УДК 517.977

А. П. Маштаков

Задача быстродействия на группе движений плоскости с управлением в полукруге

Исследуется задача быстродействия на группе движений плоскости с управлением в полукруге. Рассматриваемая управляемая система задает модель машины на плоскости, которая может двигаться вперед и вращаться на месте. Оптимальные по заданной внешней стоимости траектории такой системы используются в обработке изображений для поиска выделяющихся кривых. В частности, такие траектории используются в анализе медицинских изображений при поиске сосудов на фото сетчатки глаза человека. Задача представляет интерес в геометрической теории управления, как модельный пример, в котором множество значений управляющих параметров содержит ноль на границе. В работе изучен вопрос управляемости и существования оптимальных траекторий. На основе анализа гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина найден явный вид экстремальных управлений и траекторий. Частично исследован вопрос оптимальности экстремалей. Описана структура оптимального синтеза.

Библиография: 33 названия.

Ключевые слова: субриманова геометрия, геодезические, задача оптимального управления.

§ 1. Введение

В 1957 году Л. Дубинс описал в работе [1] задачу поиска кратчайших путей для автомобиля (машины), движущегося по плоскости из начальной конфигурации (положение и направление) в конечную конфигурацию. В постановке Дубинса автомобиль может двигаться только вперед (не имеет задней передачи), а его угловая скорость ограничена. Позже, в 1990 году, Дж. Ридс и Л. Шепп рассмотрели в работе [2] ту же задачу, но применительно к автомобилю, у которого есть возможность движения назад. В обеих статьях основное внимание уделяется описанию и доказательству общей формы кратчайших путей без предоставления явных решений для заданных граничных условий (начальной и конечной конфигураций).

Важной особенностью моделей Дубинса и Ридса-Шеппа является то, что траектории движения автомобиля имеют ограниченную кривизну. Это означает, что машина не может вращаться на месте. В то же время, в робототехнике принято рассматривать модель автомобиля с независимыми приводами для

Это препринт Статьи, принятой для публикации в журнале “Математический сборник”, 2022. Владелец прав на распространение – издатель журнала. Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 17-11-01387-П в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

двух колес. В такой системе два колеса могут вращаться в разных направлениях с одинаковой скоростью, что обеспечивает вращение на месте. Таким образом, естественное обобщение машины Ридса-Шеппа приводит к модели автомобиля, траектории которого имеют неограниченную кривизну. Оптимальный синтез в такой системе получен Ю.Л. Сачковым [3]. Аналогичное обобщение машины Дубинса приводит к модели, предложенной Р. Дайтсом [4].

Рассмотрим модель автомобиля, движущегося по плоскости, см. Рис. 1. Автомобиль имеет два параллельных колеса, равноудаленных от центра масс, который совпадает с серединой оси колесной пары. Оба колеса имеют независимые приводы, которые могут вращаться вперед и назад, так что соответствующее качение колес происходит без проскальзывания. Конфигурация системы описывается тройкой $q = (x, y, \theta) \in \mathbb{M} = \mathbb{R}^2 \times S^1$, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — центральная точка, а $\theta \in S^1$ — угол ориентации автомобиля, совпадающий с направлением колес. Заметим, что конфигурационное пространство $\mathbb{M}$ образует группу Ли $\mathrm{SE}(2)$ — группу движений плоскости:

$$\mathbb{M} = \mathbb{R}^2 \times S^1 \simeq \mathrm{SE}(2).$$

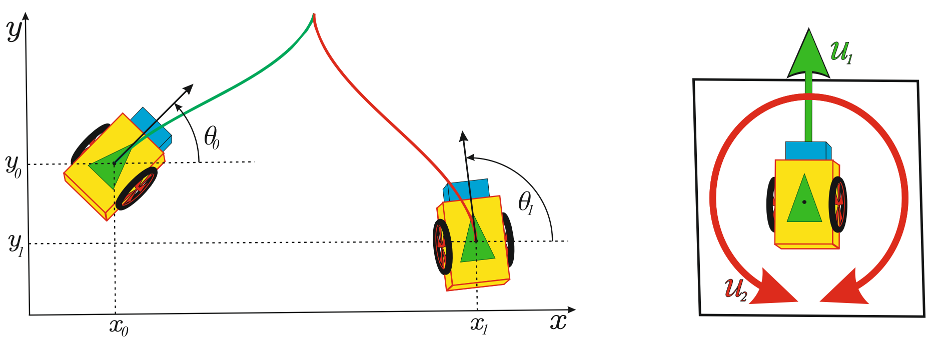

Рис. 1. **Слева:** Конфигурация системы “машина на плоскости” определяется положением $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и углом ориентации $\theta \in S^1$. В модели Сачкова машина может двигаться вперед (часть траектории выделена зеленым) и назад (выделена красным). В момент смены направления движения траектория имеет точку возврата. **Справа:** Машина имеет два управления: u_1, отвечающее за движение вперед, и u_2, отвечающее за повороты. В модели Дайтса движение назад запрещено $u_1 \geqslant 0$.

С точки зрения водителя у автомобиля есть два управления: акселератор u_1 и рулевое колесо u_2. В таких обозначениях динамика автомобиля описывается следующей управляемой системой, см. [5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (u_1, u_2) \in U \subset \mathbb{R}^2, \\ (x, y, \theta) \in \mathbb{M} = \mathbb{R}^2 \times S^1. \end{array} \tag{1.1}$$

Задача заключается в поиске управления $(u_1(t), u_2(t))$ и соответствующей траектории $\gamma(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$ на временном интервале $t \in [0, T]$, удовлетворяющей системе (1.1) с граничными условиями

$$\gamma(0) = (x_0, y_0, \theta_0) = q_0, \qquad \gamma(T) = (x_1, y_1, \theta_1) = q_1, \tag{1.2}$$

где $q_0, q_1 \in \mathbb{M}$ — это начальная и конечная конфигурации системы.

Такая задача в общем случае допускает бесконечное число решений. Выбор конкретного решения традиционно осуществляется путем введения критерия качества различных траекторий. Для этого к системе добавляется функционал стоимости, который требуется минимизировать, чтобы найти оптимальное решение. Классической является задача быстродействия

$$T \to \min. \tag{1.3}$$

Еще один естественный критерий оптимальности — минимизация "маневра"

$$\int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}\, \mathrm{d}\, t \to \min, \tag{1.4}$$

где конечное время $T \geqslant 0$ свободно.

Эти два критерия могут быть эквивалентны при выборе подходящей области допустимых управлений. Например, в случае $u_1^2(t) + u_2^2(t) \leqslant 1$ два критерия эквивалентны, поскольку любая нетривиальная оптимальная траектория может быть натурально параметризована $u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1$.

Замечание 1. Задача управления (1.1), (1.2), (1.4) при $U = -U$ является задачей оптимизации кривой в пространстве $\mathbb{M}$, снабженном естественной метрикой, определенной для кривых $\gamma(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$, удовлетворяющих условию пропорциональности вектора $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ вектору $(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$. Формулируя задачу таким образом, она становится одним из простейших примеров субримановой (СР) геометрии [6]: касательный вектор $\dot{\gamma}(t)$ должен лежать в плоскости, натянутой на вектора $(\cos\theta(t), \sin\theta(t), 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Различные множества допустимых управлений $U \ni (u_1, u_2)$ приводят к разным моделям автомобиля на плоскости, см. [7]. Например, см. Рис. 2, задача минимизации времени для автомобиля с управлением

- $u_1 = 1$, $|u_2| \leqslant \kappa$, $\kappa > 0$ приводит к модели Дубинса [1];
- $|u_1| = 1$, $|u_2| \leqslant \kappa$, $\kappa > 0$ приводит к модели Ридса-Шеппа [2];
- $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$ приводит к модели машины, траектории которой задаются субримановыми кратчайшими, исследованными Сачковым [3];
- $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$, $u_1 \neq 0$ приводит к модели, исследованной Берестовским [8];
- $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$, $u_1 \geqslant 0$ приводит к модели машины, движущейся вперед и поворачивающейся на месте, предложенной Дайтсом [4].

Замечание 2. Управляемая система (1.1) инвариантна относительно преобразования $(t, u_1, u_2) \mapsto (\frac{t}{\xi}, \xi u_1, \xi u_2)$, $\xi > 0$. Другими словами, при согласованной перепараметризации скорости и времени траектории системы не меняются. Таким образом, ограничения на множество управлений $u_1^2 + u_2^2 \leqslant \xi$ (светло–серая область на Рис. 2) эквивалентны при любом $\xi > 0$.

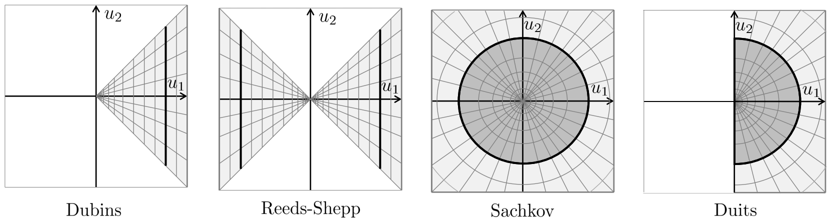

Рис. 2. Множество допустимых управлений для различных моделей.

В данной работе исследуется модель Р. Дайтса [4]. Актуальность модели обусловлена приложением к обработке изображений. Оптимальные для заданной внешней стоимости траектории такой системы используются для поиска выделяющихся кривых. В частности, такие траектории используются в анализе медицинских изображений при поиске сосудов на фото сетчатки глаза. Модель Дайтса была разработана, чтобы устранить проблему точек возврата, возникающую в методе трассировки сосудов с помощью субримановых (СР) кратчайших [9]. Отметим, что для устранения точек возврата применялся также другой подход [10], основанный на замене конфигурационного пространства с $\mathrm{SE}(2)$ на $\mathrm{PT}(\mathbb{R}^2)$. Такой подход позволил существенно сократить число ситуаций, в которых возникают точки возврата, однако полностью проблема устранена не была. Более подробно применение модели в обработке изображений обсуждается в следующем разделе.

Помимо актуальности с точки зрения приложений рассматриваемая задача представляет самостоятельный интерес в геометрической теории управления [11], как модельный пример задачи оптимального управления, в которой нулевое управление находится на границе множества управляющих параметров. Наиболее общий подход [12] к решению родственных задач основан на выпуклой тригонометрии. Подход покрывает класс задач оптимального управления с двумерным управлением, принадлежащим произвольному выпуклому компакту, содержащему ноль внутри. Обобщить этот подход на случай, когда ноль лежит на границе, непосредственно не удается. Для систем такого типа требуется развитие новых методов. В данной статье детально исследован частный случай такой системы.

Работа имеет следующую структуру. Помимо введения, в котором описана история задачи и отражена ее актуальность в мобильной робототехнике и теории управления, статья содержит пять разделов и заключение. Раздел 2 посвящен приложениям в моделировании биологических зрительных систем и обработке изображений. В разделе 3 приводится формальная постановка задачи. В разделе 4 доказывается полная управляемость и существование оптимальных управлений. В разделе 5 к задаче применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП), исследуется гамильтонова система ПМП и приводится явный вид экстремальных управлений и траекторий. В разделе 6 исследуется оптимальность экстремальных траекторий и структура оптимального синтеза. В заключении подводится итог работы.

§ 2. Приложение в моделях зрения и обработке изображений

Принципы устройства биологических зрительных систем вызывают большой интерес среди исследователей во многих областях науки. Важным направлением является разработка и изучение реалистичных математических моделей, описывающих определенный этап обработки зрительного сигнала. Математическая модель первичной зрительной коры мозга как субриманова структура в пространстве позиций и направлений была предложена Ж. Петито [17]. Затем модель была уточнена Дж. Читти и А. Сарти [13].

Модель Петито-Читти-Сарти представляет первичную зрительную кору как субриманову структуру на группе Ли SE(2). Иллюзорные контуры в такой модели определяются как траектории системы (1.1), на которых достигается минимум функционала (1.3) на множестве управлений $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$. Согласно этой модели процесс дополнения скрытых контуров происходит путем минимизации энергии возбуждения нейронов, воспринимающих визуальную информацию в областях повреждения. Такой процесс моделируется действием оператора гипоэллиптической диффузии, изученного в [14, 15]. Результирующие кривые являются субримановыми кратчайшими. Такие кривые применяются для восстановления поврежденных изображений [16] и используются для объяснения некоторых зрительных иллюзий [18].

В работах [19, 20] указано, что не все траектории модели Петито-Читти-Сарти согласованы с экспериментами из психологии зрения по построению поля ассоциаций, описанными в работе [21]. Поле ассоциаций представляет собой множество граничных условий (позиций и направлений), соединяемых иллюзорным контуром в процессе работы зрительной системы человека. Экспериментально было установлено, что не любые граничные условия соединяются. Для тех граничных условий, которые соединяются, иллюзорный контур является гладкой кривой на плоскости $\mathbb{R}^2$. Заметим, что в модели Петито-Читти-Сарти любые заданные граничные условия могут быть соединены оптимальной траекторией. При этом проекция оптимальной траектории на плоскость может иметь точки возврата (не является гладкой).

Естественным уточнением модели Петито-Читти-Сарти является сужение задачи на класс граничных условий, соединяемых оптимальной траекторией без точек возврата. Исследование множества таких граничных условий произведено в [19, 20]. Перспективным направлением является модификация модели таким образом, чтобы траектории с точками возврата были априори исключены. Такая модификация дается моделью Дайтса [4]. Согласно работе [4], и как показано далее в Теоремах 1 и 4, в модели Дайтса любые граничные условия соединяются оптимальной траекторией, проекция на плоскость которой не имеет внутренних точек возврата.

Принципы работы биологических зрительных систем активно используются в компьютерном зрении. На основе этих принципов создаются эффективные методы обработки изображений: улучшение, сегментация, восстановление, поиск объектов. Так, например, в работе [22] предложен подход к обработке изображений, основанный на поднятии изображения в расширенное пространство позиций и направлений (invertible orientation scores). После такого подъема, субримановы (СР) кратчайшие используются для поиска выделяющихся кривых [23, 24, 25].

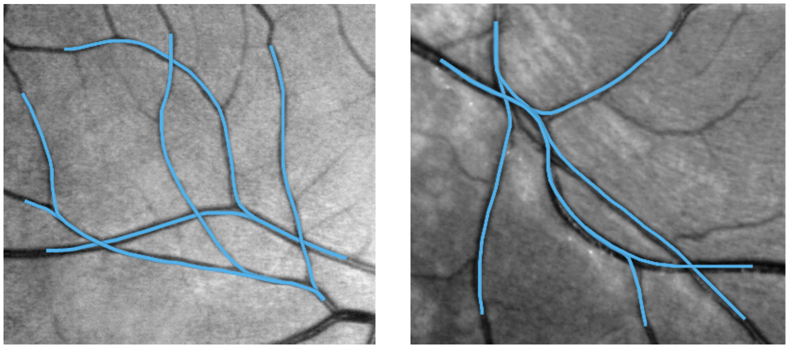

Рис. 3. Трассировка сосудов на фото сетчатки глаза с помощью траекторий на SE(2) с управлением в полукруге. Адаптировано из [26].

В частности, задача поиска выделяющихся кривых возникает в анализе медицинских изображений при поиске кровеносных сосудов на фото сетчатки глаза человека, см. Рис. 3. Типичные проблемы для промышленных систем трассировки возникают в ситуациях, когда сосуды на фото пересекаются. Решение этой проблемы достигается путем поднятия изображения в расширенное пространство $\mathbb{M}$ позиций и направлений. Метод трассировки сосудов с помощью СР кратчайших на $\mathbb{M}$ предложен в [9].

Недостатком СР модели является наличие точек возврата. Такие кривые нежелательны в задаче трассировки сосудов. Ограничение управления на полукруг устраняет этот недостаток. При этом точки возврата становятся точками поворота на месте. Возникновение точки поворота типично наблюдается в местах ветвления сосудов. Более подробно с результатами трассировки сосудов с помощью оптимальных траекторий на SE(2) с управлением в полукруге можно ознакомиться в [26].

§ 3. Постановка задачи

Движением метрического пространства называется преобразование, сохраняющее расстояние между точками. В данной работе рассматривается группа SE(2) собственных евклидовых движений плоскости $\mathbb{R}^2$. Любое собственное движение $\mathbb{R}^2$ представляется композицией параллельного переноса и поворота плоскости. Таким образом, элемент SE(2) задается тройкой чисел (x, y, θ), где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — вектор параллельного переноса, $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — угол поворота.

Рассматривается следующая управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (x, y, \theta) = q \in \mathrm{SE}(2) = \mathbb{M}, \\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1,\ u_1 \geqslant 0. \end{array} \tag{3.1}$$

Исследуется задача быстродействия: по заданным граничным условиям q_0, $q_1 \in \mathbb{M}$ требуется найти управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ такие, что соответствующая траектория $\gamma : [0, T] \to \mathbb{M}$ переводит систему из начального состояния q_0 в конечное состояние q_1 за минимальное время

$$\gamma(0) = q_0, \quad \gamma(T) = q_1, \qquad T \to \min . \tag{3.2}$$

В данной постановке управления u_i принадлежат классу $L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, а соответствующие траектории γ являются липшицевыми кривыми на $\mathbb{M}$.

Замечание 3. Система (3.1) инвариантна относительно параллельных переносов и поворотов плоскости. В силу этого без ограничения общности можно свести исследование при произвольном $q_0 = (x_0, y_0, \theta_0)$ к случаю $q_0 = (0, 0, 0)$.

Замечание 4. Управление u_1 задает инфинитезимальный параллельный перенос в направлении θ, а u_2 — поворот плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$. При $u_2 > 0$ поворот происходит от оси O_x к O_y, а при $u_2 < 0$ — в обратном направлении.

Классический подход [11] к задаче (3.1)–(3.2) состоит из следующих этапов:

1. доказательство существования решения;
2. параметризация экстремалей γ с помощью принципа максимума Понтрягина (ПМП);
3. определение времени разреза $t_{cut}(\gamma)$, после которого γ теряет оптимальность;
4. выбор оптимальной траектории для заданных граничных условий.

Замечание 5. Заметим, что при $t \in [0, t_{cut})$ оптимальная траектория γ является единственной. В конечную точку $\gamma(t_{cut})$ могут приходить несколько оптимальных траекторий, в том числе бесконечно много.

Далее в разделах 4—5 полностью проводятся этапы 1 и 2 соответственно. В разделе 6 обсуждаются этапы 3 и 4, которые на данный момент являются открытыми математическими задачами в общем случае. Проведение этих этапов позволит построить оптимальный синтез в задаче. На данный момент неизвестно время разреза t_{cut} для всех возможных экстремалей γ. Сложность его вычисления заключается в решении трансцендентных уравнений, возникающих при параметризации экстремалей.

§ 4. Существование решения

При исследовании задачи (3.1)–(3.2) возникает вопрос существования допустимой траектории, соединяющей граничные условия (3.2). Если при любых q_0, $q_1 \in \mathbb{M}$ ответ положителен, то управляемая система называется вполне управляемой. Докажем конструктивно полную управляемость системы (3.1).

В силу Замечания 3 положим $q_0 = (0, 0, 0)$. Обозначим $q_1 = (x_1, y_1, \theta_1)$. Искомое управление будем строить из трех частей: вращение на месте на угол $\alpha = \arg(x_1 + \boldsymbol{i} y_1) \in (-\pi, \pi]$, движение вперед на величину $l = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, вращение на месте на угол $\beta = (\theta_1 - \alpha) \mod 2\pi \in (-\pi, \pi]$. Здесь $\arg(a + \boldsymbol{i} b)$ — аргумент комплексного числа $a + \boldsymbol{i} b$. Введем следующие обозначения:

$$s_1 = \operatorname{sign} \alpha, \ s_2 = \operatorname{sign} \beta; \quad t_0^1 = |\alpha| \in [0, \pi], \ t_0^2 = |\alpha| + l, \ T = |\alpha| + l + |\beta|.$$

Искомое управление $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ имеет вид

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \begin{cases} (0, s_1), & \text{при } t \in [0, t_0^1|), \\ (1, 0), & \text{при } t \in [t_0^1, t_0^2), \\ (0, s_2), & \text{при } t \in [t_0^2, T]. \end{cases}$$

Соответствующая траектория $\bar{\gamma}$ задается следующей таблицей:

$t \in$	$[0, t_0^1)$	$[t_0^1, t_0^2)$	$[t_0^2, T]$
$\bar{x}(t)$	0	$(t - s_1 t_0^1) \cos t_0^1$	x_1
$\bar{y}(t)$	0	$(s_1 t - t_0^1) \sin t_0^1$	y_1
$\bar{\theta}(t)$	$s_1 t$	$s_1 t_0^1$	$s_1 t_0^1 + s_2(t - t_0^2)$,

Вычисление $\theta(T) = s_1 t_0^1 + s_2(t - t_0^2) = \alpha + \beta = \theta_1$ показывает, что траектория $\bar{\gamma}$ удовлетворяет граничным условиям $\bar{\gamma}(0) = (0, 0, 0)$, $\bar{\gamma}(T) = (x_1, y_1, \theta_1)$. Итак мы построили управление $\bar{\mathbf{u}}$, переводящее систему из q_0 в q_1, и тем самым доказали свойство полной управляемости системы (3.1).

Далее возникает вопрос существования оптимальных траекторий: всегда ли существует допустимая траектория, удовлетворяющая условиям (3.2), на которой достигается минимальное значение T? Положительный ответ на этот вопрос дается теоремой Филиппова [11, 27]. Она гарантирует существование оптимального управления при следующих условиях:

1. существует допустимая траектория, соединяющая граничные условия;
2. правая часть управляемой системы непрерывна по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируема по переменным состояния;
3. траектории системы определены на всем промежутке времени;
4. множество управлений замкнуто и ограничено; правая часть системы выпукла на множестве управлений.

Для рассматриваемой задачи быстродействия (3.1)–(3.2) выполнение условия 1 доказано выше. Условия 2–4 выполнены исходя из вида системы (3.1). При этом продолжимость траекторий на бесконечный промежуток времени обеспечивается теоремой Коши и ограничением на управление.

Подводя итог, в данном разделе доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Решение задачи быстродействия (3.1)–(3.2) существует для любых граничных условий q_0, $q_1 \in \mathbb{M}$.*

§ 5. Принцип максимума Понтрягина

Исследуется задача быстродействия

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, & x(0) = 0, \quad x(T) = x_1, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, & y(0) = 0, \quad y(T) = y_1, \\ \dot{\theta} = u_2, & \theta(0) = 0, \quad \theta(T) = \theta_1, \end{cases} \qquad \begin{matrix} u_1 \geqslant 0, \\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1, \end{matrix} \qquad T \to \min. \tag{5.1}$$

Обозначим через U множество допустимых управлений — полукруг

$$U = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \geqslant 0,\ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1\}.$$

Применим к (5.1) необходимое условие оптимальности — ПМП [11, 27].

Введем укороченную функцию Понтрягина

$$H_u = u_1(p_1 \cos\theta + p_2 \sin\theta) + u_2 p_3, \quad (p_1, p_2, p_3) \in T_e^*\mathbb{M} \simeq \mathbb{R}^3. \tag{5.2}$$

Пусть $(u(t), q(t))$, $t \in [0, T]$, — оптимальный процесс, тогда выполнены условия:

1. гамильтонова система $\dot{p} = -\dfrac{\partial H_u}{\partial q}$, $\dot{q} = \dfrac{\partial H_u}{\partial p}$;
2. условие максимума $H_{u(t)}(p(t), q(t)) = \max\limits_{u \in U} H_u(p(t), q(t)) = H \in \{0, 1\}$.

Случай $H = 0$ называется анормальным, случай $H = 1$ — нормальным.

Естественными координатами для левоинвариантных задач на группах Ли являются левоинвариантные гамильтонианы, линейные на слоях кокасательного расслоения [11]. Обозначим их через h_1, h_2 и h_3:

$$h_1 = p_1 \cos\theta + p_2 \sin\theta, \quad h_2 = p_3, \quad h_3 = p_1 \sin\theta - p_2 \cos\theta.$$

Функция Понтрягина примет вид

$$H_u = u_1 h_1 + u_2 h_2.$$

Гамильтонова система ПМП имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_1 = -u_2 h_3, \\ \dot{h}_2 = u_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = u_2 h_1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Подсистема на переменные состояния x, y, θ называется *горизонтальной* частью, а подсистема на сопряженные переменные h_1, h_2, h_3 — *вертикальной* частью гамильтоновой системы ПМП. Решение вертикальной части вместе с условием максимума определяет экстремальные управления, а решение горизонтальной части — экстремальные траектории.

Условие максимума имеет вид $H = \max\limits_{u \in U} H_u$.

При $h_1 < 0$ гамильтониан равен $H = |h_2|$, максимум достигается при

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \begin{cases} \operatorname{sign} h_2, \ \text{при } h_2 \neq 0, \\ \forall u_2 \in I = [-1, 1], \ \text{при } h_2 = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

При $h_1 = 0$ гамильтониан равен $H = |h_2|$, максимум достигается при

$$\begin{cases} u_1 = 0, \ u_2 = \operatorname{sign} h_2, \ \text{при } h_2 \neq 0, \\ \forall (u_1, u_2) \in U, \ \text{при } h_2 = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

При $h_1 > 0$ гамильтониан равен $H = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, максимум достигается при

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Замечание 6. Выражение экстремального управления при $h_1 > 0$ имеет следующую геометрическую интерпретацию. Функция $H_u = u_1 h_1 + u_2 h_2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{h} \rangle$ достигает максимума по $(u_1, u_2) \in U$, когда векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{h}$ сонаправлены и евклидова длина $\|\mathbf{u}\|$ имеет максимальное значение, то есть $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Таким образом $\mathbf{u} = \mathbf{h}/H$, где $H = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Заключаем, что гамильтониан ПМП имеет вид

$$H = \max_{u \in U} H_u = \begin{cases} |h_2|, & \text{при } h_1 \leqslant 0, \\ \sqrt{h_1^2 + h_2^2}, & \text{при } h_1 > 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Выражение экстремального управления дается следующей таблицей:

$$\begin{array}{c|lll} & h_1 < 0 & h_1 = 0 & h_1 > 0 \\ \hline h_2 < 0 & u_1 = 0,\, u_2 = -1 & (u_1, u_2) = (0, -1) & (u_1, u_2) = \dfrac{(h_1, h_2)}{H} \\ h_2 = 0 & u_1 = 0,\, u_2 \in I & (u_1, u_2) \in U & (u_1, u_2) = \dfrac{(h_1, h_2)}{H} \\ h_2 > 0 & u_1 = 0,\, u_2 = 1 & (u_1, u_2) = (0, 1) & (u_1, u_2) = \dfrac{(h_1, h_2)}{H}. \end{array} \tag{5.8}$$

5.1. Анормальный случай $H = 0$.
Из (5.7) следует $|h_2| \leqslant H = 0$. Следовательно, $h_2 = 0$ при любом h_1.
При $h_1 < 0$ в силу (5.4) имеем $u_1 = 0$, $u_2 \in I = [-1, 1]$. Гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 0, & y(0) = 0, \\ \dot{\theta} = u_2, & \theta(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_1 = -u_2 h_3, & h_1(0) = h_{10}, \\ \dot{h}_3 = u_2 h_1, & h_3(0) = h_{30} \end{cases} \tag{5.9}$$

имеет для любого допустимого управления $u_2(t)$ единственное решение

$$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = 0, \\ \theta(t) = U_2(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1(t) = h_{10} \cos U_2(t) - h_{30} \sin U_2(t), \\ h_3(t) = h_{30} \cos U_2(t) + h_{10} \sin U_2(t), \end{cases} \tag{5.10}$$

где $U_2(t) = \displaystyle\int_0^t u_2(\tau) d\tau$.

Рассмотрим случай $h_1 = 0$. Поскольку $H = |h_2|$ является первым интегралом системы, то $\dot{h}_2 = 0$. Из гамильтоновой системы (5.3) следует $h_3 u_1 = 0$. Случай $h_3 = 0$ противоречит условию нетривиальности начального ковектора в ПМП. В случае $u_1 = 0$ выражения (5.4) и (5.5) совпадают. Таким образом, экстремальное управление при $h_1 = 0$ имеет тот же вид, что и при $h_1 < 0$.

При $h_1 > 0$ анормальных экстремалей не существует. Этот случай невозможен, поскольку противоречит условию $H = 0$.

Таким образом, мы получили следующее утверждение

Теорема 2. *Анормальное экстремальное управление имеет вид $u_1(t) = 0$, $u_2(t) \in I = [-1, 1]$ — произвольная функция класса $L_\infty([0, T], I)$, удовлетворяющая условию $h_{10} \cos U_2(t) - h_{30} \sin U_2(t) \leqslant 0$ при всех $t \in [0, T]$, где $h_{10} \geqslant 0$, $U_2(t) = \int_0^t u_2(\tau) d\tau$.*

Несложно заметить, что анормальная экстремальная траектория не является оптимальной, если u_2 меняет знак или обращается в ноль. Смена знака u_2 соответствует поворотам в противоположных направлениях. Нулевое управление соответствует неподвижной точке. Такие движения заведомо не оптимальны в задаче быстродействия. Также очевидно, что поворот на месте оптимален, если угол поворота не превосходит π. Выбирая натуральную параметризацию $u_1^2+u_2^2=1$, получаем $u_2=s_2=\pm 1$. Таким образом, заключаем, что анормальные оптимальные траектории являются поворотами с постоянной скоростью:

$$x(t)=0, \quad y(t)=0, \quad \theta(t)=s_2 t.$$

5.2. Нормальный случай $H=1$. Вертикальная часть гамильтоновой системы ПМП (5.3) имеет вид

$$\dot h_1=-u_2h_3, \qquad \dot h_2=u_1h_3, \qquad \dot h_3=u_2h_1, \tag{5.11}$$

где управление (u_1,u_2) задано соотношениями (5.4) –(5.6).

Система (5.11) имеет первый интеграл — гамильтониан H, заданный формулой (5.7), зависящей от знака h_1. Помимо гамильтониана имеется еще один первый интеграл — функция Казимира E, заданная единой формулой на всей области определения:

$$E=h_1^2+h_3^2. \tag{5.12}$$

Замечание 7. Функции Казимира — это функции на двойственном пространстве алгебры Ли, коммутирующие в смысле скобок Пуассона со всеми левоинвариантными гамильтонианами. Они являются универсальными законами сохранения на группе Ли. Связные совместные поверхности уровня всех функций Казимира являются орбитами коприсоединенного представления группы Ли (см. [29; Утв. 7.7]).

Первый интеграл E является функцией Казимира на SE(2), поскольку он коммутирует со всеми левоинвариантными гамильтонианами:

$$\{E,h_1\}=\{E,h_2\}=\{E,h_3\}=0.$$

На Рис. 4 изображены различные варианты взаимного расположения поверхности уровня гамильтонина $H=1$, представляющей собой две полуплоскости $\{(h_1,h_3)\mid h_1<0,\ h_2=\pm 1\}$, склеенные половиной цилиндра $\{h_1^2+h_2^2=1\mid h_1\geqslant 0\}$, и поверхности уровня функции Казимира $E\geqslant 0$, представляющей собой цилиндр $h_1^2+h_3^2=E$. Помимо вырожденных случаев $\{h_1=0,\ h_2=\pm 1,\ h_3=0\}$ (устойчивые положения равновесия) и $\{h_1=1,\ h_2=0,\ h_3=0\}$ (неустойчивое положение равновесия), возможны три различных случая: $E<1$, $E=1$ и $E>1$. Случай $E=1$ называется критическим. В этом случае движение в состояние (или из состояния) неустойчивого равновесия происходит за бесконечное время.

На Рис. 5 приведен фазовый портрет вертикальной части гамильтоновой системы, суженный на поверхность уровня гамильтониана $H=1$. На этом рисунке поверхность $H=1$, состоящая из двух полуплоскостей, склеенных половиной цилиндра, изображена в развернутом виде. Линии склейки нанесены

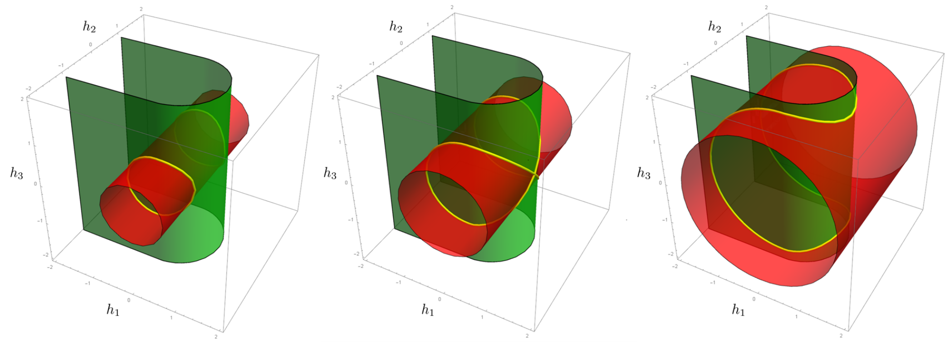

Рис. 4. Взаимное расположение поверхностей уровня гамильтониана H (зеленая поверхность) и функции Казимира E (красная поверхность). Линия пересечения выделена желтым. Слева: $E < 1$. Центр: $E = 1$. Справа: $E > 1$.

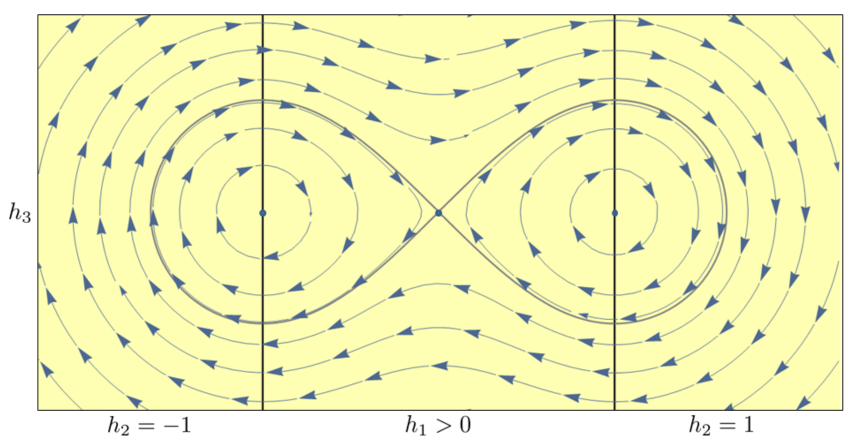

Рис. 5. Фазовый портрет на поверхности уровня гамильтониана $H = 1$.

на рисунок. Левая часть рисунка соответствует фазовому портрету на полуплоскости $h_2 = -1$, средняя часть — на половине цилиндра, правая часть — на полуплоскости $h_2 = 1$. По вертикали обозначены значения h_3. По горизонтали — значения h_1 на левой и правых частях рисунка, значение $\arccos h_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ на средней части рисунка. Траектория, соответствующая критическому значению $E = 1$ нанесена на рисунок.

В зависимости от знака h_1 получаются две различные системы, см. (5.7). При смене знака h_1 динамика переключается с одной системы на другую. Далее мы проанализируем возможные случаи. Момент времени, в который происходит переключение, будем обозначать $t_0 \in \{t_0^0 = 0, t_0^1, t_0^2, \ldots\}$.

5.2.1. *Случай* $h_1 < 0$. Заметим, что в силу постоянства гамильтониана H, см. (5.7), выполнено

$$h_2 = h_{20} = \pm 1.$$

В силу (5.4) имеем $u_1 = 0$, $u_2 = h_2$. Обозначим $s_2 = h_2 = \pm 1$.
Гамильтонова система ПМП имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, & x(t_0) = x_0, \\ \dot{y} = 0, & y(t_0) = y_0, \\ \dot{\theta} = s_2, & \theta(t_0) = \theta_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_1 = -s_2 h_3, & h_1(t_0) = h_{10}, \\ \dot{h}_3 = s_2 h_1, & h_3(t_0) = h_{30}. \end{cases} \tag{5.13}$$

Решение горизонтальной части имеет вид

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0, \quad \theta(t) = \theta_0 + s_2(t - t_0). \tag{5.14}$$

Получаем, что экстремальными траекториями являются повороты плоскости вокруг неподвижной точки x_0, y_0 с постоянной скоростью $s_2 = \pm 1$.

Вертикальная часть задана линейной системой ОДУ, которая легко интегрируется:

$$\begin{cases} h_1(t) = h_{10}\cos(t - t_0) - s_2\, h_{30}\sin(t - t_0), \\ h_3(t) = h_{30}\cos(t - t_0) + s_2\, h_{10}\sin(t - t_0). \end{cases} \tag{5.15}$$

Получаем, что решением вертикальной части являются дуги окружностей в плоскости (h_1, h_3), а если точнее, то в полуплоскости $h_1 < 0$ в силу начального предположения. При $s_2 = -1$ движение по окружности происходит по часовой стрелке, а при $s_2 = 1$ — против часовой стрелки.

Для полного исследования рассматриваемого случая осталось вычислить момент времени t_1, в который произойдет переключение динамики, то есть такой момент, когда условие $h_1 < 0$ перестанет выполняться

$$t_1 = \min\left\{t > t_0 \mid h_{10}\cos(t - t_0) - s_2 h_{30}\sin(t - t_0) = 0\right\}.$$

Геометрически это уравнение означает, что $t_1 - t_0$ — минимальный угол, на который нужно повернуть плоскость (h_1, h_3), чтобы вектор $(1, 0)$ стал перпендикулярным вектору $v = (h_{10}, -s_2 h_{30})$. Рассматривая два возможных варианта расположения v в полуплоскости $h_1 < 0$, находим

$$t_1 - t_0 = \arg\left(-s_2 h_{30} - \boldsymbol{i} h_{10}\right) \in (0, \pi]. \tag{5.16}$$

В заключение отметим, что в случае $t_0 > 0$, то есть когда уже произошло хотя бы одно переключение, формула (5.16) сводится к $t_1 - t_0 = \pi$.

5.2.2. *Случай* $h_1 = 0$. В силу постоянства гамильтониана H, см. (5.7), выполнено $h_2 = h_{20} = \pm 1$. В силу (5.5) имеем $u_1 = 0$, $u_2 = h_2$. Обозначим $s_2 = h_2 = \pm 1$.
Динамика h_1 зависит от знака производной $\dot{h}_1 = -h_2 h_3$.

В случае $h_{30} = 0$ система находится в устойчивом стационарном состоянии $h_1 = h_3 = 0$, $h_2 = s_2$. Соответствующее экстремальное управление постоянно $u_1 = 0$, $u_2 = s_2$, а экстремальной траекторией является вращение на месте $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, $\theta(t) = \theta_0 + s_2(t - t_0)$. Очевидно, что такие траектории являются оптимальными при $t - t_0 \in [0, \pi]$.

В случае $h_{30} \neq 0$ обозначим $s_{23} = \operatorname{sign} h_2 h_3$. Тогда $\dot{h}_1 = -s_{23} = \pm 1$. Если $s_{23} = 1$, то динамика задается системой (5.13) рассмотренного ранее случая $h_1 < 0$. Если $s_{23} = -1$, то динамика задается системой (5.17) рассматриваемого далее случая $h_1 > 0$.

5.2.3. *Случай* $h_1 > 0$. В силу (5.7) имеем $h_1 = \sqrt{1-h_2^2}$. Гамильтонова система ПМП имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = h_1 \cos\theta, & x(t_0) = x_0, \\ \dot{y} = h_1 \sin\theta, & y(t_0) = y_0, \\ \dot{\theta} = h_2, & \theta(t_0) = \theta_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3, & h_1(t_0) = h_{10}, \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3, & h_2(t_0) = h_{20}, \\ \dot{h}_3 = h_2 h_1, & h_3(t_0) = h_{30}. \end{cases} \tag{5.17}$$

Эта система является модельным примером в геометрической теории управления [11]. Явное выражение решения в эллиптических функциях Якоби получено в статье [3], где авторы свели вертикальную подсистему к уравнению математического маятника и проинтегрировали его в терминах выпрямляющих координат. При этом решение задается различными формулами в разных областях фазового портрета маятника. Конкретный вид формулы определяется характером движения маятника: колебание, вращение, движение по сепаратрисе, устойчивое или неустойчивое равновесие.

В данном разделе мы предлагаем другую технику интегрирования, ведущую к явной параметризации решения одной формулой почти всюду. Техника состоит в следующем: сначала мы выведем ОДУ на функцию h_2, найдем его явное решение, и затем выразим оставшиеся компоненты h_1, h_3 через известную функцию h_2 и начальные условия.

Напомним, что помимо первого интеграла $h_1^2 + h_2^2 = 1$, имеется еще один первый интеграл — функция Казимира $E = h_1^2 + h_3^2$. Обозначим $M = E - 2$.

Выписывая вторую производную функции h_2 в силу (5.17), получаем ОДУ

$$\ddot{h}_2 + M h_2 + 2h_2^3 = 0, \tag{5.18}$$

с начальными условиями

$$h_2(t_0) = h_{20}, \quad \dot{h}_2(t_0) = h_{10}\, h_{30} = \sqrt{1-h_{20}^2}\, h_{30}. \tag{5.19}$$

Случай $h_{30} = 0$. В силу (5.7) имеем $|h_{20}| < 1$. При $h_{20} = 0$ решением системы (5.18)–(5.19) является неустойчивое положение равновесия. Соответствующей экстремальной траекторией $\gamma(t) = (x_0 + (t-t_0)\cos\theta_0, y_0 + (t-t_0)\sin\theta_0, \theta_0)$ является движение по прямой. Такие траектории являются оптимальными до бесконечности. При $h_{20} \neq 0$ система сводится к рассматриваемому далее случаю $h_{30} \neq 0$ с углом $\alpha = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} h_{20}$.

Случай $h_{30} \neq 0$. При $E = 0$ решение вертикальной части (5.17) является устойчивым положением равновесия, а соответствующие экстремальные траектории являются поворотами на месте. При $E = 1$ выполнено $h_3 = \pm h_2$, и вертикальная часть сводится к уравнению $\dot{h}_1 = \mp(1-h_1^2)$, решение которого выражается в гиперболических функциях. Частные случаи $E \in \{0,1\}$ выражаются в элементарных функциях и получаются предельным переходом в формулах при $E < 1$ и $E > 1$. Рассмотрим далее общий случай $E \notin \{0,1\}$.

Обозначим $s_2 = \operatorname{sign} h_{20}$, $s_3 = \operatorname{sign} h_{30}$. Введем угол

$$\alpha = \begin{cases} \arg\left(-s_3\left(h_{20} + \boldsymbol{i}\sqrt{1-h_{20}^2}\right)\right) \in (-\pi, \pi], & \text{при } E > 1, \\ \arg\left(h_{20} + \boldsymbol{i}\sqrt{1-h_{20}^2}\right) + \frac{1-s_2}{2}\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], & \text{при } E < 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{t-t_0}{k} - s_3 F(\alpha, k), & \text{при } E > 1, \\ -s_2 s_3 \frac{t-t_0}{k} + s_2 F(\alpha, k), & \text{при } E < 1, \end{cases}$$

где F — эллиптический интеграл 1-го рода в форме Лежандра:

$$F(\alpha, k) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\mathrm{d}\, a}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}}.$$

Явное решение уравнения (5.18) для общих граничных условий приведено в [30; App. A], см. также [31]. Подставляя граничные условия (5.19), получаем

$$h_2(t) = -s \operatorname{cn}\left(\xi(t), k\right), \tag{5.20}$$

где

$$k = \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{1}{\sqrt{1 - h_{20}^2 + h_{30}^2}}, \qquad s = \begin{cases} s_3, & \text{при } E > 1, \\ -s_2, & \text{при } E < 1. \end{cases}$$

Из (5.20) и условия $h_1(t) = \sqrt{1 - h_2^2(t)}$ находим

$$h_1(t) = \operatorname{sn}\left(\xi(t), k\right), \tag{5.21}$$

Функция $h_3(t)$ находится из системы $\dot{h}_3(t) = h_1(t) h_2(t)$, $h_3(0) = h_{30}$:

$$h_3(t) = \quad h_{30} + \int\limits_{t_0}^{t} h_1(\tau) h_2(\tau)\, \mathrm{d}\, \tau = h_{30} + \frac{s}{k} \int\limits_{\xi(t_0)}^{\xi(t)} -k^2 \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{cn}(a, k)\, \mathrm{d}\, a.$$

Используя тождество $\frac{d}{da} \operatorname{dn}(a, k) = -k^2 \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{cn}(a, k)$, получаем

$$h_3(t) = h_{30} + \frac{s}{k} \left(\operatorname{dn}\left(\xi(t), k\right) - \operatorname{dn}\left(\xi(t_0), k\right)\right). \tag{5.22}$$

Обозначим

$$H_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h_2(\tau)\, \mathrm{d}\ \tau. \tag{5.23}$$

Замечание 8. По аналогии с результатом [32; Гл. 1, § 3] задача Коши

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3, & h_1(t_0) = h_{10}, \\ \dot{h}_3 = h_2 h_1, & h_3(t_0) = h_{30}. \end{cases}$$

имеет единственное решение (h_1, h_3), заданное формулой

$$h_1(t) = h_{10} \cos H_2(t) - h_{30} \sin H_2(t),$$
$$h_3(t) = h_{30} \cos H_2(t) + h_{10} \sin H_2(t).$$

Заключаем, что как и при $h_1 < 0$ проекции решений вертикальной части на плоскость (h_1, h_3) являются дугами окружностей, однако в отличие от случая $h_1 < 0$, движение по ним происходит с переменной скоростью.

Интеграл (5.23), где h_2 задается формулой (5.20), допускает явное представление в эллиптических функциях Якоби, см. [33],

$$H_2(t) = -s \arccos\left(\mathrm{dn}\left(\xi(\tau), k\right)\right)\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t}. \tag{5.24}$$

Теперь запишем решение горизонтальной части гамильтоновой системы. Заметим, что в силу $\dot\theta = h_2$, функции θ и H_2, см. (5.23), связаны соотношением

$$\theta(t) = \theta_0 + H_2(t). \tag{5.25}$$

Компоненты x, y экстремальной траектории выражаются в квадратурах

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h_1(\tau)\cos\theta(\tau)\ \mathrm{d}\,\tau, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} h_1(\tau)\sin\theta(\tau)\ \mathrm{d}\,\tau. \tag{5.26}$$

Введем систему координат $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta})$ в окрестности точки (x_0, y_0, θ_0):

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_0 & \sin\beta_0 \\ -\sin\beta_0 & \cos\beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\theta} = \theta - \beta_0.$$

где

$$\beta_0 = \theta_0 + s \arccos\left(\mathrm{dn}\left(\xi(t_0), k\right)\right).$$

В силу левоинвариантности гамильтоновой системы, компоненты траектории $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{\theta}(t))$ в новых координатах удовлетворяют тем же уравнениям (5.17), что и в исходных координатах:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = h_1(t)\cos\tilde{\theta}(t), \quad \dot{\tilde{y}}(t) = h_1(t)\sin\tilde{\theta}(t), \quad \dot{\tilde{\theta}}(t) = h_2(t).$$

Из тождества (5.25) следует

$$\tilde{\theta}(t) = -s \arccos\left(\mathrm{dn}\left(\xi(t), k\right)\right). \tag{5.27}$$

Компоненты $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ экстремальной траектории выражаются как

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} h_1(\tau)\cos\tilde{\theta}(\tau)\ \mathrm{d}\,\tau, \quad \tilde{y}(t) = \int_{t_0}^{t} h_1(\tau)\sin\tilde{\theta}(\tau)\ \mathrm{d}\,\tau. \tag{5.28}$$

Интегралы в правой части допускают явное представление. Действительно, подставляя (5.21), (5.27) в (5.28), имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{sn}\left(\xi(\tau), k\right)\mathrm{dn}\left(\xi(\tau), k\right)\ \mathrm{d}\,\tau = k \int_{\xi(t_0)}^{\xi(t)} \mathrm{sn}\left(a, k\right)\mathrm{dn}\left(a, k\right)\ \mathrm{d}\,a \\
&= -k\left(\mathrm{cn}\left(\xi(t), k\right) - \mathrm{cn}\left(\xi(t_0), k\right)\right), \\
\tilde{y}(t) &= -s\int_{t_0}^{t} \mathrm{sn}\left(\xi(\tau), k\right)\sqrt{1 - \mathrm{dn}^2\left(\xi(\tau), k\right)}\ \mathrm{d}\,\tau = -s\,k^2 \int_{\xi(t_0)}^{\xi(t)} \mathrm{sn}^2\left(a, k\right)\ \mathrm{d}\,a \\
&= -s\left(a - \mathrm{E}\left(a, k\right)\right)\Big|_{\xi(t_0)}^{\xi(t)} = -s\left(\frac{t - t_0}{k} - \mathrm{E}\left(\xi(t), k\right) + \mathrm{E}\left(\xi(t_0), k\right)\right),
\end{aligned}$$

где $\mathrm{E}(a,k) = E(\mathrm{am}(a,k),k)$ — эллиптический интеграл второго рода:

$$E(\alpha,k) = \int\limits_0^\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2 a}\,\mathrm{d}\,a.$$

При интегрировании выражения для $\tilde{y}(t)$ использовалось стандартное тождество $\sqrt{1-\mathrm{dn}^2(a,k)} = k\,|\,\mathrm{sn}(a,k)|$ и условие $\mathrm{sn}(\xi(t),k) > 0$, выполненное в силу предположения $h_1(t) > 0$, см. (5.21).

Возвращаясь к исходным координатам (x,y,θ), получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_0 & -\sin\beta_0 \\ \sin\beta_0 & \cos\beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \theta = \tilde{\theta} + \beta_0. \tag{5.29}$$

Замечание 9. Заметим, что поскольку $h_1 > 0$, то траектория может быть параметризована длиной s ее проекции на плоскость (x,y):

$$\mathrm{s}(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau)+\dot{y}^2(\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau = \int_{t_0}^t h_1(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau.$$

Этот интеграл выражается явно, см. [33]. В силу (5.21) имеем

$$\mathrm{s}(t) = \int\limits_{t_0}^t \mathrm{sn}\,(\xi(\tau),k)\,\mathrm{d}\,\tau = \ln\left(\mathrm{dn}\,(\xi(\tau),k) - k\,\mathrm{cn}\,(\xi(\tau),k)\right)\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t}.$$

Явные выражения для компонент траектории $x(\mathrm{s})$, $y(\mathrm{s})$, $\theta(\mathrm{s})$, параметризованной длиной дуги s на плоскости, найдено в [19].

5.2.4. *Нормальные экстремальные траектории и управления.* Подведем итог этого раздела, сформулировав следующую теорему

Теорема 3. *В задаче быстродействия (3.1)–(3.2) нормальное экстремальное управление $(u_1(t),u_2(t))$ однозначно определяется значением*

$$h_0^0 = (h_{10}^0, s_{20}^0, h_{30}^0), \quad h_{10}^0 \in (-\infty,1],\ s_{20}^0 \in \{-1,1\},\ h_{30}^0 \in \mathbb{R}.$$

Функция $u_1(t)$ имеет вид $u_1(t) = \sqrt{1-u_2^2(t)}$, $t \in [0,T]$.

Функция $u_2(t) = h_2(t)$ задается на интервалах, образованных разбиением отрезка $t \in [0,T]$ точками переключения $t_0 \in \{0 = t_0^0, t_0^1, t_0^2, \dots, T\}$, где момент переключения t_0^i зависит от состояния $h_0^{i-1} = (h_{10}^{i-1}, s_{20}^{i-1}, h_{30}^{i-1})$, достигнутого в предыдущий момент t_0^{i-1}, и определяется рекуррентной формулой

$$t_0^i(h_0^{i-1}) = \min\{t > t_0^{i-1}\,|\,h_1(t,h_0^{i-1}) = 0\}, \quad h_0^i = h(t_0^i(h_0^{i-1}), h_0^{i-1}).$$

Здесь $h(t,h_0^i) = (h_1(t,h_0^i),\ h_2(t,h_0^i),\ h_3(t,h_0^i)) = \mathrm{vert}\left(e^{t\vec{H}}h_0^i\right)$ — решение вертикальной части гамильтоновой системы ПМП с начальным значением h_0^i за время $t \geqslant t_0^i$, имеющей вид

$$\begin{cases} (5.13), & \textit{при } (h_{10}^i < 0) \vee (h_{10}^i = 0 \wedge s_{20}^i s_{30}^i > 0), \\ (5.17), & \textit{при } (h_{10}^i > 0) \vee (h_{10}^i = 0 \wedge s_{20}^i s_{30}^i < 0), \end{cases}$$

где $s_{30}^i = \begin{cases} \mathrm{sign}\, h_{30}^i, & \textit{при } h_{30}^i \neq 0, \\ s_{20}^i, & \textit{при } h_{30} = 0. \end{cases}$

Экстремальные траектории имеют вид

$$x(t) = \int\limits_0^t u_1(\tau)\cos\theta(\tau)\ \mathrm{d}\,\tau,\ y(t) = \int\limits_0^t u_1(\tau)\sin\theta(\tau)\ \mathrm{d}\,\tau,\ \theta(t) = \int\limits_0^t u_2(\tau)\ \mathrm{d}\,\tau.$$

Экстремальное управление и траектория являются решением $e^{t\vec{H}}h_0^0$ вертикальной и горизонтальной части гамильтоновой системы ПМП $\dot{h} = \vec{H}$ с начальным условием $h(0) = h_0^0$. Явные формулы в общем случае $E \notin \{0, 1\}$ при $h_1 < 0$, $h_1 = 0$ и $h_1 > 0$ приведены в разделах 5.2.1, 5.2.2 и 5.2.3 соответственно. Случаю $h_1 < 0$ соответствуют отрезки экстремальных траекторий, являющиеся вращениями на месте. Случаю $h_1 > 0$ соответствуют отрезки экстремальных траекторий, являющиеся субримановыми геодезическими на $\mathrm{SE}(2)$, проекция на плоскость которых не имеет точек возврата. Случай $h_1 = 0$ примыкает к случаю $h_1 < 0$, при $h_{20}^i h_{30}^i \geqslant 0$, и к случаю $h_1 > 0$, при $h_{20}^i h_{30}^i < 0$.

Решения в частных случаях $E \in \{0, 1\}$ выражаются в элементарных функциях и получаются предельным переходом в формулах в общем случае. Они соответствуют одному из типов движения:

- $E = 0 \Rightarrow h_{10} = 0$ — поворот на месте;
- $E = 1$, $h_{30} = 0$ — движение по прямой;
- $E = 1$, $h_{30} \neq 0$, $h_{10} > 0$ — движение по трактрисе, см. [3];
- $E = 1$, $h_{30} \neq 0$, $h_{10} < 0$ — поворот на месте;
- $E = 1$, $h_{10} = 0$ — поворот на месте или движение по трактрисе.

Анализируя полученное решение, наблюдаем связь между экстремальными траекториями в исследуемой задаче и задаче быстродействия для управляемой системы на группе движений плоскости с управлением в круге, исследованной в [3]: проекции на плоскость (x, y) траекторий в задаче на полукруге и задаче на круге совпадают, однако динамика угла θ при движении по ним отличается — в точках возврата в задаче на полукруге происходит равномерное увеличение угла θ на π радиан, см. Рис. 6.

§ 6. Структура оптимального синтеза

В этом разделе произведем анализ оптимальности экстремальных управлений и опишем структуру оптимального синтеза.

Сначала заметим, что в задаче (3.1)–(3.2) нет оптимальных строго анормальных траекторий. То есть любая оптимальная анормальная траектория является также нормальной. Это утверждение следует из Теоремы 2 и очевидного соображения, что поворот на месте оптимален (происходит наискорейшим способом) тогда и только тогда, когда направление вращения не меняется, и скорость максимальна $|u_2| = 1$. Таким образом, достаточно рассмотреть только нормальный случай.

В работе [4] указано, что оптимальная траектория на плоскости не имеет внутренних точек разворота. Точками разворота могут быть лишь граничные точки. Это утверждение формализуется в виде следующей теоремы.

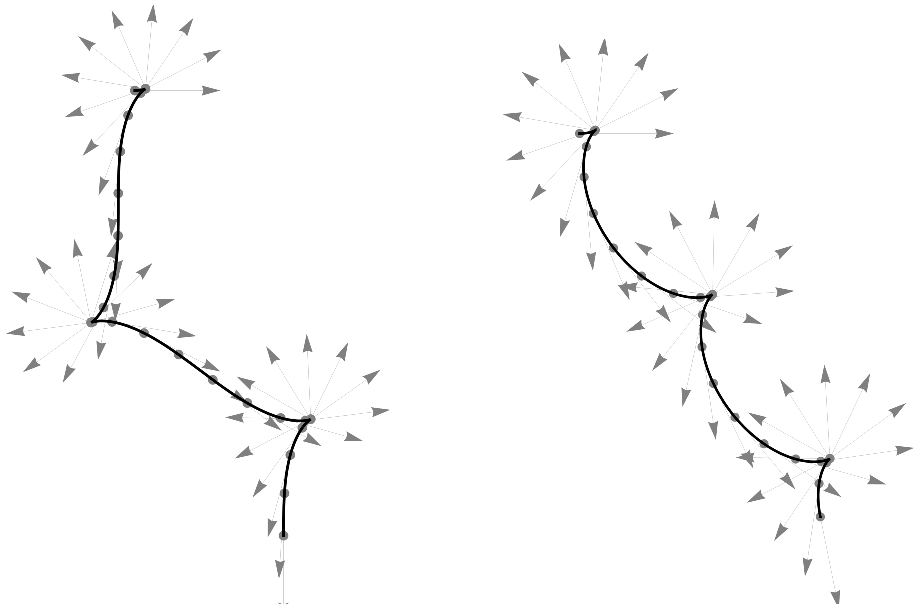

Рис. 6. Проекция экстремальных траекторий на плоскость (x, y). Серой стрелкой обозначено направление θ в моменты времени $\{0, 0.5, 1, \ldots, 20\}$. **Слева:** $h_{10} = \frac{1}{2}$, $h_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $h_{30} = 1$. **Справа:** $h_{10} = \frac{1}{2}$, $h_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $h_{30} = 0.7$.

.

Теорема 4. *Оптимальная траектория в задаче (3.1)–(3.2) имеет вид*

$$\begin{array}{c|ccc} t \in & [0, t_0^1) & [t_0^1, t_0^2) & [t_0^2, T] \\ \hline x(t) & 0 & x_s(t) & x_1 \\ y(t) & 0 & y_s(t) & y_1 \\ \theta(t) & s_1 t & \theta_s(t) & \theta_s(t_0^2) + s_2(t - t_0^2), \end{array} \tag{6.1}$$

где $0 \leqslant t_0^1 \leqslant t_0^2 \leqslant T$ *— моменты переключения управления, знаки* $s_i = \pm 1$ *— параметры, определяемые граничными условиями, а траектория*

$$(x_s(t), y_s(t), \theta_s(t)) =: q_s(t), \quad q_s(t_0^1) = (0, 0, \theta_0^1),\ q_s(t_0^2) = (x_1, y_1, \theta_0^2)$$

является субримановой кратчайшей на SE(2)*, проекция на плоскость которой не содержит внутренних точек возврата (т.е. для любого* $t \in (t_0^1, t_0^2)$ *выполнено* $\dot{x}_s(t)^2 + \dot{y}_s(t)^2 > 0$*).*

Доказательство. Вид (6.1) оптимальной траектории следует из Теоремы 3 с учетом того, что повороты на месте могут быть только на начальном или конечном интервале времени. Неоптимальность траектории γ с внутренней точкой разворота можно доказать, построив более быструю траекторию γ_0 (срезку). См. Рис. 7.

Рассмотрим траекторию γ с внутренней точкой разворота. Обозначим через $\bar{\gamma}$ проекцию γ на плоскость. Обозначим точку разворота через $B = \bar{\gamma}(t)$, $t \in$

$[t_B, t_B+\pi]$. Для любых двух точек $A = \bar{\gamma}(t_A)$ и $C = \bar{\gamma}(t_C)$, $t_A < t_B < t_B+\pi < t_C$ из достаточно малой окрестности точки B выполнено

$$|\theta_0| + |\theta_1| < \pi. \tag{6.2}$$

Время движения $T = t_C - t_A$ по $\bar{\gamma}$ из A в C имеет оценку снизу

$$l_{AB} + l_{BC} + \pi < T, \tag{6.3}$$

где l_{AB} — евклидово расстояние между точками A и B, l_{BC} — между точками B и C. Эта оценка верна, поскольку время движения вдоль любой траектории между двумя точками не может быть меньше, чем при движении по отрезку прямой. Поэтому $l_{AB} + l_{BC} < t_B - t_A + t_C - t_B - \pi = T - \pi$

Для расстояния l_{AC} между A и C выполнено неравенство треугольника

$$l_{AC} < l_{AB} + l_{BC}. \tag{6.4}$$

Траектория γ_0 строится из трех последовательных движений: поворот на месте на угол θ_0, движение вперед за время l_{AC}, поворот на месте на угол θ_1. Время движения T_0 по траектории γ_0 из $\gamma(t_A)$ в $\gamma(t_C)$ вычисляется явно

$$T_0 = |\theta_0| + l_{AC} + |\theta_1|. \tag{6.5}$$

Комбинируя (6.2)–(6.5), получаем $T_0 < T$. ■

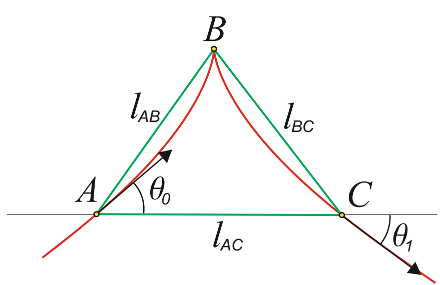

Рис. 7. Неоптимальность траектории с внутренней точкой поворота.

Ввиду сложной параметризации экстремальных траекторий, в общем случае явное выражение оптимальной траектории q_s через граничные условия в настоящее время остается неизвестным. Для этого требуется найти обратное экспоненциальное отображение (вообще говоря, многозначное)

$$\mathrm{Exp}^{-1} : \mathbb{M} \to C \times \mathbb{R}^+ : q_1 \mapsto (h(0), T),$$

которое переводит конечную точку $q_1 \in \mathbb{M}$ оптимальной траектории в начальный импульс $h(0) \in C = T_e^*\mathbb{M} \cap \{H = 1\}$ и время $T \geqslant 0$. В работе [19] предложено численное решение, основанное на методе стрельбы.

Заключение

В данной работе исследована задача быстродействия (3.1)–(3.2) на группе движений плоскости с управлением в полукруге. Рассматриваемая управляемая система задает модель машины на плоскости, которая может двигаться вперед и поворачивать сколь угодно быстро.

Траектории такой системы используются в области обработки изображений. Данная постановка нацелена на устранение проблемы точек возврата у существующего метода поиска выделяющихся кривых на изображениях.

Помимо прикладного значения задача представляет интерес в теории управления, как модельный пример трехмерной управляемой системы с компактным множеством управлений, содержащим ноль на границе.

В статье получены следующие основные результаты:

- конструктивно доказана полная управляемость и существование оптимальных управлений (Теорема 1);
- найден явный вид анормальных управлений (Теорема 2);
- найдена явная параметризация нормальных управлений (Теорема 3);
- найден явный вид экстремальных траекторий;
- частично исследован вопрос оптимальности экстремалей;
- описана структура оптимального синтеза (Теорема 4).

Автор благодарен проф. Ю. Л. Сачкову и анонимным рецензентам за ценные замечания по работе. Автор признателен проф. Р. Дайтсу за обсуждение приложения модели в обработке изображений.

Список литературы

[1] L. E. Dubins, “On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents”, *American Journal of Mathematics*, **79**:3 (1957), 497–516.

[2] J. A. Reeds, L. A. Shepp, “Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards”, *Pacific Journal of Mathematics*, **145**:2 (1990), 367–393.

[3] Y. L. Sachkov, “Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **17**:2 (2011), 293–321.

[4] R. Duits, S. P. L. Meesters, J.-M. Mirebeau, J. M. Portegies, “Optimal Paths for Variants of the 2D and 3D Reeds–Shepp Car with Applications in Image Analysis”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **60** (2018), 816–848.

[5] J.-P. Laumond, “Feasible Trajectories for Mobile Robots with Kinematic and Environment Constraints”, 1986, 346–354.

[6] R. Montgomery., *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, Mathematical Surveys and Monographs, **91**, American Mathematical Society, 2002.

[7] H. J. Sussmann, G. Tang, “Shortest paths for the Reeds-Shepp car: a worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control”, *Report SYCON1-10*, Rutgers University, 1991.

[8] В. Н. Берестовский, “Геодезические левоинвариантной неголономной римановой метрики на группе движений евклидовой плоскости”, *Сибирский математический журнал*, **35**:6 (1994), 1223–1229.

[9] G. Sanguinetti, R. Duits, E. Bekkers, M. H. J. Janssen, A. Mashtakov, J. M. Mirebeau, “Sub-Riemannian Fast Marching in SE(2)”, *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*, Lecture Notes in Computer Science, **9423**, 2015, 366–374.

[10] E. J. Bekkers, R. Duits, A. Mashtakov, Y. Sachkov, “Vessel tracking via sub-riemannian geodesics on the projective line bundle” (Geometric Science of Information : Third International Conference), Lecture Notes in Computer Science, **10589**, eds. F. Nielsen, F. Barbaresco, 2017, 773–781.

[11] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М, 2005.

[12] А. А. Ардентов, Л. В. Локуциевский, Ю. Л. Сачков, “Решение серии задач оптимального управления с 2-мерным управлением на основе выпуклой тригонометрии”, *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, **494**:1 (2020), 86–92.

[13] G. Citti, A. Sarti, “A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **24**:3 (2006), 307–326.

[14] U. Boscain, J.-P. Gauthier, R. Chertovskih, A. Remizov, “Hypoelliptic diffusion and human vision: a semidiscrete new twist”, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **7**:2 (2014), 669–695.

[15] U. Boscain, J. Gauthier, D. Prandi, A. Remizov, “Image reconstruction via non-isotropic diffusion in Dubins/Reed-Shepp-like control systems”, 2014, 4278–4283.

[16] A. P. Mashtakov, A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov, “Parallel Algorithm and Software for Image Inpainting via Sub-Riemannian Minimizers on the Group of Rototranslations”, *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, **6**:1 (2013), 95–115.

[17] J. Petitot, “The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure”, *Journal of Physiology-Paris*, **97**:2–3 (2003), 265–309.

[18] B. Franceschiello, A. Mashtakov, G. Citti, A. Sarti, “Geometrical optical illusion via sub-Riemannian geodesics in the roto-translation group”, *Differential Geometry and its Applications*, **65** (2019), 55-77.

[19] R. Duits, U. Boscain, F. Rossi, Y. L. Sachkov, “Association Fields via Cuspless Sub-Riemannian Geodesics in SE(2)”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **49**:2 (2014), 384–417.

[20] U. Boscain, R. Duits, F. Rossi, Y. L. Sachkov, “Curve Cuspless Reconstruction via sub-Riemannian Geometry”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **20**:3 (2014), 748–770.

[21] D. J. Field, A. Hayes, R. Hess, “Contour integration by the human visual system: Evidence for a local “association field””, *Vision Research*, **33**:2 (1993), 173–193.

[22] R. Duits, M. Felsberg, G. Granlund, B. Romeny, “Image Analysis and Reconstruction using a Wavelet Transform Constructed from a Reducible Representation of the Euclidean Motion Group”, *International Journal of Computer Vision*, **72**:1 (2007), 79–102.

[23] E. J. Bekkers, R. Duits, A. Mashtakov, G. R. Sanguinetti, “A PDE Approach to Data-driven Sub-Riemannian Geodesics in SE(2)”, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **8**:4 (2015), 2740–2770.

[24] A. Mashtakov, R. Duits, Y. Sachkov, E. J. Bekkers, I. Beschastnyi, “Tracking of Lines in Spherical Images via Sub-Riemannian Geodesics in SO(3)”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **58** (2017), 239–264.

[25] R. Duits, A. Ghosh, T. Dela Haije, A. Mashtakov, “On sub-Riemannian geodesics in SE(3) whose spatial projections do not have cusps”, *Journal of dynamical and control systems*, **22** (2016), 771–805.

[26] W. L. J. Scharpach, *Optimal paths for the Reeds-Shepp car with monotone spatial control and vessel tracking in medical image analysis*, Ms. Thesis, 2018 https://pure.tue.nl/ws/portalfiles/portal/109484202/Scharpach_W.pdf.

[27] М. И. Зеликин, *Оптимальное управление и вариационное исчисление*, Едиториал УРСС, М., 2004.

[28] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

[29] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau, P. Vanhaecke, *Poisson structures*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[30] M. Lakshmanan, S. Rajasekar, *Nonlinear Dynamics: Integrability Chaos and Patterns*, Advanced Texts in Physics, Springer-Verlag, 2003.

[31] P. M. Mathews, M. Lakshmanan, "Dynamics of a nonlinear field", *Annals of Physics*, **79**:1 (1973), 171–185.

[32] В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, РХД, Ижевск, 2000.

[33] P.F. Byrd, M.D. Friedman, "Table of Integrals of Jacobian Elliptic Functions", *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (in Einzeldarstellungen mit besonderer Berucksichtigung der Anwendungsgebiete), **67**, Springer, Berlin, Heidelberg, 1971, 191-222.

А. П. Маштаков (A. P. Mashtakov)
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН
E-mail: alexey.mashtakov@gmail.com