Оптимальность эйлеровых эластик в субримановых задачах на группах Карно

Андрей Ардентов (ИПС им. А.К. Айламазяна РАН)

на основе совместных работ с Ю.Л. Сачковым и Э. Хакавуори (SISSA)

aaa@pereslavl.ru

Семинар «Геометрическая теория оптимального управления»

15 декабря 2021

План доклада

1. Общая геометрическая постановка вариаций задачи Дидоны.
2. Общая постановка задачи оптимального управления на группе Карно $M \in \{\mathbf{H}, \mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{C}\}$.
3. Эластики Эйлера как проекции экстремальных траекторий.
4. Экспоненциальное отображение.
5. Оптимальные траектории.
6. Время разреза.

Геометрическая постановка задачи Дидоны и её вариаций

Дано:

$a, b \in \mathbb{R}^2$, $\quad \bar\gamma \subset \mathbb{R}^2$ из b в a,

Н $S \in \mathbb{R}$,

М (прямая L) $\subset \mathbb{R}^2$,

Е $S \in \mathbb{R}$, $\quad$ (прямая L) $\subset \mathbb{R}^2$,

С $S \in \mathbb{R}$, $\quad c \in \mathbb{R}^2$.

Найти:

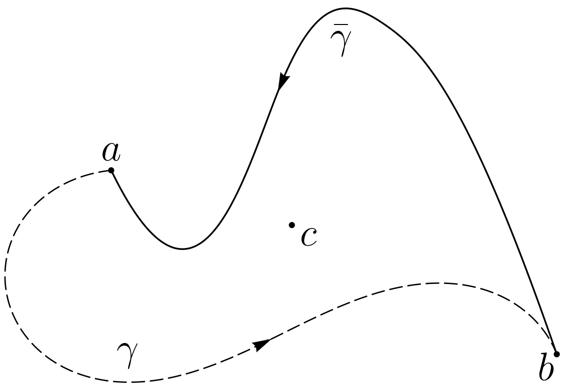
$\gamma \subset \mathbb{R}^2$ из a в b, т.ч. $\gamma \cup \bar\gamma = \partial D$,

Н, **Е**, **С** (площадь D) $= S$,

М, **Е** (центр масс D) $\in L$,

С (центр масс D) $= c$,

длина $\gamma \to$ min.



Общая постановка нильпотентной левоинвариантной субримановой задачи на группе Карно M

$$
\begin{aligned}
\dot q &= u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad q \in M \cong \mathbb{R}^n, \\
q(0) &= \mathrm{Id}, \qquad q(T) = \mathbf{q}, \\
l(q(\cdot)) &= \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min =: d(\mathrm{Id}, \mathbf{q}) \qquad \text{(метрика Карно-Каратеодори)}.
\end{aligned}
$$

Градуировка алгебры Карно (с вектором роста длины $k \geq 2$):

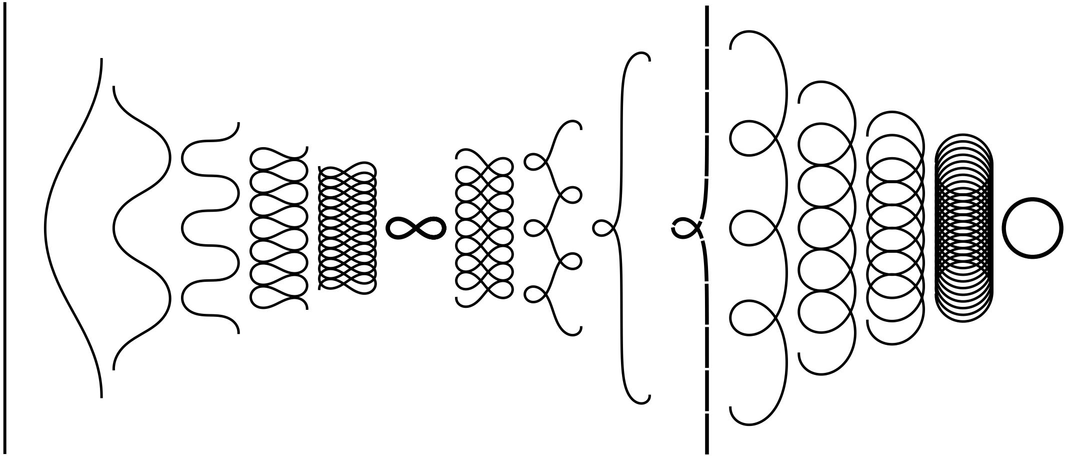
$$
\begin{aligned}
L &= L_1 \oplus \cdots \oplus L_k, \\
L_1 &= \operatorname{span}(X_1, X_2), \qquad L_{i+j} = [L_i, L_j], \qquad && \forall i, j \in \mathbb{N}, \\
L_{k+m} &= \{0\}, && \forall m > 0.
\end{aligned}
$$

Явный вид векторных полей X_1, X_2 для $M \in \{\mathbf{H}, \mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{C}\}$

$$q = (x, y, \dots) \in M \cong \mathbb{R}^n,$$

$\mathbf{H}: \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$	$\mathbf{M}: \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix}.$
$\mathbf{E}: \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix}.$	$\mathbf{C}: \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \\ -\frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2+y^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$

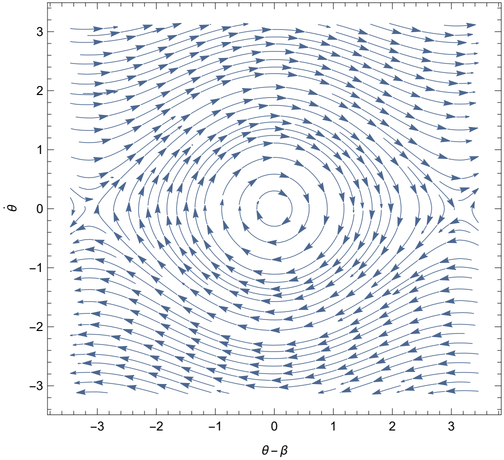
Проекции экстремальных траекторий на (x, y) — эластики Эйлера



Математический маятник

$$\ddot{\theta} = -\alpha \sin(\theta - \beta), \qquad \alpha, \beta \in \text{const.}$$

- **H**: $\alpha = 0$.
- **M**: $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0$.
- **E**: $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta = 0$.
- **C**: $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in S^1$.



Энергия маятника:

$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \alpha \cos(\theta - \beta).$$

Параметризация нормальных экстремальных траекторий через экспоненциальное отображение

Максимизированный гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2}\left(h_1^2 + h_2^2\right), \qquad u_i = h_i = \langle \psi, X_i \rangle, \qquad i = 1, 2,$$

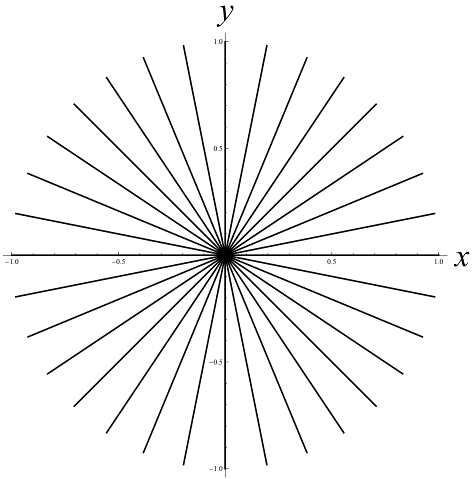
где ψ — вектор сопряженных переменных, записанный в координатах Дарбу.

$$\mathrm{Exp}\colon C \times \mathbb{R}_+ \to M,$$
$$\mathrm{Exp}(\lambda, t) = q_t, \qquad \lambda \in C = \{\lambda \in T^*_{\mathrm{Id}} M \mid H(\lambda) = 1/2\}.$$

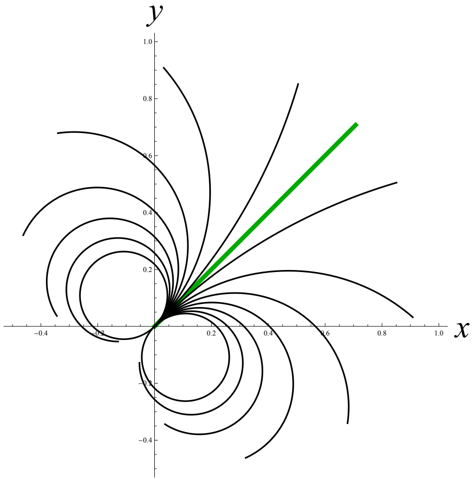
$\forall \lambda \in C.\ \exists T(\lambda) > 0.\quad q_t = \mathrm{Exp}(\lambda, t)$ — оптимальная траектория при $t \in [0, T(\lambda)]$.

Как велико может быть значение $T(\lambda)$?

Оптимальные траектории и их параметры в случае $M = \mathbf{H}$

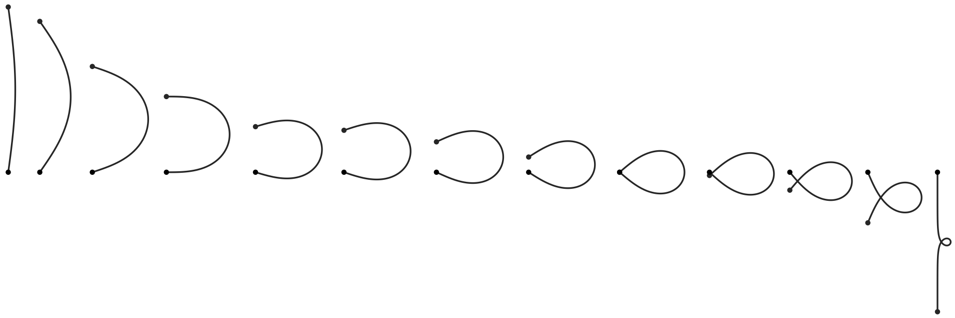


Прямые
(директриса).



Круговые
(директриса, размер).

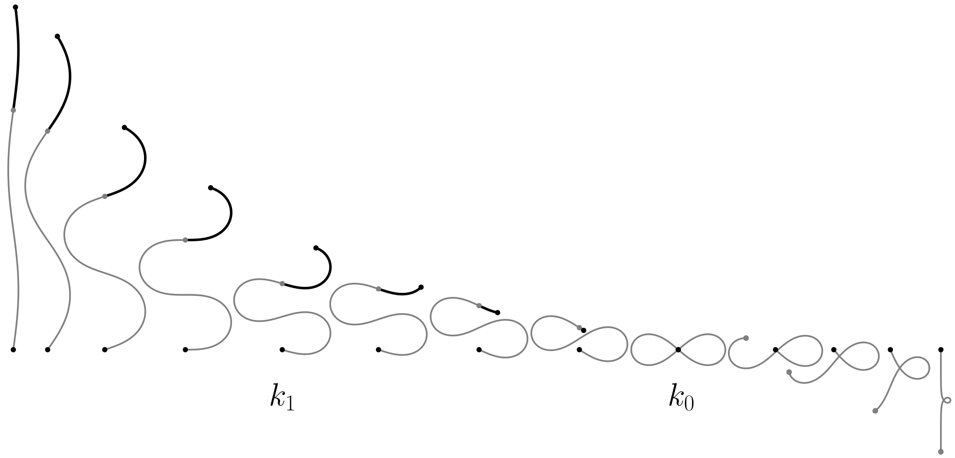
Оптимальные траектории и их параметры в случае $M = \mathbf{M}$



Прямые (директриса).

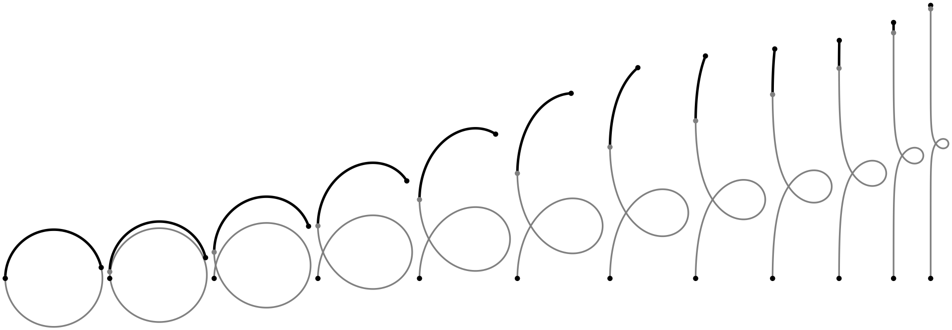
Инфлексионные эластики, выходящие из точки перегиба (размер, форма).

Оптимальные траектории и их параметры ($M = \mathbf{E}$ vs $M = \mathbf{C}$)



Инфлексионные эластики (размер, форма, начальная точка + директриса (при $M = \mathbf{C}$)).

Оптимальные траектории и их параметры ($M = \mathbf{E}$ vs $M = \mathbf{C}$)



Неинфлексионные эластики (размер, форма, начальная точка
+ директриса (при $M = \mathbf{C}$)).

Время разреза вдоль экстремальных траекторий ($M = \mathbf{H}$)

- прямые: $t^{\mathbf{H}}_{\mathrm{cut}}(\lambda) = \infty$;
- окружности: $\mu t^{\mathbf{H}}_{\mathrm{cut}}(\lambda) = 1$;

где μ — коэффициент растяжения, нормирующий длину окружности.

Время разреза вдоль экстремальных траекторий ($M = \mathbf{M}$)

- прямые: $t^{\mathbf{M}}_{\mathrm{cut}}(\lambda) = \infty$;
- инфлексионные эластики: $\mu t^{\mathbf{M}}_{\mathrm{cut}}(\lambda) = 1/2$;

где μ — коэффициент растяжения, нормирующий длину полного периода эластики.

Время разреза вдоль экстремальных траекторий $(M = \mathbf{E})$

- прямые и критические эластики: $t^{\mathbf{E}}_{\mathrm{cut}}(\lambda) = \infty$;
- неинфлексионные эластики (в том числе круговые): $\mu t^{\mathbf{E}}_{\mathrm{cut}} = 1$;
- инфлексионные эластики: $\mu t^{\mathbf{E}}_{\mathrm{cut}}(\lambda) = \min\left(1, \mathbf{t}^z_1(k)\right)$;

где μ — коэффициент растяжения, нормирующий длину полного периода эластики, параметр k определяет форму инифлексионной эластики, а функция $\mathbf{t}^z_1(k)$ соответствует обнулению соответствующей ориентированной площади.

Лемма

Для времени Максвелла $\mathbf{t}^z_1(k)$ выполнены условия

$$
\begin{aligned}
k &\in [0, k_0) && \Rightarrow && \mathbf{t}^z_1(k) \in (1, 3/2),\\
k &= k_0 && \Rightarrow && \mathbf{t}^z_1(k) = 1,\\
k &\in (k_0, 1) && \Rightarrow && \mathbf{t}^z_1(k) \in (1/2, 1);
\end{aligned}
$$

где $k_0 \approx 0.909$.

Время разреза вдоль экстремальных траекторий ($M = \mathbf{C}$)

- прямые и критические эластики: $t^{\mathbf{C}}_{\mathrm{cut}}(\lambda) = \infty$;
- неинфлексионные эластики (в том числе круговые): $\mu t^{\mathbf{C}}_{\mathrm{cut}}(\lambda) = \mathbf{t}^V_2(k)$;
- инфлексионные эластики: $\mu t^{\mathbf{C}}_{\mathrm{cut}}(\lambda) = \mathbf{t}_1(k) = \min\left(\mathbf{t}^V_1(k), \mathbf{t}^z_1(k)\right)$;

где μ — коэффициент растяжения, нормирующий длину полного периода эластики, а функции $\mathbf{t}^V_1(k), \mathbf{t}^V_2(k)$ соответствуют попаданию центра масс на серединный перпендикуляр к хорде эластики.

Лемма

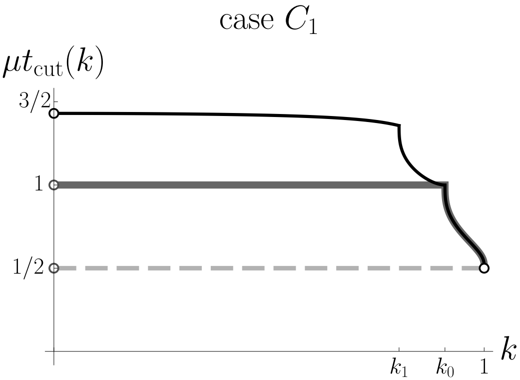
Для времени Максвелла $\mathbf{t}^V_1(k)$ выполнены условия

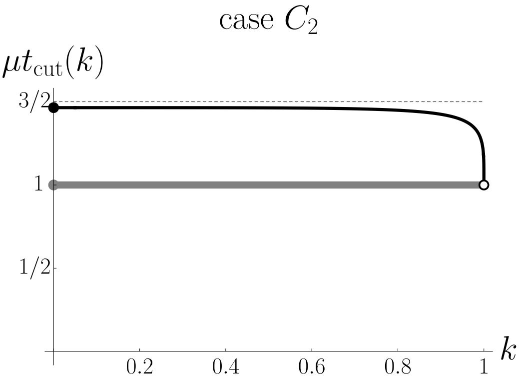
$$\begin{aligned} k &= k_0 &\Rightarrow\qquad& \mathbf{t}^V_1(k) = 1, \\ k &\neq k_0 &\Rightarrow\qquad& \mathbf{t}^V_1(k) \in (1, 2). \end{aligned}$$

Для первого времени Максвелла $\mathbf{t}_1(k)$ выполнено

$$\mathbf{t}_1(k) = \begin{cases} \mathbf{t}^z_1(k), & k \in (0, k_1] \cup [k_0, 1), \\ \mathbf{t}^V_1(k), & k \in [k_1, k_0], \end{cases} \qquad k_0 \approx 0.909, \quad k_1 \approx 0.802.$$

Время разреза (**H**, **M**, **E**, **C**)





$$\mu t_{\text{cut}}^{\mathbf{C}}(k) \le \mathbf{t}_1^z(0) \cdot \mu t_{\text{cut}}^{\mathbf{E}}(k), \qquad \lambda = (k, \dots) \in C_1,$$

$$\mu t_{\text{cut}}^{\mathbf{C}}(k) \le \mathbf{t}_2^V(0) \cdot \mu t_{\text{cut}}^{\mathbf{E}}(k), \qquad \lambda = (k, \dots) \in C_2,$$

$$\mathbf{t}_1^z(0) \approx 1.43029666, \quad \mathbf{t}_2^V(0) \approx 1.46473211.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!