

Интегрируемость по Лиувиллю в четырёхмерной модели зрительной коры

И.А. Галяев^{1,2,*}, А.П. Маштаков^{1,3,**}

- ¹ *Научно-технологический университет “Сириус”,
г. Сочи, Адлерский район, Олимпийский проспект, д. 1,*
- ² *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65,*
- ³ *Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
Ярославская область, Переславский район, с. Веськово,
ул. Петра Первого, д. 4а*
- *E-mail: ivan.galyaev@yandex.ru*
- **E-mail: alexey.mashtakov@gmail.com*

6 октября 2021 г.

Аннотация

Рассматривается естественное уточнение модели Петито-Читти-Сарти первичной зрительной коры головного мозга. Уточнение происходит путем учета кривизны контуров видимого изображения. В такой модели скрытые от наблюдения контуры достраиваются мозгом с помощью субримановых геодезических в четырехмерном пространстве M позиций, направлений и кривизн. Пространство M моделирует конфигурационное пространство нейронов зрительной коры. В данной работе исследуется задача о субримановых геодезических на многообразии $M = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(2) \times \mathbb{R}$. Доказывается полная управляемость системы и существование оптимальных управлений. К задаче применяется необходимое условие оптимальности — принцип максимума Понтрягина и исследуется соответствующая гамильтонова система. Найдена явная параметризация аномальных траекторий. В нормальном случае найдены три функционально независимых первых интеграла. Численные эксперименты указывают на наличие еще одного первого интеграла, что означает интегрируемость по Лиувиллю нормальной гамильтоновой системы.

Ключевые слова: модель зрения, зрительная кора, субриманова геометрия, геодезические, кривизна, задача оптимального управления, интегрируемость.

1 Введение

Принципы устройства биологических зрительных систем вызывают большой интерес среди исследователей во многих областях науки. Важным направлением является разработка и изучение реалистичных математических моделей, описывающих определенный этап обработки зрительного сигнала. В данной работе исследуется математическая модель зрительной коры V1-V2 головного мозга млекопитающих, предложенная Ж. Петито [1]. Такая модель получается путем уточнения классической модели Петито-Читти-Сарти, представляющей первичную зрительную кору V1 как субриманову структуру на группе Ли $SE(2) = \mathbb{R}^2 \times SO(2)$. Здесь $SE(2)$ моделирует конфигурационное пространство нейронов V1, которое можно понимать как пространство позиций \mathbb{R}^2 и направлений $SO(2)$. Уточнение модели происходит путем включения кривизны контуров обзораемого изображения. Это приводит к субримановой структуре на четырехмерном многообразии $M = \mathbb{R}^2 \times SO(2) \times \mathbb{R}$, где четвертая компонента кодирует кривизну.

Интерес к подобным моделям восходит так же из приложений. Принципы работы биологических зрительных систем активно используются в компьютерном зрении. На основе этих принципов создаются эффективные методы обработки изображений: улучшение, сегментация, восстановление, поиск объектов. Так, например, в работе [2] предложен подход к обработке изображений, основанный на поднятии изображения в расширенное пространство позиций и направлений (invertible orientation scores). После такого подъема, субримановы кратчайшие используются для поиска выделяющихся кривых [3, 4, 5]. Такой подход хорошо зарекомендовал себя, в частности, в обработке медицинских изображений.

Математическая модель V1 как субриманова структура в пространстве позиций и направлений была предложена Ж. Петито [6]. Затем эта модель была уточнена Дж. Читти и А. Сарти [7]. Согласно этой модели, процесс дополнения скрытых контуров происходит путем минимизации энергии возбуждения нейронов, воспринимающих визуальную информацию в областях повреждения. Такой процесс моделируется действием оператора гипоэллиптической диффузии, изученного в [8]. Результирующие кривые являются субримановыми кратчайшими. Такие кривые применяются для восстановления поврежденных изображений [9] и используются для объяснения некоторых зрительных иллюзий [10].

В данной статье рассматривается задача о субримановых геодезических в пространстве M позиций, направлений и кривизн. В разделе 2 задача формулируется в виде задачи оптимального управления. В разделе 3 доказывается полная управляемость системы и существование оптимальных управлений. Затем в разделе 4 к задаче применяется необходимое условие оптимальности — принцип максимума Понтрягина (ПМП) и исследуется гамильтонова система ПМП. В заключении подводятся итог проделанной работы и перечисляются основные результаты.

2 Задача оптимального управления

Рассматривается следующая управляемая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u_1 k, \\ \dot{k} = u_2, \end{cases} \quad \begin{aligned} (x, y, \theta, k) = q \in \text{SE}(2) \times \mathbb{R} = M, \\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Для траектории, соответствующей управлению $(u_1(t), u_2(t))$ за время $T > 0$, определим функционал качества — субриманову длину этой траектории:

$$l = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt. \quad (2)$$

Исследуется задача поиска липшицевой кривой $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ — траектории системы (1), удовлетворяющей заданным граничным условиям

$$\gamma(0) = q_0, \quad \gamma(T) = q_1, \quad q_i \in M, \quad (3)$$

и имеющей минимальную субриманову длину $l(\gamma) \rightarrow \min$.

Замечание 1 Несложно проверить, что система (1) инвариантна относительно параллельных переносов и поворотов в плоскости (x, y) . В силу этого без ограничения общности можно свести исследование задачи при произвольном $q_0 = (x_0, y_0, \theta_0, k_0)$ к случаю $q_0 = (0, 0, 0, k_0)$.

3 Глобальная управляемость системы

При исследовании задачи (1)–(3) возникает естественный вопрос существования допустимой траектории, соединяющей граничные условия (3). Если при любых $q_0, q_1 \in M$ ответ положителен, то управляемая система называется вполне управляемой. Исследуем свойство полной управляемости системы (1), используя технику геометрической теории управления [11].

Перепишем управляемую систему (1) в виде

$$\dot{\gamma} = u_1 X_1 + u_2 X_2,$$

где векторные поля при управлениях имеют вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Исследуем вопрос управляемости, используя теорему Рашевского-Чжоу. В нашем случае достаточно проверить выполнение рангового условия. Для этого вычислим следующие скобки Ли полей X_i :

$$X_3 = [X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = [X_1, [X_1, X_2]] = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы, составленной из полей X_1, \dots, X_4 :

$$\det \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \\ k & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 1. \quad (4)$$

Закключаем, что ранг матрицы равен четырем, то есть векторные поля X_i являются линейно независимыми и задают базис касательного пространства $T_q M$ в каждой точке. Получаем, что все условия теоремы Рашевского-Чжоу выполнены, и приходим к следующему утверждению.

Теорема 1 *Управляемая система (1) вполне управляема.*

Замечание 2 *Поскольку управления u_i неограниченны, то условие (3) эквивалентно $\dot{\gamma} \in \Delta_\gamma = \text{span}(X_1(\gamma), X_2(\gamma))$, где семейство плоскостей Δ называется распределением. В силу условия (4), вектор роста распределения Δ равен (2, 3, 4).*

Далее возникает вопрос существования оптимальных траекторий: всегда ли существует допустимая траектория, удовлетворяющая условиям (3), на которой функционал (2) достигает минимального значения? Положительный ответ на этот вопрос дается теоремой Филиппова [11, 12].

4 Принцип максимума Понтрягина

Прежде чем переходить к исследованию экстремальных траекторий, сведем исследуемую задачу к более простой. А именно заметим, что в силу неравенства Коши-Буняковского исходная задача равносильна задаче минимизации функционала действия

$$J = \int_0^T \frac{u_1^2(t) + u_2^2(t)}{2} dt \rightarrow \min. \quad (5)$$

Применим к задаче (1), (3), (5) необходимое условие оптимальности — принцип максимума Понтрягина (ПМП). Введем функцию Понтрягина

$$h_u^\nu = \langle p, \sum_{i=1}^2 u_i X_i \rangle + \nu/2 \sum_{i=1}^2 u_i^2, \quad p \in T^*M, \quad \nu \leq 0.$$

Пусть $(u(t), q(t))$, $t \in [0, T]$, — оптимальный процесс, тогда выполнено:

1. гамильтонова система $\dot{p} = -\frac{\partial h_u^\nu}{\partial q}$, $\dot{q} = \frac{\partial h_u^\nu}{\partial p}$;
2. условие максимума $h_{u(t)}^\nu(p(t), q(t)) = \max_{u \in \mathbb{R}^2} h_u^\nu(p(t), q(t))$;
3. условие нетривиальности $(p(t), \nu) \neq (0, 0) \forall t \in [0, T]$.

Обозначим $h_i = \langle p, X_i \rangle$. Функция Понтрягина примет вид

$$h_u^\nu = u_1 h_1 + u_2 h_2 + \nu/2 (u_1^2 + u_2^2).$$

В формулировке ПМП без ограничения общности достаточно рассмотреть два случая: $\nu = 0$ — аномальный случай, и $\nu = -1$ — нормальный случай. Далее рассмотрим их подробно.

4.1 Аномальный случай $\nu = 0$.

Функция Понтрягина h_u^0 принимает вид $h_u^0 = u_1 h_1 + u_2 h_2$. Это линейная функция, неограниченная при $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$. Таким образом, условие максимума выполняется тогда и только тогда, когда $h_1 = h_2 \equiv 0$. Максимизированный гамильтониан в этом случае равен $H = \max_{u \in \mathbb{R}^2} h_u^0 = 0$.

Обозначим (a, b, c, d) компоненты ковектора p в канонических координатах. Они изменяются по закону $\dot{p}_i = -\frac{\partial h_u^0}{\partial q_i}$:

$$\begin{cases} \dot{a} = 0, \\ \dot{b} = 0, \\ \dot{c} = -u_1(-a \sin \theta + b \cos \theta), \\ \dot{d} = -u_1 c. \end{cases} \quad (6)$$

Условие $h_1 = h_2 \equiv 0$ записывается в виде

$$\begin{cases} a \cos \theta + b \sin \theta + ck \equiv 0, \\ d \equiv 0. \end{cases} \quad (7)$$

Второе тождество в силу системы (6) влечет $\dot{d} = -u_1 c \equiv 0$.

Возможны два случая: $c \equiv 0$ или $u_1 \equiv 0$.

Рассмотрим случай $c \equiv 0$. Тождественное равенство нулю функции c влечет равенство нулю ее производной $\dot{c} \equiv 0$. Из третьего уравнения системы (6) следует $u_1(-a \sin \theta + b \cos \theta) \equiv 0$. Это тождество выполняется при $u_1 \equiv 0$, что приводит к случаю, рассмотренному далее, или $(-a \sin \theta + b \cos \theta) \equiv 0$. С другой стороны, первое тождество системы (7) принимает вид $a \cos \theta + b \sin \theta \equiv 0$. Заключаем, что $a^2 + b^2 \equiv 0$. Таким образом, имеем $a = b = c = d \equiv 0$, что противоречит условию нетривиальности в ПМП.

Остается рассмотреть случай $u_1 \equiv 0$. В этом случае ковектор p является постоянным и ненулевым. Выбирая натуральную параметризацию

$u_1^2 + u_2^2 = 1$ на траекториях, получаем $u_2 = \pm 1$. Подставляя найденные экстремальные управления в систему (1) и решая ее, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2 *Натурально параметризованные аномальные экстремальные траектории в задаче (1)–(3) имеют вид $\gamma(t) = (0, 0, 0, \pm t)$. Эти траектории оптимальны.*

4.2 Нормальный случай $\nu = -1$.

Функция Понтрягина h_u^{-1} принимает вид $h_u^{-1} = u_1 h_1 + u_2 h_2 - (u_1^2 + u_2^2)/2$. Условие максимума дает выражения экстремальных управлений:

$$\frac{\partial h_u^{-1}}{\partial u_i} = h_i - u_i = 0 \Rightarrow u_i = h_i.$$

При этом максимизированный гамильтониан $H = \max_{u \in \mathbb{R}^2} h_u^{-1}$ принимает вид

$$H = \frac{h_1^2 + h_2^2}{2}.$$

По определению $h_i = \langle p, X_i \rangle$, $i = 1, \dots, 4$ имеем

$$\begin{cases} h_1 = a \cos \theta + b \sin \theta + ck, \\ h_2 = d, \\ h_3 = -c, \\ h_4 = -a \sin \theta + b \cos \theta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (h_1 + kh_3) \cos \theta - h_4 \sin \theta, \\ b = h_4 \cos \theta + (h_1 + kh_3) \sin \theta, \\ c = -h_3, \\ d = h_2. \end{cases}$$

Гамильтонова система в канонических координатах имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = (a \cos \theta + b \sin \theta + ck) \cos \theta, \\ \dot{y} = (a \cos \theta + b \sin \theta + ck) \sin \theta, \\ \dot{\theta} = k(a \cos \theta + b \sin \theta + ck), \\ \dot{k} = d. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{a} = 0, \\ \dot{b} = 0, \\ \dot{c} = -(b \cos \theta - a \sin \theta)(kc + a \cos \theta + b \sin \theta), \\ \dot{d} = -c(ck + a \cos \theta + b \sin \theta), \end{cases}$$

Перепишем эту систему в координатах h_i :

$$\begin{cases} \dot{x} = h_1 \cos \theta, \\ \dot{y} = h_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = h_1 k, \\ \dot{k} = h_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3, \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = h_1 h_4, \\ \dot{h}_4 = -kh_1(kh_3 + h_1). \end{cases} \quad (8)$$

Выбор натуральной параметризации $u_1^2 + u_2^2 = 1$ на экстремальных траекториях фиксирует поверхность уровня гамильтониана $H = (h_1^2 + h_2^2)/2 = 1/2$. Введем в плоскости (h_1, h_2) полярный угол $\alpha \in S^1$:

$$h_1 = \cos \alpha, \quad h_2 = \sin \alpha.$$

Выполнив замену переменных в гамильтоновой системе (8) приходим к следующему утверждению.

Теорема 3 *Натурально параметризованные нормальные экстремальные траектории в задаче (1)–(3) являются решениями системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \alpha \cos \theta, \\ \dot{y} = \cos \alpha \sin \theta, \\ \dot{\theta} = k \cos \alpha, \\ \dot{k} = \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\alpha} = h_3, \\ \dot{h}_3 = h_4 \cos \alpha, \\ \dot{h}_4 = -k \cos \alpha (k h_3 + \cos \alpha). \end{cases} \quad (9)$$

Возникает вопрос теоретической возможности вывода явного вида экстремальных траекторий — вопрос интегрируемости гамильтоновой системы ПМП. Для доказательства интегрируемости по Лиувиллю системы (8) достаточно найти 4 функционально независимых первых интеграла, находящихся в инволюции. Одним таким интегралом является гамильтониан H , еще два первых интеграла a и b непосредственно следуют из записи гамильтоновой системы в канонических координатах. Эти три интеграла являются функционально независимыми и находятся в инволюции. Существование четвертого интеграла остается под вопросом.

Проведены численные эксперименты, указывающие на наличие четвертого интеграла. Для этого рассматривается четырехмерная система в переменных (α, h_3, h_4, k) , которая отделяется от остальных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = h_3, \\ \dot{h}_3 = h_4 \cos \alpha, \\ \dot{h}_4 = -k \cos \alpha (k h_3 + \cos \alpha), \\ \dot{k} = \sin \alpha. \end{cases} \quad (10)$$

Эта система исследовалась с помощью отображения последования (отображения Пуанкаре). Для этого была найдена замкнутая траектория. Такая траектория задается начальным значением $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $h_3(0) = 1$, $h_4(0) = 0$, $k = 0$. Более точно, было найдено однопараметрическое семейство периодических траекторий

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} + t h_3(0), \quad h_3(t) = h_3(0), \quad h_4(t) = 0, \quad k(t) = \frac{\sin(t h_3(0))}{h_3(0)},$$

получаемое путем изменения начального значения $h_3(0)$. При этом период равен $T = |\frac{2\pi}{h_3(0)}|$. При таких начальных значениях точка $(h_3, h_4) = (h_3(0), 0)$ является неподвижной.

Было выбрано гиперпространство $k = 0$, трансверсальное периодической траектории. Отображение Пуанкаре строилось следующим образом. Выбирались начальные условия, близкие к тем, что порождают периодическую траекторию. Из этих начальных условий выпускалась траектория и искались точки пересечения с трансверсальным гиперпространством (первый раз, второй раз, ..., N -ый раз).

На Рис. 1 изображены точки отображения Пуанкаре в пространстве (α, h_3, h_4) . Красной точкой обозначена орбита замкнутой траектории с начальными значениями $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $h_3(0) = 1$, $h_4(0) = 0$. Для остальных траекторий использовались следующие параметры. Для оранжевой траектории:

$\alpha(0) = 1.56$, $h_3(0) = 0.94$, $h_4(0) = 0.02$. Для зеленой траектории: $\alpha(0) = 1.55$, $h_3(0) = 1.06$, $h_4(0) = 0.05$. Для черной траектории: $\alpha(0) = 1.6$, $h_3(0) = 1.14$, $h_4(0) = 0.02$. Для синей траектории: $\alpha(0) = 1.58$, $h_3(0) = 1.24$, $h_4(0) = 0.01$. Количество итераций отображения Пуанкаре для всех траекторий было выбрано $N = 1000$.

Траектории вычислялись путем численного интегрирования (NDSolve в системе Wolfram Mathematica). Моменты попадания на трансверсальное многообразие определялись с помощью численного решения (FindRoot) уравнения $k(t) = 0$ вдоль заданной траектории, с начальным приближением $t = \lfloor \frac{2\pi}{h_3(0)} \rfloor$ на каждой итерации $i = 1, \dots, N$.

Визуально заметно, что точки отображения Пуанкаре заполняют непрерывные замкнутые кривые. Это указывает на то, что при малом возмущении начальных условий траектории остаются близкими на длинном интервале времени. Такая ситуация возникает в случае, когда система является интегрируемой (по крайней мере в некоторой области). Поскольку система (10) задана аналитическими функциями, то интегрируемость в некоторой области влечет интегрируемость глобально на всем пространстве.

Таким образом, результаты приведенных численных экспериментов указывают на наличие четвертого независимого первого интеграла и интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы (9).

5 Заключение

В работе рассмотрена задача о субримановых геодезических на многообразии $M = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(2) \times \mathbb{R}$, возникающая в уточненной модели первичной зрительной коры головного мозга млекопитающих. Уточненная модель получается путем добавления анализа кривизны контуров видимого изображения в классическую модель Петито-Читти-Сарти.

В статье получены следующие основные результаты. Доказана полная управляемость системы и существование оптимальных управлений. Выписана гамильтонова система ПМП. Найдена явная параметризация аномальных траекторий. В нормальном случае найдены три функционально независимых первых интеграла. Сформулирована гипотеза, подтвержденная численными экспериментами, что нормальная гамильтонова система является интегрируемой по Лиувиллю.

Авторы благодарны проф. Ю.Л. Сачкову за ценные указания по работе и тщательную проверку рукописи.

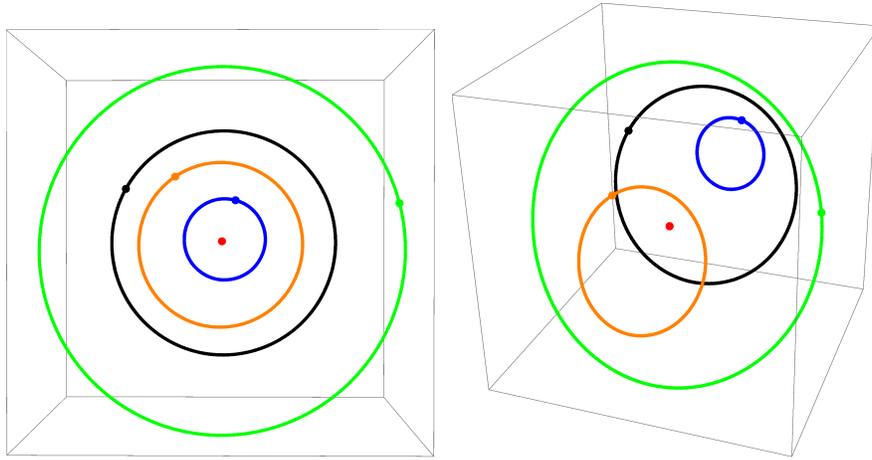


Рис. 1: Орбиты отображения Пуанкаре в пространстве (α, h_3, h_4) при пересечении трансверсального многообразия $k = 0$ траекториями, близкими к замкнутой (красная точка). Разные траектории указаны разным цветом. Для каждой траектории выделены начальные точки.

Список литературы

- [1] *Petitot J.* Landmarks for Neurogeometry. In: Citti G., Sarti A. (eds) *Neuromathematics of Vision. Lecture Notes in Morphogenesis.* Springer. 2014. Berlin, Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-34444-2_1.
- [2] *Duits R., Felsberg M., Granlund G., Romeny B.* Image Analysis and Reconstruction using a Wavelet Transform Constructed from a Reducible Representation of the Euclidean Motion Group // *International Journal of Computer Vision.* 2007. 72 (1). pp. 79–102.
- [3] *Bekkers E.J., Duits R., Mashtakov A., Sanguinetti G.R.* A PDE Approach to Data-driven Sub-Riemannian Geodesics in $SE(2)$ // *SIAM Journal on Imaging Sciences.* 2015. 8(4). pp. 2740–2770.
- [4] *Mashtakov A., Duits R., Sachkov Y., Bekkers E J., Beschastnyi I.* Tracking of Lines in Spherical Images via Sub-Riemannian Geodesics in $SO(3)$ // *Journal of Mathematical Imaging and Vision.* 2017. 58. pp. 239–264.
- [5] *Duits R., Ghosh A., Dela Haije T., Mashtakov A.* On sub-Riemannian geodesics in $SE(3)$ whose spatial projections do not have cusps // *Journal of dynamical and control systems.* 2016. 22. pp. 771–805.
- [6] *Petitot J.* The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure // *Journal of Physiology-Paris.* 2003. 97(2-3). pp. 265–309.

- [7] *Citti G., Sarti A.* A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // Journal of Mathematical Imaging and Vision. 2006. 24(3). pp. 307–326.
- [8] *Boscain U., Gauthier J.-P., Chertovskih R., Remizov A.* Hypoelliptic diffusion and human vision: a semidiscrete new twist // SIAM Journal on Imaging Sciences. 2014. 7(2). pp. 669–695.
- [9] *Mashtakov A.P., Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Parallel Algorithm and Software for Image Inpainting via Sub-Riemannian Minimizers on the Group of Rototranslations // Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications. 2013,6(1). pp. 95–115.
- [10] *Franceschiello B., Mashtakov A., Citti G., Sarti A.* Geometrical optical illusion via sub-Riemannian geodesics in the roto-translation group // Differential Geometry and its Applications. 2019. 65. pp. 55-77.
- [11] *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит. 2005. С. 391.
- [12] *Зеликин М.И.* Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: Едиториал УРСС. 2004. С. 160.