Процессы управления

УДК 517.977

СУБРИМАНОВА СФЕРА ЭНГЕЛЯ

© Ю. Л. Сачков[1,*]**, А. Ю. Попов**[1,2,*]
[1] *Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики*
[*] *E-mail: yusachkov@gmail.com*
Поступило 19.07.2021 г.

Аннотация. Описана структура пересечения субримановой сферы на группе Энгеля с двумерным инвариантным множеством дискретных симметрий: регулярность, аналитические свойства, принадлежность exp-log категории, стратификация Уитни, кратность точек, характеризация в смысле анормальных траекторий, сопряженных точек и точек Максвелла, явные выражения субриманова расстояния до особых точек.

Ключевые слова: группа Энгеля, субриманова геометрия, субриманова сфера.

Описание метрики Карно-Каратеодори и субримановых сфер является одним из центральных вопросов субримановой геометрии [1,2]. Известно лишь несколько субримановых геометрий, в которых явно описаны сферы: группа Гейзенберга [3], плоский случай Мартине [4], осесимметричные субримановы структуры на группах SO(3) и SL(2) [5,6], субримановы структуры на группах SE(2) [7] и SH(2) [8]. Все эти структуры заданы на 3-мерных многообразиях и все, кроме случая Мартине, являются контактными левоинвариантными структурами с вектором роста $(2, 3)$, потому двухступенными. Первое описание трехступенной субримановой структуры — на группе Энгеля — получено в работе [9]. На основе этих результатов, в данной работе мы получаем подробное описание субримановой сферы на группе Энгеля (ее сечения двумерным инвариантным многообразием группы симметрий).

1 Группа Энгеля

Алгебра Энгеля — это нильпотентная 4-мерная алгебра Ли, в которой существует базис $\mathfrak{g} = \operatorname{span}(X_1, \dots, X_4)$, в котором таблица умножения имеет вид

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr] \arrow[dd] & & X_2 \arrow[dl] \\
& X_3 \arrow[dl] & \\
X_4 & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = X_3,\\
&[X_1, X_3] = X_4,\\
&[X_2, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_4] = 0.
\end{aligned}
$$

Группа Энгеля G есть связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Ее линейное представление есть

$$
G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}.
$$

Мы будем использовать модель $G \cong \mathbb{R}^4_{x,y,z,v}$, в которой левоинвариантный репер имеет вид

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z},\\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2}\frac{\partial}{\partial v},\\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial v},\\
X_4 &= [X_1, X_3] = \frac{\partial}{\partial v},
\end{aligned}
$$

как в работе [9]. Наряду с переменной v, будем использовать переменную $w = v - y^3/6$.

2 Постановка и особенности субримановой задачи на группе Энгеля

Рассмотрим *левоинвариантную субриманову структуру* на группе Энгеля G с ортонормированным репером X_1, X_2:

$$\Delta = \operatorname{span}(X_1, X_2), \qquad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Выходящие из единицы группы субримановы кратчайшие для этой структуры суть решения задачи оптимального управления

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad q \in G, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$q(0) = \mathrm{Id}, \quad q(t_1) = q_1, \tag{2}$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min. \tag{3}$$

Эта задача имеет ряд важных особенностей:

- это простейшая субриманова задача глубины 3 (вектор роста $(2, 3, 4)$),
- это простейшая левоинвариантная субриманова задача с нетривиальными анормальными геодезическими (кратчайшими),
- эта задача проецируется в субриманову задачу в плоском случае Мартине (вектор роста $(2, 2, 3)$),
- эта задача вкладывается в любую левоинвариантную субриманову задачу с вектором роста больше $(2, 3, 4)$, например, в задачу на группе Картана (вектор роста $(2, 3, 5)$), задачи с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$, $(2, 3, 5, 8)$, $(2, 3, 4, 5)$, $\dots$.

3 Ранее полученные результаты

В работе [9], а также в более ранних статьях, цитированных в этой работе, получены следующие результаты для задачи (1)–(3).

- Система вполне управляема.
- Оптимальное управление существует.
- Описаны анормальные траектории:
  - это однопараметрические подгруппы $e^{\pm t X_2}$,
  - они проецируются на плоскость (x, y) в прямые,
  - поэтому они оптимальны,
  - они нестрого анормальны.
- Нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина с гамильтонианом $H(\lambda) = (\langle \lambda, X_1 \rangle^2 + \langle \lambda, X_2 \rangle^2)/2$:

$$\dot{\theta} = c, \tag{4}$$

$$\dot{c} = -\alpha \sin\theta, \tag{5}$$

$$\dot{\alpha} = 0,$$

$$\dot{q} = -\sin\theta\, X_1 + \cos\theta\, X_2.$$

- В фазовом цилиндре уравнения маятника (4), (5) введены координаты (φ, k), в которых это уравнение выпрямляется:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{|\alpha|}, \qquad \dot{k} = 0.$$

- Получена параметризация экспоненциального отображения эллиптическими функциями Якоби:

$$\mathrm{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \to G, \qquad \mathrm{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = q(t),$$
$$C = \mathfrak{g}^* \cap H^{-1}(1/2).$$

- Описана дискретная группа симметрий экспоненциального отображения

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\varepsilon^i \mid i = 1, \dots, 8\},$$

  она порождена отражениями ε^1, ε^2 маятника в осях θ, c и отражением ε^4: $(\theta, \alpha) \mapsto (\theta + \pi, -\alpha)$.

- Найдены соответствующие времена Максвелла вдоль геодезических.
- Доказано, что время разреза есть первое время Максвелла, соответствующее отражениям, получено его явное выражение
$$t_{\text{cut}} : C \to (0, +\infty].$$
- Построен оптимальный синтез.
- Описано множество разреза.

4 Субримановы расстояние и сферы

Напомним основные определения и свойства субримановой метрики и сфер.

Субриманово расстояние (*метрика Карно-Каратеодори*) определяется следующим образом:

$$d(q_0, q_1) = \inf \left\{ \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \mid \text{ управление } (u_1, u_2)(t) \text{ переводит } q_0 \text{ в } q_1 \right\}.$$

Субриманова сфера радиуса R с центром q_0 есть

$$S_R(q_0) = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}.$$

В силу инвариантности метрики относительно левых сдвигов на группе Энгеля $L_q : q' \mapsto qq'$,

$$\begin{aligned} &d(qq_0, qq_1) = d(q_0, q_1), \\ &L_q(S_R(q_0)) = S_R(qq_0). \end{aligned}$$

В силу того, что группа Энгеля есть группа Карно, левоинвариантная субриманова структура согласована с *дилатациями*:

$$\begin{aligned} &\delta_\beta : (x, y, z, w) \mapsto (\beta x, \beta y, \beta^2 z, \beta^3 w), \qquad \beta > 0, \\ &d(\mathrm{Id}, \delta_\beta(q)) = \beta d(\mathrm{Id}, q), \\ &\delta_\beta(S_R(\mathrm{Id})) = S_{\beta R}(\mathrm{Id}). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно исследовать единичную сферу

$$S = S_1(\mathrm{Id}) = \{q \in G \mid d(q, \mathrm{Id}) = 1\}.$$

Ранее получена параметризация единичной сферы S экспоненциальным отображением:

$$S = \{\mathrm{Exp}(\lambda, 1) \mid \lambda \in C,\ t_{\text{cut}}(\lambda) \geqslant 1\}.$$

Субриманова структура и сфера имеют дискретные симметрии:

$$\varepsilon^i(S) = S, \qquad i = 1, \ldots, 8.$$

Основной объект этой работы — сечение сферы двумерным инвариантным многообразием основных симметрий ε^1, ε^2:

$$\widetilde{S} = \{q \in S \mid \varepsilon^1(q) = \varepsilon^2(q) = q\} = S \cap \{x = z = 0\}.$$

Обозначим подмножества, на которые распадается сечение $\widetilde{S}$, см. Рис. 1:

$$\begin{aligned} &A_\pm = \widetilde{S} \cap \{w = 0,\ \operatorname{sgn} y = \pm 1\}, \\ &C_\pm = \widetilde{S} \cap \{y = 0,\ \operatorname{sgn} w = \pm 1\}, \\ &\gamma_1 = \widetilde{S} \cap \{y < 0,\ w > 0\}, \\ &\gamma_2 = \widetilde{S} \cap \{y > 0,\ w > 0\}, \\ &\gamma_3 = \widetilde{S} \cap \{y > 0,\ w < 0\}, \\ &\gamma_4 = \widetilde{S} \cap \{y < 0,\ w < 0\}, \\ &\widetilde{S} = A_+ \sqcup A_- \sqcup C_+ \sqcup C_- \sqcup \left(\sqcup_{i=1}^4 \gamma_i\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Имеются следующие симметрии между этими подмножествами:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4(\gamma_i) = \gamma_{i+2}, \qquad i = 1, 2, \\ &\varepsilon^4(A_+) = A_-, \qquad \varepsilon^4(C_+) = C_-. \end{aligned}$$

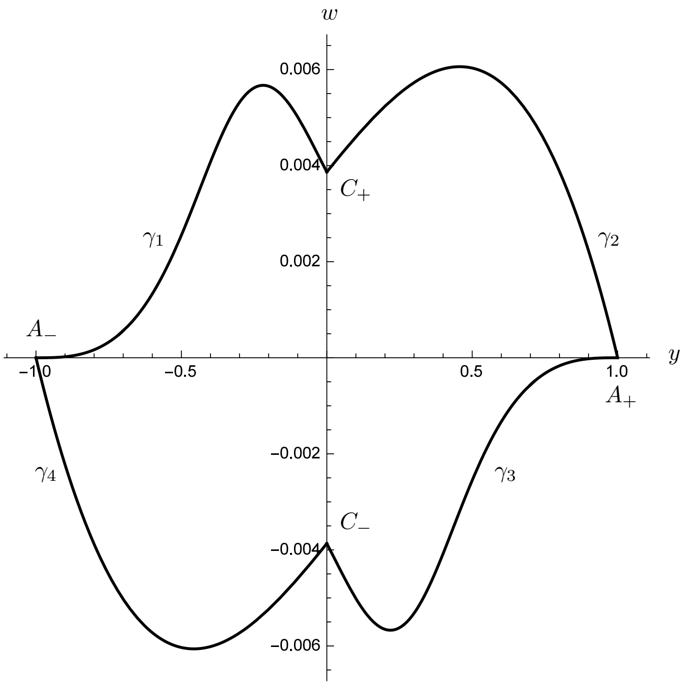

Рис. 1: Сечение сферы $\widetilde{S}$

5 Кратность точек сечения $\widetilde{S}$

Кратностью точки $q \in G$ называется величина

$$\mu(q) = \operatorname{card}\{\text{кратчайшие, соединяющие Id и } q\}.$$

Теорема 1. (1) $\mu(A_\pm) = 1$,

(2) $\mu(C_\pm) = \mathfrak{c}$ *(континуум* $\cong S^1$*)*,

(3) $q \in \gamma_i \quad \Rightarrow \quad \mu(q) = 2$.

6 Характеризация точек сечения $\widetilde{S}$

Теорема 2. (1) $A_\pm$ *суть точки на анормальных кратчайших,*

(2) $C_\pm$ *суть сопряженные точки, точки Максвелла, точки разреза, центральные элементы группы Энгеля,*

(3) $q \in \gamma_i$ *суть точки Максвелла, точки разреза.*

7 Явные выражения для субриманова расстояния до некоторых точек группы Энгеля

Теорема 3. (1) *Если* $q(t) = e^{\pm t X_2}$, $x = z = w = 0$, $y = \pm t$ *есть точка анормальной кратчайшей, то*

$$d(\mathrm{Id}, q(t)) = t.$$

(2) *Если* $q(t) = e^{\pm t X_4}$, $x = y = z = 0$, $w = \pm t$ *есть центральный элемент группы, то*

$$d(\mathrm{Id}, q(t)) = C\sqrt[3]{t},$$
$$C = \sqrt[3]{48K^2(k_0)} \approx 6{,}37, \qquad K(k_0) - 2E(k_0) = 0, \quad k_0 \approx 0{,}91.$$

8 Регулярность сечения $\widetilde{S}$

Теорема 4. (1) *кривые* γ_i *аналитичны и регулярны,*

(2) $A_\pm$, $C_\pm$ *суть особые точки, в них* $\widetilde{S}$ *негладкая, но липшицева,*

(3) $\overline{\gamma}_2 = \gamma_2 \cup \{C_+, A_+\}$ *гладкая класса* C^∞,

(4) $\gamma_1 \cup \{C_+\}$ *гладкая класса* C^∞,

(5) $\gamma_1 \cup \{A_-\}$ *гладкая класса* C^1.

9 Аналитические свойства $\widetilde{S}$

Множество называется *аналитическим*, если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений. Множество называется *полуаналитическим*, если в некоторой окрестности каждой своей точки оно задается конечной системой вещественно-аналитических уравнений и неравенств. Множество называется *субаналитическим*, если его можно получить из полуаналитических множеств путем конечнократного применения операций объединения, пересечения и взятия образа собственного аналитического отображения. На двумерной плоскости понятия полуаналитических и субаналитических множеств совпадают.

Несубаналитичность субримановых сфер тесно связана с наличием анормальных кратчайших. А.А. Аграчев [11] доказал субаналитичность сфер для субримановых структур без анормальных кратчайших и для многих структур без строго анормальных кратчайших. Позже А.А. Аграчев и А.В. Сарычев [12] показали, что для 2-порождающих субримановых структур (для которых нет анормальных кратчайших) сферы субаналитичны. Известно также, что для плоской субримановой структуры в случае Мартине [4] и для некоторых ее возмущений [13] имеются анормальные кратчайшие, а сферы несубаналитичны.

Теорема 5. (1) *Множество* $\widetilde{S} \setminus \{A_+, A_-\}$ *полуаналитично, потому субаналитично.*

(2) *В окрестности точки* A_- *кривая* γ_1 *есть график неаналитической функции*

$$w = \frac{1}{6}Y^3 - 4Y^3 \exp(-2/Y)(1 + o(1)), \qquad Y = (y+1)/2 \to 0.$$

(3) *Поэтому множество* $\widetilde{S}$ *неполуаналитично, что эквивалентно несубаналитичности так как* $\widetilde{S} \subset \mathbb{R}^2$.

(4) *Следовательно, сфера* S *несубаналитична.*

10 Exp-log категория

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит exp-log *категории*, если она представляется в виде конечной композиции субаналитических функций, экспонент и логарифмов. Множество принадлежит exp-log категории, если в некоторой окрестности любой своей точки оно является графиком отображения, компоненты которого — функции из exp-log категории.

Теорема 6. *В окрестности точки* A_- *кривая* γ_1 *есть график функции из* exp-log *категории:*

$$w = F\left(Y, \frac{e^{-1/Y}}{Y}\right), \qquad Y = (y+1)/2 \to 0,$$

где $F(\xi, \eta)$ *есть аналитическая функция в окрестности точки* $(\xi, \eta) = (0, 0)$.

Поэтому множество $\widetilde{S}$ *принадлежит* exp-log *категории.*

11 Стратификация Уитни

Напомним следующие фундаментальные факты, относящиеся к *стратификации Уитни* [10]:

- если множество субаналитично, то оно является стратифицированным пространством Уитни (С. Лоясевич, Х. Хиронака),
- если множество принадлежит exp-log категории, то оно является стратифицированным пространством Уитни (Ta Lê Loi).

Теорема 7. *Разбиение* (6) *есть стратификация Уитни.*

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Разделы 1–9, 11 написаны Ю.Л. Сачковым, раздел 10 — А.Ю. Поповым. Исследование Ю.Л. Сачкова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

Список литературы

[1] *Montgomery R.* A tour of subriemannnian geometries, their geodesics and applications, Amer. Math. Soc., 2002

[2] *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint, Cambridge University Press, 2019.

[3] *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи// Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16, ВИНИТИ, Москва, 1987, 5–85.

[4] *Agrachev A., Bonnard B., Chyba M., Kupka I.* Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case// J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 1997, v.2, 377–448

[5] *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли// Сибирский математический журнал, 42:4 (2001), 731–748

[6] *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and Lens Spaces// SIAM Journal on Control and Optimization 47 (2008) 1851–1878.

[7] *Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane// ESAIM: COCV, **17** (2011) 293–321.

[8] *Butt Y.A., Sachkov Yu.L., Bhatti A.I.* Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group SH(2)// Journal of Dynamical and Control Systems **23** (2017) 155–195.

[9] *Ardentov A.A. , Sachkov Yu. L.* Maxwell Strata and Cut Locus in the Sub-Riemannian Problem on the Engel Group// Regular and Chaotic Dynamics, December 2017, Vol. 22, Issue 8, pp 909–936.

[10] *Горески М., Макферсон Р.* Стратифицированная теория Морса, М.: Мир, 1991.

[11] *A.Agrachev*, Compactness for sub-Riemannian length-minimizers and subanalyticity// Rend. Semin. Mat. Torino, 1998, v.56, 1–12.

[12] *A.Agrachev, A.Sarychev*, Sub-Riemannian metrics: minimality of abnormal geodesics versus subanalyticity // ESAIM: COCV, **4** (1999), 377–403.

[13] *B. Bonnard, E. Trélat*, On the role of abnormal minimizers in sub-Riemannian geometry// Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e serie, tome 10, No. 3 (2001), 405–491.

SUB-RIEMANNIAN ENGEL SPHERE

© **Yu.L. Sachkov**[1,*], **A.Yu. Popov**[1,2,*]
[1]*Ailamazyan Program Systems Institute, Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky*
[2]*Moscow center for fundamental and applied mathematics*
[*]*E-mail: yusachkov@gmail.com*

Summary. The structure of interesection of the sub-Riemannian sphere on the Engel group with a two-dimensional set of discrete symmetries is described: regularity, analytic properties, exp-log category, Whitney stratification, multiplicity of points, charecterization in terms of abnormal trajectories, conjugate points and Maxwell points, explicit expressions of sub-Riemannian distance to singular points.

Keywords: sub-Riemannian geometry, sub-Riemannian sphere, Engel group.

Сачков Юрий Леонидович (автор, ответственный за переписку)
8-910-8250143