

Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификации и задачи, интегрируемые в элементарных функциях*

Ю.Л. Сачков

Институт программных систем РАН

Переславль-Залесский

yusachkov@gmail.com

19 декабря 2021 г.

Аннотация

Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли образуют важный класс задач с большой группой симметрий. Они интересны в теоретическом плане, так как часто допускают полное исследование, и на этих модельных задачах можно изучить общие закономерности. В частности, задачи на нильпотентных группах Ли доставляют фундаментальную нильпотентную аппроксимацию общих задач. Левоинвариантные задачи также часто возникают в приложениях: в классической и квантовой механике, геометрии, робототехнике, моделях зрения и обработке изображений.

Цель данной работы — дать обзор основных понятий, методов и результатов, относящихся к левоинвариантным задачам оптимального управления на группах Ли, интегрируемым в элементарных функциях. Основное внимание уделено описанию экстремальных траекторий и их оптимальности, времени разреза и множества разреза, оптимального синтеза. Также затрагиваются вопросы классификации левоинвариантных субримановых задач на группах Ли размерности 3, 4.

Библиография: 92 названия.

Ключевые слова: оптимальное управление, геометрическая теория управления, левоинвариантные задачи, субриманова геометрия, группы Ли, оптимальный синтез

Содержание

1	Предисловие	4
2	Введение: левоинвариантные задачи оптимального управления	4
2.1	Определения и постановки задач	4
2.1.1	Группы Ли, левоинвариантные управляемые системы и задачи оптимального управления	4
2.1.2	Субримановы задачи, точки разреза, сопряженные точки, кратчайшие и сферы	5
2.1.3	Группы Карно	6
2.1.4	Библиографические комментарии	7
2.2	Элементы геометрической теории управления	7
2.2.1	Теорема Рашевского-Чжоу	7
2.2.2	Теорема Филиппова	7
2.2.3	Принцип максимума Понтрягина на группах Ли	7
2.2.4	Условия оптимальности второго порядка	8
2.2.5	Библиографические комментарии	9
2.3	Симметрийный метод построения оптимального синтеза	9
2.3.1	Библиографические комментарии	10

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-11-50114. Funding: The reported study was funded by RFBR, project number 20-11-50114.

3 Классификации левоинвариантных субримановых задач	10
3.1 Задачи на трехмерных группах Ли	10
3.1.1 Трехмерные алгебры Ли	10
3.1.2 Субримановы структуры	10
3.1.3 Классификация трехмерных субримановых структур	11
3.1.4 Изометрия между $\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \times S^1$ и $SL(2)$	11
3.1.5 Библиографические комментарии	12
3.2 Задачи на четырехмерных группах Ли	12
3.2.1 Распределения Энгеля	12
3.2.2 Классификация левоинвариантных энгелевых субримановых структур	12
3.2.3 Интегрируемость и строгая аномальность	13
3.2.4 Сопряженные точки	13
3.2.5 Библиографические комментарии	13
4 Задачи, интегрируемые в элементарных функциях	13
4.1 Субриманова задача на группе Гейзенберга	13
4.1.1 Постановка задачи	13
4.1.2 Симметрии распределения и субримановой структуры	14
4.1.3 Геодезические	15
4.1.4 Сопряженные времена	15
4.1.5 Время разреза и множество разреза	16
4.1.6 Оптимальный синтез	16
4.1.7 Субриманово расстояние и сферы	16
4.1.8 Библиографические комментарии	17
4.2 Машина Маркова-Дубинса	17
4.2.1 Постановка задачи	17
4.2.2 Управляемость	17
4.2.3 Оптимальные траектории	18
4.2.4 Библиографические комментарии	18
4.3 Машина Ридса-Шеппа	18
4.3.1 Постановка задачи	18
4.3.2 Управляемость	18
4.3.3 Существование оптимальных траекторий	19
4.3.4 Оптимальные траектории	19
4.3.5 Библиографические комментарии	19
4.4 Субриманова задача с вектором роста (3, 6)	19
4.4.1 Постановка задачи и две модели	19
4.4.2 Симметрии	20
4.4.3 Геодезические в первой модели	20
4.4.4 Геодезические во второй модели	21
4.4.5 Аномальные геодезические и аномальное множество	21
4.4.6 Время разреза	21
4.4.7 Множество разреза	22
4.4.8 Библиографические комментарии	22
4.5 Субриманова задача на двухступенных свободных нильпотентных группах Ли	22
4.5.1 Постановка задачи	22
4.5.2 Экстремали	23
4.5.3 Нижняя оценка множества разреза	24
4.5.4 Аномальное множество	24
4.5.5 Библиографические комментарии	25
4.6 Двухступенчатая субриманова задача коранга 1	25
4.6.1 Алгебра Ли и группа Ли	25
4.6.2 Постановка задачи	26
4.6.3 Экстремали	26
4.6.4 Время разреза	27
4.6.5 Библиографические комментарии	27
4.7 Двухступенчатая субриманова задача коранга 2	27
4.7.1 Алгебра Ли и группа Ли	27
4.7.2 Постановка задачи	28
4.7.3 Экстремальные управление и траектории	28
4.7.4 Время разреза	28

4.7.5	Библиографические комментарии	28
4.8	Субримановы $\mathbf{d} \oplus \mathbf{s}$ задачи	28
4.8.1	Библиографические комментарии	29
4.9	Осесимметрична субриманова задача на группе $SU(2)$	29
4.9.1	Группа Ли и алгебра Ли	29
4.9.2	Субриманова $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структура	29
4.9.3	Геодезические и симметрии	30
4.9.4	Сопряженные точки	30
4.9.5	Множество разреза	31
4.9.6	Субриманово расстояние	31
4.9.7	Геодезические со специальными граничными условиями	32
4.9.8	Библиографические комментарии	32
4.10	Осесимметрична субриманова задача на группе $SO(3)$	32
4.10.1	Группа Ли и алгебра Ли	32
4.10.2	Субриманова $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структура	32
4.10.3	Геодезические и симметрии	33
4.10.4	Каустика	33
4.10.5	Множество разреза	33
4.10.6	Расстояние	33
4.10.7	Сфера	34
4.10.8	Библиографические комментарии	35
4.11	Осесимметрична субриманова задача на группе $SL(2)$	35
4.11.1	Группа Ли и алгебра Ли	35
4.11.2	Субриманова $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структура	35
4.11.3	Геодезические и симметрии	35
4.11.4	Сопряженные точки	36
4.11.5	Множество разреза	36
4.11.6	Геодезическая орбитальность	37
4.11.7	Время разреза	37
4.11.8	Библиографические комментарии	37
4.12	Осесимметричные римановы задачи на группах $PSL(2; \mathbb{R})$ и $SL(2; \mathbb{R})$	38
4.12.1	Постановка задачи на $PSL(2; \mathbb{R})$	38
4.12.2	Геодезические на $PSL(2; \mathbb{R})$	38
4.12.3	Модель группы $PSL(2; \mathbb{R})$	38
4.12.4	Геодезические на $SU(1, 1)$	39
4.12.5	Сопряженные времена	39
4.12.6	Время разреза и множество разреза	40
4.12.7	Радиус инъективности	40
4.12.8	Осесимметрична левоинвариантная риманова задача на $SL(2; \mathbb{R})$	40
4.12.9	Связь с субримановой задачей	41
4.12.10	Библиографические комментарии	41
4.13	Осесимметричные римановы задачи на группах $SO(3)$ и $SU(2)$	41
4.13.1	Постановка задачи на $SO(3)$	41
4.13.2	Параметризация экстремалей для $SO(3)$	42
4.13.3	Сопряженное время	42
4.13.4	Время разреза и множество разреза в $SO(3)$	43
4.13.5	Диаметр группы $SO(3)$ в случае Лагранжа	43
4.13.6	Осесимметрична риманова задача на $SU(2)$	43
4.13.7	Связь с субримановой задачей на $SO(3)$	44
4.13.8	Библиографические комментарии	44
4.14	Задача о качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания	45
4.14.1	Постановка задачи	45
4.14.2	Аномальные траектории	46
4.14.3	Нормальные экстремали	47
4.14.4	Диаметр субримановой метрики	47
4.14.5	Библиографические комментарии	47
	Список иллюстраций	48
	Список литературы	49

1 Предисловие

Исследование инвариантных управляемых систем на группах Ли и однородных пространствах является одной из центральных тем геометрической теории управления. С теоретической точки зрения, это — естественный и важный класс систем, для которого возможна содержательная глобальная теория (именно такие системы возникают, например, при локальной нильпотентной аппроксимации гладких систем). С другой стороны, такие системы моделируют целый ряд прикладных задач (вращение и качение тел, движение роботов, квантовая механика, компьютерное зрение).

Хорошо известно, что получить точное решение глобальной нелинейной задачи управления (например, задачи управляемости или оптимального управления) представляется очень сложным, если задача не имеет большой группы симметрий. Для инвариантных задач на группах Ли (и их проекций на однородные пространства) точное решение часто можно найти на основе методов геометрической теории управления с использованием техники дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли. Полученное решение инвариантной задачи может дать хорошую аппроксимацию соответствующей нелинейной задачи. Например, инвариантная субриманова геометрия на группе Гейзенберга служит краеугольным камнем всей субримановой геометрии.

Основные задачи, рассматривавшиеся для левоинвариантных систем на группах Ли, — задача управляемости и задача оптимального управления. По задаче управляемости имеется обширная литература; она описана, например, в обзоре [73].

В данном обзоре предпринята попытка полного описания имеющихся результатов по левоинвариантным задачам оптимального управления на группах Ли, интегрируемых в элементарных функциях. Некоторые из рассматриваемых задач исследовались классиками без привлечения аппарата групп Ли. Так, Леонард Эйлер изучал вращение твердого тела в пространстве. Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли находятся в сфере пристального внимания геометрической теории управления начиная с 1990-ых годов. Эти работы составляют содержание данного обзора.

Обзор имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся базовые сведения геометрической теории управления, относящиеся к группам Ли и левоинвариантным задачам оптимального управления. Раздел 3 посвящен классификации трехмерных и четырехмерных левоинвариантных субримановых задач. В разделе 4 рассматриваются задачи, интегрируемые в элементарных функциях.

В продолжение этого обзора написан обзор [79] по левоинвариантным задачам, интегрируемым в эллиптических функциях.

Автор благодарит А.А. Аграчева, А.В. Подобряева, А.П. Маштакова, А.А. Ардентова и И.Ю. Бесчастного за полезные советы по содержанию и изложению в данной работе.

Также автор благодарен Е.Ф. Сачковой за помощь в наборе обзора и постоянную поддержку при работе над ним.

2 Введение: левоинвариантные задачи оптимального управления

2.1 Определения и постановки задач

2.1.1 Группы Ли, левоинвариантные управляемые системы и задачи оптимального управления

Группа Ли G — это гладкое многообразие, снабженное такой групповой структурой, что отображения

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2, \quad G \times G \rightarrow G, \\ g \mapsto g^{-1}, \quad G \rightarrow G,$$

являются гладкими. Таким образом, *левый сдвиг* на любой элемент $g \in G$,

$$L_g : h \mapsto gh, \quad G \rightarrow G,$$

есть диффеоморфизм. Обозначим его дифференциал через

$$L_{g*} : T_h G \rightarrow T_{gh} G.$$

Векторное поле $X \in \text{Vec}(G)$ называется *левоинвариантным*, если

$$L_{g*} X(h) = X(gh), \quad g, h \in G.$$

Алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на G называется *алгеброй Ли* \mathfrak{g} группы Ли G . Эта алгебра Ли изоморфна касательному пространству $T_{\text{Id}} G$ в единичном элементе Id группы Ли G .

Управляемая система

$$\dot{g} = f(g, u), \quad g \in G, \quad u \in U$$

называется *левоинвариантной*, если

$$L_{h*}f(g, u) = f(hg, u), \quad g, h \in G, \quad u \in U.$$

Например, аффинная по управлению система

$$\dot{g} = X_0(g) + \sum_{i=1}^k u_i X_i(g), \quad g \in G, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in U \subset \mathbb{R}^k,$$

является левоинвариантной, если таковыми являются поля X_0, X_1, \dots, X_k .

Задача оптимального управления

$$\dot{g} = f(g, u), \quad g \in G, \quad u \in U, \quad (2.1)$$

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad (2.2)$$

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(u) dt \rightarrow \min \quad (2.3)$$

называется левоинвариантной, если таковой является система (2.1).

Для левоинвариантных задач оптимального управления можно положить $g_0 = \text{Id}$.

2.1.2 Субримановы задачи, точки разреза, сопряженные точки, кратчайшие и сферы

Субриманова структура на гладком многообразии M — это распределение (подрасслоение касательного расслоения TM)

$$\Delta = \{\Delta_q \subset T_q M \mid q \in M\}, \quad \dim \Delta_q \equiv \text{const},$$

снабженное скалярным произведением

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \{\langle \cdot, \cdot \rangle_q \mid q \in M\}.$$

В частном случае $\Delta_q = T_q M$, $q \in M$, получаем *риманову структуру* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на многообразии M .

Субриманова структура на группе Ли G называется *левоинвариантной*, если распределение и скалярное произведение сохраняются левыми сдвигами на G . Для такой структуры существует глобальный *ортонормированный репер* из левоинвариантных полей:

$$\begin{aligned} X_1, \dots, X_k &\in \mathfrak{g}, \quad k = \dim \Delta_g, \\ \Delta_g &= \text{span}(X_1(g), \dots, X_k(g)), \\ \langle X_i(g), X_j(g) \rangle &= \delta_{ij}, \quad g \in G. \end{aligned}$$

Кривая $g \in \text{Lip}([0, t_1], G)$ называется *допустимой* для распределения Δ , если

$$\dot{g}(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) X_i(g(t))$$

для некоторых управлений $u_i \in L^\infty([0, t_1])$. *Субримановой длиной* допустимой кривой называется число

$$l(g(\cdot)) = \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^k u_i^2(t) \right)^{1/2} dt.$$

Субриманово расстояние (*расстояние Карно-Каратеодори*) между точками $g_0, g_1 \in G$ есть

$$d(g_0, g_1) = \inf \{l(g(\cdot)) \mid g(\cdot) — \text{допустимая кривая, соединяющая } g_0 \text{ и } g_1\}.$$

Субриманова кратчайшая — это допустимая кривая $g \in \text{Lip}([0, t_1], G)$, для которой

$$l(g(\cdot)) = d(g(0), g(t_1)).$$

Такая кривая есть решение задачи оптимального управления

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^k u_i X_i(g), \quad g \in G, \quad u \in \mathbb{R}^k, \quad (2.4)$$

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad (2.5)$$

$$l(g(\cdot)) = \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^k u_i^2(t) \right)^{1/2} dt \rightarrow \min. \quad (2.6)$$

Здесь терминальное время t_1 может быть закрепленным или свободным. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что минимизация длины (2.6) эквивалентна минимизации *энергии*

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt \rightarrow \min \quad (2.7)$$

с фиксированным временем t_1 .

Допустимая кривая $g \in \text{Lip}([0, t_1], G)$ называется *субримановой геодезической*, если она натурально параметризована (т.е. $\sum_{i=1}^k u_i^2(t) \equiv 1$) и для любого $\tau \in [0, t_1]$ существует отрезок $I \subset \mathbb{R}$, $\tau \in \text{int } I$, такой, что сужение $g|_{I \cap [0, t_1]}$ есть кратчайшая.

Временем разреза вдоль геодезической $g(\cdot)$ называется величина

$$t_{\text{cut}}(g(\cdot)) = \sup\{T > 0 \mid g|_{[0, T]} \text{ есть кратчайшая}\} \in (0, +\infty].$$

Соответствующая точка $g(t_{\text{cut}})$ при $t_{\text{cut}} < +\infty$ называется *точкой разреза* вдоль геодезической $g(\cdot)$. *Множеством разреза* для левоинвариантной субримановой задачи, соответствующей начальной точке $g_0 = \text{Id}$, называется множество $\text{Cut} \subset G$ точек разреза вдоль всех геодезических, выходящих из точки g_0 .

Аналогично определяются допустимые траектории, геодезические, время разреза, точки разреза и множество разреза для общих задач оптимального управления (2.1)–(2.3).

Если группа Ли G связна, а распределение Δ вполне неголономно, то по теореме Рашевского-Чжоу (см. далее теорему 2.1), любые точки $g_0, g_1 \in G$ соединимы допустимой кривой, а субриманово расстояние d превращает G в метрическое пространство. В этом случае *субримановы сферы* определяются как в произвольном метрическом пространстве:

$$S_R(g_0) = \{g \in G \mid d(g_0, g) = R\}.$$

Для левоинвариантных субримановых задач $S_R(g_0) = L_{g_0}(S_R(\text{Id}))$, поэтому достаточно исследовать только центрированные в единице сферы $S_R = S_R(\text{Id})$.

Метрической прямой называется такая геодезическая $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ сужение $g|_{[a, b]}$ есть кратчайшая.

2.1.3 Группы Карно

Алгебра Карно \mathfrak{g} есть стратифицированная нильпотентная алгебра Ли, порожденная первым слоем $\mathfrak{g}^{(1)}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(s)}, \quad (2.8)$$

$$[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(k)}] = \mathfrak{g}^{(k+1)}, \quad k = 1, \dots, s-1, \quad (2.9)$$

$$[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(s)}] = \{0\}. \quad (2.10)$$

Наименьшее s , для которого выполнены условия (2.8)–(2.10), называется *глубиной* (или *ступенью*) алгебры Карно \mathfrak{g} . Размерность первого слоя $\mathfrak{g}^{(1)}$ называется *рангом* алгебры Карно. *Группа Карно* есть связная односвязная группа Ли, алгебра Ли которой есть алгебра Карно.

Если алгебра Карно свободная нильпотентная, то она называется *свободной алгеброй Карно*, а соответствующая группа Ли — *свободной группой Карно*.

Если на первом слое $\mathfrak{g}^{(1)}$ задано скалярное произведение, то левые сдвиги этого слоя и скалярного произведения задают на соответствующей группе Карно левоинвариантную субриманову структуру. Такие левоинвариантные субримановы структуры на группах Карно возникают как нильпотентные аппроксимации общих субримановых структур в точках общего положения. В этом обзоре рассматриваются несколько таких субримановых структур:

- на группе Гейзенберга, это свободная группа Карно ранга 2, глубины 2 (раздел 4.1),

- задача с вектором роста (3,6), соответствующая группа Ли есть свободная группа Карно ранга 3, глубины 2 (раздел 4.4),
- двухступенные свободные нильпотентные группы Ли (раздел 4.5),
- двухступенные задачи коранга 1, соответствующая группа Ли есть $(2k+1)$ -мерная группа Гейзенберга, это несвободная группа Карно ранга $2k$, глубины 2 (раздел 4.6),
- двухступенные задачи коранга 2, соответствующая $(k+2)$ -мерная группа Ли есть несвободная группа Карно ранга k , глубины 2 (раздел 4.7).

2.1.4 Библиографические комментарии

В этом обзоре используются лишь базовые сведения о гладких многообразиях, группах Ли и алгебрах Ли, см., например, [91]. Первоначальные определения субримановой геометрии содержатся в любом источнике [3, 6, 8, 46, 58, 77, 88].

2.2 Элементы геометрической теории управления

2.2.1 Теорема Рашевского-Чжоу

Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ на группе Ли G с левоинвариантным ортонормированным репером X_1, \dots, X_k . Обозначим через $\text{Lie}(X_1, \dots, X_k)$ подалгебру Ли в \mathfrak{g} , порожденную полями X_1, \dots, X_k .

Теорема 2.1 (Рашевский-Чжоу). *Пусть группа Ли G связна, а распределение Δ вполне неголономно:*

$$\text{Lie}(X_1, \dots, X_k) = \mathfrak{g}.$$

Тогда

- (1) любые точки в G соединимы допустимой кривой,
- (2) (G, d) есть метрическое пространство,
- (3) топология на G , индуцированная метрикой d , эквивалентна топологии многообразия.

Распределение Δ на многообразии M называется *интегрируемым*, если через каждую точку $q \in M$ проходит гладкое многообразие N_q такое, что $T_q N_q = \Delta_q$ (интегральное многообразие распределения Δ), в этом случае любая субриманова структура $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ также называется *интегрируемой*. Это равносильно тому, что для любого локального базиса X_1, \dots, X_k распределения Δ выполнено равенство $\text{Lie}(X_1, \dots, X_k)(q) = \Delta_q$, $q \in M$.

2.2.2 Теорема Филиппова

Стандартные условия существования оптимального управления в задачах оптимального управления даются теоремой Филиппова [8, 40].

2.2.3 Принцип максимума Понтрягина на группах Ли

Рассмотрим левоинвариантную задачу оптимального управления (2.1)–(2.3) на группе Ли G с фиксированным терминальным временем t_1 . Введем *гамильтониан принципа максимума Понтрягина*:

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f(g, u) \rangle + \nu \varphi(u), \quad (2.11)$$

$$\lambda \in T_g^* G \subset T^* G, \quad u \in U, \quad g \in G, \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Для фиксированных $u \in U$, $\nu \in \mathbb{R}$ обозначим гамильтоново векторное поле $\vec{h}_u^\nu \in \text{Vec}(T^* G)$, соответствующее гамильтониану $h_u^\nu \in C^\infty(T^* G)$.

Теорема 2.2 (Принцип максимума Понтрягина). *Если $g(t)$ есть оптимальная траектория, соответствующая управлению $u(t)$, то существует кривая $\lambda \in \text{Lip}([0, t_1], T^* G)$, $\lambda_t \in T_{g(t)}^* G$, и число $\nu \in \{-1, 0\}$, для которых выполнены условия:*

- (1) $\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}^\nu(\lambda_t)$ для н. в. $t \in [0, t_1]$,
- (2) $h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{v \in U} h_v^\nu(\lambda_t)$ для всех $t \in [0, t_1]$,

(3) $(\lambda_t, \nu) \neq (0, 0)$ для всех $t \in [0, t_1]$.

Если терминальное время t_1 свободно, то к условиям (1)–(3) присоединяется условие

(4) $h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) \equiv 0$.

Траектория $g(t)$ и управление $u(t)$, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, называются *экстремальными*, а соответствующая кривая λ_t — *экстремалью*.

Для левоинвариантной субримановой задачи (2.4), (2.5), (2.7) принцип максимума Понтрягина детализируется следующим образом. Обозначим гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(g) \rangle$, $H(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k h_i^2(\lambda)$, $\lambda \in T^*G$.

Следствие 2.1. Пусть $g(t)$ есть субриманова кратчайшая, соответствующая управлению $u(t)$. Тогда существует кривая $\lambda \in \text{Lip}([0, t_1], T^*G)$, $\lambda_t \in T_{g(t)}^*G$, для которой выполнено одно, и только одно, из условий:

$$\dot{\lambda}_t = \sum_{i=1}^k u_i(t) \bar{h}_i(\lambda_t), \quad H(\lambda_t) \equiv 0, \quad \lambda_t \neq 0, \quad (A)$$

$$\dot{\lambda}_t = \vec{H}(\lambda_t), \quad u_i(t) = h_i(\lambda_t). \quad (N)$$

Случай (A) называется *анормальным*, а случай (N) — *нормальным*.

Дополним ортонормированный репер субримановой структуры X_1, \dots, X_k до левоинвариантного репера X_1, \dots, X_n на группе Ли G и введем гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(g) \rangle$. Тогда нормальная гамильтонова система $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$ может быть представлена в виде:

$$\dot{h}_i = \{H, h_i\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^k h_i X_i(g),$$

где $\{H, h_i\}$ есть скобка Пуассона гамильтонианов.

Вертикальную подсистему (2.13) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений на коалгебре Ли \mathfrak{g}^* после тривидализации кокасательного расслоения $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$ левыми сдвигами.

Вдоль непостоянных нормальных экстремалей $H(\lambda_t) \equiv \text{const} > 0$, и их можно параметризовать естественно (длиной дуги), то есть так, чтобы $H(\lambda_t) \equiv 1/2$. Обозначим цилиндр $C = \mathfrak{g}^* \cap \{H = 1/2\}$, тогда естественно параметризованные нормальные экстремальные траектории задаются с помощью *экспоненциального отображения*

$$\begin{aligned} \text{Exp} : (\lambda_0, t) &\mapsto g(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda_0), \\ \text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow G, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где экспонента справа в (2.14) обозначает поток гамильтонова поля, а $\pi : T^*G \rightarrow G$ есть каноническая проекция.

Волновым фронтом за время $t > 0$, соответствующим начальной точке Id , называется множество

$$W_t = \{\text{Exp}(\lambda, t) \mid \lambda \in C\}.$$

Очевидно включение $S_t \subset W_t$.

Аномальным множеством для левоинвариантной субримановой структуры на группе Ли G , соответствующим начальной точке $g_0 = \text{Id} \in G$, называется множество

$$\text{Abn} = \{g(t) \mid g(\cdot) \text{ аномальная траектория, } t > 0, g(0) = \text{Id}\} \subset G.$$

2.2.4 Условия оптимальности второго порядка

Теорема 2.3 (Условие Лежандра). Короткие дуги нормальных экстремальных траекторий оптимальны.

Поэтому нормальные экстремальные траектории являются геодезическими. Момент времени $\hat{t} > 0$ называется *сопряженным временем* для нормальной геодезической $\text{Exp}(\lambda, t)$, $\lambda \in C$, если (λ, \hat{t}) есть критическая точка экспоненциального отображения, то есть дифференциал $\text{Exp}_{*(\lambda, \hat{t})} : T_{(\lambda, \hat{t})}(C \times \mathbb{R}_+) \rightarrow T_{\hat{g}}G$ вырожден, где $\hat{g} = \text{Exp}(\lambda, \hat{t})$. При этом точка \hat{g} называется *сопряженной точкой*. *Первое сопряженное время* вдоль геодезической $g(t)$ есть $t_{\text{conj}}^1 = \inf\{t > 0 \mid t - \text{сопряженное время вдоль } g(\cdot)\}$.

Теорема 2.4 (Условие Якоби). Пусть $g : [0, t_1] \rightarrow G$ есть нормальная геодезическая, не содержащая аномальных дуг. Тогда:

- (1) $t_{\text{conj}}^1 > 0$,
- (2) для любого $\tau \in (0, t_{\text{conj}}^1)$ геодезическая $g|_{[0, \tau]}$ есть локально кратчайшая в топологии $W^{1,2}$ на пространстве горизонтальных кривых с теми же граничными точками,
- (3) для любого $\tau > t_{\text{conj}}^1$ геодезическая $g|_{[0, \tau]}$ не является кратчайшей.

Первой каустикой называется множество

$$\text{Conj}^1 = \{\text{Exp}(\lambda, t) \mid \lambda \in C, t = t_{\text{conj}}^1(\lambda)\}.$$

Теорема 2.5 (Условие Гоха). Пусть $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ есть вполне неголономная субриманова структура на гладком многообразии M . Если любые субримановы шары компактны и

$$\Delta_q + [\Delta, \Delta]_q = T_q M, \quad q \in M,$$

то любая кратчайшая нормальна.

2.2.5 Библиографические комментарии

Этот раздел содержит стандартный материал геометрической теории управления, см. [6, 8, 34, 44, 46, 58, 61, 67, 74, 77, 84, 92].

2.3 Симметрийный метод построения оптимального синтеза

Отыскание оптимальных траекторий в задачах оптимального управления обычно состоит из следующих шагов:

- (1) доказательство существования оптимальных траекторий,
- (2) описание экстремальных траекторий,
- (3) выбор оптимальных траекторий из экстремальных.

Шаг (1) обычно выполняется с помощью общих методов теории управления. Например, для задач субримановой геометрии условия существования кратчайших даются теоремами Рашевского-Чжоу и Филиппова.

Шаг (2), как правило, выполняется с помощью принципа максимума Понтрягина. Доказывается интегрируемость гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина, и ее решения параметризуются в явном виде.

Шаг (3) наиболее сложен. Локальную оптимальность экстремальных траекторий обычно можно исследовать с помощью оценок сопряженного времени. Для изучения глобальной оптимальности в задачах с большой группой симметрий (в частности, в левоинвариантных задачах) часто применяется следующий *симметрийный метод*.

- (3.1) Описываются дискретные и непрерывные симметрии экспоненциального отображения.
- (3.2) Отыскиваются *точки Максвелла*, соответствующие симметриям (то есть точки, куда несколько симметричных экстремальных траекторий приходят в одно и то же время). Эти точки (и их прообразы относительно экспоненциального отображения) образуют *страты Максвелла* в образе (соответственно прообразе) экспоненциального отображения. На каждой экстремальной траектории отыскивается первое время Максвелла, соответствующее симметриям (то есть первое время, когда экстремальные траектории пересекают страты Максвелла). При достаточно общих условиях, экстремальная траектория не может быть оптимальной после точки Максвелла [72].
- (3.3) Доказывается, что на любой геодезической первое сопряженное время не меньше первого времени Максвелла, соответствующего симметриям. Для этого можно использовать прямые оценки якобиана экспоненциального отображения или гомотопическую инвариантность индекса Маслова (количества сопряженных точек на экстремальной траектории [2, 78]).
- (3.4) Рассматривается ограничение экспоненциального отображения на подобласти, вырезаемые в прообразе и образе экспоненциального отображения стратами Максвелла, соответствующими симметриям. С помощью теоремы Адамара о глобальном диффеоморфизме [50] доказывается, что это ограничение есть диффеоморфизм.

- (3.5) На основе описанной таким образом глобальной структуры экспоненциального отображения часто можно доказать, что время разреза на экстремальных траекториях равно первому времени Максвелла, соответствующему симметриям. Более того, таким образом можно доказать, что для любой конечной точки в указанных подобластях в образе экспоненциального отображения существует единственная оптимальная траектория, которую можно вычислить, обращая экспоненциальное отображение в этих подобластях.
- (3.6) Наконец, для задач невысокой размерности с большой группой симметрий иногда удается построить полный *оптимальный синтез*, то есть закон, сопоставляющий каждой конечной точке в пространстве состояний одну или несколько оптимальных траекторий, приходящих в эту точку.

Многие задачи оптимального управления, описанные в этом обзоре, исследованы с помощью этого симметричного метода.

2.3.1 Библиографические комментарии

Симметричный метод есть обобщение классического метода Адамара в римановой геометрии, примененного им, в частности, к исследованию оптимального синтеза на поверхностях отрицательной кривизны [50]. В описанном виде он применялся к левоинвариантным задачам оптимального управления в работах [7, 12, 35, 59, 64, 66, 75, 76, 80].

3 Классификации левоинвариантных субримановых задач

3.1 Задачи на трехмерных группах Ли

В этом разделе описана классификация, с точностью до локальных изометрий и дилатаций, всех неинтегрируемых левоинвариантных субримановых структур ранга 2 на трехмерных группах Ли.

3.1.1 Трехмерные алгебры Ли

Все трехмерные алгебры Ли, в которых существует двумерное подпространство, не являющееся подалгеброй, суть алгебры Ли следующих групп Ли:

- группа Гейзенберга H_3 ,
- $\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$, где $\mathcal{A}^+(\mathbb{R})$ есть группа сохраняющих ориентацию аффинных функций на \mathbb{R} ,
- SOLV, группы Ли, алгебры Ли которых разрешимы и имеют двумерную производную подалгебру,
- группы SE(2) и SH(2) сохраняющих ориентацию евклидовых и гиперболических движений плоскости соответственно,
- трехмерные простые группы Ли SL(2) и SU(2).

3.1.2 Субримановы структуры

Пусть G — трехмерная группа Ли и $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — неинтегрируемая левоинвариантная субриманова структура на G ранга 2.

Предложение 3.1. *Пусть группа Ли G односвязна. Существует левоинвариантный репер (X_0, X_1, X_2) на группе Ли G такой, что (X_1, X_2) есть ортонормированный репер для субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, в котором таблица умножения есть либо*

$$[X_1, X_0] = c_{01}^2 X_2, \quad (3.1)$$

$$[X_2, X_0] = c_{02}^1 X_1, \quad (3.2)$$

$$[X_2, X_1] = c_{12}^1 X_1 + c_{12}^2 X_2 + X_0, \quad (3.3)$$

либо

$$[X_1, X_0] = \kappa X_2, \quad (3.4)$$

$$[X_2, X_0] = -\kappa X_1, \quad (3.5)$$

$$[X_2, X_1] = X_0. \quad (3.6)$$

В случае (3.1)–(3.3) обозначим

$$\chi = \frac{c_{01}^2 + c_{02}^1}{2}, \quad \kappa = -(c_{12}^1)^2 - (c_{12}^2)^2 + \frac{c_{01}^2 - c_{02}^1}{2},$$

а в случае (3.4)–(3.6) $\chi = 0$.

3.1.3 Классификация трехмерных субримановых структур

При растяжениях ортонормированного репера (X_1, X_2) инварианты χ и κ умножаются на ненулевую константу, поэтому их можно нормировать условием

$$\chi = \kappa = 0 \quad \text{или} \quad \chi^2 + \kappa^2 = 1, \quad \chi \geq 0.$$

Субриманова изометрия между двумя субримановыми многообразиями $(M, \Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ и $(M', \Delta', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ есть диффеоморфизм $f : M \rightarrow M'$, удовлетворяющий условиям:

- (1) $f_*(\Delta) = \Delta'$,
- (2) $\langle f_*X_1, f_*X_2 \rangle = \langle f_*X_1, f_*X_2 \rangle'$ для любых векторных полей X_1, X_2 , касающихся распределения Δ .

Теорема 3.1. Все неинтегрируемые левоинвариантные субримановы структуры ранга 2 на 3-мерных группах Ли классифицируются с точностью до локально изометрий и дилатаций как на Рис. 1, где каждая структура обозначена точкой (κ, χ) , и разные точки обозначают локально неизометричные структуры.

Более того,

- (1) если $\chi = \kappa = 0$, то структура локально изометрична субримановой структуре на группе Гейзенберга (см. раздел 4.1);
- (2) если $\chi^2 + \kappa^2 = 1$, то существуют не более трех локально неизометричных нормализованных субримановых структур с этими инвариантами; в частности, на каждой унимодулярной группе Ли для любых (χ, κ) существует единственная нормализованная структура;
- (3) если $\chi \neq 0$ или $\chi = 0$ и $\kappa \geq 0$, то две структуры с заданными (χ, κ) локально изометричны тогда и только тогда, когда их алгебры Ли изоморфны.

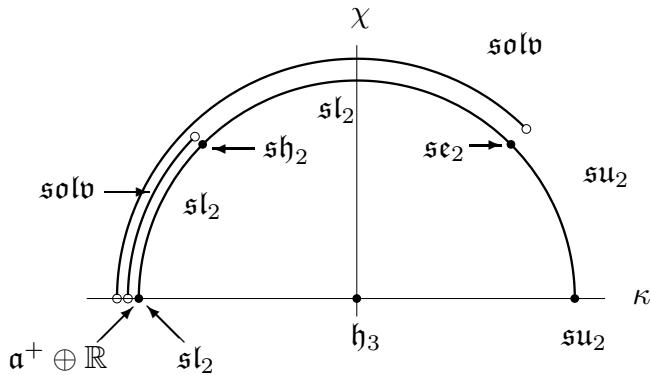


Рис. 1: Классификация 3-мерных контактных левоинвариантных субримановых структур

3.1.4 Изометрия между $\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \times S^1$ и $SL(2)$

Существуют неизоморфные группы Ли с локально изометричными субримановыми структурами: из теоремы 3.1 следует, что существует единственная нормализованная левоинвариантная структура на группе $\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ с $\chi = 0$, $\kappa = -1$. Эта структура локально изометрична субримановой структуре на $SL(2)$, определяемой формой Киллинга.

Группа Ли $\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ представляется матрицами:

$$\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a > 0, \quad b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

где действие на вектор $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ задается как

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b \\ y + c \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли этой группы Ли порождена матрицами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим субриманову структуру на $\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ с ортонормированным репером $(e_2, e_1 + e_3)$.

Подгруппа $\mathcal{A}^+(\mathbb{R})$ диффеоморфна полуплоскости $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\}$, которая задается в стандартных полярных координатах как $\{(\rho, \theta) \mid \rho > 0, -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$.

Рассмотрим субриманову структуру на $\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \times S^1$, заданную проецированием структуры на $\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Теорема 3.2. *Диффеоморфизм $F : \mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \times S^1 \rightarrow \mathrm{SL}(2)$, заданный как*

$$F(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\rho \cos \theta}} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \rho \sin(\theta - \varphi) & \rho \cos(\theta - \varphi) \end{pmatrix},$$

где $(\rho, \theta) \in \mathcal{A}^+(\mathbb{R})$ и $\varphi \in S^1$, есть глобальная субриманова изометрия.

3.1.5 Библиографические комментарии

Изложение в этом разделе опирается на работу [4].

Отметим, что в более ранней работе [39] получена полная классификация субримановых однородных пространств, то есть субримановых структур, имеющих транзитивную группу изометрий, гладко действующих на многообразии. Использованные в этой работе инварианты τ_0 и K совпадают, с точностью до нормирующего множителя, с инвариантами χ и κ этого раздела.

Классификация контактных левоинвариантных субримановых метрик на трехмерных группах Ли с точностью до автоморфизмов алгебры Ли получена в работах [88, 89].

3.2 Задачи на четырехмерных группах Ли

3.2.1 Распределения Энгеля

Пусть M есть четырехмерное многообразие. Распределение $\Delta \subset TM$ ранга 2 называется *распределением Энгеля*, если

$$\mathrm{rank}([\Delta, \Delta]) = 3, \quad \mathrm{rank}([\Delta, [\Delta, \Delta]]) = 4,$$

где $[\Delta, \Delta]$ состоит из касательных векторов, которые можно получить с помощью коммутаторов локальных сечений распределения Δ . Иными словами, распределение Δ имеет вектор роста $(2, 3, 4)$.

3.2.2 Классификация левоинвариантных энгелевых субримановых структур

Предложение 3.2. *По любой левоинвариантной энгелевой субримановой структуре можно найти левоинвариантный репер (X_1, \dots, X_4) на соответствующей группе Ли, такой, что (X_1, X_2) есть ортонормированный репер структуры, с таблицей умножения*

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \\ [X_1, X_4] &= \frac{1}{2}AX_1 + T_5X_2 + T_3X_3 + T_1X_4, \\ [X_2, X_3] &= T_6X_1 + T_4X_2 + T_2X_3, \\ [X_2, X_4] &= T_4X_3 + T_2X_4, \\ [X_3, X_4] &= CX_1 + BX_2 - \frac{1}{2}AX_3 + T_4X_4, \end{aligned}$$

где $A = T_1T_4$, $B = T_2T_5 - T_3T_4$, $C = \frac{1}{2}T_1T_2T_4 - T_3T_6$.

Теорема 3.3. *Любая левоинвариантная энгелева субриманова структура однозначно локально определяется структурными константами T_i и принадлежит по крайней мере одному семейству из таблицы 1. В этой таблице перечислены ограничения на T_i , определяющие семейства, а также соответствующие нетривиальные структурные уравнения.*

Таблица 1: Классификация левоинвариантных энгелевых субримановых структур

Ограничения	Структурные уравнения, за исключением $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$
I. $T_2 = T_4 = T_6 = 0$	$[X_1, X_4] = T_5 X_2 + T_3 X_3 + T_1 X_4$
II. $T_4 = T_6 = T_5 = 0$	$[X_1, X_4] = T_3 X_3 + T_1 X_4$, $[X_2, X_3] = T_2 X_3$, $[X_2, X_4] = T_2 X_4$
III. $T_1 = T_2 = T_5 = 0$	$[X_1, X_4] = T_3 X_3$, $[X_2, X_3] = T_6 X_1 + T_4 X_2$, $[X_2, X_4] = T_4 X_3$, $[X_3, X_4] = -T_6 T_3 X_1 - T_4 T_3 X_2 + T_4 X_4$
IV. $T_1 = T_3 = 0$, $T_4 = T_5 = 0$	$[X_2, X_3] = T_6 X_1 + T_2 X_3$, $[X_2, X_4] = T_2 X_4$
V. $T_1 \neq 0$, $T_4 = \frac{1}{2} \frac{T_2(T_1^2 + 4T_3)}{T_1}$, $T_5 = -\frac{1}{8} T_1^3 - \frac{1}{2} T_1 T_3$, $T_6 = -\frac{T_2^2(T_1^2 + 4T_3)}{T_1^2}$	$[X_1, X_4] = T_1 X_4 - \frac{T_1^3 + 8T_5}{4T_1} X_3 + T_5 X_2 - \frac{2T_2 T_5}{T_1} X_1$, $[X_2, X_3] = T_2 X_3 - \frac{4T_2 T_5}{T_1^2} X_2 + \frac{8T_2^2 T_5}{T_1^3} X_1$, $[X_2, X_4] = T_2 X_4 - \frac{4T_2 T_5}{T_1^2} X_3$, $[X_3, X_4] = \frac{2T_2 T_5}{T_1} \left(X_3 - \frac{2}{T_1} X_4 - \frac{4T_5}{T_1^2} X_2 + \frac{8T_2 T_5}{T_1^3} X_1 \right)$

3.2.3 Интегрируемость и строгая аномальность

Теорема 3.4. Рассмотрим левоинвариантную энгелеву субриманову структуру типа III на группе Ли с алгеброй Ли

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, & [X_1, X_3] &= X_4, \\ [X_1, X_4] &= T_3 X_3, & [X_2, X_3] &= T_6 X_1 + T_4 X_2, \\ [X_2, X_4] &= T_4 X_3, & [X_3, X_4] &= -T_6 T_3 X_1 - T_4 T_3 X_2 + T_4 X_4, \end{aligned}$$

где векторные поля X_1, X_2 образуют ортонормированный репер. Нормальный гамильтонов поток этой структуры суперинтегрируем в том смысле, что он имеет четыре независимых коммутирующих первых интеграла, включая нормальный гамильтониан H , и еще один независимый первый интеграл, коммутирующий с H . Если $T_4 \neq 0$, то аномальные геодезические этой структуры строгие, т.е. не являются нормальными.

3.2.4 Сопряженные точки

Предложение 3.3. Пусть $g(t)$ есть аномальная геодезическая левоинвариантной энгелевой субримановой структуры, и пусть $\delta = T_6 - \frac{1}{4}(T_2)^2$.

Если $\delta > 0$, то все сопряженные времена имеют вид

$$t_{\text{conj}} = \frac{\pi k}{\sqrt{\delta}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Если $g(t)$ строго аномальна, то ограничение $g|_{[0, \tau]}$ есть C^0 -локально кратчайшая при $\tau < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$, и не является таковой при $\tau > \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Если $g(t)$ строго аномальна и $\delta \leq 0$, то ограничение $g|_{[0, \tau]}$ есть C^0 -локально кратчайшая для любого $\tau > 0$.

3.2.5 Библиографические комментарии

Результаты этого раздела получены в работе [26], см. также [9, 10].

4 Задачи, интегрируемые в элементарных функциях

4.1 Субриманова задача на группе Гейзенберга

4.1.1 Постановка задачи

Задача Диодоны Рассмотрим следующую формализацию древнейшей задачи оптимизации, восходящей к IX веку до н. э. [86], задачи Диодоны.

Пусть на евклидовой плоскости заданы точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединенные кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть также задано число $S \in \mathbb{R}$. Требуется соединить точки a_0, a_1 кратчайшей кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы кривые γ_0 и γ ограничивали на плоскости область алгебраической площади S .

Задача оптимального управления Эту геометрическую задачу можно переформулировать как задачу оптимального управления

$$\dot{g} = u_1 X_1(g) + u_2 X_2(g), \quad g = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (4.1)$$

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad (4.2)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min, \quad (4.3)$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.4)$$

Это субринанова задача для субринановой структуры на \mathbb{R}^3 , заданной ортонормированным репером X_1, X_2 .

Алгебра Гейзенберга и группа Гейзенберга Алгеброй Гейзенберга называется трехмерная свободная нильпотентная алгебра Ли \mathfrak{g} с двумя образующими, глубины 2. Существует базис $\mathfrak{g} = \text{span}(X_1, X_2, X_3)$, в котором единственная ненулевая скобка Ли есть

$$[X_1, X_2] = X_3.$$

Алгебра Гейзенберга имеет градуировку $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = \text{span}(X_1, X_2)$, $\mathfrak{g}^{(2)} = \mathbb{R}X_3$, $[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(i)}] = \mathfrak{g}^{(i+1)}$, $\mathfrak{g}^{(3)} = \{0\}$, поэтому она является алгеброй Карно. Соответствующая связная односвязная группа Ли G называется *группой Гейзенберга*.

Группа Гейзенберга имеет линейное представление

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

дающее закон умножения в этой группе:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)/2 \end{pmatrix}.$$

Векторные поля (4.4) левоинвариантны на группе Ли G . Поэтому задача (4.1)–(4.4) есть левоинвариантная субринанова задача на группе Гейзенберга. Это — простейшая субринанова задача, не являющаяся римановой.

Неголономная левоинвариантная субринанова задача на группе Гейзенберга единственна, с точностью до изоморфизма этой группы [71].

В силу левоинвариантности задачи можно считать $g_0 = \text{Id} = (0, 0, 0)$ в (4.2).

4.1.2 Симметрии распределения и субринановой структуры

Пусть $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ есть субринанова структура на гладком многообразии M . Векторное поле $X \in \text{Vec}(M)$ называется *инфinitезимальной симметрией*:

(1) распределения Δ , если его поток $e^{tX} : M \rightarrow M$ сохраняет Δ :

$$(e^{tX})_* \Delta = \Delta, \quad t \in \mathbb{R};$$

(2) субринановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, если его поток сохраняет Δ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$(e^{tX})_* \Delta = \Delta, \quad (e^{tX})^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пространство инфинитезимальных симметрий распределения (субринановой структуры) есть алгебра Ли.

Теорема 4.1. (1) Алгебра Ли инфинитезимальных симметрий распределения $\text{span}(X_1, X_2)$ параметризуется гладкими функциями трех переменных.

- (2) Алгебра Ли инфинитезимальных симметрий субримановой структуры с ортонормированным репером X_1, X_2 есть четырехмерная алгебра Ли $\text{span}(X_0, Y_1, Y_2, Y_3)$ с таблицей умножения

$$[X_0, Y_1] = -Y_2, \quad [X_0, Y_2] = Y_1, \quad [Y_1, Y_2] = Y_3.$$

Векторные поля Y_1, Y_2, Y_3 образуют правоинвариантный репер на группе Гейзенберга, а поле X_0 определяет вращение:

$$X_0 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

4.1.3 Геодезические

Существование оптимальных управлений в задаче (4.1)–(4.4) следует из теорем Ращевского-Чжоу и Филиппова.

Аномальные траектории постоянны.

Для параметризации нормальных экстремалей введем линейные на слоях T^*G гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$, $X_3 = [X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z}$. Нормальные экстремали суть траектории гамильтонова поля \vec{H} , где $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$. Натурально параметризованные экстремали принадлежат поверхности уровня $\{H = \frac{1}{2}\}$. Введем на этой поверхности координату θ :

$$h_1 = \cos \theta, \quad h_2 = \sin \theta.$$

Натурально параметризованные экстремали в случае $h_3 = 0$ имеют вид

$$\theta \equiv \theta_0, \quad h_3 \equiv 0, \tag{4.5}$$

$$x = t \cos \theta_0, \quad y = t \sin \theta_0, \quad z = 0, \tag{4.6}$$

а в случае $h_3 \neq 0$

$$\theta = \theta_0 + h_3 t, \quad h_3 \equiv \text{const}, \tag{4.7}$$

$$x = (\sin(\theta_0 + h_3 t) - \sin \theta_0)/h_3, \tag{4.8}$$

$$y = (\cos \theta_0 - \cos(\theta_0 + h_3 t))/h_3, \tag{4.9}$$

$$z = (h_3 t - \sin h_3 t)/(2h_3^2). \tag{4.10}$$

При $h_3 = 0$ геодезические (4.6) суть прямые в плоскости $\{z = 0\}$, а в случае $h_3 \neq 0$ геодезические (4.8)–(4.10) суть спирали с переменным наклоном, проецирующиеся на плоскость (x, y) в окружности.

Формулы (4.5)–(4.10) дают параметризацию экспоненциального отображения

$$\begin{aligned} \text{Exp} : (\theta_0, h_3, t) &\mapsto (x, y, z), \\ \text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow G, \quad C = \mathfrak{g}^* \cap \{H = 1/2\}. \end{aligned}$$

В случае $h_3 = 0$ геодезические $g(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимальны для любого $t_1 > 0$. Эти геодезические $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и только они, являются метрическими прямыми.

4.1.4 Сопряженные времена

Теорема 4.2. Пусть $(\theta_0, h_3) \in C$ и $g(t) = \text{Exp}(\theta_0, h_3, t)$.

Если $h_3 = 0$, то на геодезической $g(t)$, $t > 0$, нет сопряженных точек.

Если $h_3 \neq 0$, то сопряженные времена вдоль геодезической $g(t)$, $t > 0$, имеют вид:

$$\frac{2\pi k}{|h_3|} \quad u \quad \frac{2p_k}{|h_3|}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $p_k \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$ есть k -й положительный корень уравнения

$$(2p - \sin 2p) \cos p - (1 - \cos 2p) \sin p = 0.$$

Поэтому первое сопряженное время равно

$$t_{\text{conj}}^1 = \frac{2\pi}{|h_3|},$$

а первая каустика есть

$$\text{Conj}^1 = \{x = y = 0, \quad z \neq 0\}.$$

4.1.5 Время разреза и множество разреза

Теорема 4.3. Время разреза вдоль геодезической $g(t) = \text{Exp}(\theta_0, h_3, t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} t_{\text{cut}} &= +\infty \quad \text{при } h_3 = 0, \\ t_{\text{cut}} &= \frac{2\pi}{|h_3|} \quad \text{при } h_3 \neq 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{conj}}^1(\lambda), \quad \lambda \in C,$$

и множество разреза совпадает с первой каустикой:

$$\text{Cut} = \text{Conj}^1 = \{x = y = 0, z \neq 0\}.$$

Геодезические-спиралы теряют оптимальность (как локальную, так и глобальную) при первом после начала пересечении с осью z ; то есть они оптимальны вплоть до первого витка окружности $(x(t), y(t))$.

4.1.6 Оптимальный синтез

Пусть $g_1 = (x_1, y_1, z_1) \neq (0, 0, 0)$ в граничных условиях (4.2). Опишем соответствующие решения задачи (4.1)–(4.4).

Если $z_1 = 0$, $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$, то кратчайшая есть прямолинейный отрезок (4.6), где

$$t \in [0, t_1], \quad x_1 = t_1 \cos \theta_0, \quad y_1 = t_1 \sin \theta_0.$$

Если $z_1 \neq 0$, $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$, то кратчайшая есть спираль (4.8)–(4.10), где $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2 + y_1^2}{|z_1|} &= \frac{8 \sin^2 p_1}{2p_1 - \sin 2p_1}, \quad p_1 \in (0, \pi), \\ h_3 &= \text{sgn } z_1 \sqrt{\frac{2p_1 - \sin 2p_1}{2|z_1|}}, \\ t_1 &= \frac{2p_1}{|h_3|}, \\ x_1 &= \frac{2 \sin p_1}{h_3} \cos \tau_1, \quad y_1 = \frac{2 \sin p_1}{h_3} \sin \tau_1, \\ \theta_0 &= \tau_1 - p_1. \end{aligned}$$

Наконец, если $z_1 \neq 0$, $x_1^2 + y_1^2 = 0$, то существует однопараметрическое семейство кратчайших (4.8)–(4.10), где $t \in \left[0, \frac{2\pi}{|h_3|}\right]$, $h_3 = \text{sgn } z_1 \sqrt{\frac{\pi}{|z_1|}}$, $\theta_0 \in S^1$.

4.1.7 Субриманово расстояние и сферы

Пусть $g = (x, y, z) \in G$. Тогда субриманово расстояние $d_0(g) = d(\text{Id}, g)$ представляется следующим образом.

Если $z = 0$, то $d_0(g) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Если $z \neq 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$, то

$$d_0(g) = \frac{p}{\sin p} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.11)$$

$$\frac{2p - \sin 2p}{8 \sin^2 p} = \frac{|z|}{x^2 + y^2}, \quad p \in (0, \pi). \quad (4.12)$$

Если $z \neq 0$, $x^2 + y^2 = 0$, то $d_0(g) = 2\sqrt{\pi|z|}$.

Субриманова сфера радиуса R с центром в единице есть поверхность вращения с параметрическими уравнениями

$$x = R \frac{\sin p}{p} \cos \tau, \quad y = R \frac{\sin p}{p} \sin \tau, \quad z = R^2 \frac{2p - \sin 2p}{8p^2}, \quad p \in [-\pi, \pi], \quad \tau \in S^1,$$

она похожа на яблоко и имеет две особые конические точки $(x, y, z) = (0, 0, \pm R^2/(4\pi))$. Сфера сохраняется вращениями X_0 и растягивается дилатациями $Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z}$:

$$e^{rX_0}(S_{\text{Id}}(R)) = S_{\text{Id}}(R), \quad e^{rY}(S_{\text{Id}}(R)) = S_{\text{Id}}(e^r R).$$

Единичная сфера $S_{\text{Id}}(1)$ и ее половина изображены на Рис. 2 и 3 соответственно.

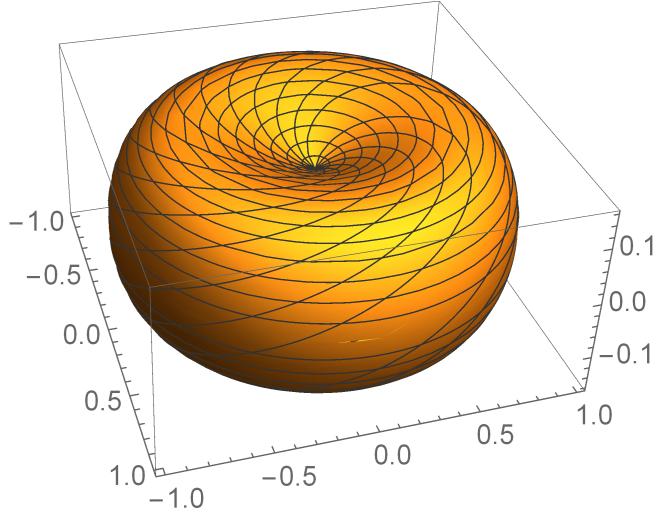


Рис. 2: Субриманова сфера на группе Гейзенберга

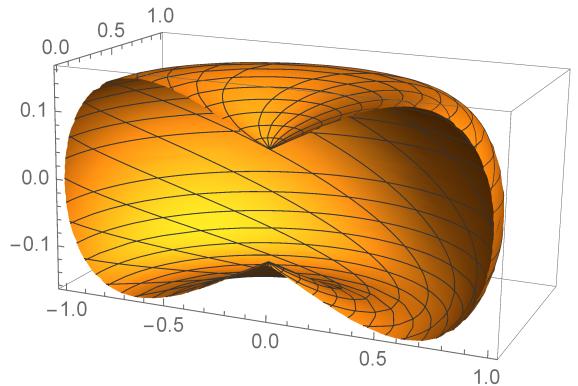


Рис. 3: Субриманова полусфера на группе Гейзенберга

4.1.8 Библиографические комментарии

Субриманова задача на группе Гейзенберга описана практически в каждой книге или обзоре по субримановой и неголономной геометрии, см. [6, 15, 36, 46, 58, 69, 77]. По-видимому, первое детальное исследование этой задачи было выполнено в работах [32, 41, 88].

В работе [88] исследован геодезический поток для контактных левоинвариантных субримановых структур на трехмерных группах Ли (в том числе на группе Гейзенберга) методами теории динамических систем.

4.2 Машина Маркова-Дубинса

4.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим модель машины, движущейся по плоскости. Состояние машины задается ее положением и ориентацией на плоскости. Машина может ехать вперед с постоянной линейной скоростью и одновременно поворачиваться с ограниченной угловой скоростью. Требуется перевести машину из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за минимальное время.

После выбора подходящих единиц измерения задача формулируется как задача быстродействия

$$\dot{x} = \cos \theta, \quad g = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad (4.13)$$

$$\dot{y} = \sin \theta, \quad u \in [-1, 1], \quad (4.14)$$

$$\dot{\theta} = u, \quad (4.15)$$

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad (4.16)$$

$$t_1 \rightarrow \min. \quad (4.17)$$

Это левоинвариантная задача на группе $G = \text{SE}(2) \cong \mathbb{R}^2 \ltimes S^1$ евклидовых движений плоскости, поэтому можно положить $g_0 = \text{Id} = (0, 0, 0)$. В терминах левоинвариантных векторных полей на этой группе Ли

$$X_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.18)$$

управляемая система (4.13)–(4.15) записывается как

$$\dot{g} = X_1 + uX_2, \quad g \in G, \quad u \in [-1, 1]. \quad (4.19)$$

4.2.2 Управляемость

Теорема 4.4. *Множество достижимости системы (4.19) из точки Id есть вся группа $\text{SE}(2)$.*

4.2.3 Оптимальные траектории

Существование решений в задаче (4.13)–(4.16) следует из теоремы Филиппова.

Введем линейные на слоях T^*G гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$, $\lambda \in T^*G$, $X_3 = [X_1, X_2]$.

Из принципа максимума Понтрягина получаем гамильтонову систему

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= -uh_3, & \dot{h}_2 &= h_3, & \dot{h}_3 &= uh_1, \\ \dot{g} &= X_1 + uX_2\end{aligned}$$

и условие максимума

$$u(t)h_2(t) = \max_{|v| \leq 1} vh_2(t).$$

Если на некотором промежутке $h_2(t) \neq 0$, то $u \equiv \operatorname{sgn} h_2(t) = \pm 1$, и экстремальная кривая есть дуга окружности.

Если на некотором промежутке $h_2(t) \equiv 0$, то $u \equiv 0$, и экстремальная кривая есть прямолинейный отрезок.

Теорема 4.5. *Оптимальные траектории могут быть одного из следующих двух типов:*

- (1) *конкатенация дуги окружности единичного радиуса, прямолинейного отрезка, и дуги окружности единичного радиуса,*
- (2) *конкатенация не более чем трех дуг окружностей единичного радиуса.*

В случае (2), если a, b, c суть времена движения по дугам, то $\pi < b < 2\pi$, $\min(a, c) < b - \pi$, $\max(a, c) < b$.

4.2.4 Библиографические комментарии

Впервые версию задачи (4.13)–(4.17) рассмотрел в 1887 г. А.А. Марков [54].

Детально эту задачу изучил в 1957 г. Л. Дубинс [38]. Он показал, что оптимальная траектория принадлежит одному из 6 типов конкатенаций дуг единичных окружностей и прямолинейных отрезков.

Подробный анализ этой задачи методами геометрической теории управления, включая теорему 4.5, приведен в [85].

Анализ и приложение задачи Маркова-Дубинса к управлению движением самолетов см. в работе [62].

Программная реализация оптимального синтеза в этой задаче описана в работе [11].

4.3 Машина Ридса-Шеппа

4.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим вариацию модели машины из раздела 4.2. Пусть теперь машина может ехать вперед или назад с постоянной линейной скоростью и одновременно поворачиваться с ограниченной угловой скоростью. Требуется перевести машину из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за минимальное время.

Задача формулируется как задача быстродействия

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad g = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad (4.20)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta, \quad |v| = 1, \quad u \in [-1, 1], \quad (4.21)$$

$$\dot{\theta} = u, \quad (4.22)$$

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad (4.23)$$

$$t_1 \rightarrow \min. \quad (4.24)$$

Это левоинвариантная задача на группе Ли $G = \text{SE}(2) \cong \mathbb{R}^2 \ltimes S^1$. Управляемая система (4.20)–(4.22) в терминах левоинвариантных векторных полей (4.18) записывается как

$$\dot{g} = vX_1 + uX_2, \quad g \in G, \quad |v| = 1, \quad u \in [-1, 1]. \quad (4.25)$$

4.3.2 Управляемость

Теорема 4.6. *Множество достижимости системы (4.25) из точки Id есть вся группа $\text{SE}(2)$.*

4.3.3 Существование оптимальных траекторий

Множество значений управляющего параметра для машины Ридса-Шеппа невыпукло (см. (4.21)), поэтому общие теоремы существования оптимальных управлений для нее неприменимы. Однако теорема существования справедлива.

Теорема 4.7. В задаче (4.20)–(4.24) оптимальное управление существует.

4.3.4 Оптимальные траектории

Теорема 4.8. Для любой точки $g_1 \in \text{SE}(2)$ оптимальная траектория может быть выбрана одного из следующих двух типов:

- (1) конкатенация не более двух дуг окружностей единичного радиуса, прямолинейного отрезка, и не более двух дуг окружностей единичного радиуса,
- (2) конкатенация не более чем четырех дуг окружностей единичного радиуса.

4.3.5 Библиографические комментарии

Задачу (4.20)–(4.24) впервые рассмотрели Дж. Ридс и Л. Шепп в работе [68]. Они показали, что оптимальная траектория принадлежит одному из 48 типов конкатенаций дуг единичных окружностей и прямолинейных отрезков.

Эта задача детально исследована в работе [85]: приведено семейство траекторий, содержащее оптимальные траектории в задаче (4.20)–(4.24), удовлетворяющие принципу максимума Понtryгина и условиям оптимальности высших порядков. В этой работе количество типов оптимальных траекторий уменьшено до 46.

Полный оптимальный синтез построен в работе [83], см. также [82].

Этой задаче посвящена также работа [27].

Программная реализация оптимального синтеза в задаче Ридса-Шеппа описана в работе [11].

4.4 Субриманова задача с вектором роста (3, 6)

4.4.1 Постановка задачи и две модели

Левоинвариантная субриманова задача с вектором роста (3, 6) ставится следующим образом:

$$\dot{x} = u, \quad x, u \in \mathbb{R}^3, \quad (4.26)$$

$$\dot{y} = x \wedge u, \quad y \in \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3, \quad (4.27)$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1, \quad y(t_1) = y_1, \quad (4.28)$$

$$\int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} dt \rightarrow \min. \quad (4.29)$$

Отождествляя пространство $\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3$ с \mathbb{R}^3 с помощью оператора $* : \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $y \mapsto z$, где $y \wedge z$ есть форма объема на \mathbb{R}^3 , можно заменить внешнее произведение $x \wedge u$ на векторное произведение $[x, u]$ в \mathbb{R}^3 , и получить постановку

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^3, \\ \dot{y} &= [x, u], \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1, \quad y(t_1) = y_1, \\ \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2} dt &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

В координатах $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ортонормированный репер для соответствующей субримановой структуры имеет вид:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial y_3}, \quad (4.30)$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad (4.31)$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial y_2}. \quad (4.32)$$

Ненулевые скобки Ли в алгебре Ли, порожденной полями X_i , имеют вид:

$$[X_1, X_2] = X_{12}, \quad [X_2, X_3] = X_{23}, \quad [X_3, X_1] = X_{31}, \quad (4.33)$$

где $X_{12} = 2 \frac{\partial}{\partial y_3}$, $X_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial y_1}$, $X_{31} = 2 \frac{\partial}{\partial y_2}$. Будем называть ортонормированный репер (4.30)–(4.32) первой моделью субримановой (3, 6)-структурой.

Вторая модель дается векторными полями

$$\tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_3}{2} \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial y_3}, \quad (4.34)$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{x_3}{2} \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad (4.35)$$

$$\tilde{X}_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial y_2}. \quad (4.36)$$

4.4.2 Симметрии

Задача (4.26)–(4.29) инвариантна относительно группы $\mathrm{SO}(3)$, естественно действующей на управления и состояния:

$$\begin{aligned} g : (u, x, v \wedge w) &\mapsto (g(u), g(x), g(v) \wedge g(w)), \\ g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3), \\ g \in \mathrm{SO}(3). \end{aligned}$$

4.4.3 Геодезические в первой модели

Из таблицы умножения (4.33) следует, что распределение $\Delta = \mathrm{span}(X_1, X_2, X_3)$ удовлетворяет условию Гоха $\Delta_q^2 = T_q G$, $q \in G \cong \mathbb{R}^6$. Поэтому все субримановы кратчайшие нормальны. В нормальном случае гамильтониан принципа максимума Понтрягина имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2} + (\rho, [x, p]) + \frac{x^2 \rho^2}{2} - \frac{(\rho, x)^2}{2}, \quad (x, y, p, \rho) \in T^*G,$$

где (\cdot, \cdot) и $[\cdot, \cdot]$ суть скалярное и векторное произведения в \mathbb{R}^3 . Соответствующая гамильтонова система есть

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p + [\rho, x], \\ \dot{y} &= [x, p] + x^2 \cdot \rho - (\rho, x) \cdot x, \\ \dot{p} &= -[p, \rho] - \rho^2 \cdot x + (\rho, x) \cdot \rho, \\ \dot{\rho} &= 0, \\ x(0) = y(0) &= 0, \quad p_0^2 = 1. \end{aligned}$$

Поэтому $\rho \equiv \rho_0$, $p = [\rho_0, x] + p_0$.

Выберем декартовы координаты $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ так, чтобы ось x_3 была сопараллена оси ρ_0 , ось x_1 принадлежала плоскости $\mathrm{span}(\rho_0, p_0)$, а ось x_2 так, чтобы система координат была правосторонней. Тогда горизонтальная подсистема нормальной гамильтоновой системы принимает форму

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin \varphi - rx_2, \\ \dot{x}_2 &= rx_1, \\ \dot{x}_3 &= \cos \varphi, \\ \dot{y}_1 &= x_2 \cos \varphi - rx_1 x_3, \\ \dot{y}_2 &= x_3 \sin \varphi - x_1 \cos \varphi - rx_2 x_3, \\ \dot{y}_3 &= -x_2 \sin \varphi + (x_1^2 + x_2^2) r, \\ r &= 2|\rho_0|, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому в первой модели (4.30)–(4.32)

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{r} \sin \varphi \sin(rt), \\x_2 &= \frac{1}{r} \sin \varphi(1 - \cos(rt)), \\x_3 &= t \cos \varphi, \\y_1 &= \frac{1}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi(rt(1 + \cos(rt)) - 2 \sin(rt)), \\y_2 &= \frac{1}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi(rt \sin(rt) + 2 \cos(rt) - 2), \\y_3 &= \frac{1}{r^2} \sin^2 \varphi(rt - \sin(rt)).\end{aligned}$$

4.4.4 Геодезические во второй модели

Во второй модели (4.34)–(4.36) экстремальные управлении, соответствующие геодезическим постоянной скорости, имеют вид

$$u(t) = a \cos(ct) + b \sin(ct) + z, \quad |a| = |b| > 0, \quad c \geq 0,$$

где a, b, z взаимно ортогональные векторы в \mathbb{R}^3 . Соответствующие геодезические суть

$$q(t) = \left(\frac{\sin(ct)}{c} a + \frac{1 - \cos(ct)}{c} b + tz, \right. \\ \left. \frac{ct - \sin(ct)}{2c^2} a \wedge b + \frac{2(1 - \cos(ct)) - ct \sin(ct)}{2c^2} a \wedge z + \frac{ct(1 + \cos(ct)) - 2 \sin(ct)}{2c^2} b \wedge z \right), \quad c > 0,$$

и

$$q(t) = (t(a + z), 0), \quad c = 0. \quad (4.37)$$

При $c = 0$ геодезические суть однопараметрические подгруппы в группе Карно $G = \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3)$, лежащие в ее первом слое $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$.

4.4.5 Аномальные геодезические и аномальное множество

С точностью до перепараметризации, аномальные управлении постоянны, а аномальные геодезические (4.37) суть однопараметрические подгруппы в $\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3)$, лежащие в первом слое $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$.

Аномальное множество, соответствующее единичному элементу $\text{Id} \in \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3)$, есть первый слой группы Карно:

$$\text{Abn} = \mathbb{R}^3 \times \{0\} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3)\}.$$

4.4.6 Время разреза

Определим следующие функции:

$$S(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad U(\theta) = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{4\theta^2}, \quad V(\theta) = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{2\theta^2}, \quad Q(\theta) = -\frac{U(\theta)S(\theta)}{V(\theta)},$$

и пусть $\varphi_1 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ есть первый положительный корень функции V . Функция $Q(\theta)$ неотрицательна и строго возрастающая при $\theta \in [\pi, \varphi_1]$. Более того, $Q(\pi) = 0$ и $Q(\varphi_1 - 0) = +\infty$. Поэтому определена обратная функция

$$Q^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [\pi, \varphi_1).$$

Теорема 4.9. *Время разреза для геодезических равно*

$$\begin{aligned}t_{\text{cut}}(a, b, z, c) &= \frac{2}{c} Q^{-1} \left(\frac{|z|^2}{|a|^2} \right), \quad c > 0, \\t_{\text{cut}}(a, b, z, 0) &= +\infty.\end{aligned}$$

Поэтому метрическими прямыми являются лишь аномальные геодезические (4.37) — однопараметрические подгруппы в первом слое группы Карно.

4.4.7 Множество разреза

Теорема 4.10. *Множество разреза в данной задаче есть*

$$\text{Cut} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0, \quad \exists a \in \mathbb{R} : x = ay\}.$$

Определим следующие функции:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= -\frac{S(\theta)}{V(\theta)} \sqrt{\frac{W(\theta)}{U(\theta)}}, & R(\theta) &= \frac{1 - S^2(\theta)}{\sqrt{U(\theta)W(\theta)}}, \\ W(\theta) &= U(\theta) - S(\theta)V(\theta). \end{aligned}$$

Функция $P : [\pi, \varphi_1) \rightarrow [0, +\infty)$ есть возрастающая биекция, поэтому определена обратная функция $P^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [\pi, \varphi_1)$.

Теорема 4.11. *Пусть $(x, y) \in \text{Cut}$. Тогда*

$$\begin{aligned} d^2((0, 0), (x, y)) &= |x|^2 + R(\theta)|y|, \\ \theta &= P^{-1}\left(\frac{|x|^2}{|y|}\right) \in [\pi, \varphi_1). \end{aligned}$$

4.4.8 Библиографические комментарии

Изложение в этом разделе опирается на независимые работы [59] и [57]. Пункты 4.4.1 (первая модель), 4.4.2, 4.4.3, 4.4.7 (теорема 4.10) опираются на работу [59]. Пункты 4.4.1 (вторая модель), 4.4.4, 4.4.5, 4.4.6, 4.4.7 (теорема 4.11) опираются на работу [57].

4.5 Субриманова задача на двухступенных свободных nilпотентных группах Ли

4.5.1 Постановка задачи

Алгебры Ли и группы Ли Двухступенчатая свободная nilпотентная алгебра Ли \mathfrak{g} удовлетворяет соотношениям

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)}, \quad [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \mathfrak{g}^{(2)}, \quad [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = [\mathfrak{g}^{(2)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = \{0\}.$$

Она имеет базис

$$\mathfrak{g} = \text{span}\{X_i, X_{jk} \mid 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j < k \leq n\},$$

в котором таблица умножения имеет вид

$$[X_i, X_j] = X_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Эта алгебра Ли имеет размерность $n(n+1)/2$, где $n = \dim \mathfrak{g}^{(1)}$.

Обозначим через G связную односвязную группу Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} . Эта группа Ли моделируется пространством $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n)$ с законом умножения

$$(x^1, y^1) \cdot (x^2, y^2) = (x^1 + x^2, y^1 + y^2 - x^1 \wedge x^2), \quad (x^i, y^i) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n),$$

где $x^1 \wedge x^2 = x^1 \otimes (x^2)^T - x^2 \otimes (x^1)^T$. Поэтому будем далее считать $G = \mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n)$, так что любой элемент $(x, y) \in G$ имеет координатное представление $(x_1, \dots, x_n; y_{12}, \dots, y_{(n-1)n})$. В этих координатах следующие векторные поля образуют левоинвариантный репер на G :

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j \frac{\partial}{\partial y_{ij}}, \quad i = 1, \dots, n, \\ X_{ij} &= 2 \frac{\partial}{\partial y_{ij}}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Субриманова задача Рассмотрим субриманову структуру на группе Ли G с ортонормированным рефером (X_1, \dots, X_n) . Соответствующая задача оптимального управления имеет вид

$$\dot{x} = u, \quad x, u \in \mathbb{R}^n, \quad (4.38)$$

$$\dot{y} = x \wedge u, \quad y \in \mathfrak{so}(n), \quad (4.39)$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x(t_1) = x^1, \quad y(t_1) = y^1, \quad (4.40)$$

$$\int_0^{t_1} |u| dt \rightarrow \min. \quad (4.41)$$

В координатах система (4.38), (4.39) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, & i &= 1, \dots, n, \\ \dot{y}_{ij} &= x_i u_j - x_j u_i, & 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Задача (4.38)–(4.41) впервые рассматривалась Б. Гаво [41], а затем Р. Брокеттом [31], поэтому она называется в литературе *задачей Гаво-Брокетта*.

Существование решений Субримановы кратчайшие существуют по теоремам Ращевского-Чжоу и Филиппова.

Симметрии Задача инвариантна относительно естественного действия группы $O(n)$:

$$g : (u, x, v \wedge w) \mapsto (g(u), g(x), g(v) \wedge g(w)), \quad u, x, v, w \in \mathbb{R}^n, \quad g \in O(n).$$

Или, иными словами,

$$g : (u, x, y) \mapsto (g(u), g(x), gyy^T), \quad u, x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathfrak{so}(n). \quad (4.42)$$

4.5.2 Экстремали

Введем линейные на слоях T^*G гамильтонианы, соответствующие базисным полям:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad h_{ij}(\lambda) = \langle \lambda, X_{ij} \rangle,$$

и положим

$$h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{H} = (h_{ij}) \in \mathfrak{so}(n).$$

Теорема 4.12 (ПМП). Пусть $\lambda_t = (x(t), y(t), h(t), \mathbb{H}(t))$ есть экстремаль, соответствующая оптимальному управлению $u(t)$.

(1) Если λ_t аномальна, то $h \equiv 0$, $\mathbb{H} \equiv \text{const} \neq 0$ и $\mathbb{H}u(t) \equiv 0$.

Более того, если n четно и все собственные значения \mathbb{H} отличны от нуля, то $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$.

Если n нечетно и \mathbb{H} имеет только одно нулевое собственное значение, то $u(t)$ есть постоянный вектор, с точностью до перепараметризации времени.

(2) Если λ_t нормальна, то $u(t) \equiv h(t)$, $\mathbb{H} \equiv \text{const} \neq 0$, и

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \sum_{i=1}^n h_i X_i(g), \quad g = (x, y) \in G, \\ \dot{h} &= \mathbb{H}h. \end{aligned}$$

Согласно условию Гоха, все локально оптимальные аномальные траектории нормальны.

Впрочем, в примере 14 [31] показано, что существуют неоптимальные строго аномальные траектории.

Будем далее рассматривать случай общего положения: пусть при четном n матрица \mathbb{H} невырождена и имеет $n/2$ разных собственных значений, а при нечетном n матрица \mathbb{H} имеет одно нулевое собственное значение и разные все остальные собственные значения.

Запишем ненулевые собственные значения матрицы \mathbb{H} в виде:

$$\{i\lambda_1, -i\lambda_1, \dots, i\lambda_{[n/2]}, -i\lambda_{[n/2]}\},$$

где $\lambda_k > 0$ для всех k . Обозначим соответствующие собственные векторы матрицы \mathbb{H} :

$$\{v_1, v_{-1}, \dots, v_{[n/2]}, v_{-[n/2]}\}.$$

В случае нечетного n обозначим через v_0 вещественный собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению. Обозначим через $\langle v, w \rangle = v^T \bar{w}$ эрмитово скалярное произведение в \mathbb{C}^n , и определим ортогональные векторы

$$\alpha_k = 2 \operatorname{Im}(\langle h_0, v_k \rangle v_k), \quad \beta_k = 2 \operatorname{Re}(\langle h_0, v_k \rangle v_k), \quad \gamma_0 = \langle h_0, v_0 \rangle v_0.$$

Теорема 4.13. Пусть $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n)$ есть геодезическая. Если n четно, то

$$x = \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{1}{\lambda_i} (\cos(\lambda_i t) - 1) \alpha_i + \frac{1}{\lambda_i} \sin(\lambda_i t) \beta_i, \quad (4.43)$$

$$y = \sum_{i,j=1}^{[n/2]} A_{ij} \alpha_i \wedge \alpha_j + B_{ij} \alpha_i \wedge \beta_j + C_{ij} \beta_i \wedge \beta_j, \quad (4.44)$$

где

$$A_{ij} = \frac{1 - \cos(\lambda_i - \lambda_j)t}{2\lambda_i(\lambda_i - \lambda_j)} + \frac{\cos(\lambda_i + \lambda_j)t - 1}{2\lambda_i(\lambda_i + \lambda_j)} - \frac{\cos(\lambda_j t) - 1}{\lambda_i \lambda_j}, \quad i \neq j,$$

$$B_{ij} = \frac{(\lambda_j - \lambda_i) \sin(\lambda_i + \lambda_j)t}{2\lambda_i \lambda_j(\lambda_i + \lambda_j)} + \frac{(\lambda_i + \lambda_j) \sin(\lambda_i - \lambda_j)t}{2\lambda_i \lambda_j(\lambda_i - \lambda_j)} - \frac{\sin(\lambda_j t)}{\lambda_i \lambda_j}, \quad i \neq j,$$

$$B_{ii} = \frac{t}{\lambda_i} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^2},$$

$$C_{ij} = \frac{1 - \cos(\lambda_i - \lambda_j)t}{2\lambda_i(\lambda_i - \lambda_j)} - \frac{\cos(\lambda_i + \lambda_j)t - 1}{2\lambda_i(\lambda_i + \lambda_j)}.$$

Если n нечетно, то к суммам (4.43) и (4.44) нужно прибавить соответственно дополнительные слагаемые $t\gamma_0$ и

$$\sum_{i=1}^{[n/2]} \left[\frac{-t}{\lambda_i} (\cos(\lambda_i t) + 1) + \frac{2 \sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^2} \right] \alpha_i \wedge \gamma_0 + \sum_{i=1}^{[n/2]} \left[\frac{1}{\lambda_i^2} (2(1 - \cos(\lambda_i t)) - \lambda_i t \sin(\lambda_i t)) \right] \beta_i \wedge \gamma_0.$$

4.5.3 Нижняя оценка множества разреза

Рассмотрим следующее подмножество группы $G = \mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n)$:

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n) \mid y \neq 0, \exists 0 \neq M \in \mathrm{O}(n) : Mx = x, MyM^T = y, M|_{\ker y} = \mathrm{Id}\}. \quad (4.45)$$

Условие (4.45) означает, что элемент $M \in \mathrm{O}(n)$ стабилизирует (x, y) относительно действия (4.42).

Предложение 4.1. Для любого $n \geq 2$ множество $C_n \subset G$ есть полуалгебраическое множество коразмерности 2.

Теорема 4.14. Для всех $n \geq 2$ имеет место включение:

$$C_n \subset \mathrm{Cut}. \quad (4.46)$$

Замечание. При $n = 2, 3$ включение (4.46) превращается в равенство, см. разделы 4.1, 4.4. Верно ли это при $n \geq 4$, неизвестно.

4.5.4 Аномальное множество

Приведем известные описания и свойства аномального множества Abn .

Теорема 4.15. Имеет место равенство

$$\mathrm{Abn} = \bigcup_{W \in \mathrm{Gr}(n, n-2)} W \times (W \wedge W), \quad (4.47)$$

где $\mathrm{Gr}(n, n-2)$ есть рассманиан $(n-2)$ -мерных подпространств в \mathbb{R}^n .

Рангом элемента $y \in \mathfrak{so}(n)$ назовем размерность образа оператора $y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для открытого плотного подмножества в $\mathfrak{so}(n)$ ранг принимает максимальное значение: n при четном n , и $n-1$ при нечетном n .

Обозначим через $\mathfrak{so}(n)_{\text{sing}}$ множество элементов $y \in \mathfrak{so}(n)$, имеющих ранг меньше максимального, через $\mathfrak{so}(n)_d$ множество элементов ранга d , и через $\mathfrak{so}(n)_{<d}$ множество элементов ранга меньше d .

Теорема 4.16. Если n нечетно, то $\text{Abn} = \mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n)_{\text{sing}}$.

Теорема 4.17. Если n четно, то Abn есть объединение $Y_1 \cup Y_2$ двух квазипроективных подмногообразий

$$Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n) \mid x \in \text{Im } y, \quad y \in \mathfrak{so}(n)_{n-2}\},$$

$$Y_2 = \mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n)_{<n-2}.$$

В частности, Abn есть особое алгебраическое многообразие коразмерности 3.

Теорема 4.18. $\text{Abn} \subset G$ есть полуалгебраическое множество коразмерности не меньше 3.

Теорема 4.19. Для всех $k \geq 2$ имеют место включения

$$\bar{C}_n \setminus C_n \subset \text{Abn} \subsetneq \bar{C}_n.$$

Для любого $n \geq 4$ первое включение строгое, поэтому $\text{Cut} \cap \text{Abn} \neq \emptyset$. Более того, существуют аномальные геодезические с конечным временем разреза.

4.5.5 Библиографические комментарии

Рассматриваемая в данном разделе субриманова задача исследовалась в известных работах Б. Гаво [41], Р. Брокетта [31] и В. Лиу и Х. Суссмана [53]. Изложение в этом разделе опирается на следующие источники: пункты 4.5.1, 4.5.2 — статья [56], пункт 4.5.3 — статья [70], пункт 4.5.4: теоремы 4.15–4.18 — статья [52], теорема 4.19 — статья [70]. См. также [60].

4.6 Двухступенчатая субриманова задача коранга 1

4.6.1 Алгебра Ли и группа Ли

Рассмотрим алгебру Ли

$$\mathfrak{g} = \text{span}(X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k, Z), \quad k \in \mathbb{N},$$

с таблицей умножения

$$[X_i, Y_j] = -\delta_{ij} b_i Z, \quad b_i > 0, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

$$[X_i, Z] = [Y_i, Z] = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Пусть G есть связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} . Тогда $G \cong \mathbb{R}^{2k+1}$ и можно выбрать координаты

$$g = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2k+1}, \quad x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \quad y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k, \quad z \in \mathbb{R},$$

в которых умножение в G принимает вид

$$g \cdot g' = \left(x + x', y + y', z + z' - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k b_i (x_i \cdot x'_i - y_i \cdot y'_i) \right).$$

В этих координатах левоинвариантный репер на G есть

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} b_i y_i \frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{1}{2} b_i x_i \frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

4.6.2 Постановка задачи

Рассмотрим субриманову структуру на G с ортонормированным репером $(X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k)$. Соответствующая задача оптимального управления имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, & i &= 1, \dots, k, \\ \dot{y}_i &= v_i, & i &= 1, \dots, k, \\ \dot{z} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k b_i(u_i y_i - v_i x_i), \\ g(0) &= (0, 0, 0), & g(t_1) &= (x^1, y^1, z^1), \\ \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^k u_i^2 + v_i^2 \right)^{1/2} dt &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Существование решений следует из теорем Рашевского-Чжоу и Филиппова.

4.6.3 Экстремали

Анормальные экстремальные траектории постоянны.

Введем линейные на слоях T^*G гамильтонианы

$$h_{X_i}(\lambda) = \langle \lambda, X_i(g) \rangle, \quad h_{Y_i}(\lambda) = \langle \lambda, Y_i(g) \rangle, \quad h_Z(\lambda) = \langle \lambda, Z(g) \rangle.$$

Вдоль нормальных экстремалей имеем

$$u_i(t) = h_{X_i}(\lambda(t)), \quad v_i(t) = h_{Y_i}(\lambda(t)), \quad w(t) = h_Z(\lambda(t)).$$

Переходя к натуральной параметризации геодезических, можно считать, что

$$u_1^2(t) + \dots + u_k^2(t) + v_1^2(t) + \dots + v_k^2(t) \equiv 1.$$

Если $w = 0$, то

$$\begin{aligned} (u_i(t), v_i(t)) &\equiv (u_i^0, v_i^0) = \text{const}, \\ x_i(t) &= u_i^0 t, \quad y_i(t) = v_i^0 t, \quad z(t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Если $w \neq 0$, то (обозначая $a_i = b_i w$)

$$\begin{aligned} u_i(t) &= u_i^0 \cos a_i t - v_i^0 \sin a_i t, \\ v_i(t) &= u_i^0 \sin a_i t + v_i^0 \cos a_i t, \\ w(t) &= w \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \frac{1}{a_i} (u_i^0 \sin a_i t + v_i^0 \cos a_i t - v_i^0), \\ y_i(t) &= \frac{1}{a_i} (-u_i^0 \cos a_i t + v_i^0 \sin a_i t + u_i^0), \\ z(t) &= \frac{1}{2w^2} \left(wt - \sum_i \frac{1}{b_i} ((u_i^0)^2 + (v_i^0)^2) \sin a_i t \right). \end{aligned} \tag{4.48}$$

В полярных координатах

$$\begin{aligned} u_i &= r_i \cos \theta_i, & v_i &= r_i \sin \theta_i, & i &= 1, \dots, k, \\ r_1^2 + \dots + r_k^2 &\equiv 1, \end{aligned}$$

формулы (4.48) переписываются в виде

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \frac{r_i}{a_i} (\cos(a_i t + \theta_i) - \cos \theta_i), \\ y_i(t) &= \frac{r_i}{a_i} (\sin(a_i t + \theta_i) - \sin \theta_i), \\ z(t) &= \frac{1}{2w^2} \left(wt - \sum_i \frac{r_i^2}{b_i} \sin a_i t \right). \end{aligned}$$

Поэтому проекция геодезической на любую плоскость (x_i, y_i) есть окружность периода T_i , радиуса ρ_i с центром C_i , где

$$T_i = \frac{2\pi}{b_i w}, \quad \rho_i = \frac{r_i}{b_i w}, \quad C_i = -\frac{r_i}{b_i w}(\cos \theta_i, \sin \theta_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

Компонента $z(t)$ геодезических есть взвешенная сумма (с коэффициентами b_i) площадей, заметенных радиус-векторами $(x_i(t), y_i(t))$ на плоскостях $\mathbb{R}_{x_i y_i}^2$.

4.6.4 Время разреза

Теорема 4.20. Пусть $g(t)$ есть натурально параметризованная геодезическая, выходящая из начала координат. Тогда время разреза вдоль нее совпадает с первым сопряженным временем и равно

$$\begin{aligned} t_{\text{cut}} &= \frac{2\pi}{w \max_i b_i} \quad \text{при } w \neq 0, \\ t_{\text{cut}} &= +\infty \quad \text{при } w = 0. \end{aligned}$$

4.6.5 Библиографические комментарии

Результаты этого раздела получены в работе [5].

В более ранней работе [55] для этой же субримановой задачи получена параметризация геодезических и описано первое сопряженное время.

4.7 Двухступенчатая субриманова задача коранга 2

4.7.1 Алгебра Ли и группа Ли

Рассмотрим алгебру Ли

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)}, \\ [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] &= \mathfrak{g}^{(2)}, \quad [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = [\mathfrak{g}^{(2)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = \{0\}, \\ \dim \mathfrak{g}^{(1)} &= k \geq 2, \quad \dim \mathfrak{g}^{(2)} = 2. \end{aligned}$$

Существует базис

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \text{span}(X_1, \dots, X_k, Y_1, Y_2), \\ \mathfrak{g}^{(1)} &= \text{span}(X_1, \dots, X_k), \quad \mathfrak{g}^{(2)} = \text{span}(Y_1, Y_2), \end{aligned}$$

в котором

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \sum_{h=1}^2 b_{ij}^h Y_h, \quad i, j = 1, \dots, k, \\ [X_i, Y_j] &= [Y_1, Y_2] = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, 2, \\ L_h &= (b_{ij}^h) \in \mathfrak{so}(k), \quad h = 1, 2. \end{aligned}$$

Пусть G — связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} . Тогда на группе $G \cong \mathbb{R}^{k+2}$ существуют координаты $(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2)$, в которых

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{j,h} b_{ij}^h x_j \frac{\partial}{\partial y_h}, \quad i = 1, \dots, k, \\ Y_h &= \frac{\partial}{\partial y_h}, \quad h = 1, 2. \end{aligned}$$

4.7.2 Постановка задачи

Рассмотрим субриманову задачу на G с ортонормированным репером (X_1, \dots, X_k) . В координатах соответствующая задача оптимального управления имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= u_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \dot{y}_h &= \frac{1}{2}x^T L_h u, \quad h = 1, 2, \\ g &= (x_1, \dots, x_k, y_1, y_2) \in G \cong \mathbb{R}^{k+2}, \quad (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \\ g(0) &= \text{Id} = (0, \dots, 0), \quad g(t_1) = g^1, \\ \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^k u_i^2 \right)^{1/2} dt &\rightarrow \min.\end{aligned}$$

Существование решений следует из теорем Рашевского-Чжоу и Филиппова.

4.7.3 Экстремальные управление и траектории

В силу условия Гоха, локально оптимальные аномальные траектории нормальны.

Экстремальные управление, соответствующие натурально параметризованным нормальным траекториям, имеют вид

$$u(t) = e^{t(r_1 L_1 + r_2 L_2)} u_0, \quad \|u_0\| = 1, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R},$$

а сами эти траектории суть

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t e^{s(r_1 L_1 + r_2 L_2)} u_0 ds, \\ y_i(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t (x(s))^T L_i u(s) ds, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

4.7.4 Время разреза

Теорема 4.21. Натурально параметризованные геодезические, соответствующие начальному ковектору $\lambda_0 = (u_0, r) \in S^{k-1} \times \mathbb{R}^2$, имеют время разреза

$$\begin{aligned}t_{\text{cut}}(\lambda_0) &= \frac{2\pi}{\max \sigma(r_1 L_1 + r_2 L_2)}, \quad r \neq 0, \\ t_{\text{cut}}(\lambda_0) &= +\infty, \quad r = 0,\end{aligned}$$

где $\max \sigma(A)$ обозначает максимальный модуль собственного значения матрицы A . Вообще говоря, время разреза отлично от первого сопряженного времени.

Теорема 4.22. В случае $k = 4$ время разреза совпадает с первым сопряженным временем.

4.7.5 Библиографические комментарии

Результаты этого раздела получены в работе [13].

4.8 Субримановы $\mathbf{d} \oplus \mathbf{s}$ задачи

Левоинвариантная субриманова структура $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ на группе Ли G с алгеброй Ли \mathfrak{g} называется **д \oplus с структурой**, если выполнены следующие условия:

- (1) на группе Ли G имеется бинвариантное (левоинвариантное и правоинвариантное) скалярное произведение $\widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle}$,
- (2) $\mathfrak{g} = \mathbf{d} \oplus \mathbf{s}$,
- (3) $\Delta = \mathbf{d}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle = \widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle}|_{\mathbf{d}}$,
- (4) $\mathbf{s} = \mathbf{d}^\perp$, где ортогональность понимается в смысле $\widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle}$,
- (5) $[\mathbf{s}, \mathbf{s}] \subset \mathbf{s}$.

Теорема 4.23. Геодезические субримановой $\mathbf{d} \oplus \mathbf{s}$ структуры на группе Ли G , начинающиеся в точке Id , суть произведения двух однопараметрических подгрупп:

$$g(t) = e^{t(x_0+y_0)} e^{-ty_0}, \quad x_0 \in \mathbf{d}, \quad y_0 \in \mathbf{s}.$$

Частные случаи $\mathbf{d} \oplus \mathbf{s}$ структур рассматриваются далее:

- (1) на группе $SU(2)$, см. раздел 4.9,
- (2) на группе $SO(3)$, см. раздел 4.10,
- (3) на группе $SL(2)$, см. раздел 4.11.

4.8.1 Библиографические комментарии

Теорема 4.23 была получена независимо А.А. Аграчевым [1] и Р. Брокеттом [33] (эта работа базируется на предыдущей работе [30]). Затем этот результат интенсивно исследовался в [28, 29, 47–49], а также в [58, С. 200]. Его красивая геометрическая интерпретация получена в [19–21].

4.9 Осесимметричная субриманова задача на группе $SU(2)$

4.9.1 Группа Ли и алгебра Ли

Группа Ли $SU(2)$ есть группа унитарных унимодулярных 2×2 комплексных матриц

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Эта группа компактна, связна и односвязна. Группа Ли $SU(2)$ диффеоморфна трехмерной сфере

$$S^3 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

в силу диффеоморфизма

$$\Phi : SU(2) \rightarrow S^3, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Поэтому будем далее записывать элементы группы $SU(2)$ как пары комплексных чисел (α, β) .

Алгебра Ли группы $SU(2)$ есть алгебра косоэрмитовых бесследовых 2×2 комплексных матриц

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & -i\alpha \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

В этой алгебре можно выбрать базис

$$p_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

с таблицей умножения

$$[p_1, p_2] = k, \quad [p_2, k] = p_1, \quad [k, p_1] = p_2.$$

Форма Киллинга для $\mathfrak{su}(2)$ есть $\text{Kil}(X, Y) = 4 \text{Tr}(XY)$, поэтому $\text{Kil}(p_i, p_j) = -2\delta_{ij}$.

Подпространства $\mathbf{k} = \mathbb{R}k$, $\mathbf{p} = \text{span}(p_1, p_2)$ образуют картановское разложение для $\mathfrak{su}(2)$. Более того, (p_1, p_2) есть ортонормированный репер для скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle = -\frac{1}{2} \text{Kil}(\cdot, \cdot)$, суженного на подпространство \mathbf{p} .

4.9.2 Субриманова $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структура

Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру на $SU(2)$ с ортонормированным репером

$$X_1(g) = L_{g*}p_1, \quad X_2(g) = L_{g*}p_2, \quad g \in SU(2),$$

то есть распределение $\Delta_g = L_{g*}\mathbf{p}$ со скалярным произведением $\langle v_1, v_2 \rangle_g = \langle L_{g^{-1}*}v_1, L_{g^{-1}*}v_2 \rangle$.

Такая субриманова структура называется $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структурой. Эти структуры определяются следующим образом. Пусть G есть простая группа Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} . Пусть $\mathfrak{g} = \mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ есть картановское разложение алгебры \mathfrak{g} :

$$[\mathbf{k}, \mathbf{k}] \subset \mathbf{k}, \quad [\mathbf{p}, \mathbf{p}] \subset \mathbf{k}, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{p}] \subset \mathbf{p}.$$

Рассмотрим на G распределение $\Delta_g = L_{g*}\mathbf{p}$ с метрикой

$$\langle v_1, v_2 \rangle_g = \langle L_{g^{-1}*}v_1, L_{g^{-1}*}v_2 \rangle, \quad g \in G,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle = \alpha \text{Kil}|_{\mathbf{p}}(\cdot, \cdot)$, и $\alpha < 0$ (соотв. $\alpha > 0$) если G компактна (соотв. некомпактна). Тогда $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется *субримановой $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структурой* на G .

Все $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ субримановы структуры на $SU(2)$ эквивалентны между собой.

4.9.3 Геодезические и симметрии

Задача трехмерная контактная, поэтому аномальные траектории постоянны.

Введем линейные на слоях T^*G гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(g) \rangle$, $i = 1, 2, 3$, $X_3 = [X_1, X_2]$, и максимизированный нормальный гамильтониан ПМП $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$. Натурально параметризованные нормальные экстремали задаются точками цилиндра $C = \mathfrak{g}^* \cap \{H = \frac{1}{2}\}$:

$$\begin{aligned} \lambda &= (h_1, h_2, h_3, \text{Id}) \in C, \\ h_1 &= \cos \theta, \quad h_2 = \sin \theta, \quad h_3 = c. \end{aligned}$$

Тогда экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow G, \quad (\lambda, t) \mapsto g(t),$$

имеет следующую параметризацию:

$$\text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\theta, c, t) = e^{(\cos \theta p_1 + \sin \theta p_2 + ck)} e^{-ckt} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{c \sin(\frac{ct}{2}) \sin(\sqrt{1+c^2} \frac{t}{2})}{\sqrt{1+c^2}} + \cos\left(\frac{ct}{2}\right) \cos\left(\sqrt{1+c^2} \frac{t}{2}\right) + \\ &\quad + i \left(\frac{c \cos(\frac{ct}{2}) \sin(\sqrt{1+c^2} \frac{t}{2})}{\sqrt{1+c^2}} - \sin\left(\frac{ct}{2}\right) \cos\left(\sqrt{1+c^2} \frac{t}{2}\right) \right), \\ \beta &= \frac{\sin(\sqrt{1+c^2} \frac{t}{2})}{\sqrt{1+c^2}} \left(\cos\left(\frac{ct}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{ct}{2} + \theta\right) \right). \end{aligned}$$

Экспоненциальное отображение имеет следующие симметрии:

- вращения

$$\text{Exp}(\theta, c, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \text{Exp}(0, c, t),$$

- центральную симметрию: если $\text{Exp}(\theta, c, t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, то

$$\text{Exp}(\theta, -c, t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ e^{2i(\theta - \arg \beta)} \beta \end{pmatrix} & \text{если } \beta \neq 0, \\ \begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

4.9.4 Сопряженные точки

Момент времени $t > 0$ является сопряженным временем вдоль геодезической $g(t) = \text{Exp}(\theta, c, t)$ тогда и только тогда, когда

$$\sin\left(\sqrt{1+c^2} \frac{t}{2}\right) \left(2 \sin\left(\sqrt{1+c^2} \frac{t}{2}\right) - \sqrt{1+c^2} t \cos\left(\sqrt{1+c^2} \frac{t}{2}\right) \right) = 0.$$

Поэтому n -е сопряженное время $t_n^{\text{conj}}(\lambda)$ вдоль $g(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} t_{2m-1}^{\text{conj}}(\lambda) &= \frac{2\pi m}{\sqrt{1+c^2}}, \\ t_{2m}^{\text{conj}}(\lambda) &= \frac{2x_m}{\sqrt{1+c^2}}, \end{aligned}$$

где $\{x_1, x_2, \dots\}$ суть упорядоченные по возрастанию положительные корни уравнения $x = \operatorname{tg} x$.

Соответствующая n -я каустика

$$\operatorname{Conj}^n = \{\operatorname{Exp}(\lambda, t) \mid t = t_n^{\operatorname{conj}}(\lambda), \lambda \in C\}$$

есть

$$\begin{aligned}\operatorname{Conj}^{2m-1} &= e^{\mathbf{k}} \setminus \{\operatorname{Id}\}, \\ \operatorname{Conj}^{2m} &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{c \sin x_m}{\sqrt{1+c^2}} e^{i(\frac{\pi}{2}-y_n)} + \cos x_n e^{-iy_n} \\ \frac{\sin x_n}{\sqrt{1+c^2}} e^{i\theta} \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \right\},\end{aligned}$$

где $y_n = \frac{cx_n}{\sqrt{1+c^2}}$.

4.9.5 Множество разреза

Теорема 4.24. *Множество разреза есть*

$$\operatorname{Cut} = \operatorname{Conj}^1 = e^{\mathbf{k}} \setminus \{\operatorname{Id}\} = \{e^{ck} \mid c \in (0, 4\pi)\}.$$

Топологически, Cut есть интервал (большая окружность $e^{\mathbf{k}}$ с выколотой точкой Id). Так как множество разреза совпадает с первой каустикой, то геодезические одновременно теряют локальную и глобальную оптимальность (так же, как в группе Гейзенберга, см. раздел 4.1).

4.9.6 Субриманово расстояние

Теорема 4.25. *Пусть $g = (\alpha, \beta) \in \operatorname{SU}(2)$, тогда субриманово расстояние $d_0(g) = d(g, \operatorname{Id})$ имеет следующее представление.*

- (1) *Если $\alpha = 0$, то $d_0 = \pi$.*
- (2) *Если $|\alpha| = 1$, то $d_0 = 2\sqrt{|\arg \alpha|(2\pi - |\arg \alpha|)}$, где $\arg \alpha \in [-\pi, \pi]$.*
- (3) *Если $0 < |\alpha| < 1$ и $\operatorname{Re} \alpha = |\alpha| \sin(\frac{\pi}{2}|\alpha|)$, то $d_0 = \pi\sqrt{1 - |\alpha|^2}$.*
- (4) *Если $0 < |\alpha| < 1$ и $\operatorname{Re} \alpha > |\alpha| \sin(\frac{\pi}{2}|\alpha|)$, то*

$$d_0 = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin \sqrt{(1-|\alpha|^2)(1+\beta^2)} \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}\right),$$

где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin \sqrt{(1-|\alpha|^2)(1+\beta^2)} + \arcsin \frac{\beta\sqrt{1-|\alpha|^2}}{|\alpha|} \right) = \frac{\operatorname{Re} \alpha}{|\alpha|}, \\ \sin \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin \sqrt{(1-|\alpha|^2)(1+\beta^2)} + \arcsin \frac{\beta\sqrt{1-|\alpha|^2}}{|\alpha|} \right) = \frac{\operatorname{Im} \alpha}{|\alpha|}. \end{cases}$$

- (5) *Если $0 < |\alpha| < 1$ и $\operatorname{Re} \alpha < |\alpha| \sin(\frac{\pi}{2}|\alpha|)$, то*

$$d_0 = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}} \left(\pi - \arcsin \sqrt{(1-|\alpha|^2)(1+\beta^2)} \right) \in \left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}, \frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}} \right),$$

где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \left(\pi - \arcsin \sqrt{(1-|\alpha|^2)(1+\beta^2)} \right) + \arcsin \frac{\beta\sqrt{1-|\alpha|^2}}{|\alpha|} \right) = -\frac{\operatorname{Re} \alpha}{|\alpha|}, \\ \sin \left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \left(\pi - \arcsin \sqrt{(1-|\alpha|^2)(1+\beta^2)} \right) + \arcsin \frac{\beta\sqrt{1-|\alpha|^2}}{|\alpha|} \right) = \frac{\operatorname{Im} \alpha}{|\alpha|}. \end{cases}$$

4.9.7 Геодезические со специальными граничными условиями

Теорема 4.26. Если точка $g \in \mathrm{SU}(2)$ принадлежит интервалу

$$A = \{(\cos \varphi + i \sin \varphi, 0) \in \mathrm{SU}(2) \mid \varphi \in (0, 2\pi)\},$$

то существует счетное число геометрических разных геодезических γ_n , соединяющих Id и g :

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \{\alpha_n(t), \beta_n(t)) \in \mathrm{SU}(2) \mid t \in [0, t_n]\}, \\ \alpha_n(t) &= \left(\cos \left(t \frac{\pi n}{\sqrt{\pi^2 n^2 - \varphi^2}} \right) - i \frac{\varphi}{\pi n} \sin \left(t \frac{\pi n}{\sqrt{\pi^2 n^2 - \varphi^2}} \right) \right) e^{\frac{it\varphi}{\sqrt{\pi^2 n^2 - \varphi^2}}}, \\ \beta_n(t) &= \dot{\beta}_n(0) \frac{\sqrt{\pi^2 n^2 - \varphi^2}}{\pi n} \sin \left(t \frac{\pi n}{\sqrt{\pi^2 n^2 - \varphi^2}} \right) e^{\frac{it\varphi}{\sqrt{\pi^2 n^2 - \varphi^2}}}, \end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, а $t_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi^2 n^2 - \varphi^2}$ есть длина геодезической γ_n .

Теорема 4.27. Если точка $g \in \mathrm{SU}(2)$ не принадлежит ни интервалу A , ни сфере $S^2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathrm{SU}(2) \mid \mathrm{Im} \alpha = 0\}$, то существует конечное число геометрических разных геодезических, соединяющих Id и g .

4.9.8 Библиографические комментарии

Изложение разделов 4.9.1–4.9.5 опирается на работу [29], раздела 4.9.6 — на работу [19], раздела 4.9.7 — на работу [37].

4.10 Осесимметричная субриманова задача на группе $\mathrm{SO}(3)$

4.10.1 Группа Ли и алгебра Ли

Группа Ли $\mathrm{SO}(3)$ есть группа унимодулярных ортогональных 3×3 вещественных матриц

$$\mathrm{SO}(3) = \{g \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \mid gg^T = \mathrm{Id}, \det g = 1\}.$$

Эта группа компактна, связна и неодносвязна: ее фундаментальная группа есть \mathbb{Z}_2 . Алгебра Ли этой группы есть алгебра кососимметрических 3×3 вещественных матриц:

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid X^T = -X\}.$$

В этой алгебре Ли можно выбрать базис $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) = \mathrm{span}(p_1, p_2, k)$,

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

с таблицей умножения $[p_1, p_2] = k$, $[p_2, k] = p_1$, $[k, p_1] = p_2$. Алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{su}(2)$ изоморфны, а группа Ли $\mathrm{SU}(2)$ есть односвязная накрывающая группы $\mathrm{SO}(3)$, см. раздел 4.9. Двулистное накрытие $\Pi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ можно задать следующим образом:

$$\Pi : \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - 2b^2 - 2d^2 & 2cd - 2ab & 2bc + 2ad \\ 2cd + 2ab & 1 - 2b^2 - 2c^2 & 2bd + 2ac \\ 2bc - 2ad & 2bd - 2ac & 1 - 2c^2 - 2d^2 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Форма Киллинга в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$ есть $\mathrm{Kil}(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$, поэтому $\mathrm{Kil}(p_i, p_j) = -2\delta_{ij}$. Подпространства $\mathbf{k} = \mathbb{R}k$, $\mathbf{p} = \mathrm{span}(p_1, p_2)$ образуют картановское разложение алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$. Векторы p_1, p_2 образуют ортонормированный репер для скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle = -\frac{1}{2} \mathrm{Kil}(\cdot, \cdot)$, суженного на \mathbf{p} .

4.10.2 Субриманова $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структура

Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру на $\mathrm{SO}(3)$ с ортонормированным репером

$$X_1(g) = L_{g*}p_1, \quad X_2(g) = L_{g*}p_2, \quad g \in \mathrm{SO}(3),$$

то есть распределение $\Delta_g = L_{g*}\mathbf{p}$ со скалярным произведением $\langle v_1, v_2 \rangle_g = \langle L_{g^{-1}*}v_1, L_{g^{-1}*}v_2 \rangle$, она является $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структурой на $\mathrm{SO}(3)$.

4.10.3 Геодезические и симметрии

Анормальные траектории постоянны.

Пусть $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(g) \rangle$, $i = 1, 2, 3$, $X_3 = [X_1, X_2]$, $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$, и $C = \mathfrak{g}^* \cap \{H = \frac{1}{2}\}$. Далее, пусть

$$\begin{aligned}\lambda &= (h_1, h_2, h_3, \text{Id}) \in C, \\ h_1 &= \cos \theta, \quad h_2 = \sin \theta, \quad h_3 = c.\end{aligned}$$

Тогда экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow G, \quad (\lambda, t) \mapsto g(t),$$

параметризуется следующим образом:

$$\text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\theta, c, t) = e^{(\cos \theta p_1 + \sin \theta p_2 + ck)t} e^{-ckt} =$$

$$= \begin{pmatrix} K_1 \cos ct + K_2 \cos(2\theta + ct) + K_3 c \sin ct & K_1 \sin ct + K_2 \sin(2\theta + ct) - K_3 c \cos ct & K_4 \cos \theta + K_3 \sin \theta \\ -K_1 \sin ct + K_2 \sin(2\theta + ct) + K_3 c \cos ct & K_1 \cos ct - K_2 \cos(2\theta + ct) + K_3 c \sin ct & -K_3 \cos \theta + K_4 \sin \theta \\ K_4 \cos(\theta + ct) - K_3 \sin(\theta + ct) & K_3 \cos(\theta + ct) + K_4 \sin(\theta + ct) & \frac{\cos(\sqrt{1+c^2}t) + c^2}{1+c^2} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } K_1 = \frac{1+(1+2c^2)\cos(\sqrt{1+c^2}t)}{2(1+c^2)}, \quad K_2 = \frac{1-\cos(\sqrt{1+c^2}t)}{2(1+c^2)}, \quad K_3 = \frac{\sin(\sqrt{1+c^2}t)}{\sqrt{1+c^2}}, \quad K_4 = \frac{c(1-\cos(\sqrt{1+c^2}t))}{1+c^2}.$$

Семейство геодезических имеет симметрии, аналогичные случаю $\text{SU}(2)$, см. п. 4.9.3.

4.10.4 Каустика

Каустика (множество сопряженных точек) в $\text{SO}(3)$ получается из случая $\text{SU}(2)$ (п. 4.9.4) с помощью канонической проекции $\Pi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$, см. (4.50). Так же как в случае $\text{SU}(2)$, все геодезические в $\text{SO}(3)$ имеют счетное число сопряженных точек.

4.10.5 Множество разреза

Теорема 4.28. *Множество разреза на $\text{SO}(3)$ имеет стратификацию*

$$\begin{aligned}\text{Cut} &= \text{Cut}^{\text{loc}} \cup \text{Cut}^{\text{glob}}, \\ \text{Cut}^{\text{loc}} &= e^{\mathbf{k}} \setminus \{\text{Id}\}, \\ \text{Cut}^{\text{glob}} &= \left\{ \Pi \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha = 0, \operatorname{Im}^2 \alpha + |\beta|^2 = 1 \right\}.\end{aligned}$$

Топологически Cut^{loc} есть интервал (окружность $e^{\mathbf{k}}$ с выколотой точкой Id), а Cut^{glob} есть проективная плоскость \mathbb{RP}^2 . Начальная точка Id находится в замыкании локальной компоненты Cut^{loc} и изолирована от глобальной компоненты Cut^{glob} . Эти компоненты пересекаются в единственной точке $e^{\pi k}$, поэтому Cut есть стратифицированное пространство.

4.10.6 Расстояние

Теорема 4.29. *Пусть 3×3 матрица $g = (g_{ij}) \in \text{SO}(3)$. Тогда субриманово расстояние $d_0(g) = d(\text{Id}, g)$ задается следующим образом.*

(1) *Если $g_{33} = -1$, то $d_0 = \pi$.*

(2) *Если $g_{33} = 1$ и $g \neq \text{Id}$, то $d_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}$, где β – единственное решение системы уравнений*

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi \beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{1 + g_{11} + g_{22} + g_{33}}, \\ \sin \frac{\pi \beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(g_{21} - g_{12}) \sqrt{1 - g_{11} - g_{22} + g_{33}}. \end{cases}$$

(3) *Если $-1 < g_{33} < -1$ и $\cos \left(\pi \sqrt{\frac{1+g_{33}}{2}} \right) = -\frac{g_{11}+g_{22}}{1+g_{33}}$, то $d_0 = \pi \sqrt{\frac{1}{2}(1-g_{33})}$.*

(4) *Если $-1 < g_{33} < -1$ и $\cos \left(\pi \sqrt{\frac{1+g_{33}}{2}} \right) > -\frac{g_{11}+g_{22}}{1+g_{33}}$, то $d_0 = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}(1-g_{33})(1+\beta^2)}$, где β – единственное решение системы уравнений*

$$\begin{cases} \cos \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}(1-g_{33})(1+\beta^2)} + \arcsin \left(\beta \sqrt{\frac{1-g_{33}}{1+g_{33}}} \right) \right) = \sqrt{\frac{1+g_{11}+g_{22}+g_{33}}{2(1+g_{33})}}, \\ \sin \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}(1-g_{33})(1+\beta^2)} + \arcsin \left(\beta \sqrt{\frac{1-g_{33}}{1+g_{33}}} \right) \right) = \operatorname{sgn}(g_{21} - g_{12}) \sqrt{\frac{1-g_{11}-g_{22}+g_{33}}{2(1+g_{33})}}. \end{cases}$$

(5) Если $-1 < g_{33} < -1$ и $\cos\left(\pi\sqrt{\frac{1+g_{33}}{2}}\right) < -\frac{g_{11}+g_{22}}{1+g_{33}}$, то $d_0 = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-g_{33})(1+\beta^2)}\right)$, где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-g_{33})(1+\beta^2)}\right) + \arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-g_{33}}{1+g_{33}}}\right)\right) = -\sqrt{\frac{1+g_{11}+g_{22}+g_{33}}{2(1+g_{33})}}, \\ \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-g_{33})(1+\beta^2)}\right) + \arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-g_{33}}{1+g_{33}}}\right)\right) = \operatorname{sgn}(g_{21}-g_{12})\sqrt{\frac{1-g_{11}-g_{22}+g_{33}}{2(1+g_{33})}}. \end{cases}$$

4.10.7 Сфера

Рассмотрим другую модель группы $\mathrm{SO}(3)$. Пусть M_1 — ориентированная двумерная сфера гауссовой кривизны 1, заданная в объемлющем пространстве \mathbb{R}^3 равенством $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; риманова метрика d_R на M_1 индуцирована евклидовой метрикой на \mathbb{R}^3 ; ориентация сферы M_1 задана ее внешней нормалью. Пусть V_1 есть расслоение единичных касательных векторов к M_1 .

Пусть распределение Δ на V_1 есть горизонтальное распределение связности Леви-Чивита, а расстояние на V_1 определяется как

$$d(x, y) = \inf d_R(l),$$

где нижняя грань берется по всем кривым в M_1 , горизонтальные лифты которых в V_1 соединяют x и y . Здесь $d_R(l)$ есть длина кривой l в метрике d_R .

Многообразие V_1 с метрикой d изометрично группе $\mathrm{SO}(3)$ с субримановой $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структурой, определенной в п. 4.10.2.

Введем в V_1 систему координат $\{(r, \alpha, \beta) \mid r \geq 0, -\pi \leq \alpha \leq \pi, -\pi \leq \beta \leq \pi\}$ с началом в некотором элементе $v_O \in V_1$. Тогда точка $A \in M_1$ имеет декартовы координаты $(\cos \beta \sin r, \sin \beta \sin r, \cos r)$, а вектор $v_A \in V_1$ имеет декартовы компоненты

$$(\cos r \cos \beta \cos(\alpha - \beta) - \sin \beta \sin(\alpha - \beta), \cos r \sin \beta \cos(\alpha - \beta) + \cos \beta \sin(\alpha - \beta), -\sin r \cos(\alpha - \beta)).$$

Поэтому координатное отображение

$$f : \{(r, \alpha, \beta) \mid 0 \leq r \leq \pi, -\pi \leq \alpha \leq \pi, -\pi \leq \beta \leq \pi\} \rightarrow V_1$$

можно продолжить по непрерывности до отображения g с включением случая $r = \pi$. В этом случае точка A имеет декартовы координаты $(0, 0, -1)$, вектор V_A — декартовы компоненты $(-\cos(\alpha - 2\beta), \sin(\alpha - 2\beta), 0)$. Тогда

$$g : \{(r, \alpha, \beta) \mid 0 \leq r \leq \pi, -\pi \leq \alpha \leq \pi, -\pi \leq \beta \leq \pi\} \rightarrow V_1$$

есть отображение отождествления замкнутого полнотория на пространство V_1 . При этом кривая $\beta = \frac{1}{2}\alpha + c$, $c \in \mathbb{R}$, на граничном торе \mathbb{T}^2 переходит под действием отображения g в один элемент пространства V_1 .

Теорема 4.30. Диаметр пространства V_1 с метрикой d равен $\sqrt{3}\pi$.

Введем в V_1 систему координат $\{r, \alpha, \beta\}$ с началом в некотором элементе v_O . В этой системе координат сфера с центром v_O радиуса $\sqrt{3}\pi$ есть точка $(0, \pi, 0)$. Сфера с центром v_O радиуса $0 < R < \sqrt{3}\pi$ — поверхность вращения вокруг оси α той части кривой S_R , определяемой параметрическими уравнениями $r = \pm r(t)$, $\alpha = \pm \alpha(t)$, $1 \leq t \leq \frac{2\pi}{R}$, которая расположена в полосе $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ на плоскости $\beta = 0$, причем

(1) Если $0 < R < \pi$, то

$$r(t) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{t} \sin \frac{Rt}{2}\right), \quad 1 \leq t \leq \frac{2\pi}{R},$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2 \left| \frac{R}{2} \sqrt{t^2 - 1} - \arcsin \frac{\sqrt{t^2 - 1} \sin \frac{Rt}{2}}{\sqrt{t^2 - \sin^2 \frac{Rt}{2}}} \right|, & \text{если } 1 \leq t < \frac{\pi}{R}, \\ 2 \left(\pi - \frac{R}{2} \sqrt{t^2 - 1} - \arcsin \frac{\sqrt{t^2 - 1} \sin \frac{Rt}{2}}{\sqrt{t^2 - \sin^2 \frac{Rt}{2}}} \right), & \text{если } \frac{\pi}{R} \leq t < \frac{2\pi}{R}. \end{cases}$$

(2) Если $\pi \leq R < \sqrt{3}\pi$, то

$$r(t) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{t} \sin \frac{Rt}{2}\right), \quad 1 \leq t \leq \frac{2\pi}{R},$$

$$\alpha(t) = 2 \left(\pi - \frac{R}{2} \sqrt{t^2 - 1} - \arcsin \frac{\sqrt{t^2 - 1} \sin \frac{Rt}{2}}{\sqrt{t^2 - \sin^2 \frac{Rt}{2}}} \right), \quad 1 \leq t < \frac{\pi}{R}.$$

При $R = \pi$ значение $\alpha(1)$ определяется по непрерывности и равно π .

Сфера пространства V_1 радиуса $R \in (0, \sqrt{3}\pi)$, $R \neq \pi$, гомеоморфны S^2 . Сфера радиуса $R = \pi$ гомеоморфна сфере S^2 , у которой диаметрально противоположные точки отождествлены. Сфера радиуса $R = \sqrt{3}\pi$ есть точка. При $R \in (0, \pi)$ сфера имеет две конические особенности. Сфера радиуса $R = \pi$ диффеоморфна двум пересекающимся по окружности одинарным конусам, направленным в разные стороны, на общей окружности которых отождествлены диаметрально противоположные точки. Сфера радиуса $R \in (\pi, \sqrt{3}\pi)$ диффеоморфна двум пересекающимся по окружности одинарным конусам, направленным в разные стороны.

4.10.8 Библиографические комментарии

Разделы 4.10.3, 4.10.5 опираются на статью [29], а разделы 4.10.6 и 4.10.7 — на статьи [19] и [17] соответственно. Рассматриваемой субримановой задаче на $\mathrm{SO}(3)$ посвящена также работа [20].

Насколько нам известно, впервые геодезические и сферы для осесимметричной субримановой задачи на $\mathrm{SO}(3)$ описаны в [42, 90].

4.11 Осесимметричная субриманова задача на группе $\mathrm{SL}(2)$

4.11.1 Группа Ли и алгебра Ли

Группа Ли $\mathrm{SL}(2)$ есть группа унимодулярных 2×2 вещественных матриц

$$\mathrm{SL}(2) = \{g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid \det g = 1\}.$$

Эта группа некомпактна, связна и неодносвязна: ее фундаментальная группа есть \mathbb{Z} . Алгебра Ли группы Ли $G = \mathrm{SL}(2)$ есть алгебра бесследовых 2×2 вещественных матриц:

$$\mathfrak{sl}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr} X = 0\}.$$

Матрицы

$$p_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ с таблицей умножения

$$[p_1, p_2] = -k, \quad [p_2, k] = l_1, \quad [k, p_1] = p_2.$$

Форма Киллинга для $\mathfrak{sl}(2)$ есть $\mathrm{Kil}(X, Y) = 4 \mathrm{Tr}(XY)$, поэтому $\mathrm{Kil}(p_i, p_j) = 2\delta_{ij}$.

Подпространства

$$\mathbf{k} = \mathbb{R}k, \quad \mathbf{p} = \mathrm{span}(p_1, p_2)$$

образуют картановское разложение в $\mathfrak{sl}(2)$; оно единственno т.к. \mathbf{k} должно быть максимальной компактной подалгеброй.

Векторы p_1, p_2 образуют ортонормированный репер для скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Kil}(\cdot, \cdot)$, суженного на \mathbf{p} .

4.11.2 Субриманова $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структура

Рассмотрим левоинвариантную субриманову структуру на $\mathrm{SL}(2)$ с ортонормированным репером

$$X_1(g) = L_{g*}p_1, \quad X_2(g) = L_{g*}p_2, \quad g \in \mathrm{SL}(2),$$

то есть распределение $\Delta_g = L_{g*}\mathbf{p}$ со скалярным произведением $\langle v_1, v_2 \rangle_g = \langle L_{g^{-1}*}v_1, L_{g^{-1}*}v_2 \rangle$. Эта структура есть $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структура на $\mathrm{SL}(2)$.

4.11.3 Геодезические и симметрии

Анормальные траектории постоянны.

Пусть $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(g) \rangle$, $i = 1, 2, 3$, $X_3 = [X_1, X_2]$, $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$, и $C = \mathfrak{g}^* \cap \{H = \frac{1}{2}\}$. Далее, пусть

$$\begin{aligned} \lambda &= (h_1, h_2, h_3, \mathrm{Id}) \in C, \\ h_1 &= \cos \theta, \quad h_2 = \sin \theta, \quad h_3 = c. \end{aligned}$$

Тогда экспоненциальное отображение

$$\mathrm{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow G, \quad (\lambda, t) \mapsto g(t),$$

параметризуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\lambda, t) &= \text{Exp}(\theta, c, t) = e^{(\cos \theta p_1 + \sin \theta p_2 + ck)t} e^{-ckt} = \\ &= \begin{pmatrix} K_1 \cos(c\frac{t}{2}) + K_2(\cos(\theta + c\frac{t}{2}) + c \sin(c\frac{t}{2})) & K_1 \sin(c\frac{t}{2}) + K_2(\sin(\theta + c\frac{t}{2}) - c \cos(c\frac{t}{2})) \\ -K_1 \sin(c\frac{t}{2}) + K_2(\sin(\theta + c\frac{t}{2}) + c \cos(c\frac{t}{2})) & K_1 \cos(c\frac{t}{2}) + K_2(-\cos(\theta + c\frac{t}{2}) + c \sin(c\frac{t}{2})) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{1-c^2}\frac{t}{2}) & \text{при } c \in [-1, 1], \\ \cos(\sqrt{c^2-1}\frac{t}{2}) & \text{при } c \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \end{cases} \\ K_2 &= \begin{cases} \operatorname{sh}(\sqrt{1-c^2}\frac{t}{2}) & \text{при } c \in (-1, 1), \\ \frac{t}{2} & \text{при } c \in \{-1, 1\}, \\ \frac{\sin(\sqrt{c^2-1}\frac{t}{2})}{\sqrt{c^2-1}} & \text{при } c \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Семейство геодезических имеет следующие симметрии:

- вращения $\text{Exp}(\theta, c, t) = e^{z_0 k} e^{xp_1 + yp_2}$, где

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

а (x_0, y_0, z_0) определяются условием $\text{Exp}(0, c, t) = e^{z_0 k} e^{xp_1 + yp_2}$,

- отражения $\text{Exp}(\theta, -c, t) = e^{-z_0 k} e^{xp_1 + yp_2}$, где

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

а (x_0, y_0, z_0) определяются условием $\text{Exp}(\theta c, t) = e^{z_0 k} e^{xp_1 + yp_2}$.

4.11.4 Сопряженные точки

Геодезические $\text{Exp}(\theta, c, t)$, $|c| \leq 1$, не содержат сопряженных точек.

Если $|c| > 1$, то сопряженные времена вдоль геодезической $\text{Exp}(\theta, c, t)$ следующие:

$$\begin{aligned} t_{2n-1} &= \frac{2\pi n}{\sqrt{c^2-1}}, \\ t_{2n} &= \frac{2x_n}{\sqrt{c^2-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где $\{x_1, x_2, \dots\}$ суть упорядоченные по возрастанию положительные корни уравнения $x = \operatorname{tg} x$.

Соответствующая m -я каустика

$$\text{Conj}^m = \{\text{Exp}(\lambda, t) \mid t = t_m^{\text{conj}}(\lambda), \lambda \in C\}$$

есть:

$$\begin{aligned} \text{Conj}^{2n-1} &= e^{\mathbf{k}} \setminus \{\text{Id}\}, \\ \text{Conj}^{2k} &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos x_n \cos y_n + \frac{\sin x_n}{\sqrt{c^2-1}}(\cos \theta + c \sin y_n) & \cos x_n \sin y_n + \frac{\sin x_n}{\sqrt{c^2-1}}(\sin \theta - c \cos y_n) \\ -\cos x_n \sin y_n + \frac{\sin x_n}{\sqrt{c^2-1}}(\sin \theta + c \cos y_n) & \cos x_n \cos y_n + \frac{\sin x_n}{\sqrt{c^2-1}}(-\cos \theta + c \sin y_n) \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \right\}, \end{aligned}$$

где $y_n = \frac{cx_n}{\sqrt{c^2-1}}$.

4.11.5 Множество разреза

Теорема 4.31. *Множество разреза есть стратифицированное пространство*

$$\text{Cut} = \text{Cut}^{\text{loc}} \cup \text{Cut}^{\text{glob}},$$

$$\text{Cut}^{\text{loc}} = e^{\mathbf{k}} \setminus \{\text{Id}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in (0, 2\pi) \right\},$$

$$\text{Cut}^{\text{glob}} = e^{2\pi k} e^{\mathbf{P}} = \{g \in \text{SL}(2) \mid g = g^T, \operatorname{Tr} g < -2\}.$$

Топологически, Cut^{loc} есть интервал (окружность $e^{\mathbf{k}}$ с выколотой точкой Id), а Cut^{glob} есть плоскость \mathbb{R}^2 .

4.11.6 Геодезическая орбитальность

Теорема 4.32. Группа $\mathrm{SL}(2)$ с рассматриваемой субримановой структурой геодезически орбитальна.

4.11.7 Время разреза

Пусть $\lambda = (\theta, c) \in C$. Опишем время разреза $t_{\mathrm{cut}}(\lambda)$ вдоль соответствующей геодезической.

Предложение 4.2. $t_{\mathrm{cut}}(\theta, 0) = +\infty$.

Теорема 4.33. Пусть $c \neq 0$, тогда число $T = t_{\mathrm{cut}}(\theta, c) \in (0, +\infty)$ выражается следующим образом.

(1) Если $|c| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $T = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - 1}}$.

(2) Если $|c| = 1$, то T принадлежит интервалу $(2\pi, 3\pi)$ и удовлетворяет системе уравнений

$$\cos \frac{T}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1 + T^2/4}}, \quad \sin \frac{T}{2} = -\frac{T/2}{\sqrt{1 + T^2/4}}.$$

(3) Если $c^2 < 1$, то T принадлежит интервалу $(2\pi/|c|, 3\pi/|c|)$ и удовлетворяет системе уравнений

$$\cos kx = -\frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}}, \quad \sin kx = -\frac{k \operatorname{th} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}},$$

где

$$k = \frac{|c|}{\sqrt{1 - c^2}}, \quad x = \frac{T\sqrt{1 - c^2}}{2} = \frac{T}{2\sqrt{1 + k^2}}.$$

(4) Если $|c| = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $T = 2\sqrt{2}\pi$.

(5) Если $\frac{3}{2\sqrt{2}} < |c| < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $\frac{3\pi}{|c|} < T < 2\pi(|c| + \sqrt{c^2 - 1}) < \frac{4\pi}{|c|}$ и T удовлетворяет системе уравнений

$$\cos kx = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

где

$$k = \frac{|c|}{\sqrt{c^2 - 1}}, \quad x = \frac{T\sqrt{1 - c^2}}{2} = \frac{T}{2\sqrt{k^2 - 1}}. \quad (4.52)$$

(6) Если $1 < |c| < \frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $\frac{2\pi}{|c|} < 2\pi(|c| + \sqrt{c^2 - 1}) < T < \frac{3\pi}{|c|}$ и T удовлетворяет системе уравнений

$$\cos kx = -\frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = -\frac{k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

где k и x определяются формулами (4.52).

В следующей теореме описаны свойства монотонности и регулярности времени разреза.

Теорема 4.34. Функция $T(c) = t_{\mathrm{cut}}(\theta, c)$ имеет следующие свойства:

(1) $T(c)$ строго убывает на промежутках $(0, \frac{3}{2\sqrt{2}}]$, $[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty)$ и строго возрастает на отрезке $[\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$.

(2) $T(c)$ непрерывна, кусочно вещественно аналитична и $T(0, +\infty) = (0, +\infty)$.

(3) $T(c)$ имеет локальный минимум $2\sqrt{2}\pi$ при $c = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и локальный максимум $2\sqrt{3}\pi$ при $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4.11.8 Библиографические комментарии

Разделы 4.11.2–4.11.5 опираются на статью [29], а разделы 4.11.6–4.11.7 — на работу [21].

Рассматриваемой субримановой задаче на $\mathrm{SL}(2)$ частично посвящена также работа [17].

См. также [16, 18, 22–24].

В работе [87] описаны динамические свойства геодезического потока для рассматриваемой в данном разделе субримановой структуры на $\mathrm{SL}(2)$.

4.12 Осесимметричные римановы задачи на группах $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$

4.12.1 Постановка задачи на $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$

Пусть $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ есть группа вещественных 2×2 матриц с единичным определителем, а $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}$. Обозначим группу Ли $G = \mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$ и ее алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2; \mathbb{R})$.

Рассмотрим левоинвариантную риманову структуру на группе Ли G , она задается квадратичной формой на \mathfrak{g} с собственными значениями $I_1, I_2, I_3 > 0$. Выберем базис $e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{g}$, в котором форма Киллинга и риманова метрика имеют матрицы $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$ и $\mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ соответственно.

Отождествим \mathfrak{g} с \mathfrak{g}^* с помощью формы Киллинга, тогда базис $e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{g}$ перейдет в базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathfrak{g}^*$.

Пусть $p = p_1\varepsilon_1 + p_2\varepsilon_2 + p_3\varepsilon_3 \in \mathfrak{g}^*$. Введем обозначение:

$$\mathrm{Kil}(p) = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2, \quad |p| = \sqrt{|\mathrm{Kil}(p)|}, \quad \mathrm{type}(p) = \mathrm{sgn}(-\mathrm{Kil}(p)),$$

где $\mathrm{Kil}(p)$ есть значение квадратичной формы Киллинга на ковекторе p . Этот ковектор называется времениподобным, светоподобным или пространственноподобным, если $\mathrm{type}(p)$ равно 1, 0 или -1 соответственно.

Римановы кратчайшие суть решения задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= Q\Omega, \quad Q \in G, \quad \Omega = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 \in \mathfrak{g}, \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \\ Q(0) &= \mathrm{Id}, \quad Q(t_1) = Q_1, \\ \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (I_1u_1^2 + I_2u_2^2 + I_3u_3^2) dt &\rightarrow \min. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Далее рассматривается случай осесимметричной метрики: $I_1 = I_2$. Обозначим через

$$\eta = -\frac{I_1}{I_3} - 1 < -1$$

параметр римановой метрики, измеряющий вытянутость малых сфер. Для $p \in \mathfrak{g}^*$, $|p| \neq 0$, обозначим

$$\bar{p} = \frac{p}{|p|}, \quad \tau(p) = \frac{t|p|}{2I_1}.$$

Через $R_{v,\varphi}$ обозначим поворот трехмерного ориентированного евклидова пространства вокруг оси $\mathbb{R}v$ на угол φ в положительном направлении.

4.12.2 Геодезические на $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$

Натурально параметризованные геодезические соответствуют начальным импульсам

$$p \in C = \mathfrak{g}^* \cap \left\{ H = \frac{1}{2} \right\},$$

где $H(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{I_1} + \frac{p_2^2}{I_2} + \frac{p_3^2}{I_3} \right)$ есть максимизированный гамильтониан принципа максимума Понтрягина.

Теорема 4.35. Геодезическая $Q(t)$, начинающаяся в единице и имеющая начальный импульс $p \in C$, есть произведение двух однопараметрических групп:

$$Q(t) = \exp\left(\frac{tp}{I_1}\right) \exp\left(\frac{t\eta p_3 e_3}{I_1}\right).$$

Форма Киллинга есть функция Казимира на \mathfrak{g}^* . Поэтому вдоль экстремалей $\mathrm{type}(p) \equiv \mathrm{const}$, то есть тип ковектора есть интеграл гамильтоновой системы.

4.12.3 Модель группы $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$

Рассмотрим группу $\mathrm{SU}(1, 1)$, реализованную как группа сплит-кватернионов единичной длины

$$\mathrm{SU}(1, 1) = \{q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \mid q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 = 1, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Умножение сплит-кватернионов дистрибутивно и удовлетворяет соотношениям

$$i^2 = j^2 = 1, \quad k^2 = -1, \quad ij = -k, \quad jk = i, \quad ki = j.$$

Существует изоморфизм

$$\psi : \mathrm{SL}(2; \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SU}(1, 1), \quad \psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} + \frac{a-d}{2}i + \frac{b+c}{2}j + \frac{c-b}{2}k,$$

где $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим проекцию группы $\mathrm{SU}(1, 1)$ на трехмерное вещественное пространство с координатами q_1, q_2, q_3 . Условие

$$q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 = 1 - q_0^2 \leqslant 1$$

означает, что образ группы $\mathrm{SU}(1, 1)$ есть область между двумя полостями гиперболоида $q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 = 1$. Для фиксированных q_1, q_2, q_3 (таких, что $q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \neq 1$) значение q_0 можно выбрать двумя разными способами. Поэтому группа $\mathrm{SU}(1, 1)$ есть объединение двух таких областей с отождествленными граничными точками (соответствующими условию $q_0 = 0$). Группа $\mathrm{SU}(1, 1)$ гомеоморфна открытому полноторию.

Группу $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(1, 1)/\{\pm \mathrm{Id}\}$ можно представить как область между полостями гиперболоида с отождествленными противоположными точками на полостях гиперболоида: $(q_1, q_2, q_3) \sim (-q_1, -q_2, -q_3)$.

4.12.4 Геодезические на $\mathrm{SU}(1, 1)$

Рассмотрим левоинвариантную риманову задачу на группе $\mathrm{SU}(1, 1)$, являющуюся лифтом задачи (4.53) на $\mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$.

Теорема 4.36. *Геодезические на группе $\mathrm{SU}(1, 1)$, выходящие из единицы с начальным ковектором $p = p_1 \frac{i}{2} + p_2 \frac{j}{2} + p_3 \frac{k}{2} \in C$, имеют следующую параметризацию:*

(1) *для временеподобного ковектора p ($p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 > 0$)*

$$\begin{pmatrix} q_0^e(\tau) \\ q_1^e(\tau) \\ q_2^e(\tau) \\ q_3^e(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau \cos (\tau \eta \bar{p}_3) - \bar{p}_3 \sin \tau \sin (\tau \eta \bar{p}_3), \\ \sin \tau R_{e_3, -\tau \eta \bar{p}_3} \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{pmatrix}, \\ \cos \tau \sin (\tau \eta \bar{p}_3) + \bar{p}_3 \sin \tau \cos (\tau \eta \bar{p}_3), \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

(2) *для светоподобного ковектора p ($p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 = 0$)*

$$\begin{pmatrix} q_0^p(t) \\ q_1^p(t) \\ q_2^p(t) \\ q_3^p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{t \eta p_3}{2I_1} - \frac{t}{2I_1} p_3 \sin \frac{t \eta p_3}{2I_1}, \\ \frac{t}{2I_1} R_{e_3, -\frac{t \eta p_3}{2I_1}} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \\ \sin \frac{t \eta p_3}{2I_1} + \frac{t}{2I_1} p_3 \cos \frac{t \eta p_3}{2I_1}, \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

(3) *для пространственноподобного ковектора p ($p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 < 0$)*

$$\begin{pmatrix} q_0^h(\tau) \\ q_1^h(\tau) \\ q_2^h(\tau) \\ q_3^h(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \tau \cos (\tau \eta \bar{p}_3) - \bar{p}_3 \operatorname{sh} \tau \sin (\tau \eta \bar{p}_3), \\ \operatorname{sh} \tau R_{e_3, -\tau \eta \bar{p}_3} \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{ch} \tau \sin (\tau \eta \bar{p}_3) + \bar{p}_3 \operatorname{sh} \tau \cos (\tau \eta \bar{p}_3), \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

4.12.5 Сопряженные времена

Теорема 4.37. *Рассмотрим геодезическую на $G = \mathrm{PSL}(2; \mathbb{R})$ или $G = \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$, начинаяющуюся в единице, с начальным ковектором $p \in C$.*

Для временеподобного начального импульса p с $\bar{p}_3 \neq \pm 1$ есть две серии сопряженных времен:

$$t_{2k-1} = \frac{2I_1 \pi k}{|p|}, \quad t_{2k} = \frac{2I_1 \tau_k(p)}{|p|}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\tau_k(p)$ есть k -ый положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} \tau = -\tau \eta \frac{1 - \bar{p}_3^2}{1 + \eta \bar{p}_3^2}.$$

В случае $p_3 = \pm 1$ эти две серии сливаются в одну серию:

$$t_k = \frac{2I_1 \pi k}{|p|}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для свето- и пространственноподобных начальных ковекторов p соответствующие геодезические не имеют сопряженных точек.

Следствие 4.1. *Первое сопряженное время для геодезической, соответствующей ковектору p , есть*

$$t_{\text{conj}}^1(p) = \begin{cases} \frac{2\pi I_1}{|p|}, & \text{при } \operatorname{type}(p) = 1, \\ +\infty, & \text{при } \operatorname{type}(p) \leqslant 0. \end{cases}$$

4.12.6 Время разреза и множество разреза

Обозначим первые положительные нули функций $q_0^e(\tau)$, $q_0^p(t)$, $q_0^h(\tau)$, см. (4.54)–(4.56):

$$\begin{aligned}\tau_0^e(\bar{p}_3) &= \min\{\tau \in \mathbb{R}_+ \mid q_0^e(\tau, \bar{p}_3) = 0\}, \\ t_0^p(p) &= \min\{t \in \mathbb{R}_+ \mid q_0^p(t, p) = 0\}, \\ \tau_0^h(\bar{p}_3) &= \min\{\tau \in \mathbb{R}_+ \mid q_0^h(\tau, \bar{p}_3) = 0\}.\end{aligned}$$

Обозначим через C^e , C^p , C^h времени-, свето- и пространственноподобные части поверхности уровня гамильтониана C .

Теорема 4.38. (1) Если $\eta \leq -\frac{3}{2}$, то

$$t_{\text{cut}}(p) = \begin{cases} \frac{2I_1\tau_0^e(\bar{p}_3)}{|p|}, & \text{при } p \in C^e, \\ t_0^p(p), & \text{при } p \in C^p, \\ \frac{2I_1\tau_0^h(\bar{p}_3)}{|p|}, & \text{при } p \in C^h, \quad \bar{p}_3 \neq 0, \\ +\infty, & \text{при } \bar{p}_3 = 0. \end{cases}$$

(2) Если $\eta > -\frac{3}{2}$, то

$$t_{\text{cut}}(p) = \begin{cases} \frac{2I_1\tau_0^e(\bar{p}_3)}{|p|}, & \text{при } p \in C^e, \quad |\bar{p}_3| > -\frac{3}{2\eta}, \\ \frac{2I_1\pi}{|p|}, & \text{при } p \in C^e, \quad |\bar{p}_3| \leq -\frac{3}{2\eta}, \\ t_0^p(p), & \text{при } p \in C^p, \\ \frac{2I_1\tau_0^h(\bar{p}_3)}{|p|}, & \text{при } p \in C^h, \quad \bar{p}_3 \neq 0, \\ +\infty, & \text{при } \bar{p}_3 = 0. \end{cases}$$

Группу $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ можно интерпретировать как группу собственных движений плоскости Лобачевского.

Теорема 4.39. (1) Если $\eta \leq -\frac{3}{2}$, то множество разреза есть плоскость, состоящая из центральных симметрий

$$\begin{aligned}Z &= \Pi(\{q \in \text{SU}(1, 1) \mid q_0 = 0\}), \\ \Pi : \text{SU}(1, 1) &\rightarrow \text{SU}(1, 1)/\{\pm \text{Id}\} \cong \text{PSL}(2; \mathbb{R}).\end{aligned}$$

(2) Если $\eta > -\frac{3}{2}$, то множество разреза есть стратифицированное многообразие $Z \cup R_\eta$, где

$$R_\eta = \{R_{0, \pm\varphi} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \mid \varphi \in [-2\pi(1 + \eta), \pi]\}$$

есть отрезок, состоящий из некоторых поворотов вокруг центра модели Пуанкаре гиперболической плоскости.

4.12.7 Радиус инъективности

Теорема 4.40. Радиус инъективности осесимметричной римановой метрики на группе $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ равен

- (1) $\pi\sqrt{I_1}\sqrt{-\frac{1}{1+\eta}}$ при $\eta \leq -2$;
- (2) $\pi\sqrt{I_1}\sqrt{-\frac{\eta+4}{\eta}}$ при $-2 < \eta \leq -\frac{3-\sqrt{73}}{8}$;
- (3) $2\pi\sqrt{I_1}\sqrt{-(1+\eta)}$ при $-\frac{3-\sqrt{73}}{8} < \eta < -1$.

4.12.8 Осесимметричная левоинвариантная риманова задача на $\text{SL}(2; \mathbb{R})$

Рассмотрим риманову задачу на группе $\text{SL}(2; \mathbb{R})$, являющуюся лифтом задачи (4.53) на $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$. Геодезические для задачи на $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ задаются прежними формулами (4.54)–(4.56). Сопряженные времена для $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ выражаются так же, как в п. 4.12.5.

Время разреза и множество разреза для задачи на $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ описываются следующим образом.

Теорема 4.41. Пусть $p \in C$. Время разреза для соответствующей геодезической на $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ есть

$$t_{\text{cut}}(p) = \frac{2I_1}{|p|}\tau_{\text{cut}}(\bar{p}_3),$$

где

$$\begin{aligned}\tau_{\text{cut}}(\bar{p}_3) &= \tau_3^e(\bar{p}_3) \quad \text{при } \eta \leq -\frac{3}{2}, \\ \tau_{\text{cut}}(\bar{p}_3) &= \begin{cases} \pi, & \bar{p}_3 \in [1, -2/\eta] \\ \tau_3^e(\bar{p}_3), & \bar{p}_3 > -2/\eta \end{cases} \quad \text{при } \eta > -\frac{3}{2},\end{aligned}$$

а $\tau_3^e(\bar{p}_3)$ есть первый положительный корень функции $q_3^e(\tau, \bar{p}_3)$ (4.54).

Теорема 4.42. (1) Если $\eta \leq -\frac{3}{2}$, то множество разреза есть плоскость

$$H := \{q \in \text{SU}(1, 1) \mid q_3 = 0\},$$

которая представляется плоскостью гиперболических изометрий, соответствующих пучкам ультрапараллельных прямых, симметричных в диаметрах модели Пуанкаре гиперболической плоскости.

(2) Если $\eta > -\frac{3}{2}$, то множество разреза есть стратифицированное многообразие

$$H \cup T_\eta,$$

где $T_\eta = \{q = \pm(\cos(2\pi\bar{p}_3) + \sin(2\pi\bar{p}_3)k) \mid \bar{p}_3 \in [1, -\frac{2}{\eta}]\}$ есть отрезок, состоящий из некоторых поворотов вокруг центра модели Пуанкаре гиперболической плоскости.

4.12.9 Связь с субримановой задачей

Пусть $G = \text{PSL}(2; \mathbb{R})$ или $\text{SL}(2; \mathbb{R})$. Отождествим алгебру Ли \mathfrak{g} с пространством чисто мнимых сплиткватернионов, и рассмотрим разложение

$$\mathfrak{g} = \mathbf{k} \oplus \mathbf{p},$$

где $\mathbf{k} = \mathbb{R}k$ и $\mathbf{p} = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j$.

Рассмотрим левоинвариантное распределение Δ на TG , полученное левыми сдвигами подпространства $\mathbf{p} \subset \mathfrak{g}$. Снабдим распределение Δ левоинвариантной римановой структурой, полученной левыми сдвигами из формы Киллинга. Полученная субриманова структура есть субриманова $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ структура на группе $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ или $\text{SL}(2; \mathbb{R})$, см. раздел 4.11.

Теорема 4.43. Для указанной субримановой $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ -задачи на группе $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ (или $\text{SL}(2; \mathbb{R})$) следующие объекты:

- (1) параметризация геодезических,
- (2) сопряженные времена,
- (3) каустика,
- (4) время разреза,
- (5) множество разреза

получаются из тех же объектов для осесимметричной левоинвариантной римановой задачи на $\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ (или $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ соответственно) при переходе к пределу $I_3 \rightarrow \infty$.

4.12.10 Библиографические комментарии

Результаты этого раздела получены в работе [66]. См. также [63].

4.13 Осесимметричные римановы задачи на группах $\text{SO}(3)$ и $\text{SU}(2)$

4.13.1 Постановка задачи на $\text{SO}(3)$

Любая левоинвариантная риманова метрика на группе Ли $G = \text{SO}(3)$ задается положительно определенной квадратичной формой J на касательном пространстве $T_{\text{Id}} \text{SO}(3) = \mathfrak{so}(3)$. Пусть e_1, e_2, e_3 есть ортонормированный базис в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ относительно формы Киллинга, в которой J диагональна. Пусть I_1, I_2, I_3 суть соответствующие собственные значения J .

Римановы кратчайшие для рассматриваемой метрики суть решения задачи оптимального управления

$$\dot{Q} = Q\Omega, \quad \Omega = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 \in \mathfrak{g}, \quad (4.57)$$

$$Q \in G, \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \quad (4.58)$$

$$Q(0) = \text{Id}, \quad Q(t_1) = Q_1, \quad (4.59)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} (I_1 u_1^2 + I_2 u_2^2 + I_3 u_3^2) dt \rightarrow \min. \quad (4.60)$$

Если существует треугольник со сторонами I_1, I_2, I_3 , то задача имеет механическую интерпретацию: она описывает вращения твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции. Числа I_1, I_2, I_3 суть моменты инерции этого твердого тела.

Существование римановых кратчайших следует из теоремы Филиппова.

Далее рассматривается только случай Лагранжа $I_1 = I_2$ (случай $I_1 = I_2 = I_3$ называется случаем Эйлера).

4.13.2 Параметризация экстремалей для $\text{SO}(3)$

Экстремали задачи (4.57)–(4.60) в случае Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned} Q(t) &= R_{p, \frac{t}{I_1}|p|} R_{e_3, \frac{t}{I_1}\eta p_3}, \\ p(t) &= R_{e_3, -\frac{t}{I_1}\eta p_3} p, \end{aligned} \quad (4.61)$$

где $p(0) = p_1\varepsilon_1 + p_2\varepsilon_2 + p_3\varepsilon_3 \in \mathfrak{g}^*$, $\{\varepsilon_i\}$ есть базис в \mathfrak{g}^* , двойственный к $\{e_i\}$ относительно формы Киллинга, $Q(0) = \text{Id}$, а $R_{v,\varphi}$ обозначает поворот пространства \mathbb{R}^3 на угол φ вокруг вектора $v \in \mathfrak{g}^*$ (направление поворота должно быть таким, чтобы для любого вектора $w \notin \text{span}(v)$ репер $(w, R_{v,\varphi}w, v)$ был положительно ориентированным).

Параметр

$$\eta = \frac{I_1}{I_3} - 1 > -1$$

задает сплюснутость твердого тела. Элементы группы $\text{SO}(3)$ отождествляются с ортогональными преобразованиями коалгебры \mathfrak{g}^* с помощью коприсоединенного представления.

Представим геодезические с помощью кватернионов. Рассмотрим двулистное накрытие

$$\Pi : \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\} \simeq S^3 \rightarrow \text{SO}(3). \quad (4.62)$$

Любой кватернион единичной нормы может быть записан в форме

$$q = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)(a_1i + a_2j + a_3k),$$

где $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. По определению $\Pi(\pm q) = R_{a,\varphi}$ есть поворот на угол φ вокруг вектора $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$.

Пусть $\pm(q_0(\tau) + q_1(\tau)i + q_2(\tau)j + q_3(\tau)k) \in \mathbb{H}$ есть лифт на S^3 геодезической (4.61), где использовано новое время $\tau = \frac{t}{2I_1}|p|$. Будем рассматривать натурально параметризованные геодезические, это соответствует начальному ковектору $p \in C = \left\{ p \in \mathfrak{g}^* \mid \frac{p_1^2}{I_1} + \frac{p_2^2}{I_2} + \frac{p_3^2}{I_3} = 1 \right\}$. Тогда

$$\begin{cases} q_0(\tau) &= \cos(\tau) \cos(\tau\eta\bar{p}_3) - \bar{p}_3 \sin(\tau) \sin(\tau\eta\bar{p}_3), \\ \left(\begin{array}{c} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ q_3(\tau) \end{array} \right) &= \sin(\tau) R_{e_3, -\tau\eta\bar{p}_3} \left(\begin{array}{c} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{array} \right), \end{cases} \quad (4.63)$$

где $\bar{p} = \frac{p}{|p|}$, и где ограничение поворота $R_{e_3, \alpha}$ на плоскость $\text{span}\{e_1, e_2\}$ обозначено тем же символом.

4.13.3 Сопряженное время

Обозначим через $t_{\text{conj}}^1(p)$ первое сопряженное время для геодезической (4.61), соответствующей начальному ковектору $p = p_1\varepsilon_1 + p_2\varepsilon_2 + p_3\varepsilon_3 \in C$. Пусть $\tau_{\text{conj}}^1(p) = \frac{|p|}{2I_1} t_{\text{conj}}^1(p)$.

Теорема 4.44. (0) Функция τ_{conj}^1 зависит только от $\bar{p}_3 \in [-1, 1]$.

(1) Если $\eta \in (-1, 0]$, то $\tau_{\text{conj}}^1(\bar{p}_3) = \pi$ для всех $\bar{p}_3 \in [-1, 1]$.

(2) Если $\eta > 0$, то $\tau_{\text{conj}}^1(\bar{p}_3)$ есть первый положительный корень уравнения

$$\tg \tau = -\eta \frac{1 - \bar{p}_3^2}{1 + \eta \bar{p}_3^2} \tau,$$

причем выполняется включение $\tau_{\text{conj}}^1(\bar{p}_3) \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Равенство выполняется только при $\bar{p}_3 = \pm 1$.

(3) Функция $\tau_{\text{conj}}^1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ гладкая и возрастающая.

4.13.4 Время разреза и множество разреза в $\text{SO}(3)$

Обозначим первые положительные корни уравнений $q_0(\tau) = 0$ и $q_3(\tau) = 0$ через $\tau_0(\bar{p}_3)$ и $\tau_3(\bar{p}_3)$ соответственно. Функции $\tau_0(\bar{p}_3)$ и $\tau_3(\bar{p}_3)$ зависят от параметра η . Если $\bar{p}_3 = 0$, то $q_3(\tau) \equiv 0$, и значение $\tau_3(0)$ не определено. Таким образом,

$$\begin{aligned}\tau_0 &: [-1, 1] \rightarrow (0, +\infty], \\ \tau_3 &: [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty].\end{aligned}$$

Обозначим через $t_{\text{cut}}(p)$ время разреза для геодезической, соответствующей начальному ковектору $p \in \mathfrak{g}^*$.

Теорема 4.45. (1) Если $\eta \geq -\frac{1}{2}$, то $t_{\text{cut}}(p) = \frac{2I_1\tau_0(\bar{p}_3)}{|p|}$.

(2) Если $\eta < -\frac{1}{2}$, то

$$t_{\text{cut}}(p) = \begin{cases} \frac{2\pi I_1}{|p|} & \text{при } \frac{1}{2|\eta|} \leq |\bar{p}_3| < 1, \\ \frac{2I_1\tau_0(\bar{p}_3)}{|p|} & \text{при } |\bar{p}_3| < \frac{1}{2|\eta|}. \end{cases}$$

Теорема 4.46. (1) Если $\eta \geq -\frac{1}{2}$, то множество разреза есть проективная плоскость центральных симметрий сферы

$$P = \{R_{v,\pi} \in \text{SO}(3) \mid v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0\}.$$

(2) Если $\eta < -\frac{1}{2}$, то множество разреза есть стратифицированное множество $P \cup L_\eta$, где

$$L_\eta = \{R_{e_3, \pm\varphi} \in \text{SO}(3) \mid \varphi \in [2\pi(1 + \eta), \pi]\}$$

есть отрезок, состоящий из некоторых вращений вокруг оси e_3 , соответствующей собственному значению метрики, отличному от двух других.

4.13.5 Диаметр группы $\text{SO}(3)$ в случае Лагранжа

Теорема 4.47. (1) Диаметр группы $\text{SO}(3)$ в рассматриваемой римановой метрике равен

$$\begin{aligned}2\pi\sqrt{I_1}\sqrt{1 + \frac{1}{4\eta}}, & \quad \text{при } \eta \in (-1, -\frac{1}{2}), \\ \pi\sqrt{I_3}, & \quad \text{при } \eta \in [-\frac{1}{2}, 0], \\ \pi\sqrt{I_1}, & \quad \text{при } \eta \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

(2) Множество точек, наиболее удаленных от единицы, есть

$$\begin{aligned}\{R_{\pm e_3, \pi}\}, & \quad \text{при } \eta \in (-1, 0), \\ P, & \quad \text{при } \eta = 0, \\ \{R_{e, \pi} \mid e \in \text{span}\{e_1, e_2\}\}, & \quad \text{при } \eta \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

4.13.6 Осесимметричная риманова задача на $\text{SU}(2)$

Группа Ли $\text{SU}(2)$ есть односвязная двулистная накрывающая группа $\text{SO}(3)$, см. (4.62).

Рассмотрим осесимметричную левоинвариантную риманову метрику на $\text{SU}(2)$, являющуюся поднятием метрики на $\text{SO}(3)$, рассмотренной в предыдущих пунктах. Геодезические для нее задаются формулами (4.63). Сопряженное время для задачи на $\text{SU}(2)$ совпадает с сопряженным временем для задачи на $\text{SO}(3)$, см. п. 4.13.3.

Теорема 4.48. Время разреза для задачи на $SU(2)$ есть

$$t_{\text{cut}}(\bar{p}_3) = \frac{2I_1}{|p|} \tau_{\text{cut}}(\bar{p}_3),$$

где

$$\tau_{\text{cut}}(\bar{p}_3) = \begin{cases} \pi & \text{при } \eta \leq 0, \\ \tau_3(\bar{p}_3) & \text{при } \eta > 0. \end{cases}$$

Здесь $\tau_3(\bar{p}_3)$ есть первый положительный корень уравнения (4.63), дополненный по непрерывности равенством $\tau_3(0) = \tau_{\text{conj}}^1(0)$.

Теорема 4.49. Множество разреза для задачи на $SU(2)$ есть:

(1) отрезок

$$T_\eta := \{-\cos(\pi\eta\bar{p}_3) - \sin(\pi\eta\bar{p}_3)k \in \mathbb{H} \mid \bar{p}_3 \in [-1, 1]\}$$

при $-1 < \eta \leq 0$ (если $\eta = 0$, то T_η есть точка $\{-1\}$),

(2) диск

$$\{q_0(p, \tau_3(\bar{p}_3)) + q_1(p, \tau_3(\bar{p}_3))i + q_2(p, \tau_3(\bar{p}_3))j \in \mathbb{H} \mid p \in C\},$$

ограниченный окружностью из сопряженных точек

$$\{\cos \tau_{\text{conj}}(0) + \sin \tau_{\text{conj}}(0)(i \cos \varphi + j \sin \varphi) \in \mathbb{H} \mid \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

при $\eta > 0$.

Теорема 4.50. Диаметр группы $SU(2)$ для левоинвариантной римановой метрики с собственными значениями $I_1 = I_2$, $I_3 > 0$ равен

$$\text{diam}_{g(I_1, I_2, I_3)} SU(2) = \begin{cases} 2\pi\sqrt{I_1} & \text{при } I_1 \leq I_3, \\ 2\pi\sqrt{I_3} & \text{при } I_3 < I_1 \leq 2I_3, \\ \frac{\pi I_1}{\sqrt{I_1 - I_3}} & \text{при } 2I_3 < I_1. \end{cases}$$

4.13.7 Связь с субримановой задачей на $SO(3)$

Рассмотрим наряду с осесимметричной левоинвариантной римановой задачей на группе $SO(3)$ также левоинвариантную субриманову $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ -задачу на группе $SO(3)$, см. раздел 4.10.

Теорема 4.51. Для осесимметричной левоинвариантной римановой задачи на $SO(3)$ следующие обобекты сходятся к соответствующим обобектам левоинвариантной субримановой $\mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ -задачи при $I_3 \rightarrow \infty$:

- (1) параметризация геодезических,
- (2) сопряженное время,
- (3) первая каустика,
- (4) время разреза,
- (5) множество разреза.

4.13.8 Библиографические комментарии

Параметризация геодезических левоинвариантной римановой метрики на $SO(3)$ (п. 4.13.2) есть классический результат Л. Эйлера [51]. Первое сопряженное время для осесимметричной задачи на $SO(3)$ (п. 4.13.3) было описано в работе [14]. Результаты п. 4.13.4, 4.13.5, 4.13.7 получены в работе [64]. Множество разреза для задачи на $SU(2)$ при $I_1 > I_3$ (п. (2) теоремы 4.49) описано в работе [81]. Остальные результаты п. 4.13.6 получены в работах [64, 65].

4.14 Задача о качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания

4.14.1 Постановка задачи

Рассматривается механическая система, состоящая из сферы, катящейся по плоскости с прокручиванием, но без проскальзывания. Состояние такой системы в каждый момент времени характеризуется точкой на плоскости и ориентацией сферы в пространстве. Требуется перекатить сферу из заданного начального состояния в заданное конечное так, чтобы достигался минимум действия. Отсутствие проскальзывания означает, что точка контакта сферы и плоскости имеет нулевую мгновенную скорость, наличие прокручивания означает, что вектор угловой скорости сферы может быть направлен в произвольном направлении.

Эта задача является естественной модификацией задачи об оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания [45].

Выберем в пространстве \mathbb{R}^3 такой неподвижный правый ортонормированный репер (e_1, e_2, e_3) , чтобы плоскость, по которой катится сфера, была натянута на (e_1, e_2) , а e_3 направлен в верхнее полупространство. Выберем также подвижный правый ортонормированный репер (e'_1, e'_2, e'_3) , закрепленный в центре сферы. Тогда ориентация сферы задается матрицей поворота $\text{SO}(3) \ni R : (e'_1, e'_2, e'_3) \mapsto (e_1, e_2, e_3)$, а её положение — координатами центра $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ в базисе (e_1, e_2) . В качестве управляющих параметров возьмем компоненты вектора угловой скорости сферы в неподвижном репере $\vec{\Omega} = (u_2, -u_1, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Тогда кинематика системы задается уравнениями

$$\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2, \quad \dot{R} = R \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & -u_1 \\ u_3 & 0 & -u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad R \in \text{SO}(3), \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

В качестве минимизируемого функционала рассмотрим квадратичный функционал типа действия

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt, \quad (4.65)$$

который с точностью до постоянного множителя представляет собой интеграл от вращательной энергии сферы. Требуется перекатить сферу из начального состояния Q_0 в конечное Q_1 так, чтобы достигался минимум функционала J .

Эта задача формулируется естественным образом, как субриманова левоинвариантная задача на группе Ли $G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$.

Группу G можно представить, как подгруппу группы $\text{GL}(6)$ с помощью матриц

$$Q = \begin{pmatrix} R & & 0 \\ & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем левоинвариантный репер на G :

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_i(R) = R \tilde{A}_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

где \tilde{A}_i — базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения (4.64) задают управляемую систему на группе G , и могут быть записаны в виде

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q) + u_3 X_3(Q), \quad Q \in G, \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \quad (4.66)$$

где

$$X_1 = e_1 - V_2, \quad X_2 = e_2 + V_1, \quad X_3 = V_3.$$

Векторные поля X_i задают распределение $\Delta = \text{span}\{X_1, X_2, X_3\} \subset TG$. Если $u(t)$ есть измеримое локально ограниченное отображение, то решение системы (4.66) является допустимой кривой.

На распределении Δ можно задать скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ следующим образом:

$$\langle QA, QB \rangle_Q = \langle A, B \rangle_{\text{Id}} = -\frac{1}{2} \text{tr}(AB), \quad Q \in G, \quad A, B \in \Delta,$$

где $\text{tr } A$ — след матрицы A . При этом длина допустимой кривой $Q(t)$, $t \in [0, t_1]$ выражается стандартным образом:

$$l(Q) = \int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle} dt = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} dt. \quad (4.67)$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что функционал длины и его минимизация (4.67) эквивалентны действию (4.65) и его минимизации.

Поскольку распределение Δ и метрика g являются левоинвариантными, то можно, не ограничивая общности, левыми сдвигами перевести Q_0 в единичный элемент, т.е. принять $Q_0 = (0, 0, \text{Id})$.

Таким образом, получаем следующую левоинвариантную субриманову задачу оптимального управления на группе $G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$:

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q) + u_3 X_3(Q), \quad (4.68)$$

$$Q = (x, y, R) \in G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3), \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, \quad (4.69)$$

$$Q(0) = Q_0 = (0, 0, \text{Id}), \quad Q(t_1) = Q_1 = (x_1, y_1, R_1), \quad (4.70)$$

$$l(Q) = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} dt \rightarrow \min. \quad (4.71)$$

Значение минимизирующего функционала длины (4.71) не зависит от параметризации кривой $Q(t)$, поэтому можно считать, что она имеет постоянную скорость, т.е. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \equiv \text{const}$. Более того, из (4.68) и (4.65) видно, что, если управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$ переводит сферу из состояния Q_0 в Q_1 за время t_1 , то управление $u'(t) = ku(kt)$, где k — некоторое положительное число, переводит Q_0 в Q_1 за время t_1/k . При этом $Q(t)$ переходит в $Q(kt)$. Это позволяет, не ограничивая общность, считать что $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \equiv 1$.

Так как таблица умножения в алгебре Ли $L = \text{span}(e_1, e_2, V_1, V_2, V_3)$ имеет вид:

$$\text{ad } e_i = 0, \quad [V_1, V_2] = V_3, \quad [V_2, V_3] = V_1, \quad [V_3, V_1] = V_2,$$

то для векторных полей X_1, X_2, X_3 имеем

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = -V_1, \quad [X_2, X_3] = -V_2.$$

Тогда видно, что $\text{span}(X_1, X_2, X_3, [X_1, X_3], [X_2, X_3]) = L$, и из теоремы Рашевского-Чжоу следует, что система является вполне управляемой. Существование оптимальных траекторий в задаче (4.68)–(4.71) следует из теоремы Филиппова.

В дальнейших вычислениях будет использоваться изоморфизм между \mathbb{R}^3 и алгеброй Ли $\mathfrak{so}(3)$. А именно, каждому вектору $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ можно поставить в соответствие матрицу $\tilde{A} \in \mathfrak{so}(3)$ по следующему правилу:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.14.2 Аномальные траектории

Предложение 4.3. (1) Все аномальные экстремальные траектории постоянной скорости имеют вид

$$x = -\Omega_2 t, \quad y = \Omega_1 t, \quad R = e^{\tilde{\Omega} t}, \quad (4.72)$$

где $\tilde{\Omega}$ — кососимметрическая матрица, соответствующая вектору угловой скорости $\vec{\Omega}$ с компонентой $\Omega_3 = 0$:

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_2 \\ 0 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Любая аномальная экстремальная траектория $Q(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимальна для любого $t_1 > 0$.

Следовательно, в аномальном случае вектор угловой скорости является постоянным горизонтальным вектором, и сфера равномерно катится по прямой без прокручивания.

4.14.3 Нормальные экстремали

Гамильтонова система ПМП в нормальном случае имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\Omega_2, \\ \dot{y} &= \Omega_1, \\ \dot{R} &= R\tilde{\Omega}, \\ \dot{\Omega}_1 &= \omega_2\Omega_3, \\ \dot{\Omega}_2 &= -\omega_1\Omega_3, \\ \dot{\Omega}_3 &= \omega_1\Omega_2 - \omega_2\Omega_1, \\ \dot{\omega}_1 &= 0, \quad \dot{\omega}_2 = 0.\end{aligned}$$

Теорема 4.52. Если $\omega \neq 0$ и $\tilde{\Omega} \neq \lambda\bar{\omega}$, то параметризованные длиной дуги нормальные экстремали описываются уравнениями

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \cos \omega t}{\omega^2} & \frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) & \frac{\omega_2}{\omega} \sin \omega t \\ \frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) & \frac{\omega_2^2 + \omega_1^2 \cos \omega t}{\omega^2} & -\frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t \\ -\frac{\omega_2}{\omega} \sin \omega t & \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1^0 \\ \Omega_2^0 \\ \Omega_3^0 \end{pmatrix}, \\ x &= \frac{\Omega_3^0 \omega_1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{(\Omega_1^0 \omega_2 - \Omega_2^0 \omega_1) \omega_1}{\omega^3} \sin \omega t - \frac{\omega_2 (\Omega_2^0 \omega_2 + \Omega_1^0 \omega_1)}{\omega^2} t, \\ y &= \frac{\Omega_3^0 \omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{(\Omega_1^0 \omega_2 - \Omega_2^0 \omega_1) \omega_2}{\omega^3} \sin \omega t + \frac{\omega_1 (\Omega_2^0 \omega_2 + \Omega_1^0 \omega_1)}{\omega^2} t, \\ R(t) &= e^{t(\tilde{\omega} + \tilde{\Omega}_0)} e^{-t\tilde{\omega}}.\end{aligned}$$

В оставшихся случаях нормальные экстремальные траектории описываются уравнениями

$$x = -\Omega_2 t, \quad y = \Omega_1 t, \quad R = e^{\tilde{\Omega} t}.$$

где $\tilde{\Omega}$ — кососимметрическая матрица, соответствующая произвольному единичному вектору $\vec{\Omega}$.

4.14.4 Диаметр субримановой метрики

Рассмотрим субриманову метрику d на группе $\mathrm{SO}(3)$, соответствующую задаче (4.68)–(4.71).

Теорема 4.53. Для метрики d на $\mathrm{SO}(3)$ наиболее удаленными точками являются Id и $e^{\pi(a_1 A_1 + a_2 A_2)}$, $a_1^2 + a_2^2 = 1$, с расстоянием между ними $d(\mathrm{Id}, e^{\pi(a_1 A_1 + a_2 A_2)}) = \pi\sqrt{3}$. Состояниям $e^{\pi(a_1 A_1 + a_2 A_2)}$, $a_1^2 + a_2^2 = 1$, соответствует сфера, перевернутая на противоположный полюс.

4.14.5 Библиографические комментарии

Результаты этого раздела получены в работе [25].

Список иллюстраций

1	Классификация 3-мерных контактных левоинвариантных субримановых структур	11
2	Субриманова сфера на группе Гейзенберга	17
3	Субриманова полусфера на группе Гейзенберга	17

Список литературы

- [1] A.A. Agrachev, Methods of control theory in nonholonomic geometry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vols. 1, 2*, pp. 1473–1483, Basel, Birkhäuser, 1995.
- [2] Agrachev A.A., Geometry of optimal control problems and Hamiltonian systems. In: Nonlinear and Optimal Control Theory, Lecture Notes in Mathematics. CIME, 1932, Springer Verlag, 2008, 1-59.
- [3] А.А. Аграчев, Некоторые вопросы субримановой геометрии, *Успехи математических наук*, 71:6 (432), 2016, 3–36.
- [4] A.Agrachev, D. Barilari, Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups. *J. Dynamical and Control Systems*, 2012, v.18, 21–44
- [5] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry, *Calculus of variations and partial differential equations*, 43 (2012), 3–4, 355–388.
- [6] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2019
- [7] A.Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka, Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. *J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1997, v.2, 377–448
- [8] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, 2005.
- [9] D. Almeida, Sub-riemannian symmetric spaces of Engel type, *Mat. contemp.*, 17 (1998), pp. 45–58.
- [10] D. Almeida, Sub-riemannian homogeneous spaces of Engel type, *J. Dynamic. and Control Syst.*, 20 (2014), pp. 149– 166.
- [11] А. А. Ардентов, И. С. Губанов. Моделирование парковки автомобиля с прицепом вдоль путей Маркова-Дубинса и Ридса-Шеппа. *Программные системы: теория и приложения*, 2019, 10:4(43), с. 97–110.
- [12] Ardentov, A. A. and Sachkov, Yu. L., Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group, *ESAIM: COCV*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 958–988.
- [13] D. Barilari, U. Boscain, J.-P. Gauthier, On 2-step, corank 2 nilpotent sub-Riemannian metrics, SIAM Journal on Control and Optimization 50 (2012), 1:559–582
- [14] L. Bates, F. Fassò. The Conjugate Locus for the Euler Top. I. The Axisymmetric Case. // International Mathematical Forum. 2007. 2, 43. 2109–2139.
- [15] A. Bellaïche, J. Risler, Eds., Sub-Riemannian geometry. Birkhäuser, Progress in Math., 1996, v.144
- [16] В. Н. Берестовский, “Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой”, Сиб. матем. журн., 55:5 (2014), 959–970
- [17] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли”, Сибирский математический журнал, 42:4 (2001), 731–748
- [18] В. Н. Берестовский, “(Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO(2, 1)$ ”, Алгебра и анализ, 27:1 (2015), 3–22
- [19] В. Н. Берестовский, И. А. Грибанова, “Субриманово расстояние в группах Ли $SU(2)$ и $SO(3)$ ”, Матем. тр., 18:2 (2015), 3–21
- [20] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO(3)$ ”, Сиб. матем. журн., 56:4 (2015), 762–774
- [21] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SL(2)$ ”, Сиб. матем. журн., 57:3 (2016), 527–542
- [22] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Локально изометричные накрытия группы Ли $SO(2, 1)$ со специальной субримановой метрикой”, Матем. сб., 207:9 (2016), 35–56
- [23] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Субриманово расстояние в группе Ли $SO(2, 1)$ ”, Алгебра и анализ, 28:4 (2016), 62–79

- [24] Б. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Субриманово расстояние в группе Ли $SL(2)$ ”, Сиб. матем. журн., 58:1 (2017), 22–35
- [25] И. Ю. Бесчастный, Об оптимальном качении сферы с прокручиванием, без проскальзывания, *Матем. сб.*, 205:2 (2014), 3–38
- [26] I. Beschartnyi, A. Medvedev, Left-invariant Sub-Riemannian Engel structures: abnormal geodesics and integrability, *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2018, 56 (5), 3524–3537.
- [27] J.D. Boissonat, A. Cerezo, J. Leblong, Shortest paths of bounded curvature in the plane, in *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, Nice, France, 1992.
- [28] U. Boscain, T. Chambrion, J.-P. Gauthier, On the $K + P$ problem for a three-level quantum system: optimality implies resonance. *J. Dyn. Control Syst.*, 8 (4): 547–572, 2002.
- [29] U. Boscain, F. Rossi. “Invariant Carnot–Caratheodory metrics on S^3 , $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces”, *SIAM J. Control Optim.*, 47 (2008), pp. 1851–1878
- [30] R.W. Brockett, Lie theory and control systems defined on spheres. *SIAM J. Appl. Math.*, 25: 213–225, 1973
- [31] R.W. Brockett. “Control theory and singular Riemannian geometry”, New Directions in Applied Mathematics, Occasion of the Case Centennial Celebration (April 25/26, 1980), eds. P.J. Hilton, G.S. Young, 1982, pp. 11–27.
- [32] Brockett R. Control theory and singular Riemannian geometry// In: New Directions in Applied Mathematics, (P. Hilton and G. Young eds.), Springer-Verlag, New York, 11–27, 1982.
- [33] R.W. Brockett, Explicitly solvable control problems with nonholonomic constraints. In *Decision and control, 1999, Proc. 38th IEEE Conf. on*, vol. 1, pp. 13–16, IEEE, 1999.
- [34] R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussmann, Eds., Differential geometric control theory. Birkhäuser Boston, 1983
- [35] Y.A. Butt, A.I. Bhatti, Yu. L. Sachkov, Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group $SH(2)$, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 23 (2017), 155–195
- [36] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scott D. Pauls, and Jeremy T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [37] D.Ch. Chang, I. Markina, A. Vasiliev, Sub-riemannian geodesics on the 3-sphere, *Compl. anal. oper. theory*, 3 (2009), 361–377.
- [38] Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents // American Journal of Mathematics. 1957. V. 79. No. 3. P. 497–516.
- [39] Elisha Falbel and Claudio Gorodski. Sub-Riemannian homogeneous spaces in dimensions 3 and 4. *Geom. Dedicata*, 62(3): 227–252, 1996.
- [40] А.Ф. Филиппов, О некоторых вопросах теории оптимального регулирования, *Вестник Московского университета, Сер. мат., мех., астрон., физ., хим.*, 1959, No. 2, 25–32.
- [41] B. Gaveau. “Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents”, *Acta Mathematica*, 139 (1977), pp. 95–153.
- [42] В.Я. Гершкович, Вариационная задача с неголономной связью на $SO(3)$. — В сб.: Новое в глобальном анализе. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984, с. 149–152.
- [43] Ф. Гриффитс, *Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление*, М.: Мир, 1986.
- [44] A. Isidori, *Nonlinear control systems: an introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [45] V. Jurdjevic, The geometry of the plate-ball problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 124 (1993), 305–328.
- [46] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [47] V. Jurdjevic, Optimal control, geometry, and mechanics. In *Mathematical control theory*, pp. 227–267, Springer, New York, 1999.

- [48] V. Jurdjevic, Hamiltonian point of view of non-Euclidean geometry and elliptic functions. *Systems Control Lett.*, 43 (1): 25–41, 2001.
- [49] Velimir Jurdjevic. Optimal control and geometry: integrable systems. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [50] Krantz S. G., Parks H. R., *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*, Birkhauser, 2001.
- [51] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — 5-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 224 с.
- [52] E. Le Donne, R. Montgomery, A. Ottazzi, P. Pansu, D. Vittone, Sard property for the endpoint map on some Carnot groups, *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire* Volume 33, Issue 6, November–December 2016, Pages 1639-1666
- [53] W.S. Liu, H. Sussmann, Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-2 distributions, *Memoirs of the American Mathematical Society*, No. 564, Vol. 118, November 1995
- [54] А.А. Марков, Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сб. Харьков. матем. общ. Вторая сер., 1:2 (1889), 250–276.
- [55] F. Monroy-Pérez, A. Anzaldo-Meneses, Optimal control on the Heisenberg group, *Journal of Dynamical and Control Systems*, vol. 5, No. 4, 1999, 473–499.
- [56] F. Monroy-Pérez, A. Anzaldo-Meneses. “The step-2 nilpotent $(n, n(n+1)/2)$ sub-Riemannian geometry”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 12:2 (2006), pp. 185–216.
- [57] A. Montanari, D. Morbidelli. On the sub-Riemannian cut locus in a model of free two-step Carnot group, *Calc. Var.* 56, 36 (2017), 1 - 26.
- [58] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Amer. Math. Soc., 2002
- [59] O. Myasnichenko. “Nilpotent $(3, 6)$ sub-Riemannian problem”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 8:4 (2002), pp. 573–597
- [60] Oleg Myasnichenko. Nilpotent $(n, n(n+1)/2)$ sub-Riemannian problem. *J. Dyn. Control Syst.*, 12(1): 87–95, 2006.
- [61] H. Nijmeijer, A. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [62] Th. Pecsváradi, Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-17, No. 6, December 1972, 763–772.
- [63] А.В.Подобряев, Ю.Л.Сачков, Левоинвариантные симметричные римановы задачи на группах собственных движений плоскости Лобачевского и сферы, *Доклады Академии Наук*, 2017, 473, No. 6, с. 640–642
- [64] A.Podobryaev, Yu. L. Sachkov, Cut locus of a left invariant Riemannian metric on $\text{SO}(3)$ in the axisymmetric case, *Journal of Geometry and Physics*, 110 (2016) 436–453.
- [65] А. В. Подобряев, Диаметр сферы Берже, *Матем. заметки*, 103:5 (2018), 779–784
- [66] A.Podobryaev, Yu. L. Sachkov, Symmetric Riemannian Problem on the Group of Proper Isometries of Hyperbolic Plane, *J Dyn Control Syst* (2018) 24: 391
- [67] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Наука, 1961.
- [68] Reeds, J.A. and Shepp, L.A., Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards, *Pacific J. Math.*, 1990. vol. 145, no. 2, pp. 367–393.
- [69] L. Rifford. *Sub-Riemannian geometry and Optimal Transport*. SpringerBriefs in Mathematics, 2014.
- [70] L. Rizzi, U. Serres. On the cut locus of free, step two Carnot groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 145 (2017), 5341–5357
- [71] Yu. L. Sachkov, Symmetries of flat rank two distributions and sub-Riemannian structures, *Transactions of the AMS*, 2004, 2, 457-494

- [72] Сачков Ю.Л. Дискретные симметрии в обобщенной задаче Диодоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, № 2, С. 95–116.
- [73] Сачков Ю.Л. Теория управления на группах Ли, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2007, т. 27, 5–59.
- [74] Сачков Ю.Л. Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. —М.: Физматлит, 2007.
- [75] Сачков Ю.Л. Симметрии и стратегии Максвелла и симметрии в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости, *Мат. Сборник*, 2010, Т. 201, № 7, С. 99–120.
- [76] Yu. L. Sachkov, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 17 (2011), 293–321.
- [77] Сачков Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления, М.: URSS, 2021, 160 С.
- [78] Yu. L. Sachkov, Conjugate time in the sub-Riemannian problem on the Cartan group, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 27, 709–751 (2021).
- [79] Ю.Л. Сачков, Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, интегрируемые в эллиптических функциях, напечатана для публикации.
- [80] Yu. L. Sachkov, E.Sachkova, Exponential mapping in Euler’s elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 20 (2014), No. 4, 443–464.
- [81] T. Sakai. Cut loci of Berger’s sphere. // Hokkaido Mathematical Journal. 1981. 10. 143–155.
- [82] P. Soères, Commande optimale et robots mobiles non holonomes, Ph.D. dissertation, Université Paul Sabatier, no. 1554, 1993.
- [83] P. Soères and J.-P. Laumond, Shortest paths synthesis for a car-like robot, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, No. 5, May 1996, 672–688.
- [84] E. D. Sontag, *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [85] Sussmann, H.J. and Tang, G., Shortest paths for the Reeds-Shepp car: a worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control, *Report SYCON-91-10*, 1991.
- [86] В.М. Тихомиров, *Рассказы о максимумах и минимумах*, М.: МЦНМО, 2006
- [87] А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, “Геодезический поток на $SL(2, \mathbb{R})$ с неголономными ограничениями”, Записки научных семинаров ЛОМИ / Акад. наук СССР, Мат. ин-т им. В. А. Стеклова, Ленинград. отд-ние. - Л. : Наука, Т. 155 : Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика : 7 : сб. работ / под ред. Л. Д. Фаддеева. – 1986, 7–17
- [88] Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи*. Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16, ВИНИТИ, Москва, 1987, 5–85.
- [89] А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, Геометрия неголономной сферы трехмерных групп Ли, Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Новое в глобальном анализе, 61–75. Воронеж, 1987. Перевод на англ. язык: Lect. Notes in Math. 1334, 309–331 (1988).
- [90] Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные задачи и геометрия распределений*. Добавление к книге [43], с. 318–349.
- [91] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, М.: Мир, 1987.
- [92] М.И. Зеликин, *Оптимальное управление и вариационное исчисление*, М.: URSS, 2014.