

Задачи и методы геометрической теории управления

Ю.Л. Сачков

Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский
yusachkov@gmail.com

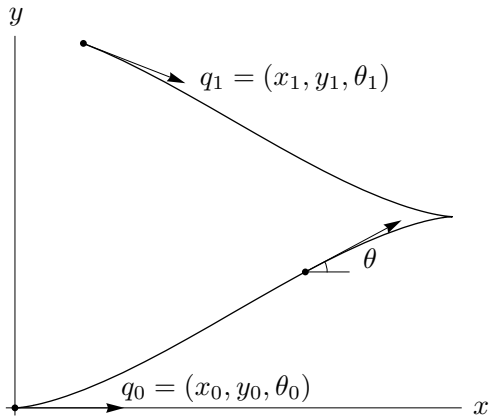
Семинар «Динамические системы и их приложения»
Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент

11 апреля 2022 г.

План лекции

1. Примеры задач оптимального управления
2. Динамические и управляемые системы
3. Задача управляемости
4. Задача оптимального управления
5. Особенности задач геометрической теории управления
6. История математической теории управления
7. Теорема об орбите и теорема Рашевского-Чжоу
8. Примеры
9. Принцип максимума Понтрягина
10. Примеры
11. Приложения к робототехнике
12. Приложения к обработке изображений
13. Литература

Управление мобильным роботом



$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Восстановление изображений

- Монохромное изображение
- Семейство изофот (линий постоянной яркости)
- Изображение повреждено в некоторых областях
- Антропоморфное восстановление поврежденных кривых

Восстановление поврежденной кривой

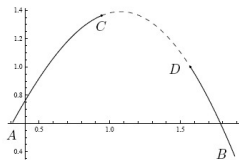


Рис.: Исходная кривая AB с поврежденной дугой CD

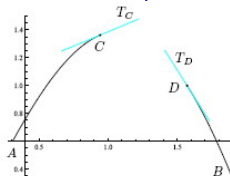


Рис.: Граничные условия для восстановления дуги CD

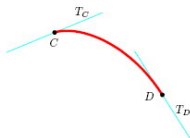


Рис.: Новая кривая $\widetilde{CD}$

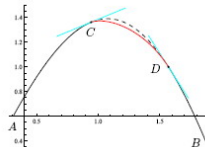


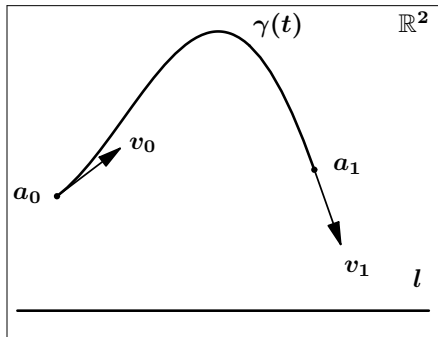
Рис.: Исходная кривая AB с поврежденной и новой дугами

Качение твердых тел

- Пара твердых тел
- Состояние системы — контактная конфигурация твердых тел (какова размерность множества состояний?)
- Качение без прокручивания и проскальзывания (какова размерность множества скоростей?)
- Критерий качества — длина кривой, пробегаемой точкой контакта тел
- Задача: оптимально перекатить тела из начальной контактной конфигурации в конечную конфигурацию
- Нетривиальны даже простейшие примеры: качение сферы по плоскости, качение сферы по сфере

Упругие стержни (эластики)

- Эластики на плоскости:



- Аналогичные задачи для эластик в пространстве, на сфере, других многообразиях.

Приложения плоских и пространственных эластик

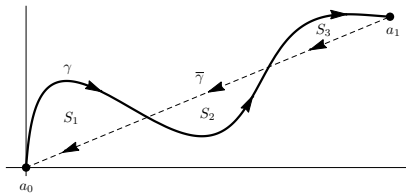
- теория упругости и сопротивление материалов (моделирование колонн, балок, упругих стержней)
- размер и форма в биологии (максимальная высота дерева, изгиб пальм под действием ветра, кривизна позвоночника, механика крыльев насекомых)
- нелинейные сплайны в теории аппроксимации
- восстановление изображений в компьютерном зрении
- моделирование тонких оптических волокон и гибких соединений в микроэлектронике
- динамика оси вихря и кубическое уравнение Шредингера
- моделирование молекул ДНК

Задача Дидоны

*Столько купили земли и дали ей имя Бирса,
Сколько смогли окружить бычьей шкурой.*

Вергилий «Энеида»

- Дано: $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединяющая их кривая $\bar{\gamma}$, и $S \in \mathbb{R}$.
- Найти: кратчайшую кривую $\gamma(t)$, $t \in [0, t_1]$, т.ч.:
 - $\gamma(0) = a_0$, $\gamma(t_1) = a_1$,
 - кривые γ и $\bar{\gamma}$ ограничивают на плоскости область площади S .



Обобщения задачи Дидоны

1.
 - Дано: $\dots$, $c \in \mathbb{R}$
 - Найти: $\gamma(t)$, $\dots$, кривые $\gamma(t)$ и $\bar{\gamma}(t)$ ограничивают на плоскости область с центром масс c .
2.
 - Дано: $\dots$, эллипс E с центром a_0 .
 - Найти: $\gamma(t)$, $\dots$, кривые $\gamma(t)$ и $\bar{\gamma}(t)$ ограничивают на плоскости область с эллипсом инерции E .

Приложения:

- управление роботом с 2-мя прицепами,
- качение твердых тел,
- проектирование балок с заданными характеристиками прочности.

Динамические системы

- Гладкая динамическая система (ОДУ):

$$\dot{q} = f(q), \quad q \in M.$$

- Будущее детерминировано:

$$q(0) = q_0 \Rightarrow \forall t > 0 \quad \exists! q(t).$$

- Пример: планета, вращающаяся вокруг Солнца.

Управляемые системы

- Семейство динамических систем с управляющим параметром:

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U.$$

- Управление $u = u(t) \in U \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f(q, u(t)), \\ q(0) &= q_0 \Rightarrow \forall t > 0 \quad \exists! q_u(t). \end{aligned}$$

- Примеры: ракета, самолет, автомобиль,

Пример: управление мобильным роботом

- Состояние $q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$, $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$,
- Простые движения:

$$\text{вперед} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{поворот на месте} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Управления: линейная скорость u_1 , угловая скорость u_2
- Управляемая система:

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f(q, u).$$

1. Задача управляемости

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U. \quad (\text{УС})$$

- Множество достижимости УС из точки $q_0 \in M$:

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{q_u(t) \mid u = u(t) \in U, q_u(0) = q_0, t \in [0, \infty)\},$$

- Множество достижимости УС из точки $q_0 \in M$ за время $t_1 \geq 0$:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{q_u(t_1) \mid u = u(t) \in U, q_u(0) = q_0, t \in [0, t_1]\}.$$

- УС называется:

- глобально управляемой из точки $q_0 \in M$, если $\mathcal{A}_{q_0} = M$,
- локально управляемой в точке $q_0 \in M$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad q_0 \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}$.

- Примеры: 1) Мобильный робот глобально управляем в $\mathbb{R}^2 \times S^1$,
2) Система из 2-х катящихся шаров глобально управляема?

2. Задача оптимального управления

- Пусть $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$.
- Обычно траектория, ведущая из q_0 в q_1 , неединственна. Как выбрать наилучшую из них?
- Функционал качества (энергия, длина, время, ...)

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q, u) dt.$$

- Задача оптимального управления:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f(q, u), & q &\in M, & u &\in U, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q, \\ J &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Примеры задач оптимального управления

- Управление мобильным роботом:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

- Эластики Эйлера:

$$\dot{x} = \cos \theta, \quad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1,$$

$$\dot{y} = \sin \theta, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$\dot{\theta} = u,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$J = \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Особенности задач и методов геометрической теории управления

- Язык и методы дифференциальной геометрии:
 - векторные поля, их коммутаторы и потоки,
 - гладкие многообразия,
 - группы Ли и алгебры Ли,
- Методы симплектической геометрии (гамильтоновы системы, скобки Пуассона),
- Методы теории динамических систем (интегрируемость),
- Инвариантный бескоординатный подход,
- Группы преобразований, порожденные управляемой системой.
- Приложения:
 - геометрия (риманова, лоренцева, финслерова, субриманова, сублоренцева, субфинслерова,...)
 - классическая и квантовая механика,
 - робототехника,
 - обработка изображений.

История вариационного исчисления и математической теории управления

- 17 в. И. Бернулли, Г.В.Лейбниц, Я Бернулли, И. Ньютон: задача о брахистохроне, аэродинамическая задача,
- 18 в. Л. Эйлер, Ж. Лагранж: основы вариационного исчисления, уравнение Эйлера-Лагранжа,
- 18–19 вв. А. Лежандр, У.Р. Гамильтон, К. Якоби, К. Вейерштрасс: теория второй вариации, теория Гамильтона-Якоби,
- 1950-е гг. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко: принцип максимума Понтрягина,
- 1950-е гг. Р. Беллман: динамическое программирование,
- 1970-е гг. Р. Брокетт, Х. Суссманн, В. Джарджевич: геометрическая теория управления,
- 1990-е гг. А.А.Аграчев, Ж.-П.Готье, Р. Монтгомери, У. Боскаин, Э. Ле Донне, . . . : субриманова, субфинслерова геометрия, . . .

1. Задача управляемости: Множество достижимости и коммутирование векторных полей

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U$$

- $U = \{1, 2\}$, P_i^t — поток поля $V_i := f(q, i)$, $i = 1, 2$.
- $\mathcal{A}_{q_0} = \{ P_2^{t_k} \circ P_1^{t_{k-1}} \circ \dots \circ P_2^{t_2} \circ P_1^{t_1}(q_0) \mid t_i \geq 0, k \in \mathbb{N} \}$.
- Коммутативный случай: $P_1^t \circ P_2^s = P_2^s \circ P_1^t \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$, тогда $\mathcal{A}_{q_0} = \{ P_2^s \circ P_1^t(q_0) \mid t, s \geq 0 \}$ — кусок 2-мерной поверхности.
- Пример: управление моб. роботом — поля не коммутируют!
- Как определить множество достижимости и коммутационные свойства векторных полей V_1, V_2 , не интегрируя ОДУ $\dot{q} = V_i(q)$?

Скобка Ли векторных полей

- Общий (некоммутативный) случай:

$$P_1^t \circ P_2^s \neq P_2^s \circ P_1^t, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

$$P_1^t \circ P_2^t \neq P_2^t \circ P_1^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- $\varphi(t) = P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \circ P_1^t(q) \neq q.$
- Формула Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t \dot{\varphi}(0) + \frac{t^2}{2} \ddot{\varphi}(0) + o(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

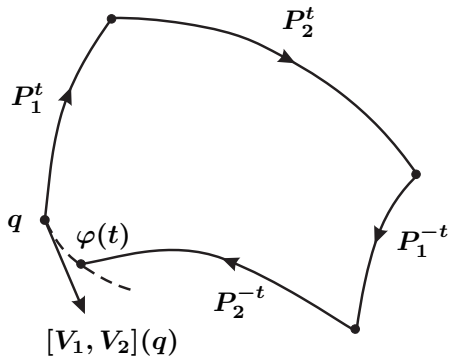
$$\varphi(0) = q,$$

$$\dot{\varphi}(0) = -V_2(q) - V_1(q) + V_2(q) + V_1(q) = 0,$$

$$\frac{\ddot{\varphi}(0)}{2} =: [V_1, V_2](q),$$

$$\varphi(t) = q + t^2 [V_1, V_2](q) + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

Скобка Ли векторных полей



$$\varphi(t) = q + t^2 [V_1, V_2](q) + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

В координатах

$$[V_1, V_2] = \frac{dV_2}{dq} V_1 - \frac{dV_1}{dq} V_2.$$

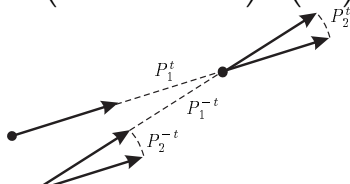
Пример: управление мобильным роботом

- Векторные поля:

$$V_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{x_1, x_2}^2 \times S_\theta^1$$

- V_1 движение вперед, V_2 поворот против часовой стрелки.

$$\begin{aligned} [V_1, V_2](q) &= \frac{d V_2}{d q} V_1(q) - \frac{d V_1}{d q} V_2(q) \\ &= 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Множество достижимости и алгебра Ли векторных полей

$$\dot{q} \in \{\pm V_1(q), \pm V_2(q)\}.$$

- Коммутативный случай ($[V_1, V_2] = 0$) $\Rightarrow$
 $\mathcal{A}_q$ не зависит от количества переключений.
- Некоммутативный случай $\Rightarrow$
 - движение вдоль $\pm V_1$ и $\pm V_2$,
 - движение вдоль $\pm[V_1, V_2]$,
 - движение вдоль $\pm[V_1, [V_1, V_2]]$ и $\pm[V_2, [V_1, V_2]]$,
 - ...
- Гипотеза: $\dim \mathcal{A}_q = \dim \text{Lie}_q(V_1, V_2)$,

$$\text{Lie}_q(V_1, V_2) = \text{span}(V_1(q), V_2(q), [V_1, V_2](q), \\ [V_1, [V_1, V_2]](q), [V_2, [V_1, V_2]](q), \dots).$$

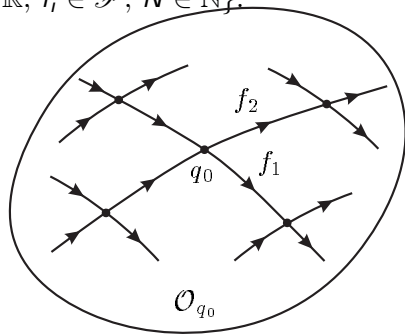
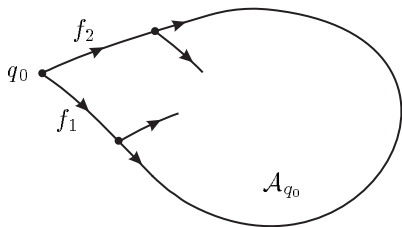
Орбита управляемой системы

- Управляемая система: любое множество векторных полей $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$
- Множество достижимости системы $\mathcal{F}$ из точки $q_0 \in M$:

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{e^{t_N f_N} \circ \dots \circ e^{t_1 f_1}(q_0) \mid t_i \geq 0, f_i \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}\},$$

- Орбита системы $\mathcal{F}$ из точки q_0 :

$$\mathcal{O}_{q_0} = \{e^{t_N f_N} \circ \dots \circ e^{t_1 f_1}(q_0) \mid t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}\}.$$



Свойства множеств достижимости и орбит

1. $\mathcal{A}_{q_0} \subset \mathcal{O}_{q_0}$,
2. $\mathcal{O}_{q_0}$ имеет «более простую» структуру, чем $\mathcal{A}_{q_0}$,
3. $\mathcal{A}_{q_0}$ имеет «разумную» структуру внутри $\mathcal{O}_{q_0}$.

Свойства 2, 3: Теорема об орбите.

Система $\mathcal{F}$ называется симметричной, если $\mathcal{F} = -\mathcal{F}$.

4. $\mathcal{F} = -\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{A}_{q_0} = \mathcal{O}_{q_0}$.

Теорема об орбите

Пусть M и $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$ вещественно аналитичны, $q_0 \in M$.

Теорема (Нагано-Суссманн)

- (1) Орбита $\mathcal{O}_{q_0}$ системы $\mathcal{F}$ есть связное подмногообразие многообразия M .
- (2) Для любой точки $q \in \mathcal{O}_{q_0}$

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{Lie}_q(\mathcal{F}),$$

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span}\{[f_N, [\dots, [f_2, f_1] \dots]](q) \mid f_i \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}\}.$$

- (3) $\dim \mathcal{O}_{q_0} = \dim \text{Lie}_{q_0}(\mathcal{F})$.

Следствие: теорема Рашевского-Чжоу

Теорема (Рашевский-Чжоу)

Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$, многообразие M связно, и

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M, \quad q \in M. \quad (1)$$

Тогда $\mathcal{O}_q = M$ для любой точки $q \in M$.

Система $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$, удовлетворяющая свойству (1), называется вполне неголономной (системой полного ранга).

Теорема (Ранговое условие управляемости)

Если многообразие M связно, а система $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ симметрична и вполне неголономна, то она глобально управляема на M .

Пример: управление мобильным роботом

$$\mathcal{F} = \{u_1 f_1 + u_2 f_2 \mid (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\} \subset \text{Vec}(\mathbb{R}^2 \times S^1),$$

$$f_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

- Система симметрична: $\mathcal{F} = -\mathcal{F}$.
- Алгебра Ли:

$$[f_1, f_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} =: f_3,$$

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span}(f_1(q), f_2(q), f_3(q)) = T_q(\mathbb{R}^2 \times S^1).$$

- Система $\mathcal{F}$ вполне неголономна, поэтому управляема.

Пример: орбиты разной размерности

$$M = \mathbb{R}_{x,y,z}^3, \quad \mathcal{F} = \left\{ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

$$\forall q \in \mathbb{R}^3 \quad \mathcal{O}_q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = q^2\},$$

- $q \neq 0 \Rightarrow$ 2-мерная сфера,
- $q = 0 \Rightarrow$ точка.

Орбита управляемой системы — обобщение фазового портрета векторного поля.

Множества достижимости систем полного ранга

Управляемая система $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ полного ранга:

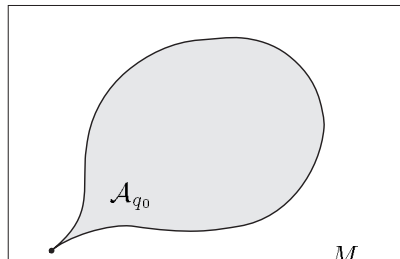
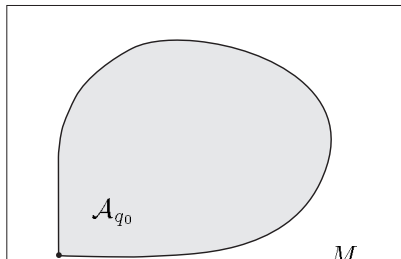
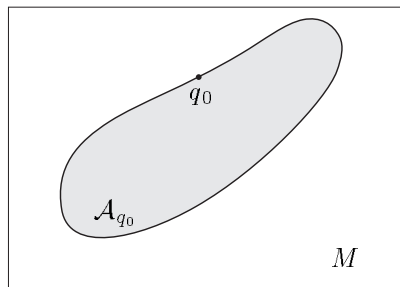
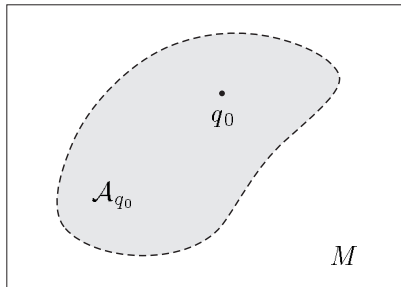
$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M \quad \forall q \in M.$$

Иначе сужение системы на ее орбиту — система полного ранга.

Множество достижимости может быть:

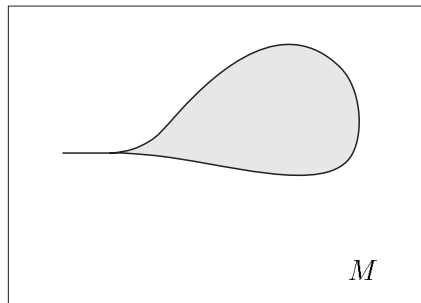
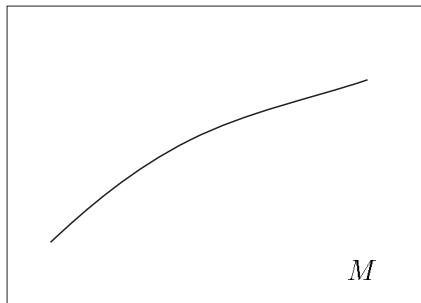
- гладким многообразием без границы,
- гладким многообразием с гладкой границей,
- гладким многообразием, имеющим границу с особенностями типа угловой точки или точки возврата.

Возможные множества достижимости



Невозможные множества достижимости

- подмножество меньшей размерности,
- множество с граничными точками, изолированными от внутренности.



Теорема Кренера

Теорема (Кренер)

Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ и $\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q M$ для всех $q \in M$. Тогда:

- (1) $\forall q \in M \quad \text{int } \mathcal{A}_q \neq \emptyset,$
- (2) $\forall q \in M \quad \text{cl}(\text{int } \mathcal{A}_q) \supset \mathcal{A}_q.$

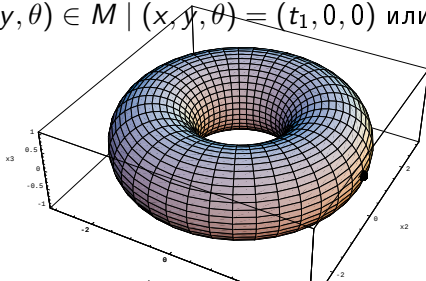
Пример: Задача Эйлера об эластиках

$$\dot{q} = f_1(q) + uf_2(q), \quad q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad u \in \mathbb{R},$$
$$f_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M \Rightarrow \mathcal{O}_q = M \quad \forall q \in M.$$

Из геометрических соображений на плоскости (x, y)

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{(x, y, \theta) \in M \mid (x, y, \theta) = (t_1, 0, 0) \text{ или } x^2 + y^2 < t_1^2\}.$$



Пример: Машина Маркова-Дубинса

- Модель машины: единичный вектор, расположенный в произвольной точке плоскости.
- Машина движется вперед с единичной скоростью и поворачивается с угловой скоростью, по абсолютной величине не большей единицы.
- Перевести машину из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за минимальное время.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta, & q &= (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1 = M, \\ \dot{y} &= \sin \theta, & |u| &\leq 1, \\ \dot{\theta} &= u, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ t_1 &\rightarrow \min .\end{aligned}$$

Машина Маркова-Дубинса: орбита

$$\dot{q} = f_1(q) + uf_2(q), \quad q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad |u| \leq 1,$$
$$f_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$\mathcal{F} = \{f_1 + uf_2 \mid |u| \leq 1\},$$

$$[f_1, f_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} =: f_3,$$

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span}(f_1(q), f_2(q), f_3(q)) = T_q M \quad \forall q \in M,$$

$$\mathcal{O}_q = M \quad \forall q \in M.$$

Машина Маркова-Дубинса:

множество достижимости

- Суженная система $\mathcal{F}_1 = \{f_1 \pm f_2\} \subset \mathcal{F}$ имеет 2π -периодические траектории:

$$\theta = \theta_0 \pm t, \quad x = x_0 \pm (\sin(\theta_0 \pm t) - \sin \theta_0), \quad y = y_0 \pm (\cos \theta_0 - \cos(\theta_0 \pm t)).$$

- Сдвиг вдоль полей $f_1 \pm f_2$ в отрицательном времени может быть получен как сдвиг в положительном времени.
- Введем симметричную систему

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2 &= \{f_1 \pm f_2, -f_1 \pm f_2\}, \\ \mathcal{A}_q(\mathcal{F}_2) &= \mathcal{A}_q(\mathcal{F}_1), \quad q \in M.\end{aligned}$$

- Система $\mathcal{F}_2$ имеет полный ранг, поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_q(\mathcal{F}_2) &= \mathcal{O}_q(\mathcal{F}_2) = M, \\ \mathcal{A}_q(\mathcal{F}) &\supset \mathcal{A}_q(\mathcal{F}_2) = M \text{ для всех } q \in M.\end{aligned}$$

- Машина Маркова-Дубинса вполне управляема.

2. Задача оптимального управления

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M = \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (3)$$

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q, u) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

t_1 закреплено.

Экстремальная задача (4):

- в бесконечномерном пространстве:
 $u(\cdot)$ кусочно-непрерывно или измеримо по Лебегу, ограничено,
- с дифференциальной связью (2),
- и краевыми условиями (3).

Принцип максимума Понтрягина (ПМП)

Семейство гамильтонианов ПМП

$$h_u^\nu(p, q) = \langle p, f(q, u) \rangle + \nu \varphi(q, u), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad u \in U, \quad p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема (ПМП)

Если траектория $q(t)$ и соответствующее управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимальны, то существуют кривая $p(t) \in \mathbb{R}^n$ и число $\nu \in \{-1, 0\}$, для которых выполнены условия:

(1) Гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial h_u^\nu}{\partial q}, \\ \dot{q} = \frac{\partial h_u^\nu}{\partial p}, \end{cases}$$

(2) условие максимума $h_{u(t)}^\nu(p(t), q(t)) = \max_{v \in U} h_v^\nu(p(t), q(t))$,

(3) условие нетривиальности $(p(t), \nu) \neq (0, 0)$.

Пример: остановка поезда

- Материальная точка массы m , движущаяся по прямой под действием силы F , $|F| \leq F_{\max}$.
- В начальный момент заданы x^0 и $\dot{x}^0$.
- Подобрать силу F так, чтобы точка остановилась в начале координат ($x^1 = 0$, $\dot{x}^1 = 0$) за минимальное время.

Задача быстродействия:

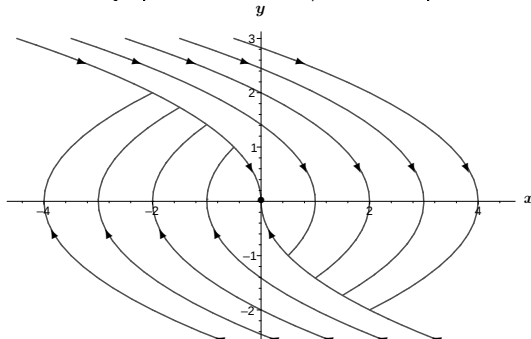
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, & (x, y) &\in \mathbb{R}^2, \\ \dot{y} &= u, & |u| &\leq 1, \\ x(0) &= x^0, & y(0) &= \dot{x}^0, \\ x(t_1) &= 0, & y(t_1) &= 0, \\ t_1 &\rightarrow \min.\end{aligned}$$

Остановка поезда: управляемость

$$\dot{q} = f_1(q) + uf_2(q), \quad q = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \leq 1,$$

$$f_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

- $[f_1, f_2] = -\frac{\partial}{\partial x}$, $\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = T_q \mathbb{R}^2$,
- $\mathcal{O}_q = \mathbb{R}^2 \quad \forall q \in \mathbb{R}^2$.
- Траектории с постоянным управлением $u \neq 0$ — параболы:

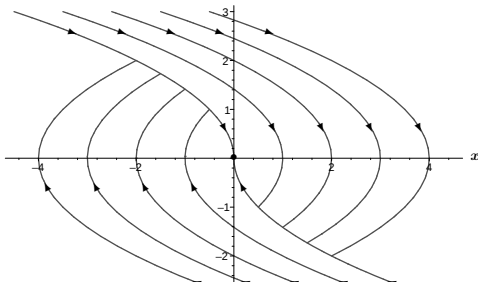


Остановка поезда: оптимальный синтез

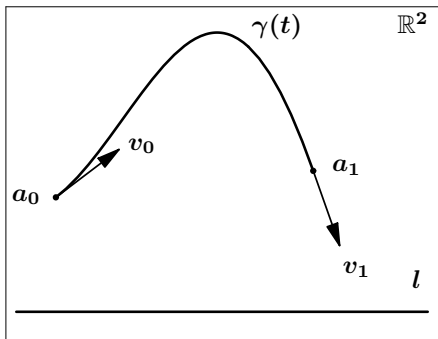
$$\Gamma_+ : x = \frac{y^2}{2}, \quad x \geq 0, \quad \Gamma_- : x = -\frac{y^2}{2}, \quad x \leq 0.$$

Кривая $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ разделяет плоскость $\mathbb{R}^2$ на две связные области: верхнюю Π_+ и нижнюю Π_- . Оптимальное управление:

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Gamma_+ \cup \Pi_-, \\ -1, & (x, y) \in \Gamma_- \cup \Pi_+. \end{cases}$$



Эйлеровы эластики



$$\dot{x} = \cos \theta, \quad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1,$$

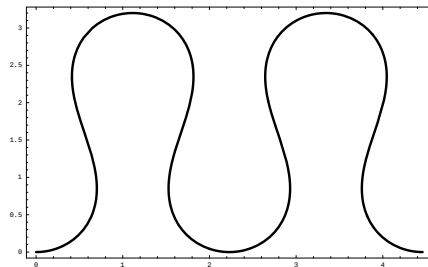
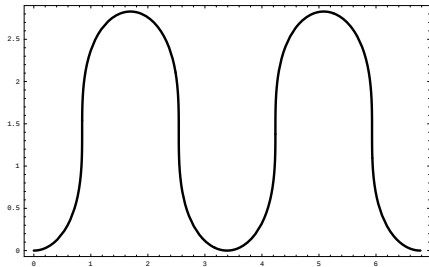
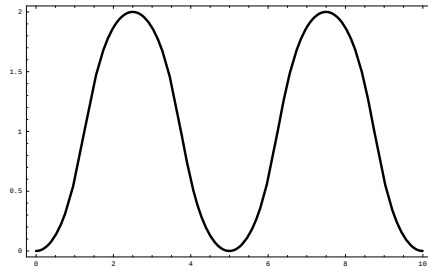
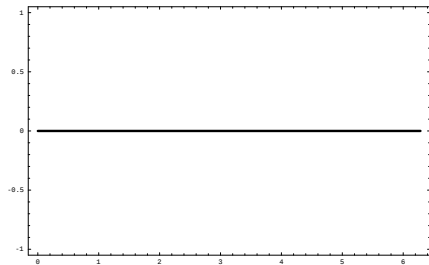
$$\dot{y} = \sin \theta, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$\dot{\theta} = u,$$

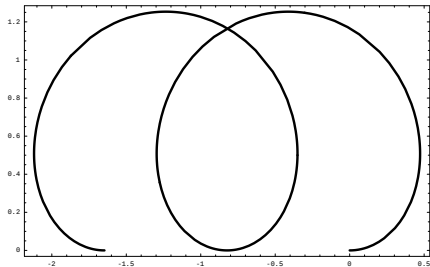
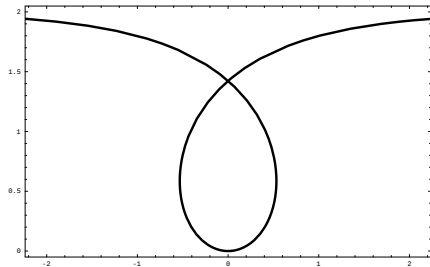
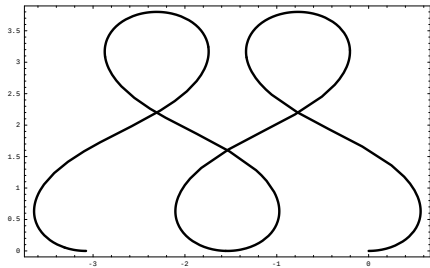
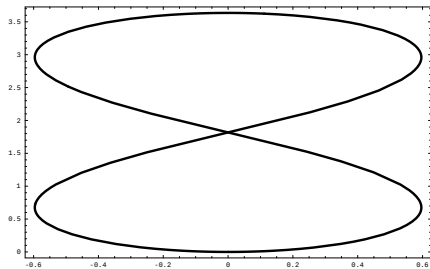
$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min$$

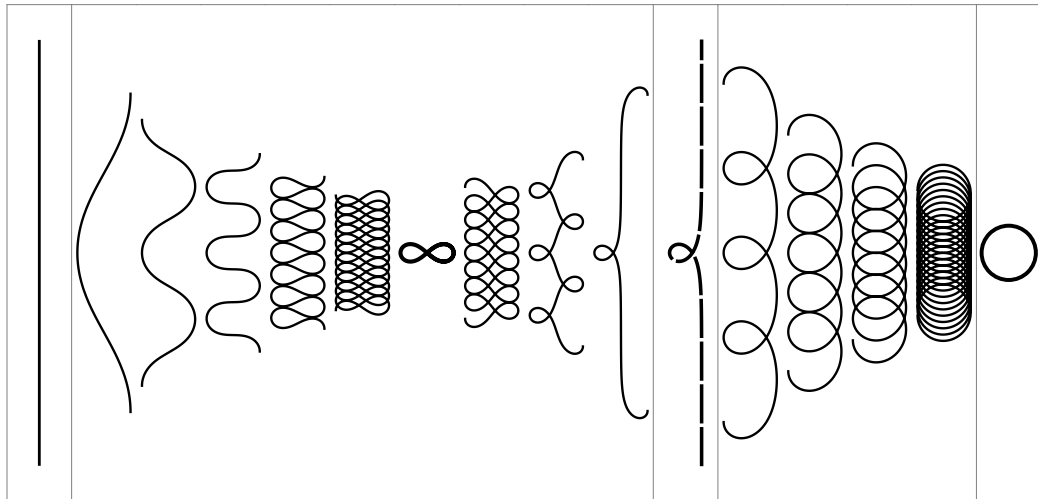
Эйлеровы эластики



Эйлеровы эластики



Семейство эластик Эйлера



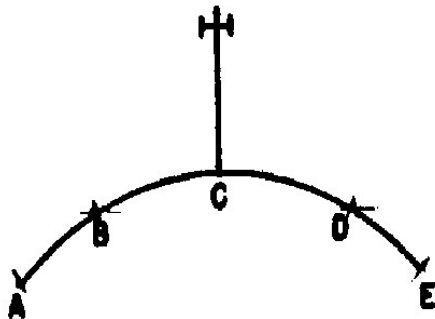
XIII век: Жорданус де Неморе

Jordanus de Nemore (Жорданус Лесной)

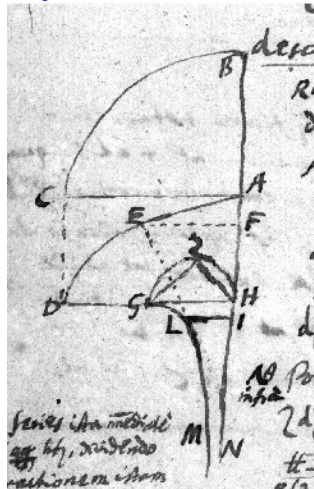
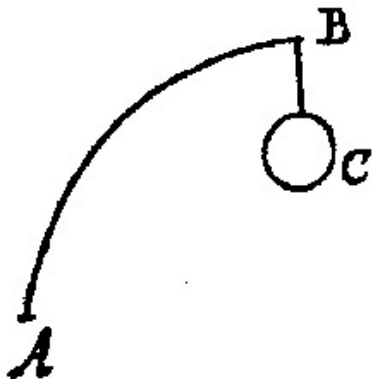
De Ratione Ponderis (О причине веса)

Книга 4, Предложение 13: неверное решение.

(Все) упругие кривые — окружности.



1691: Якоб Бернулли, прямоугольная эластика

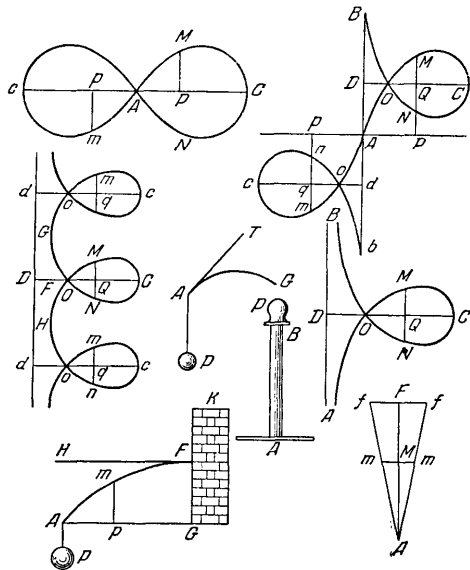


$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x \in [0, 1]$$

1744: Леонард Эйлер

- “Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле”, *Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук, Лозанна, Женева, 1744,*
- Приложение «Об упругих кривых»:
«... в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.»
- «Среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через A и B , но и касаются в этих точках прямых, заданных по положению, определить ту, для которой значение выражения $\int \frac{ds}{R^2}$ будет наименьшим.»

Эскизы Л. Эйлера (1744 г.)



1807: Пьер Симон Лаплас

Форма поверхности капилляра
между вертикальными плоскостями

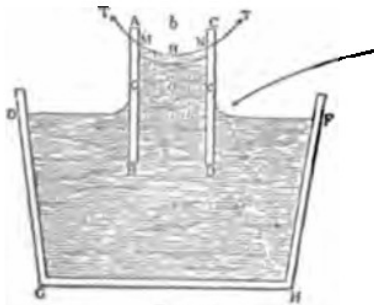


FIG. 6.

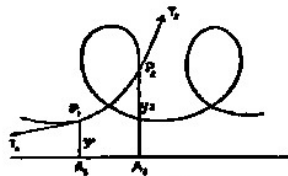
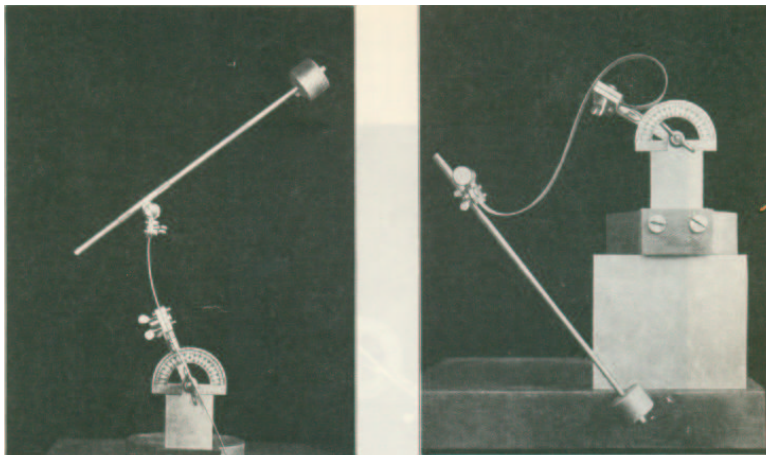


FIG. 8.

Рисунки Дж.Максвелла (Британская Энциклопедия, 1890 г.)

1906: Макс Борн

Эксперименты с упругими стержнями:



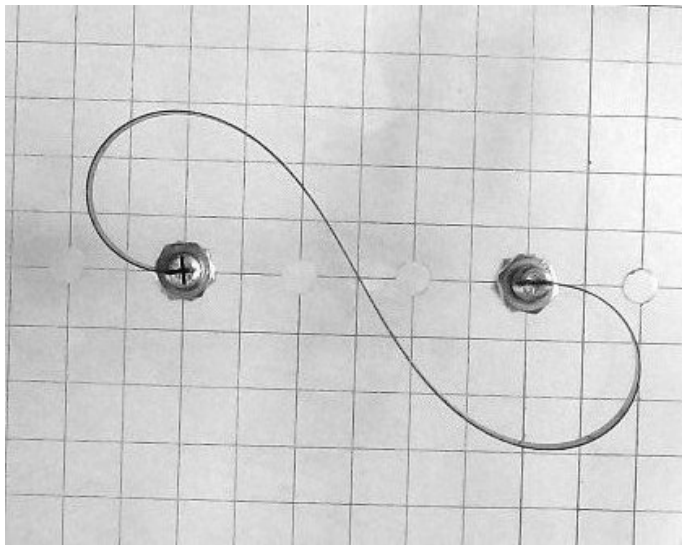
Последователям Эйлера

S.S.Antman, The influence of elasticity on analysis: Modern developments, *Bulletin American Math. Society*, 1983, v. 9, No. 3, 267–291:

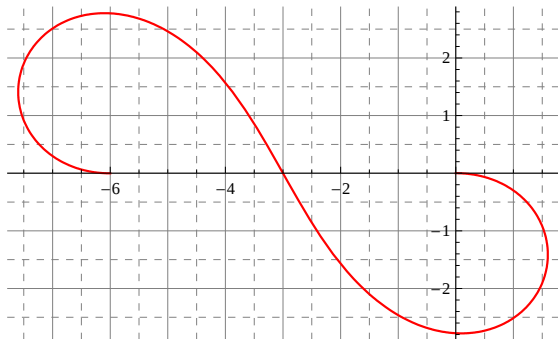
«К счастью, Эйлер оставил несколько нерешенных вопросов для своих последователей»

«К сожалению, существует объемная и растущая литература, в которой делается плохо то, что Эйлер делал хорошо.»

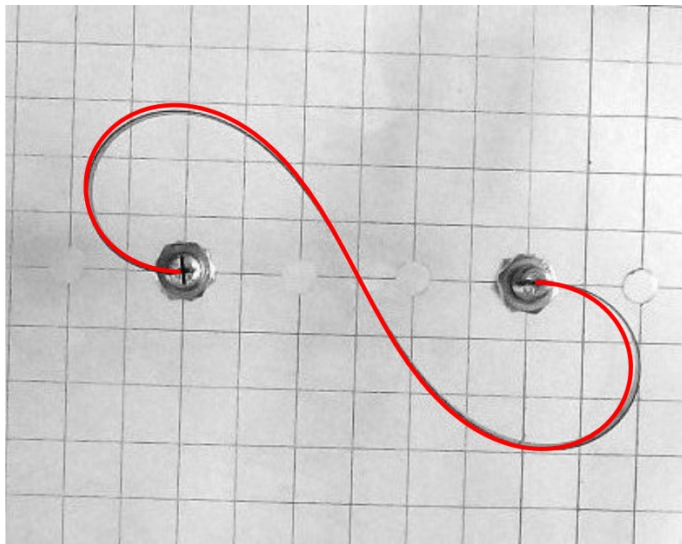
Эксперименты с эластиками



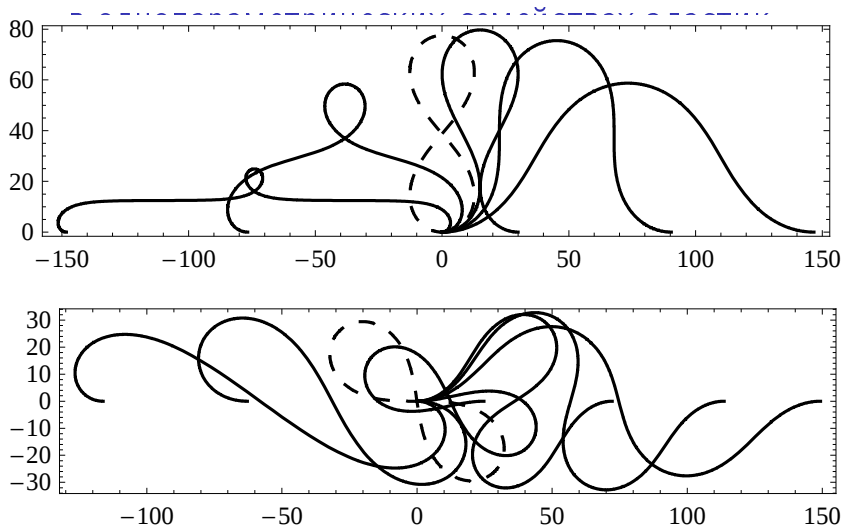
Чертеж эластики (Mathematica)



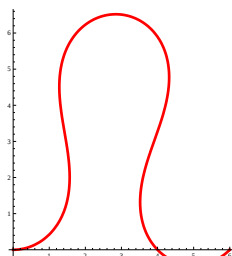
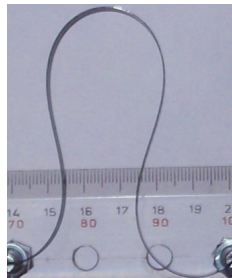
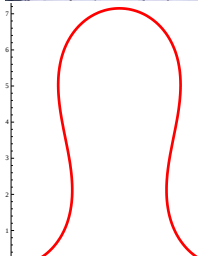
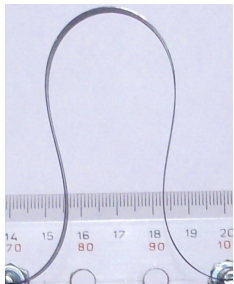
Сравнение физической и математической эластик



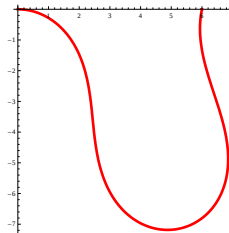
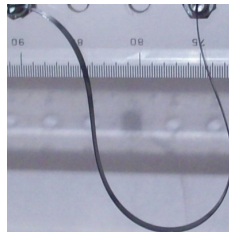
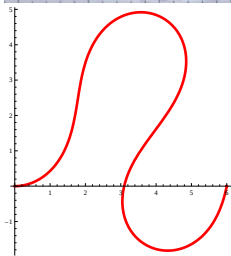
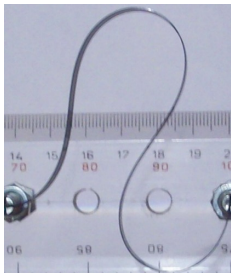
Потеря устойчивости



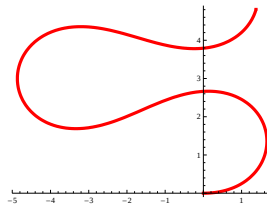
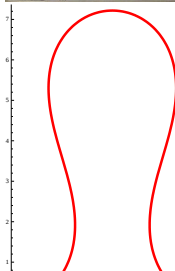
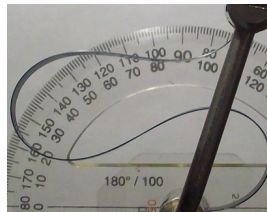
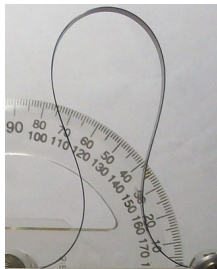
Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия А



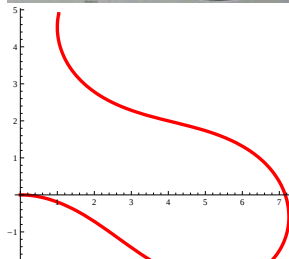
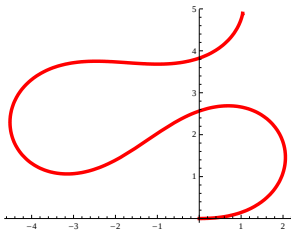
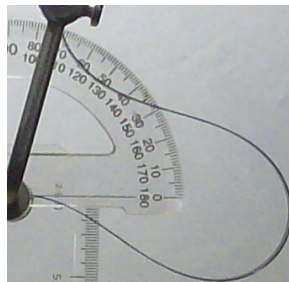
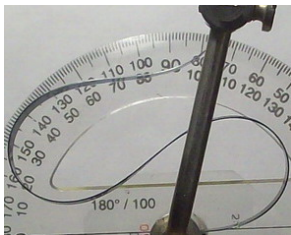
Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия А



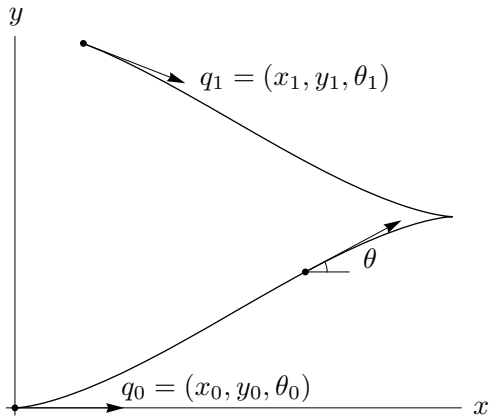
Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия В



Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия В

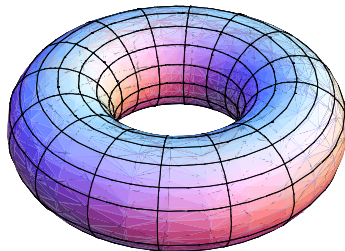
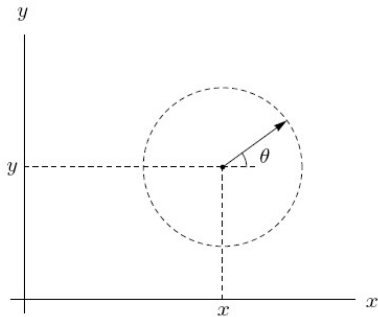


Управление мобильным роботом



$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Пространство состояний — гладкое многообразие



$$G = \{q = (x, y, \theta) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1\} = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1$$

Пространство состояний — группа движений плоскости

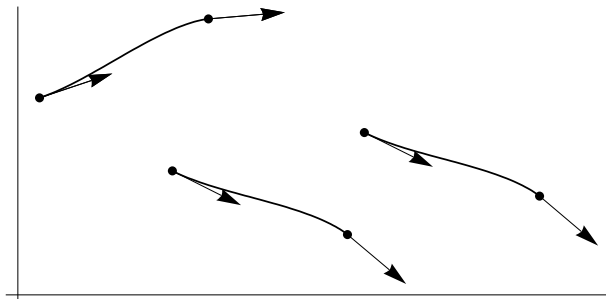
- $q = (0, 0, \theta)$ — поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол θ
- $q = (x, y, 0)$ — параллельный перенос $\mathbb{R}^2$ на вектор (x, y)
- $q = (x, y, \theta)$ — поворот $\mathbb{R}^2$ на угол θ + параллельный перенос $\mathbb{R}^2$ на вектор (x, y)
- $q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), q_2 = (x_2, y_2, \theta_2) \Rightarrow$
 $q_2 \cdot q_1 = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta})$:
 $\tilde{x} = x_2 + x_1 \cos \theta_2 - y_1 \sin \theta_2,$
 $\tilde{y} = y_2 + x_1 \sin \theta_2 + y_1 \cos \theta_2,$
 $\tilde{\theta} = \theta_2 + \theta_1$
- $q = (x, y, \theta) \Rightarrow$
 $q^{-1} = (-x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -\theta)$

Пространство состояний G — группа Ли

- G — гладкое многообразие:
локальные координаты $q = (x, y, \theta)$
- G — группа:
 $q_2 \cdot q_1$ — композиция движений плоскости
 q^{-1} — обратное движение плоскости
- Групповые операции гладкие в локальных координатах
- $\Rightarrow G$ — группа Ли
- $G = \text{SE}(2)$

Инвариантная задача на группе Ли

$q(t) \in G$ — оптимальное решение $\Rightarrow$
 $\forall \hat{q} \in G \quad \tilde{q}(t) = \hat{q} \cdot q(t)$ — оптимальное решение



Группы Ли

- G — группа Ли:
 - 1) G — гладкое многообразие,
 - 2) G — группа,
 - 3) групповые операции гладкие.
- Примеры групп Ли:
 - $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\},$
 - $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{\theta \in [0, 2\pi] / 0 \sim 2\pi\},$
 - $\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \mid \theta_i \in S^1\},$
 - $GL(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det X \neq 0\},$
 - $SO(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\top = X^{-1}, \det X = 1\},$
 - $SE(n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid A \in SO(n), v \in \mathbb{R}^n \right\},$
 - $SU(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \overline{X}^\top = X^{-1}, \det X = 1\}.$

Инвариантные задачи оптимального управления на группах Ли

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in G \text{ — группа Ли,} \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1$$

$$J = \int_0^{t_1} g(q, u) dt \rightarrow \min.$$

Динамика $f(q, u)$ и функционал J инвариантны относительно сдвигов на G :

$q(t) \in G$ — оптимальная траектория $\Rightarrow$

$\forall \hat{q} \in G \quad \tilde{q}(t) = \hat{q} \cdot q(t)$ — оптимальная траектория

Примеры инвариантных задач на группах Ли

- Управление вращениями твердого тела: $G = SO(3)$,
- Задача Дидоны: $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$,
- Задача об эластиках на плоскости или в пространстве: $G = SE(2)$ или $SE(3)$,
- Оптимальное качение сферы по плоскости: $G = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$,
- Управление трехуровневой квантовой системой: $G = SU(3)$,
- Управление спиновой системой из n частиц: $G = SU(2^n)$,
- Моделирование квантового компьютера: $G = SU(n)$.

Исследование инвариантных задач на группах Ли: сдвиг начальной точки

- $q(t)$:

$$q(0) = \text{Id} \text{ — единичный элемент } G, \quad q(t_1) = q_1$$

- $\tilde{q}(t) = ?$:

$$\tilde{q}(0) = \tilde{q}_0, \quad \tilde{q}(t_1) = \tilde{q}_1$$

- $q(t) = \tilde{q}_0^{-1} \cdot \tilde{q}(t)$:

$$\begin{aligned} q(0) &= \text{Id}, & q(t_1) &= \tilde{q}_0^{-1} \cdot \tilde{q}_1, \\ \tilde{q}(t) &= \tilde{q}_0 \cdot q(t). \end{aligned}$$

Принцип максимума Понтрягина

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ \int_0^{t_1} g(q, u) dt \rightarrow \min.$$

$q(t)$ оптимальна $\Rightarrow \exists p(t) \in \mathbb{R}^n, \quad n = \dim G:$

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q), & p \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(p, q), & q \in G, \end{cases}$$

$$H(p, q) = \max_u (pf(q, u) - g(q, u))$$

Гамильтонова система принципа максимума для инвариантных задач на группах Ли

Замена сопряженных переменных $\varphi = \varphi(p, q)$:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = K(\varphi), & \varphi \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{q} = L(\varphi, q), & q \in G, \end{cases}$$

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, где $\varphi_i(p, q)$ линейные по p гамильтонианы, соответствующие полям f и их скобкам Ли.

Интегрирование гамильтоновой системы ПМП:

- 1) $\varphi = \varphi(t)$,
- 2) $q = q(t)$.

Симметрии гамильтоновой системы ПМП

$$\dot{\varphi} = K(\varphi), \tag{5}$$

$$\dot{q} = L(\varphi, q). \tag{6}$$

Диффеоморфизм $F(\varphi, q) = (\Phi, Q)$ — симметрия (5), (6), если:

$$(\varphi(t), q(t)) \text{ решение} \quad \Rightarrow \quad (\Phi(t), Q(t)) \text{ решение.}$$

Симметрия подсистемы (5):

$$M(\varphi) = \Phi.$$

Продолжение до симметрии полной системы (5), (6):

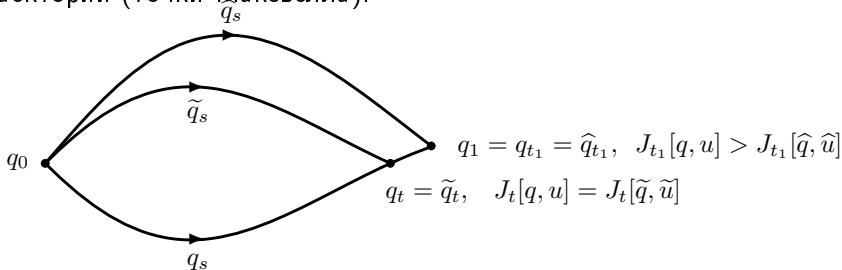
$$\Phi = M(\varphi), \quad Q = N(q)$$

Непрерывные и дискретные симметрии гамильтоновой системы ПМП

- Группа симметрий:

$$\text{Sym} = \{F(\varphi, q) \text{ — симметрии гамильтоновой системы}\},$$

- Непрерывные симметрии: понижение порядка системы,
- Дискретные симметрии: исследование оптимальности экстремальных траекторий (точки Максвелла).



Управление мобильным роботом: Задача оптимального управления

$$\dot{x} = u \cos \theta,$$

$$\dot{y} = u \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = v,$$

$$q = (x, y, \theta) \in G = \text{SE}(2),$$

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

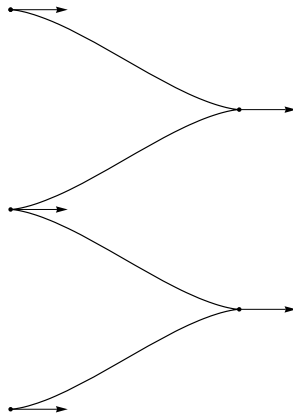
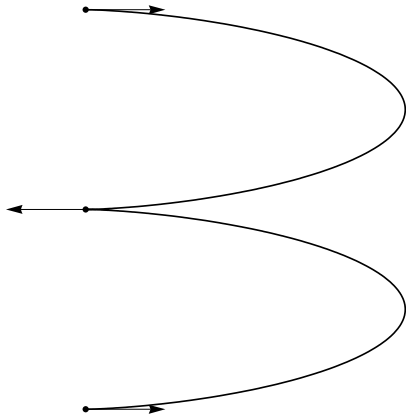
$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} dt \rightarrow \min.$$

Результаты по задаче об управлении мобильным роботом

- Существование оптимальных траекторий,
- Параметризация экстремальных траекторий (ПМП),
- Описание оптимальных траекторий:
 - Общие граничные условия $\Rightarrow$ сведение к системам алгебраических уравнений,
 - Специальные граничные условия $\Rightarrow$ явные решения,
- Структура оптимального синтеза и множества Максвелла,
- Субримановы сферы,
- Приложения: восстановление поврежденных изображений,
Параллельный программный комплекс для восстановления изображений.

Управление мобильным роботом: экстремальные траектории общего положения



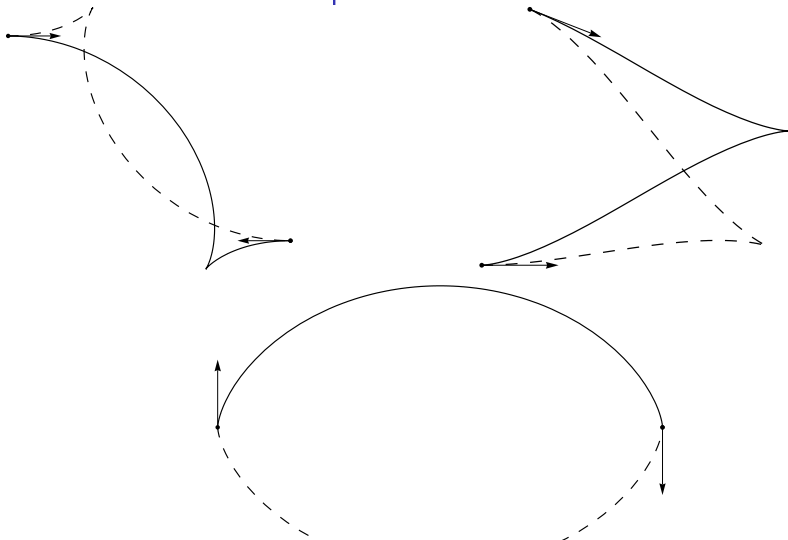
Параметризация функциями Якоби cn , sn , dn , E .

Управление мобильным роботом: экстремальные траектории специального вида



Параметризация элементарными функциями.

Точки Максвелла на экстремальных траекториях: потеря оптимальности

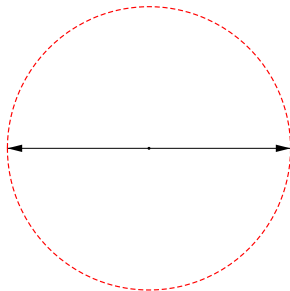


Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = 0$$

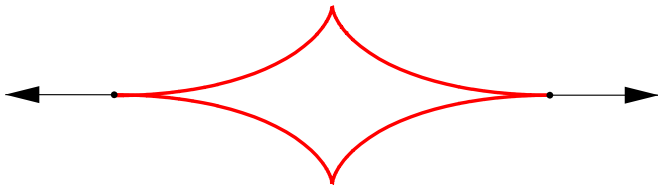


$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 \neq 0$$



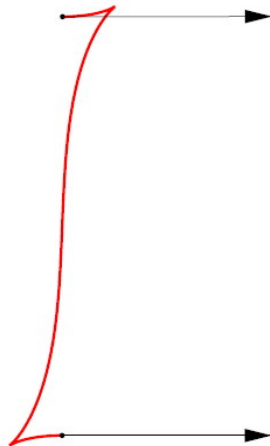
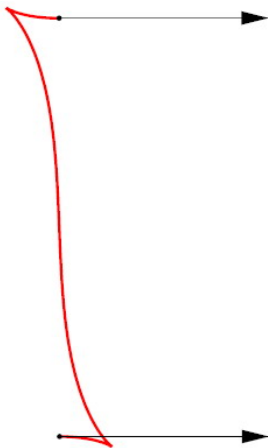
Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = \pi$$



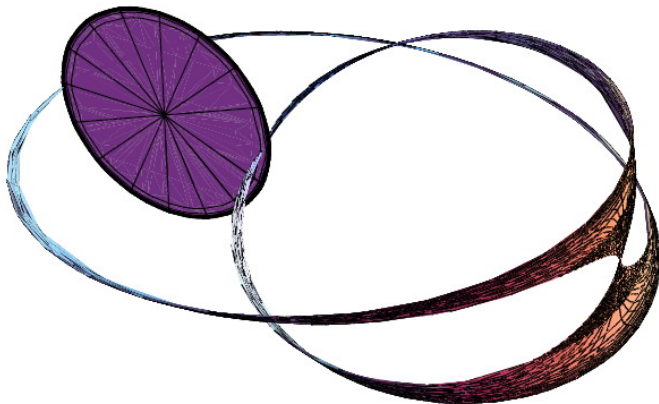
Оптимальные траектории

$$x_1 = 0, \quad y_1 \neq 0, \quad \theta_1 = 0$$



Множество Максвелла

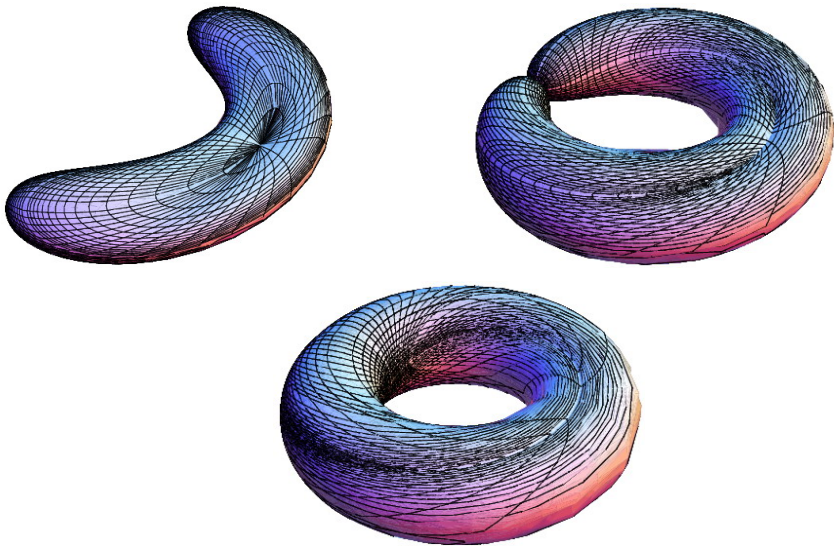
$$\text{Max} = \{q_1 \in G \mid \exists > 1 \text{ оптимальной траектории } q(\cdot) : q(t_1) = q_1\}$$



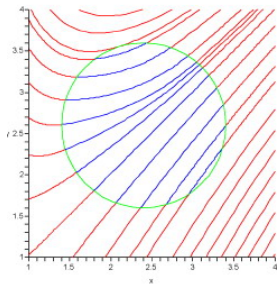
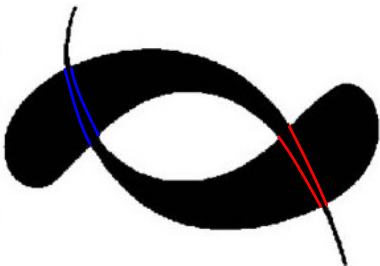
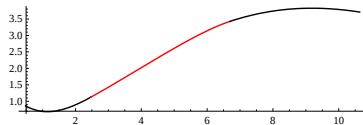
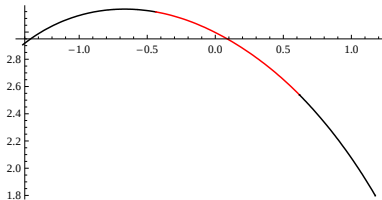
Субриманова метрика и сферы

- $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$
- $S_R = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}$
- $R = 0 \quad \Rightarrow \quad S_R = \{q_0\}$
- $R \in (0, \pi) \quad \Rightarrow \quad S_R \cong S^2$
- $R = \pi \quad \Rightarrow \quad S_R \cong S^2 / \{N = S\}$
- $R > \pi \quad \Rightarrow \quad S_R \cong \mathbb{T}^2$

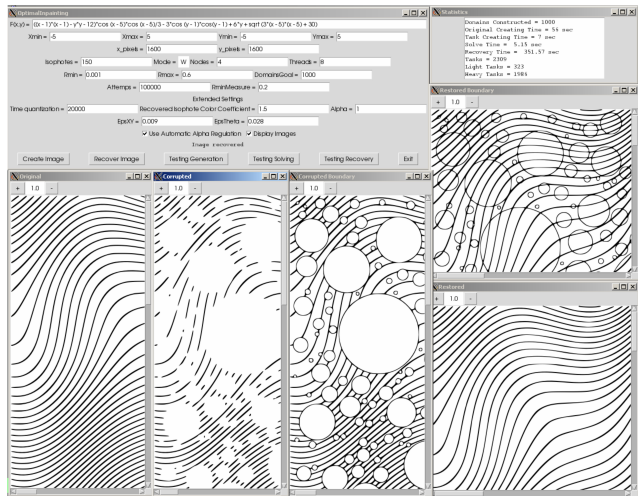
Глобальная структура субримановых сфер



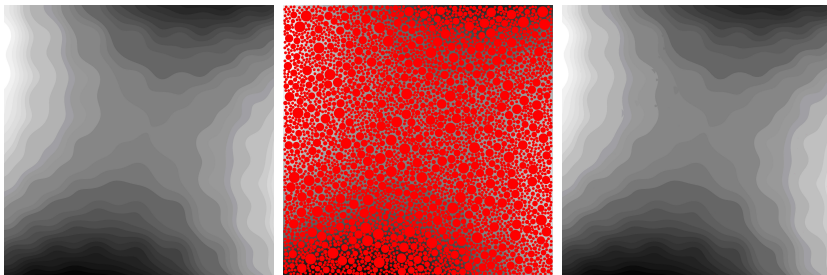
Приложения: Восстановление скрытого контура



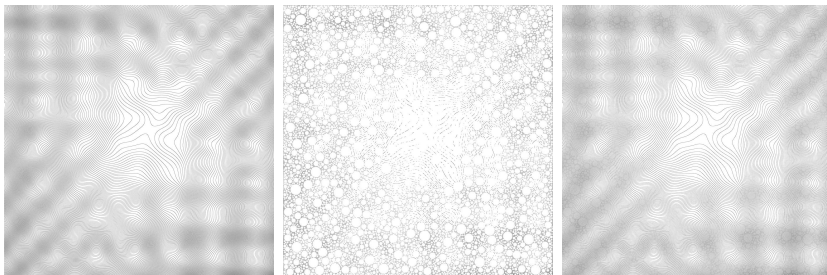
Параллельный ПК OptimalInpainting для восстановления поврежденных изображений



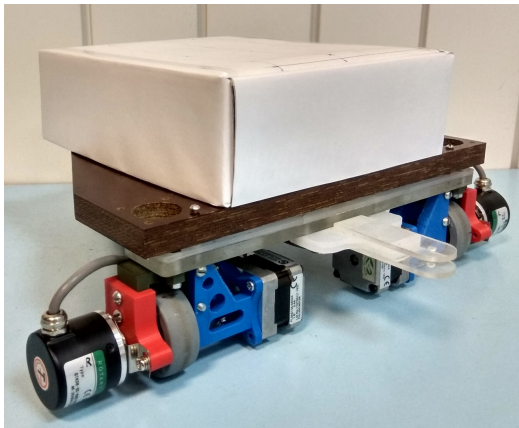
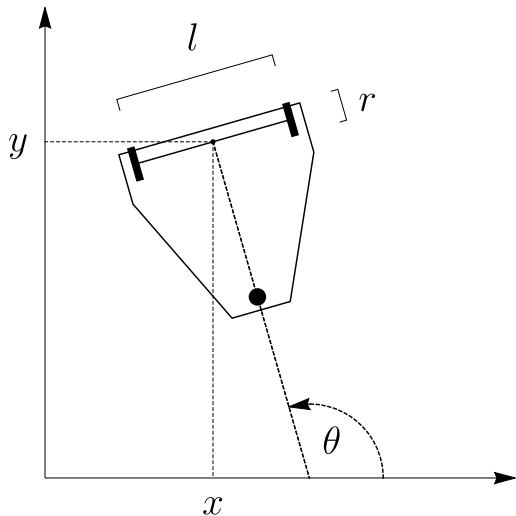
Исходное, поврежденное и восстановленное полутонное изображение



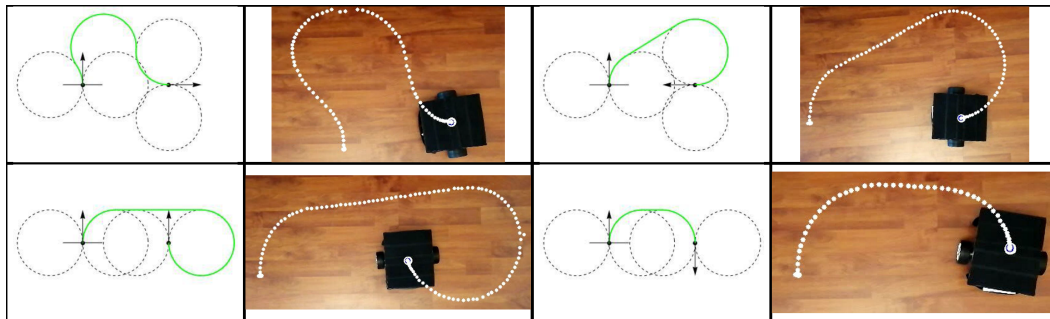
Исходное, поврежденное и восстановленное бинарное изображение



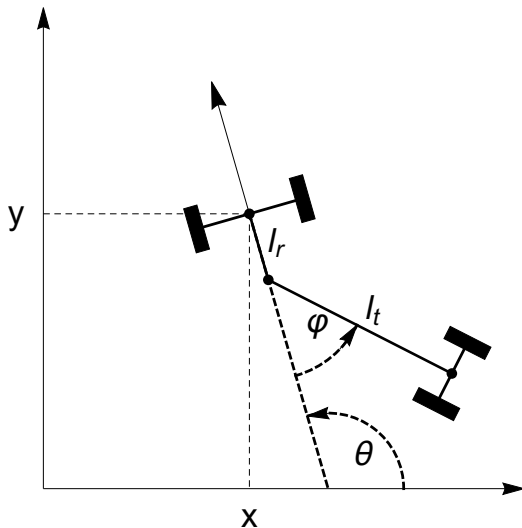
Геометрическая модель и прототип робота с двумя приводными колёсами и одним сферическим колесом для стабилизации



Примеры парковки робота с помощью путей Маркова-Дубинса: моделирование и эксперименты

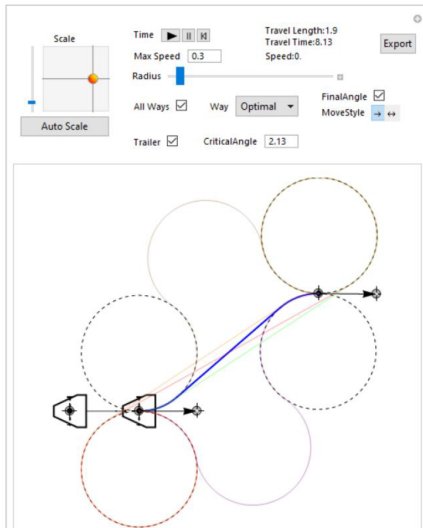


Геометрическая модель робота с прицепом¹

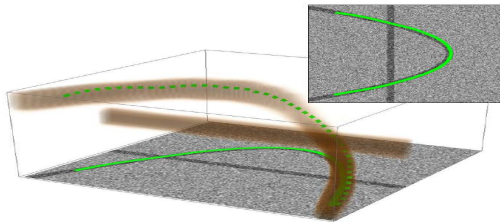


¹J.-P. Laumond. Nonholonomic Motion Planning for Mobile Robots. Tutorial notes, 1998, 112 p. 98 / 110

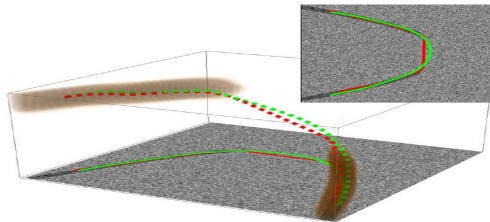
Интерфейс, моделирующий движение робота с прицепом вдоль путей Маркова-Дубинса и Ридса Шеппа



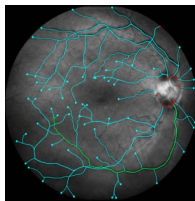
Субримановы геодезические в обработке изображений



Пересекающиеся линии
разъединяются

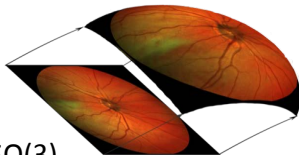


Восстановление поврежденных контуров
на основе модели зрения человека

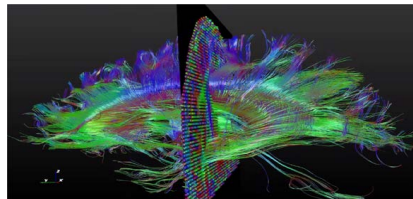


SE(2)

СР геодезические на группах Ли в
анализе медицинских изображений



SO(3)

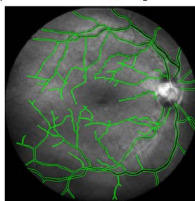


SE(3)

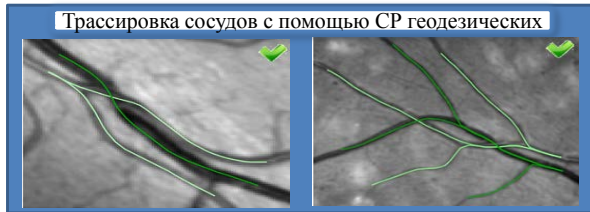
Геодезические на $SE(2)$ для плоских изображений



Искривление сосудов
при ретинопатии

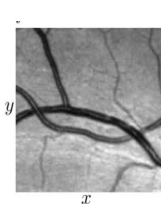


Трассировка
сосудов

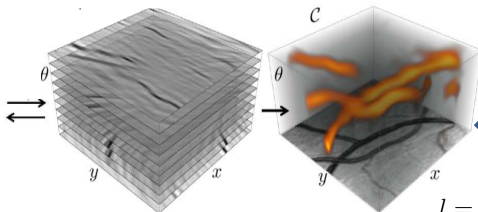


Трассировка сосудов с помощью СР геодезических

Постановка задачи



Функция внешней цены из изображения

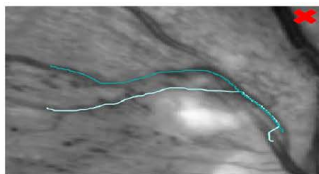
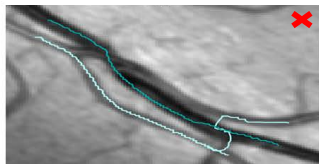
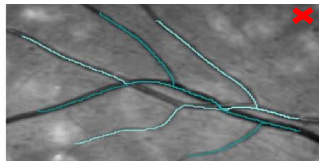


$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= u_1 (\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y) + u_2 \partial_\theta, \\ \gamma(0) &= e, \quad \gamma(T) = g \in SE(2), \\ (u_1(t), u_2(t)) &\in \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

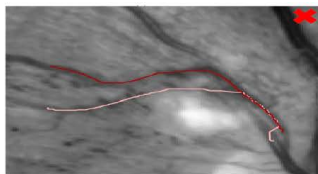
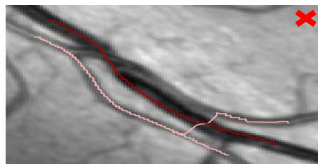
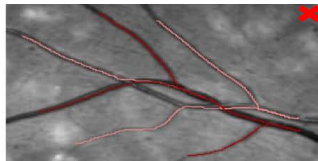
$$l = \int_0^T \underbrace{C(\gamma(t))}_{\text{cost}} \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \rightarrow \min.$$

Сравнение с классическими методами

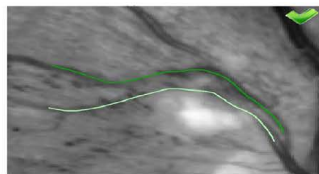
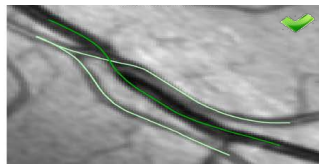
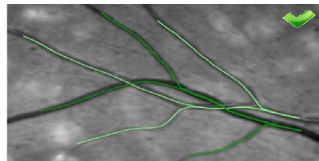
$\mathbb{R}^2$ - Riemannian



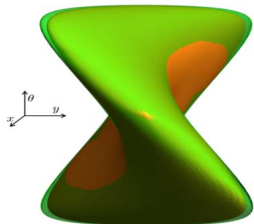
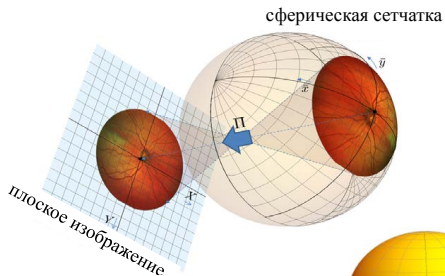
$SE(2)$ - Riemannian



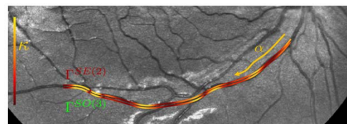
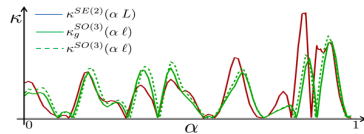
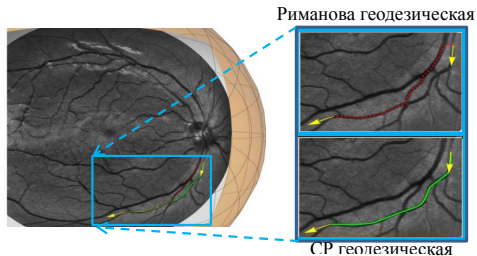
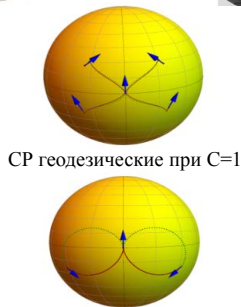
$SE(2)$ - Sub-Riemannian



Геодезические на $SO(3)$ для сферических изображений



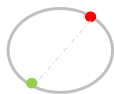
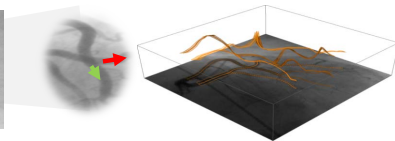
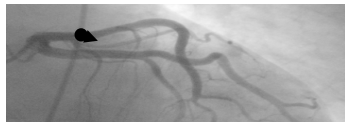
Волновой фронт и CP сфера



Сравнение геодезической
кривизны на сфере и
кривизны на плоскости

Устранение точек возврата: геодезические на PTR(2)

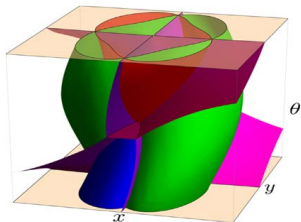
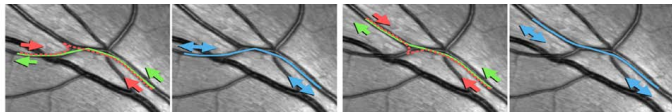
Устранение эффекта точек
возврата при поиске
кровеносных сосудов на
изображении сетчатки глаза
человека



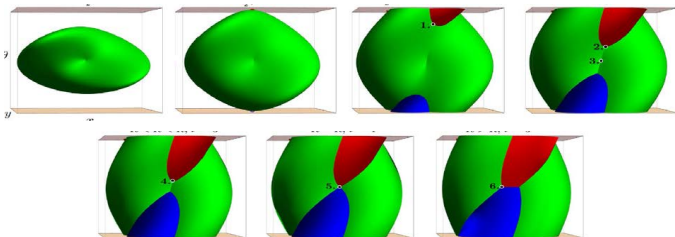
$$(x, y, \theta) \in PT(\mathbb{R}^2)$$

$$PT(\mathbb{R}^2) \equiv \mathbb{R}^2 \times P^1$$

$$P^1 = S^1 / \sim$$



Множество разреза



Субримановы сферы

Геодезические на $SE(3)$ для трехмерных изображений

Дано $\xi > 0$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}_i \in S^2$, $i \in \{0, 1\}$.

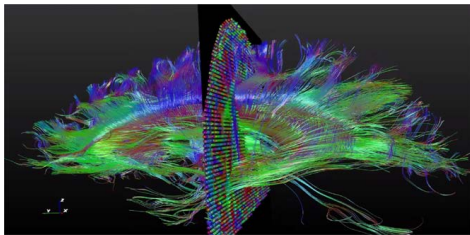
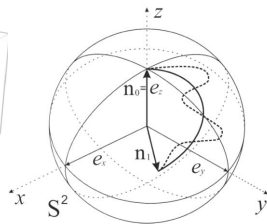
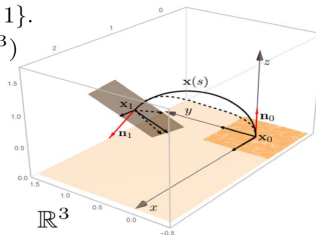
Найти гладкую кривую $\mathbf{x} \in C^\infty([0, L], \mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(L) = \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^3,$$

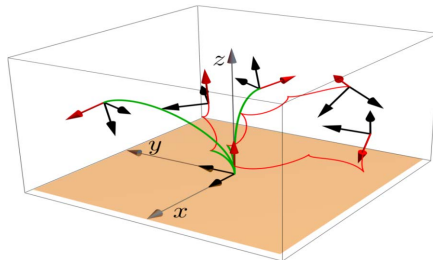
$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{n}_0, \mathbf{x}'(L) = \mathbf{n}_1 \in S^2,$$

$$E(\mathbf{x}) := \int_0^L \sqrt{\xi^2 + \kappa^2(s)} ds \rightarrow \min,$$

где $\kappa(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$.

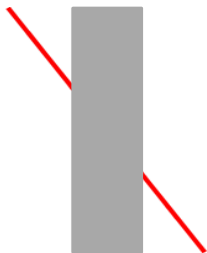


Задача трассировки нервных волокон на МРТ снимках головного мозга человека



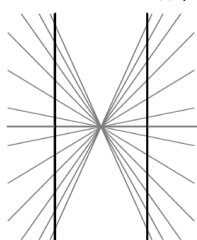
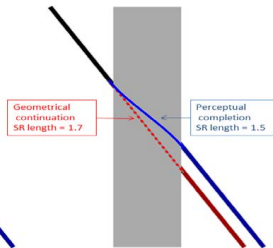
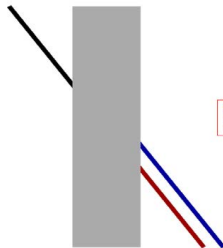
CP геодезические при $C=1$

Моделирование и объяснение зрительных иллюзий

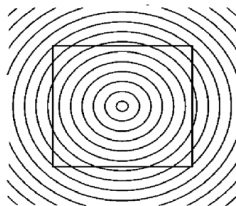
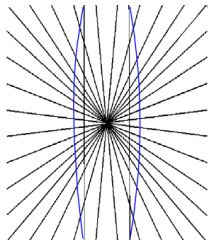


Иллюзия Поггендорфа

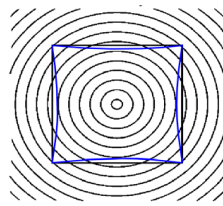
Идея: Иллюзорный контур создается зрительной системой, как геодезическая в СР метрике, индуцированной зрительным сигналом.



Иллюзия Геринга



Иллюзия Орбисона



Литература

1. V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
2. R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Amer. Math. Soc., 2002
3. А.А.Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М: Физматлит, 2005.
Перевод: А.А. Agrachev, Yu.L. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, Berlin Heidelberg New York Tokyo. Springer-Verlag. 2004
4. A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge University Press, 2019.
5. Ю.Л. Сачков, *Введение в геометрическую теорию управления*, М: URSS, 2021.
Перевод: Yu.L. Sachkov, *Introduction to geometric control*, Springer, 2022.