вектор $0 \neq Y_6 \in \mathfrak{g}^{(4)}$, получим $[Y_i, Y_j] \in \mathfrak{g}^{(4)}$, $i = 1,2$, $j = 4,5$, что дает равенства (6).

Неравенство $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ следует из того, что $\mathfrak{g}^{(4)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(3)}] = \mathbb{R}Y_6$.

(2) следует из того, что при умножении Y_6 на ненулевой множитель вектор (α, β, γ) делится на этот множитель.

(3) Возьмем любую 1-форму $\omega = \alpha\,\omega_6 + \beta\,\omega_7 + \gamma\,\omega_8 \neq 0$ и обозначим идеал $\mathfrak{i} = \ker \omega \cap Z(\mathfrak{g}^8)$. Алгебра Карно $\mathfrak{g}^8/\mathfrak{i}$ имеет вектор роста $(2,3,5,6)$. Вычислим таблицу умножения в этой алгебре. Для любого вектора $X \in \mathfrak{g}^8$ будем обозначать смежный класс $\widetilde{X} = X + \mathfrak{i} \in \mathfrak{g}^8/\mathfrak{i}$. Тогда

$$\mathfrak{g}^8/\mathfrak{i} = \operatorname{span}(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_5, \widetilde{X}),$$

$$X = \frac{\alpha X_6 + \beta X_7 + \gamma X_8}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \in Z(\mathfrak{g}^8) \setminus \mathfrak{i},$$

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = \widetilde{X}_3, \quad [\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_3] = \widetilde{X}_4, \quad [\widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3] = \widetilde{X}_5,$$

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_4] = \widetilde{X}_6 = \alpha\widetilde{X}, \quad [\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_5] = [\widetilde{X}_2, \widetilde{X}_4] = \widetilde{X}_7 = \beta\widetilde{X}, \quad [\widetilde{X}_2, \widetilde{X}_5] = \widetilde{X}_8 = \gamma\widetilde{X},$$

т.е. $\mathfrak{g}^8/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$. □

Каждому базису в алгебре $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$ с таблицей умножения (5), (6) соответствует квадратичная форма $Q(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$. В зависимости от знака ее дискриминанта $\mathbf{s} = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma - \beta^2) \in \{0, \pm 1\}$ будем называть алгебру $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$:

- *параболической* при $\mathbf{s} = 0$,
- *эллиптической* при $\mathbf{s} = 1$,
- *гиперболической* при $\mathbf{s} = -1$.

Множество алгебр Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$ образует гладкое многообразие — проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$. Выясним, какие из них изоморфны между собой. Для этого сначала рассмотрим 3 примера таких алгебр. При этом будем пользоваться обозначениями $N_{6,2,*}$ этих алгебр из работ [12, 13]. В диссертации М.-П. Гонг [12] получена классификация нильпотентных алгебр Ли размерности $\leqslant 7$, а в препринте Э. Ле Донне и Ф. Трипальди [13] описаны все алгебры Карно размерности $\leqslant 7$. В примерах 3–5 приведены все ненулевые скобки Ли между базисными элементами соответствующих алгебр Ли.

Пример 3. Параболическая алгебра $\mathfrak{g}^6_{1:0:0} = N_{6,2,7} = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_6)$,

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5,$$
$$[X_1, X_4] = X_6.$$

Будем обозначать эту алгебру $\mathfrak{g}^6_p$.

Пример 4. Гиперболическая алгебра $\mathfrak{g}^6_{1:0:(-1)} = N_{6,2,5} = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_6)$,

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5,$$
$$[X_1, X_4] = -[X_2, X_5] = X_6.$$

Будем обозначать эту алгебру $\mathfrak{g}^6_h$.

Пример 5. Эллиптическая алгебра $\mathfrak{g}^6_{1:0:1} = N_{6,2,5a} = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_6)$,

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5,$$
$$[X_1, X_4] = [X_2, X_5] = X_6.$$

Будем обозначать эту алгебру $\mathfrak{g}^6_e$.

Теорема 2. (1) *Алгебры $\mathfrak{g}^6_p$, $\mathfrak{g}^6_h$, $\mathfrak{g}^6_e$ попарно неизоморфны. Любая алгебра $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$, $(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2$, изоморфна одной из этих алгебр.*

(2) *Число $\mathbf{s} = \mathrm{sgn}\,(\alpha\gamma - \beta^2) \in \{0, \pm 1\}$, есть инвариант алгебры Карно $\mathfrak{g}$, будем называть его* сигнатурой *алгебры $\mathfrak{g}$.*

(3) *Алгебры $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$ различаются сигнатурой $\mathbf{s}$:*

$$\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma} \cong \mathfrak{g}^6_p \iff \mathbf{s} = 0 \quad \textit{(параболическая алгебра)}, \tag{7}$$
$$\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma} \cong \mathfrak{g}^6_h \iff \mathbf{s} = -1 \quad \textit{(гиперболическая алгебра)}, \tag{8}$$
$$\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma} \cong \mathfrak{g}^6_e \iff \mathbf{s} = 1 \quad \textit{(эллиптическая алгебра)}. \tag{9}$$

Доказательство. В работе [13] Э. Ле Донне и Ф. Трипальди описали все алгебры Карно размерности $\leqslant 7$. Из их классификации следует, что существует 3 неизоморфные алгебры Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$: алгебры $\mathfrak{g}^6_p$, $\mathfrak{g}^6_h$, $\mathfrak{g}^6_e$. Остается понять, какой из этих трех алгебр изоморфна каждая алгебра $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$. Покажем, что $\mathbf{s} = \mathrm{sgn}\,(\alpha\gamma - \beta^2)$ не меняется при заменах базиса в $\mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$, отсюда будут следовать соотношения (7)–(9).

Итак, пусть $\mathfrak{g} = \operatorname{span}(X_1, \dots, X_6)$ есть базис, удовлетворяющий условиям (5), (6). Выберем другой базис в $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = aX_1 + bX_2 \mod \operatorname{span}(X_3, \dots X_6),\\
&Y_2 = cX_1 + dX_2 \mod \operatorname{span}(X_3, \dots X_6),\\
&\sigma = ad - bc \neq 0.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&Y_3 = [Y_1, Y_2] = \sigma X_3 \mod \operatorname{span}(X_4, \dots, X_6),\\
&Y_4 = [Y_1, Y_3] = \sigma a X_4 + \sigma b X_5 \mod \mathbb{R}X_6,\\
&Y_5 = [Y_2, Y_3] = \sigma c X_4 + \sigma d X_5 \mod \mathbb{R}X_6,\\
&[Y_1, Y_4] = \widetilde{\alpha} X_6, \quad [Y_1, Y_5] = [Y_2, Y_4] = \widetilde{\beta} X_6, \quad [Y_2, Y_5] = \widetilde{\gamma} X_6,\\
&\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} & \widetilde{\beta} \\ \widetilde{\beta} & \widetilde{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma} - \widetilde{\beta}^2 = \sigma^2(\alpha\gamma - \beta^2),$$

то есть $\mathbf{s} = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma - \beta^2)$ сохраняется при заменах базиса в γ, и соотношения (7)–(9) доказаны. $\square$

Замечание 1. *Для отыскания замены базиса в алгебре $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^6_{\alpha:\beta:\gamma}$, приводящей его к одной из нормальных форм примеров 3–5, достаточно привести квадратичную форму $Q(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ к сумме квадратов, применить эту замену к базису (X_1, X_2) пространства $\mathfrak{g}^{(1)}$, и нормировать вектор X_6, порождающий пространство $\mathfrak{g}^{(4)}$.*

Замечание 2. *Отметим топологию множеств отношений $(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2$, в зависимости от числа $\mathbf{s} = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma - \beta^2)$:*

$$\begin{aligned}
A_P &= \{(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2 \mid \mathbf{s} = 0\},\\
A_E &= \{(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2 \mid \mathbf{s} = 1\},\\
A_H &= \{(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{R}P^2 \mid \mathbf{s} = -1\}.
\end{aligned}$$

Топологически A_P есть окружность, A_E есть открытый диск, а $A_H = \mathbb{R}P^2 \setminus (A_P \cup A_E)$ есть проективная плоскость с вырезанной дыркой, т.е. лента Мебиуса.

4 Нильпотентные $(2, 3, 5, 6)$-распределения и субримановы структуры

Определение 4. Пусть $\mathfrak{g}$ есть алгебра Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$. Будем называть *нильпотентной субримановой* $(2, 3, 5, 6)$-*структурой* субриманову структуру (Δ, g) в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющую условиям:

$$\dim \Delta = 2, \qquad \operatorname{Lie}(\Delta) = \mathfrak{g}, \tag{10}$$

или, что эквивалентно, равенству $\Delta \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)} \oplus \mathfrak{g}^{(4)} = \mathfrak{g}$. Соответствующую плоскость $\Delta \subset \mathfrak{g}$ будем называть *нильпотентным* $(2, 3, 5, 6)$-*распределением* в $\mathfrak{g}$.

Вектор $(2, 3, 5, 6)$ есть вектор роста левоинвариантного распределения на группе Ли G алгебры Ли $\mathfrak{g}$, заданного плоскостью $\Delta \subset \mathfrak{g}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ есть алгебра Карно с вектором роста $(2,3,5,6)$. Для любой нильпотентной СР $(2,3,5,6)$-структуры в алгебре $\mathfrak{g}$ существует ортонормированный репер (X_1, X_2) и число $\rho \in [-1,1]$, для которых выполняются следующие соотношения:*

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \tag{11}$$

$$[X_1, X_4] = X_6, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_4] = 0, \quad [X_2, X_5] = \rho X_6. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть Y_1, Y_2 — любой ортонормированный репер рассматриваемой СР структуры. Вычислим соответствующую квадратичную форму $Q(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$. Линейные замены базиса

$$(Y_1, Y_2) \mapsto (CY_1, CY_2), \qquad C \in \mathrm{GL}(2),$$

действуют на матрицу этой квадратичной формы по правилу

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \mapsto \det(C) \cdot C \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} C^T.$$

Приводя квадратичную форму Q к главным осям ортогональной заменой $C \in \mathrm{O}(2)$, найдем ортонормированный репер СР структуры $(X_1, X_2) = (CY_1, CY_2)$, в котором квадратичная форма принимает вид

$$Q(x, y) = \lambda x^2 + \mu y^2, \qquad \{\lambda, \mu\} = \mathrm{Sp}(Q).$$

Гомотетия $X_6 \mapsto kX_6$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, порождает преобразование

$$(\lambda, \mu) \mapsto (\lambda/k, \mu/k). \tag{13}$$

А отражение $(X_1, X_2) \mapsto (X_2, X_1)$ порождает преобразование $(\lambda, \mu) \mapsto (-\mu, -\lambda)$. Комбинируя его с преобразованием (13) для $k = -1$, получаем преобразование $(\lambda, \mu) \mapsto (\mu, \lambda)$. Таким образом можно получить $|\lambda| \geqslant |\mu|$, $\lambda \neq 0$. Применяя преобразование (13) для $k = 1/\lambda$, получим преобразование $(\lambda, \mu) \mapsto (1, \rho)$, где $\rho = \mu/\lambda \in [-1, 1]$. Тогда получим квадратичную форму $Q(x, y) = x^2 + \rho y^2$, т.е. таблицу умножения (11), (12). □

Будем называть число $\rho \in [-1, 1]$ из равенств (12) *каноническим параметром* СР структуры (Δ, g). Легко видеть, что ρ равно отношению меньшего по модулю собственного значения квадратичной формы Q к большему собственному значению. Более того, $\mathbf{s} = \operatorname{sgn} \rho$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ есть алгебра Карно с вектором роста $(2,3,5,6)$ сигнатуры $\mathbf{s} \in \{0, \pm 1\}$. Для любого нильпотентного $(2,3,5,6)$-распределения $\Delta \subset \mathfrak{g}$ существует репер $\Delta = \mathrm{span}(X_1, X_2)$, для которого выполняются следующие соотношения:*

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \tag{14}$$

$$[X_1, X_4] = X_6, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_4] = 0, \quad [X_2, X_5] = \mathbf{s}\, X_6. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $\Delta \subset \mathfrak{g}$ есть нильпотентное $(2,3,5,6)$-распределение. Выберем любой базис $\Delta = \mathrm{span}(Y_1, Y_2)$ и рассмотрим СР $(2,3,5,6)$-структуру с ортонормированным репером (Y_1, Y_2). Согласно теореме 3, для этой структуры существует ортонормированный репер $\Delta = \mathrm{span}(Z_1, Z_2)$, порождающий репер $\mathfrak{g} = \mathrm{span}(Z_1, \dots, Z_6)$ с таблицей умножения, подобной (11), (12).

Если $\rho = 0$, то получаем требуемую таблицу умножения (14), (15). Если $\rho \neq 0$, то эта таблица получается после выбора базиса $\Delta = \mathrm{span}(X_1, X_2)$, $X_1 = Z_1$, $X_2 = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} Z_2$. □

Определение 5. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}$ суть алгебры Ли, а (Δ, g) и $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$ суть СР структуры в $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что СР структуры (Δ, g) и $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$ изоморфны, если существует такой изоморфизм алгебр Ли $f : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$, что $\widetilde{\Delta} = f(\Delta)$ и $\widetilde{g}(f(x), f(y)) = g(x, y)$ для всех $x, y \in \Delta$.

Обозначение: $(\Delta, g) \cong (\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$.

Покажем, что канонический параметр $\rho \in [-1,1]$ есть инвариант нильпотентной СР $(2,3,5,6)$-структуры, с точностью до изоморфизма.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}$ суть $(2,3,5,6)$-алгебры Ли, (Δ, g) и $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$ суть СР $(2,3,5,6)$-структуры в $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}$ соответственно, а $\rho, \widetilde{\rho} \in [-1,1]$ — соответствующие канонические параметры. Тогда*

$$(\Delta, g) \cong (\widetilde{\Delta}, \widetilde{g}) \iff \rho = \widetilde{\rho}. \tag{16}$$

Доказательство. Достаточность в (16) очевидна, докажем необходимость. Пусть $(\Delta, g) \cong (\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$, и пусть $f : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ есть изоморфизм алгебр Ли, переводящий (Δ, g) в $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$ согласно определению 5. Пусть (X_1, X_2) и $(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2)$ — ортонормированные реперы СР структур (Δ, g) в $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$, удовлетворяющие утверждению теоремы 3, с соответствующими каноническими параметрами $\rho, \widetilde{\rho} \in [-1,1]$. Тогда $(f(X_1), f(X_2))$ — ортонормированный репер СР структуры $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$, наряду с $(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2)$. Поэтому существует угол $\varphi \in [0, 2\pi]$, для которого

$$f(X_1) = \pm c\widetilde{X}_1 \pm s\widetilde{X}_2, \quad f(X_2) = -s\widetilde{X}_1 + c\widetilde{X}_2, \qquad c = \cos\varphi, \quad s = \sin\varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&f(X_3) = [f(X_1), f(X_2)] = \pm\widetilde{X}_3,\\
&f(X_4) = [f(X_1), f(X_3)] = c\widetilde{X}_4 + s\widetilde{X}_5,\\
&f(X_5) = [f(X_2), f(X_3)] = \mp s\widetilde{X}_4 \pm c\widetilde{X}_5,\\
&f(X_6) = a\widetilde{X}_6, \quad a \neq 0,\\
&[f(X_1), f(X_4)] = [\pm c\widetilde{X}_1 \pm s\widetilde{X}_2, c\widetilde{X}_4 + s\widetilde{X}_5] = \pm(c^2 + s^2\widetilde{\rho})\widetilde{X}_6 = f(X_6),\\
&[f(X_1), f(X_5)] = [\pm c\widetilde{X}_1 \pm s\widetilde{X}_2, \mp s\widetilde{X}_4 \pm c\widetilde{X}_5] = (-cs + cs\widetilde{\rho})\widetilde{X}_6 = 0,\\
&[f(X_2), f(X_5)] = [-s\widetilde{X}_1 + c\widetilde{X}_2, \mp s\widetilde{X}_4 \pm c\widetilde{X}_5] = \pm(s^2 + c^2\widetilde{\rho})\widetilde{X}_6 = \rho f(X_6).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
&cs(1 - \widetilde{\rho}) = 0,\\
&c^2\widetilde{\rho} + s^2 = \rho(s^2\widetilde{\rho} + c^2).
\end{aligned}$$

Учитывая включение $\rho, \widetilde{\rho} \in [-1,1]$, получаем $\rho = \widetilde{\rho}$. □

5 Изометрии

Пусть (Δ, g) есть СР структура на многообразии M. Соответствующее СР расстояние d [1] превращает M в метрическое пространство. Напомним, что *изометрия* между метрическими пространствами (M, d) и $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ — это такое отображение $F : M \to \widetilde{M}$, что

$$d(x, y) = \widetilde{d}(F(x), F(y)), \qquad x,\ y \in M.$$

Метрической группой [15] называется группа Ли с левоинвариантным расстоянием, индуцирующим топологию многообразия на этой группе. В частности, любая группа Карно (со скалярным произведением в первом слое ее алгебры Карно) есть метрическая группа. В работе В. Кивиоя и Э. Ле Донне [15] доказана следующая

Теорема 6. (1) *Любая изометрия между метрическими группами есть аналитическое отображение.*

(2) *Любая изометрия между связными нильпотентными метрическими группами есть аффинное отображение (т.е. композиция левого сдвига и изоморфизма).*

В следующей теореме получена классификация левоинвариантных СР $(2,3,5,6)$-структур с точностью до изометрий соответствующих групп Карно.

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}$ — нильпотентные $(2,3,5,6)$-алгебры Карно, и пусть G и $\widetilde{G}$ — соответствующие группы Карно. Пусть (Δ, g) и $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$ — нильпотентные СР $(2,3,5,6)$-структуры в $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}$; ρ и $\widetilde{\rho}$ — соответствующие канонические параметры, а d и $\widetilde{d}$ — соответствующие левоинвариантные СР метрики на G и $\widetilde{G}$.*

Метрические пространства (G, d) и $(\widetilde{G}, \widetilde{d})$ изометричны тогда и только тогда, когда $\rho = \widetilde{\rho}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\rho = \widetilde{\rho}$. Обозначим через $(X_1, \dots, X_6)$ и $(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_6)$ реперы в $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}$, соответствующие СР структурам (Δ, g) и $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$, удовлетворяющие утверждению теоремы 3. Тогда изоморфизм алгебр Ли

$$f \, : \, \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}, \qquad X_i \mapsto \widetilde{X}_i, \quad i = 1, \dots, 6,$$

продолжается до изоморфизма групп Ли $F \, : \, G \to \widetilde{G}$. Очевидно, что $F \, : \, (G, d) \to (\widetilde{G}, \widetilde{d})$ есть изометрия.

Необходимость. Пусть существует изометрия $F \, : \, (G, d) \to (\widetilde{G}, \widetilde{d})$. Согласно теореме 6, отображение F аналитическое и аффинное, т.е. существуют элемент $x \in \widetilde{G}$ и изоморфизм $\Phi \, : \, G \to \widetilde{G}$ такие, что $F = L_x \circ \Phi$, где $L_x \, : \, \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ есть левый сдвиг на элемент x.

Рассмотрим сначала случай, когда $x = \widetilde{\mathrm{Id}}$ есть единичный элемент группы $\widetilde{G}$, тогда $F = \Phi \, : \, G \to \widetilde{G}$ есть изоморфизм групп Ли, а его дифференциал $f = F_{*\,\mathrm{Id}} \, : \, \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ есть изоморфизм алгебр Ли. Пусть $(X_1, \dots, X_6)$ есть базис в $\mathfrak{g}$ для СР структуры (Δ, g), удовлетворяющий теореме 3, с каноническим параметром ρ. Положим $\widetilde{X}_i = f(X_i)$, $i = 1, \dots, 6$. Тогда $(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_6)$ есть базис в $\widetilde{\mathfrak{g}}$ для СР структуры $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$, удовлетворяющий теореме 3, с тем же каноническим параметром ρ.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $x = F(\mathrm{Id}) \in \widetilde{G}$ и $\Phi = L_{x^{-1}} \circ F$ есть изометрия между (G, d) и $(\widetilde{G}, \widetilde{d})$, причем $\Phi(\mathrm{Id}) = \widetilde{\mathrm{Id}}$. Тогда, как показано в предыдущем абзаце, СР структуры (Δ, g) и $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{\mathfrak{g}})$ имеют один и тот же канонический параметр ρ. $\square$

6 Субримановы $(2,3,5,6)$-структуры как факторы $(2,3,5,8)$-структуры, и их модели

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^8$ есть $(2,3,5,8)$-алгебра из примера 2 с базисом $(X_1, \dots, X_8)$ согласно (3), (4), и пусть (Δ, g) есть СР структура в $\mathfrak{g}$ с ортонормированным репером (X_1, X_2). Пусть $\mathfrak{i} = \ker \omega \cap Z(\mathfrak{g})$, $\omega = \alpha\omega_6 + \beta\omega_7 + \gamma\omega_8 \neq 0$, есть любое 2-мерное подпространство в $Z(\mathfrak{g})$, и пусть $\mathbf{s} = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma - \beta^2)$. Тогда СР фактор-структура $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{g})$ есть одна из СР $(2,3,5,6)$-структур в $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$:*

(1) *в параболическом случае $\mathbf{s} = 0$ выполнено $\widetilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}^6_p$,*

(2) *в гиперболическом случае $\mathbf{s} = -1$ выполнено $\widetilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}^6_h$,*

(3) *в эллиптическом случае $\mathbf{s} = 1$ выполнено $\widetilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}^6_e$.*

Обратно, любая нильпотентная $(2,3,5,6)$-структура в каждой из этих алгебр реализуется как фактор-структура нильпотентной $(2,3,5,8)$-структуры (Δ, g).

Доказательство. При выполнении условий этой теоремы $\widetilde{\mathfrak{g}}$ есть алгебра Карно с вектором роста $(2,3,5,6)$, которые классифицируются согласно теореме 2 в зависимости от значения $\mathbf{s}$. Это доказывает прямое утверждение теоремы.

Обратно: при $\mathbf{s}=0$ в алгебре $\mathfrak{g}_p^6$ существует единственная СР структура, согласно теореме 3. При $\mathbf{s}=-1$ ($\mathbf{s}=1$) любая СР структура в $\mathfrak{g}_{0:1:0}^6$ ($\mathfrak{g}_e^6$) реализуется как фактор-структура структуры (Δ, g) так как канонический параметр ρ принимает все значения в соответствующем интервале $(-1,0)$ (соотв. $(0,1)$). □

Замечание 3. *Модели СР $(2,3,5,6)$-структур с помощью ортонормированных реперов X_1, X_2 на соответствующих группах Карно $G \cong \mathbb{R}^6_{x_1,\dots,x_6}$ даются следующим векторными полями:*

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_5} - \rho\,\frac{x_2^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_6},\\
&X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_6},\\
&\rho \in [-1,1].
\end{aligned}
$$

Непосредственное вычисление последовательных коммутаторов этих векторных полей дает таблицу умножения (11), (12).

Замечание 4. *В работе Н. Боизо и Ж.-П. Готье [14] рассмотрена СР структура в эллиптической алгебре $\mathfrak{g}_e^6$ с каноническим параметром $\rho=1$. Доказано, что для этой структуры вертикальная подсистема гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина [1] интегрируема по Лиувиллю. В работе [11] эта гамильтонова система проинтегрирована.*

7 Функции Казимира и симплектические слоения

Напомним некоторые базовые понятия симплектической геометрии [16]. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^*$ — коалгебра Ли (двойственное пространство к $\mathfrak{g}$). Любая функция $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ называется *гамильтонианом.* Для любых гамильтонианов f, g определена *скобка Пуассона*

$$\{f,g\}(\lambda) = \langle \lambda, [df_\lambda, dg_\lambda] \rangle, \qquad \lambda \in \mathfrak{g}^*.$$

Функцией Казимира (на подмногообразии $M \subset \mathfrak{g}^*$) называется любой гамильтониан f, коммутирующий в смысле скобки Пуассона со всеми гамильтонианами:

$$\{f,h\}(\lambda) = 0, \qquad h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*), \quad \lambda \in \mathfrak{g}^* \quad (\text{соотв. } \lambda \in M).$$

Симплектическим слоением на $\mathfrak{g}^*$ называется разбиение $\mathfrak{g}^*$ на *симплектические листы* $L(\lambda)$ — орбиты коприсоединенного действия группы Ли G алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в коалгебре $\mathfrak{g}^*$:

$$L(\lambda) = \left\{ (\mathrm{Ad}_x^*)(\lambda) \mid x \in G \right\}, \qquad \lambda \in \mathfrak{g}^*.$$

Рангом скобки Пуассона $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ в точке $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ называется размерность симплектического листа, проходящего через точку λ, обозначение: $\operatorname{rank}(\lambda)$. Симплектические листы и функции Казимира — инварианты гамильтонова векторного поля

$$\dot\lambda = \vec{h}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathfrak{g}^*,$$

для любого гамильтониана h, поэтому они важны для анализа левоинвариантных гамильтонианов на группе Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, в частности, для исследования левоинвариантных задач оптимального управления на этой группе Ли.

Опишем для коалгебр $\mathfrak{g}^*$ всех алгебр Карно $\mathfrak{g}$ с вектором роста $(2,3,5,6)$ их функции Казимира и симплектические слоения. В каждой из алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p^6$, $\mathfrak{g}_h^6$, $\mathfrak{g}_e^6$ будем использовать канонический базис $\mathfrak{g} = \operatorname{span}(X_1, \dots, X_6)$ согласно примерам 3–5, а также соответствующие линейные гамильтонианы $h_1, \dots, h_6 \in \mathfrak{g}^{**}$, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$. В каждом случае ниже симплектический лист $L(\lambda)$ есть компонента связности совместных поверхностей уровня функций Казимира на соответствующих подмногообразиях в $\mathfrak{g}^*$. Эти результаты следуют непосредственно из таблиц умножения в алгебрах Ли примеров 3–5.

7.1 Параболическая алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p^6$

(1) Если $h_5 h_6 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 4$.
Функции Казимира: h_5, h_6.

(2) Если $h_6 = 0$ и $h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 2$.
Функции Казимира: h_4, h_5, $\frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4$.

(3) Если $h_5 = 0$ и $h_3^2 + h_4^2 + h_6^2 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 2$.
Функции Казимира: h_6, $C_1 = h_3 h_6 - \frac{h_4^2}{2}$, $C_2 = h_2 h_6^2 - C_1 h_4 - \frac{h_4^3}{6}$.

(4) Если $h_3 = \dots = h_6 = 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 0$.
Функции Казимира: h_1, h_2.

7.2 Гиперболическая алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_h^6$

(1) Если $h_6 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 4$.
Функции Казимира: h_6, $h_3 h_6 + \frac{h_4^2 - h_5^2}{2}$.

(2) Если $h_6 = 0$ и $h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 2$.
Функции Казимира: h_4, h_5, $\frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4$.

(3) Если $h_3 = \dots = h_6 = 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 0$.
Функции Казимира: h_1, h_2.

7.3 Эллиптическая алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_e^6$

(1) Если $h_6 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 4$.
Функции Казимира: h_6, $h_3 h_6 - \frac{h_4^2 + h_5^2}{2}$.

(2) Если $h_6 = 0$ и $h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 2$.
Функции Казимира: h_4, h_5, $\frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4$.

(3) Если $h_3 = \dots = h_6 = 0$, то $\operatorname{rank}(\lambda) = 0$.
Функции Казимира: h_1, h_2.

8 Заключение

В работе получены следующие результаты.

Описаны алгебры Карно с вектором роста $(2,3,5,6)$ — фактор-алгебры свободной нильпотентной алгебры Карно $\mathfrak{g}^8$ с двумя образующими, глубины 4. Ранее было известно, что существуют три нормальные формы таких алгебр — параболическая, гиперболическая, и эллиптическая. Отыскан различающий эти алгебры инвариант — сигнатура $\mathbf{s} \in \{0, \pm 1\}$, и описана замена базиса, приводящая таблицу умножения в нем к одной из трех нормальных форм.

Исследованы левоинвариантные субримановы структуры с вектором роста $(2,3,5,6)$ — фактор-структуры (единственной) субримановой структуры с вектором роста $(2,3,5,8)$ по двумерному подпространству центра алгебры $\mathfrak{g}^8$. Получена классификация $(2,3,5,6)$-структур с точностью до изометрий: все они однозначно параметризуются каноническим параметром $\rho \in \{0, \pm 1\}$, таким что $\mathbf{s} = \operatorname{sgn} \rho$. Также получена классификация левоинвариантных $(2,3,5,6)$-распределений: в каждой из $(2,3,5,6)$-алгебр (параболической, гиперболической, эллиптической) существует единственное такое распределение, с точностью до изоморфизма.

Для каждой алгебры Карно $\mathfrak{g}$ с вектором роста $(2,3,5,6)$ вычислены ранг скобки Пуассона, функции Казимира и симплектическое слоение в коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$.

Благодарность

Авторы благодарны Л.В.Локуциевскому за ценные замечания по содержанию работы.

Список литературы

[1] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge University Press, 2019.

[2] Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи.* Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16, ВИНИТИ, Москва, 1987, 5–85.

[3] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли, *Сибирский математический журнал*, 42:4 (2001), 731–748

[4] U. Boscain, F. Rossi, Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and Lens Spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization* **47** (2008) 1851–1878.

[5] Yu.L. Sachkov, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV* **17** (2011) 293–321.

[6] Y.A. Butt, Yu.L. Sachkov, A.I. Bhatti, Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group SH(2), *JDCS* **23** (2017) 155–195.

[7] A.A. Ardentov, Yu. L. Sachkov, Maxwell Strata and Cut Locus in the Sub-Riemannian Problem on the Engel Group, Regular and Chaotic Dynamics, December 2017, Vol. 22, Issue 8, pp 909–936.

[8] Сачков Ю.Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, N 6, С. 111–160.

[9] Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф., Вырожденные анормальные траектории в субримановой задаче с вектором роста $(2,3,5,8)$, *Дифференциальные уравнения*, 2017, том 53, № 3, с. 362–374.

[10] Ю.Л. Сачков, Е.Ф. Сачкова, Структура анормальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8), *Мат. сборник*, 211 (2020), No. 10, 112—138.

[11] Л. В. Локуциевский, Ю. Л. Сачков, Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше, *Матем. сб.*, 209:5 (2018), 74–119

[12] Ming-Peng Gong, *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$)*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1998, Thesis (Ph.D.)– University of Waterloo (Canada).

[13] E. Le Donne, F. Tripaldi, A cornucopia of Carnot groups in low dimensions, arXiv:2008.12356.

[14] N. Boizot, J.-P. Gauthier, On the motion planning of the ball with a trailer, *Math. Control Relat. Fields*, 3:3 (2013), 269–286.

[15] V. Kivioja, E. Le Donne, Isometries of nilpotent metric groups, *Journal de l'École polytechnique - Mathématiques*, 4 (2017), 473–482.

[16] A. A. Kirillov, *Lectures on the Orbit Method*, AMS, 2004