

Сквозное моделирование неголономных систем в робототехнике, механике, моделях зрения и обработке изображений

Ю.Л. Сачков

Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский
yusachkov@gmail.com

Отчетная конференция по гранту РФФИ
29 апреля 2021 г.

План доклада

1. Поставленные задачи в рамках гранта РФФИ
19-31-51023 «Научное наставничество»
2. Исследование математических моделей
3. Разработка алгоритмических и компьютерных моделей
4. Разработка натурных моделей
5. Учебный модуль в НТУ Сириус (2–23 августа 2020 г.)
6. Публикации

Поставленные задачи

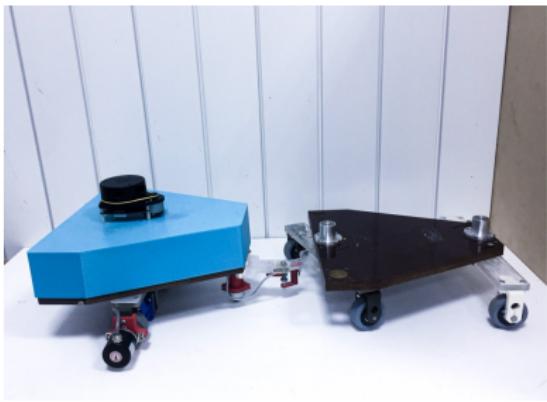
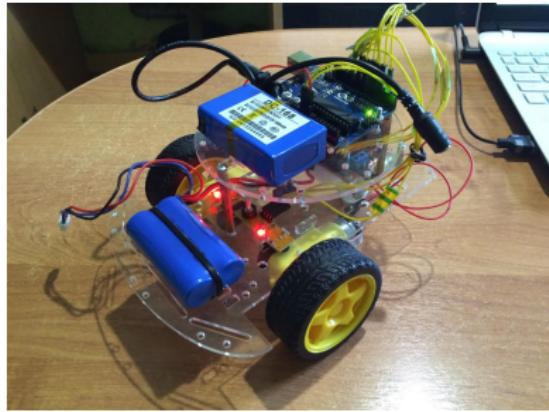
Всестороннее исследование ряда нетривиальных актуальных проблем робототехники, механики, моделей зрения и обработки изображений:

- движение колесных мобильных роботов, в том числе с прицепами,
- качение одного твердого тела по другому без прокручивания и проскальзывания,
- эластики Эйлера,
- оптимальное конструирование пластин с заданными инерциальными характеристиками,
- модели первичной зрительной коры человека,
- антропоморфное восстановление и обработка изображений.

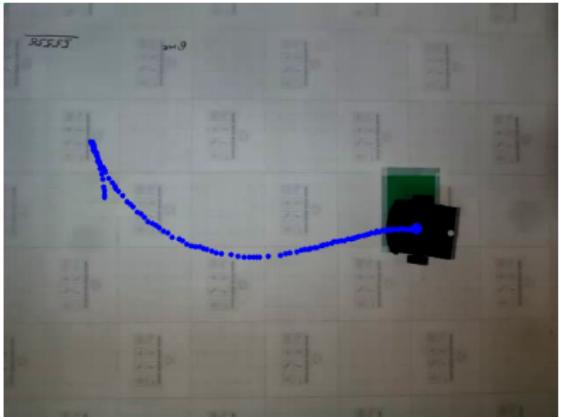
Управление движением колесного робота

- Исследована задача быстродействия для колёсного робота с двумя приводными колёсами, имеющими заданную максимальную скорость вращения.
- Описаны экстремальные управлении в этой задаче оптимального управления.
- Проведена серия экспериментов по управлению движением двух натурных моделей колесных роботов.
- Предложен новый алгоритм на основе нейросети для планирования движением робота вдоль эластика Эйлера.
- Разработан комплекс программ управления роботом вдоль рассматриваемых траекторий с учётом разгона в начале пути и торможения в конце.
- Исследована задача об оптимальном перемещении робота на неоднородной плоскости (с препятствиями) как задача субримановой геометрии с заданной внешней стоимостью.
- Создан и испытан полигон с препятствиями для робота.

Натурные модели мобильного колесного робота и робота с прицепом

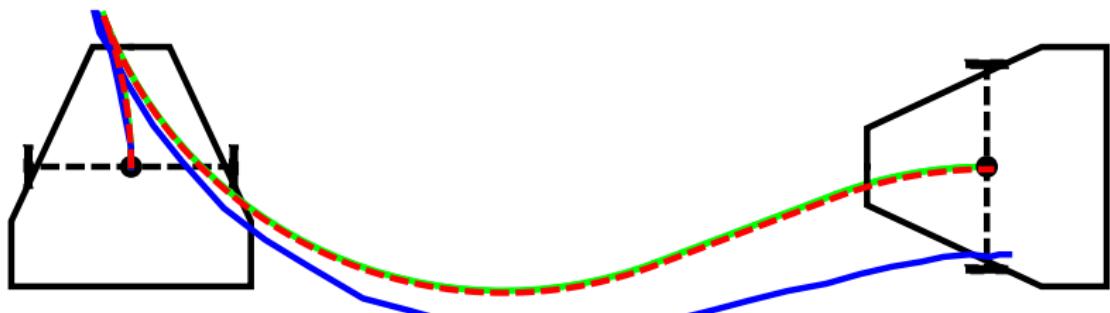


Пример эксперимента по управлению роботом вдоль субфинслеровой траектории

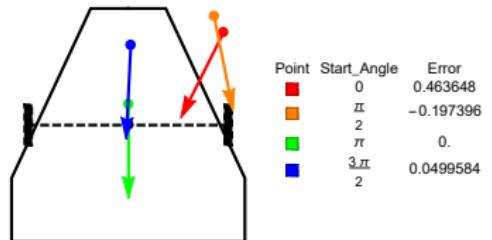
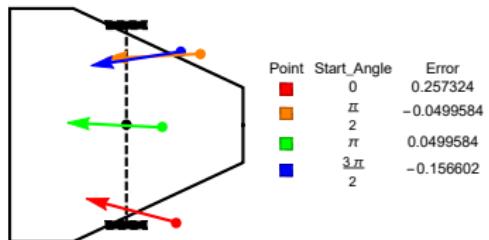
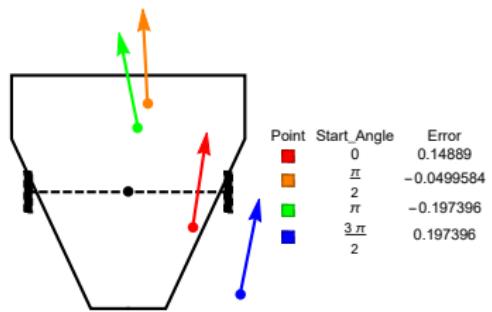
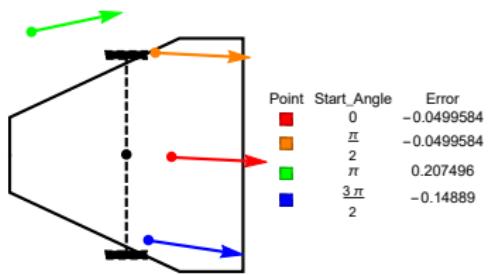


Начальное положение робота с гаражом и конечное положение
робота в гараже с траекторией движения.

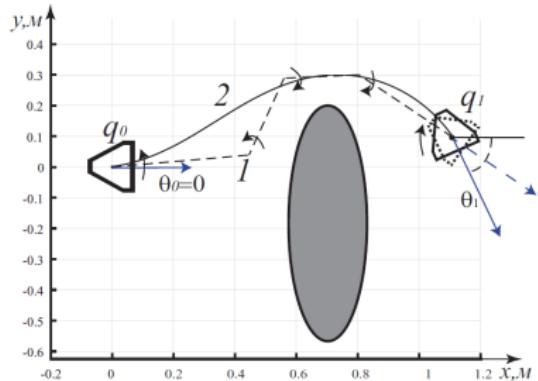
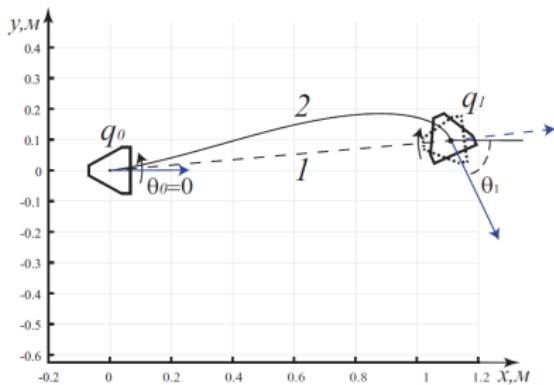
Сравнение реальной траектории с идеальной



Результаты тестирования для различных начальных и конечных ориентациях робота



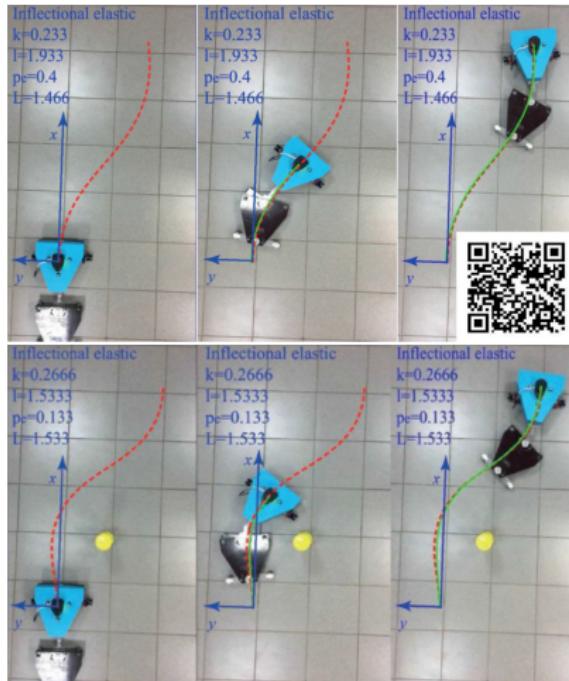
Варианты соединения краевых положений робота траекториями (без препятствия и с препятствием)



С помощью:

- (1) эластики Эйлера,
- (2) субфинслеровой геодезической на группе $SE(2)$

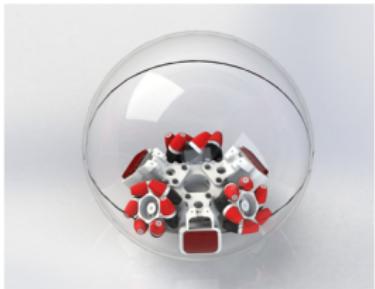
Экспериментальные и теоретические траектории мобильного колесного робота без препятствия и с препятствием



Управление движением сферического робота

- Исследована математическая модель сферического робота, движущегося по плоскости.
- Получено решение конструктивной задачи управления в виде итерационного алгоритма, вычисляющего субоптимальные траектории.
- Было продолжено теоретическое исследование субримановой задачи, моделирующей оптимальное качение шара по плоскости без прокручиваний и проскальзываний.
- Разработана компьютерная модель сферического мобильного робота и робота-манипулятора, демонстрирующая применение найденных управлений при заданных граничных условиях.

Натурные модели сферического робота и руки робота-манипулятора



Математическая модель сферического робота, движущегося по плоскости

Записывается в виде задачи оптимального управления

$$\dot{\gamma}(t) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + u_2(t)X_2(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = e, \quad \gamma(T) = g,$$

$$X_1 = \partial_x + \frac{q_2}{2}\partial_{q_0} + \frac{q_3}{2}\partial_{q_1} - \frac{q_0}{2}\partial_{q_2} - \frac{q_1}{2}\partial_{q_3},$$

$$X_2 = \partial_y - \frac{q_1}{2}\partial_{q_0} + \frac{q_0}{2}\partial_{q_1} + \frac{q_3}{2}\partial_{q_2} - \frac{q_2}{2}\partial_{q_3},$$

$$\gamma : [0, T] \rightarrow M = \mathbb{R}^2 \times S^3 \ni (x, y, q), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$I = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \, dt \rightarrow \min.$$

где X_i — базисные левоинвариантные векторные поля на группе Ли M , соответствующие инфинитезимальному качению вдоль осей O_x и O_y .

Математическая модель сферического робота, движущегося по плоскости

В ходе исследования найдены экстремальные управления и траектории модели сферического робота. Описаны дискретные симметрии экспоненциального отображения. Найдены точки Максвелла, соответствующие неподвижным точкам симметрий. Установлено что точки $(x, q) \in M$, расположенные на стратах максимальной размерности множества Максвелла, удовлетворяют одному из уравнений

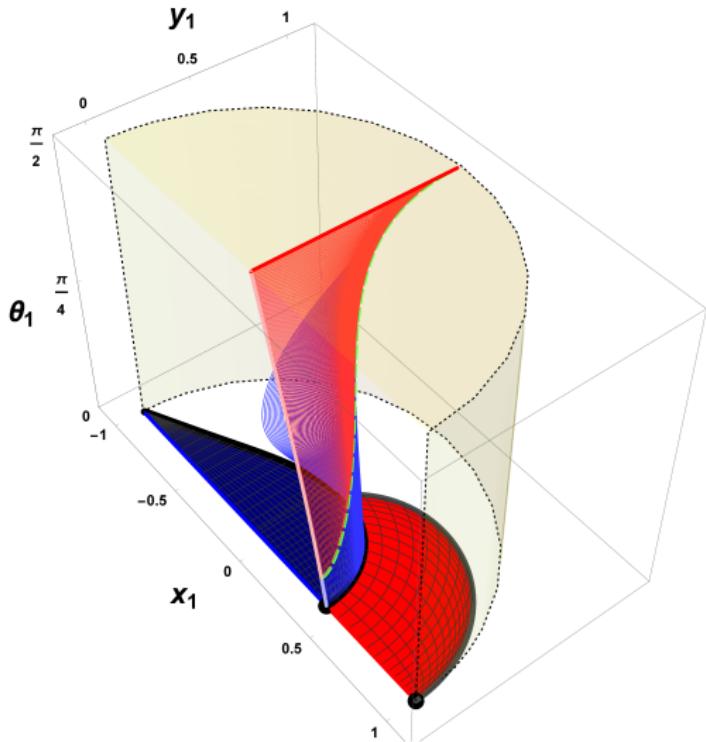
$$q_3 = 0 \quad \text{или} \quad xq_1 + yq_2 = 0.$$

Известно, что после точки Максвелла экстремальная траектория не является оптимальной. Планируется испытание найденных управлений на натурной модели сферического робота.

Эластики Эйлера

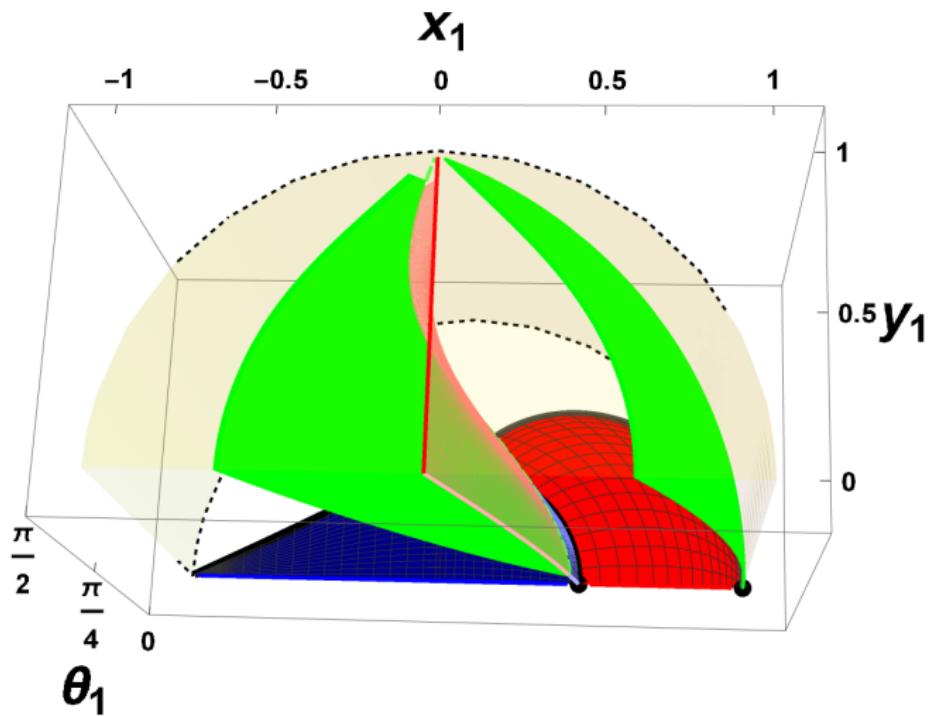
- Продолжено изучение задачи об оптимальных конфигурациях упругого стержня.
- Получен ряд новых решений для специальных граничных условий.
- Разработана новая программа построения оптимальных эластик.
- Построен ряд анимаций с деформациями упругого стержня.
- Нарисованы эластичные поверхности, задаваемые непрерывным набором упругих стержней.

Множество разреза для задачи Эйлера в полуцилиндре

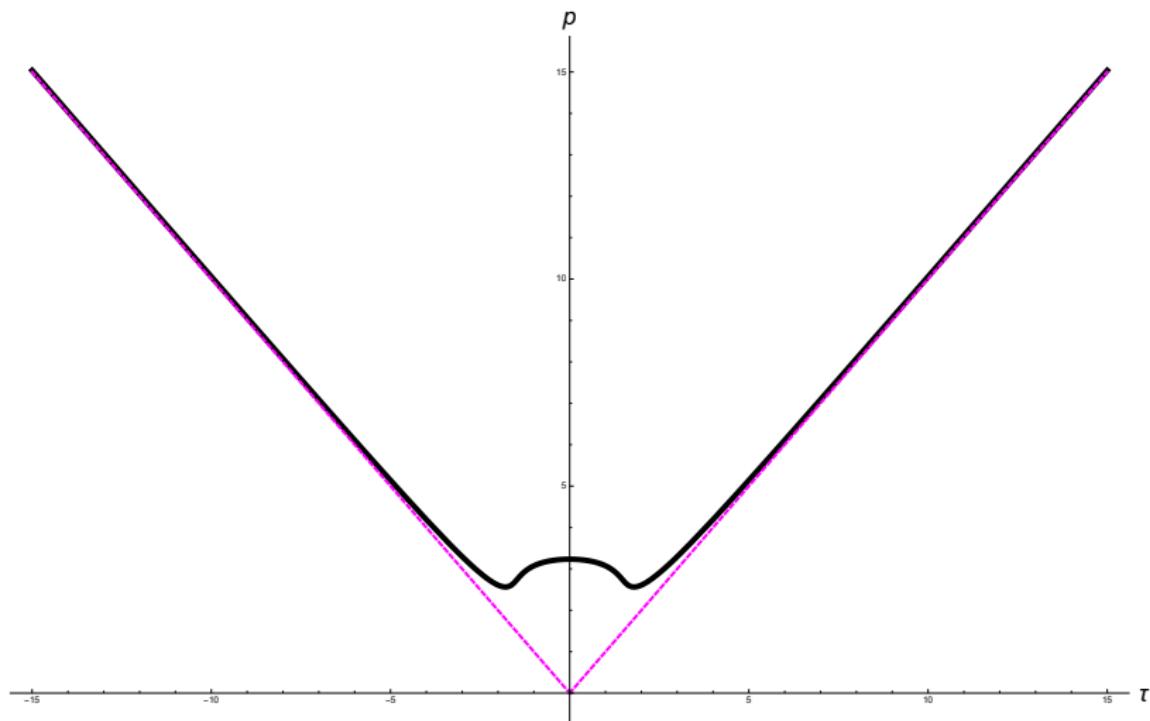


$$\mathcal{A} = \{(x, y, \theta) \in \text{SE}(2) \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 0, \theta \in [0, \pi/2]\}.$$

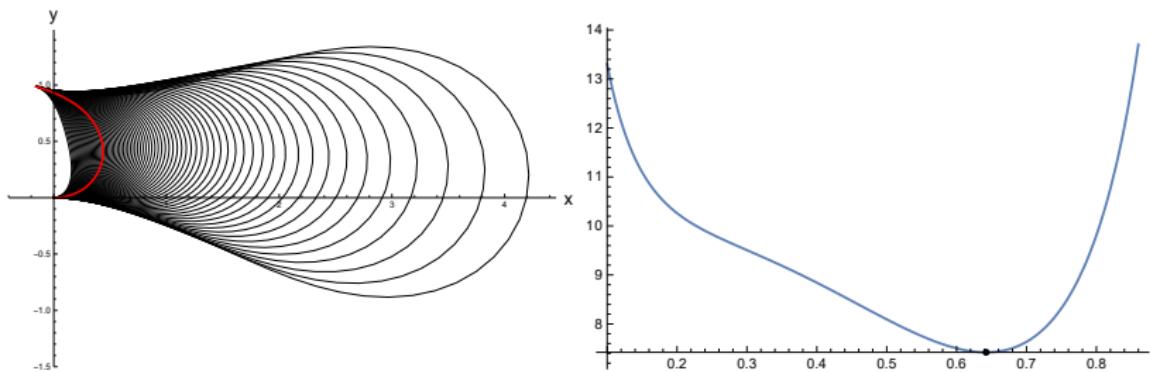
Множество разреза и множество, соответствующие
критическим эластикам, в полуцилиндре \mathcal{A}



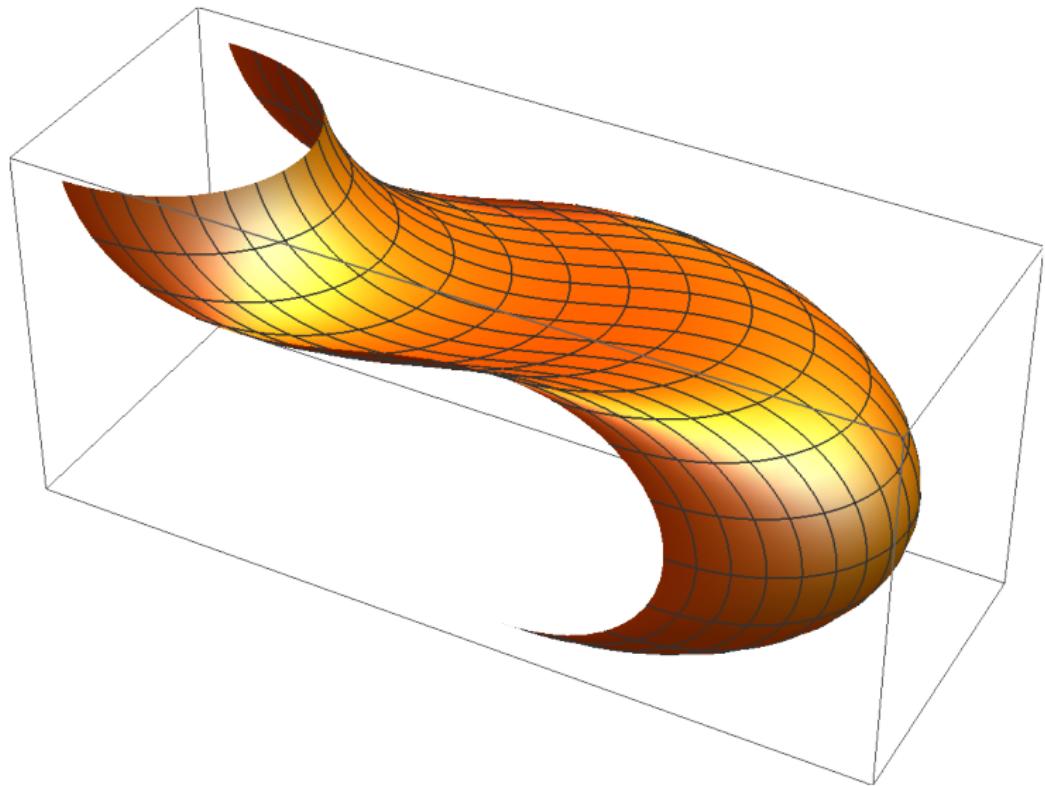
Время разреза для критической эластики



Семейство эластик разной длины, соединяющих
одинаковые граничные значения, и величина
компромисса между упругой энергией и длиной этих
эластик



Пример эластичной поверхности



Оптимальное конструирование пластин с заданными инерциальными характеристиками

- Исследована мат. модель задачи о конструировании пластины минимального периметра с заданными характеристиками распределения массы (хордой, площадью, центром масс и моментами второго порядка).
- Для соответствующей задачи оптимального управления исследованы локальная и глобальная оптимальность круговых субримановых геодезических.
- Изучена поверхность, заполненная аномальными траекториями, выходящими из фиксированной точки.
- Исследована задача моделирования конфигурации поперечного профиля однородной упругой балки в классе круговых сегментов, разработан алгоритм ее решения.
- В классе упругих балок с сечениями в форме круговых сегментов решена обратная задача нахождения момента сопротивления балки ее изгибу по неполным данным о размерах ее сечения

Постановка двухточечной $(2, 3, 5, 8)$ -задачи

Левоинвариантная субриманова задача на нильпотентной группе Ли с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^8, \quad u \in \mathbb{R}^2, \\ x(0) &= 0, \quad x(T) = x^1 \in \mathbb{R}^8, \quad T > 0,\end{aligned}$$

$$L = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4} \frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6} \frac{\partial}{\partial x_8}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6} \frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4} \frac{\partial}{\partial x_7}.\end{aligned}$$

Механические свойства ЗУ

Границные условия $x(T)$ суть механические свойства D :

$$S = x_3^1,$$

$$M_1 = x_5^1 + \frac{1}{6}x_1^1((x_1^1)^2 + (x_2^1)^2),$$

$$M_2 = x_4^1 - \frac{1}{6}x_2^1((x_1^1)^2 + (x_2^1)^2),$$

$$J_1 = 2x_8^1 + \frac{1}{12}x_1^1(x_2^1)^3,$$

$$J_2 = 2x_6^1 - \frac{1}{12}(x_1^1)^3x_2^1,$$

$$K_{12} = x_7^1,$$

где S — площадь области D ; M_1, M_2, J_1, J_2 — статические моменты и моменты инерции второго порядка области D относительно осей Ox_1 и Ox_2 соответственно; K_{12} — центробежный момент, $O(0,0)$ — полюс.

Этапы исследования

Из принципа максимума Понtryгина получены

- круговые управлений:

$$u_1(t, \psi) = -(p_2 \cos p_3 t + p_1 \sin p_3 t),$$

$$u_2(t, \psi) = p_1 \cos p_3 t - p_2 \sin p_3 t,$$

$$\psi = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3, \quad p_1^2 + p_2^2 \neq 0, \quad p_3 > 0.$$

- круговые траектории $x_i(t, \psi)$, $x_i(0, \psi) = 0$, $i = 1, \dots, 8$, проекции которых $\gamma = (x_1(t, \psi), x_2(t, \psi))$, $t \in [0, T]$, вместе с хордой $\gamma_0 = \{(x_1^1(1-t), x_2^1(1-t)), t \in [0, 1]\}$ образуют положительно ориентированный замкнутый контур $\gamma\gamma_0 = \partial D^+$, ограничивающий плоскую область D .

Оптимальность

Теорема

Круговые траектории $x(t, \psi)$, $\psi = (p_1, p_2, p_3)$, $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$,
 $p_3 > 0$, оптимальны на отрезке $t \in \left[0, \frac{2\pi}{p_3}\right]$.

Теорема

Круговая поверхность C есть трехмерное аналитическое
неособое многообразие, график аналитического отображения

$$G : O \rightarrow \mathbb{R}^8, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, \dots, x_8),$$

$$O = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 > 0, \quad x_3 > 0\}.$$

Нильпотентная аппроксимация задачи об управлении качением твердых тел

- Исследована субриманова задача на группе Картана.
- Получены условия локальной и глобальной оптимальности субримановых геодезических.
- Доказано, что геодезические локально оптимальны вплоть до первого времени Максвелла, соответствующего непрерывным и дискретным симметриям задачи.
- Доказано, что геодезические теряют свою глобальную оптимальность в первое время Максвелла.
- На основе этих результатов разработаны алгоритмы и программы управления качением одного твердого тела по другому без прокручивания и проскальзывания.
- Исследована новая модель качения твердых тел с анизотропной (субфинслеровой) метрикой.
- Разработана компьютерная модель качения шара по неоднородной плоскости.

Постановка субримановой задачи на группе Картана

- Пусть на евклидовой плоскости заданы точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединенные кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть также заданы число $S \in \mathbb{R}$ и точка $c \in \mathbb{R}^2$. Требуется соединить точки a_0, a_1 кратчайшей кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы кривые γ_0 и γ ограничивали на плоскости область алгебраической площади S , с центром масс c .
- Задача оптимального управления:

$$\dot{g} = u_1 X_1(g) + u_2 X_2(g), \quad g = (x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5,$$

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min,$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Условия локальной оптимальности геодезических

- Доказано, что первое сопряженное время вдоль субримановых геодезических на группе Картана не меньше первого времени Максвелла, соответствующего группе симметрий экспоненциального отображения.
- Это сделано на основе оценки якобиана экспоненциального отображения, полученной следующим новым методом:
 - экспоненциальное отображение факторизуется по 2-мерной группе непрерывных симметрий (вращения и дилатации),
 - для геодезических общего положения якобиан факторизованного экспоненциального отображения вычисляется непосредственно с использованием выпрямляющих координат "действие-угол" для подсистемы гамильтоновой системы ПМП для сопряженных переменных,
 - практически неизбежное выражение для якобиана (104 kB в текстовом формате Wolfram Mathematica) в символьном виде упрощается с помощью программы в системе Wolfram Mathematica, выясняется алгебраическая структура якобиана.

Условия локальной оптимальности геодезических

- доказывается отличие от нуля якобиана экспоненциального отображения с помощью трех методов:
 - (a) гомотопическая инвариантность индекса второй вариации,
 - (b) метод функций сравнения,
 - (c) метод "разделяй и властвуй"
- таким образом доказывается требуемая оценка якобиана для геодезических общего положения,
- часть специальных геодезических проецируется на плоскость распределения в прямые, потому они глобально оптимальны,
- часть специальных геодезических проецируется в кратчайшие на группе Энгеля, потому они также глобально оптимальны,
- для оставшейся части специальных геодезических локальная оптимальность доказывается предельным переходом с геодезических общего положения,
- оценка якобиана доказана для всех геодезических.

Методы оценки якобиана экспоненциального отображения

- (а) Гомотопическая инвариантность индекса второй вариации:
Индекс второй вариации равен количеству сопряженных точек вдоль геодезической (с учетом кратности). При непрерывной деформации геодезической, при которой ее конечная точка остается несопряженной к начальной, индекс второй вариации не меняется.
- (б) Метод функций сравнения: Для получения оценки немонотонной функции на отрезке подбирается более простая функция — функция сравнения — так, чтобы их частное было монотонным. После этого оценивается частное, а затем и исходная функция.
- (с) Метод "разделяй и властвуй": Многократное применение метода функций сравнения. Например, для оценки тригонометрических квазимногочленов, когда в качестве функций сравнения берется тригонометрическая функция.

Алгоритмическая реализация оптимального синтеза

- Разработаны алгоритм и программа в Wolfram Mathematica решения двухточечной задачи управления с помощью оптимальных траекторий
- Эти результаты были использованы для создания устойчивых алгоритмов и программ управления качением одного твердого тела по другому без прокручивания и проскальзывания, на основе метода нильпотентной аппроксимации.
- Эти же результаты были использованы для управления сферическим роботом в классе субоптимальных управлений.

Качение твердых тел с анизотропной метрикой

Модель записывается в виде следующей задачи:

$$\dot{\gamma}(t) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + u_2(t)X_2(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = e, \quad \gamma(T) = g,$$

$$X_1 = \partial_x + \frac{q_2}{2}\partial_{q_0} + \frac{q_3}{2}\partial_{q_1} - \frac{q_0}{2}\partial_{q_2} - \frac{q_1}{2}\partial_{q_3},$$

$$X_2 = \partial_y - \frac{q_1}{2}\partial_{q_0} + \frac{q_0}{2}\partial_{q_1} + \frac{q_3}{2}\partial_{q_2} - \frac{q_2}{2}\partial_{q_3},$$

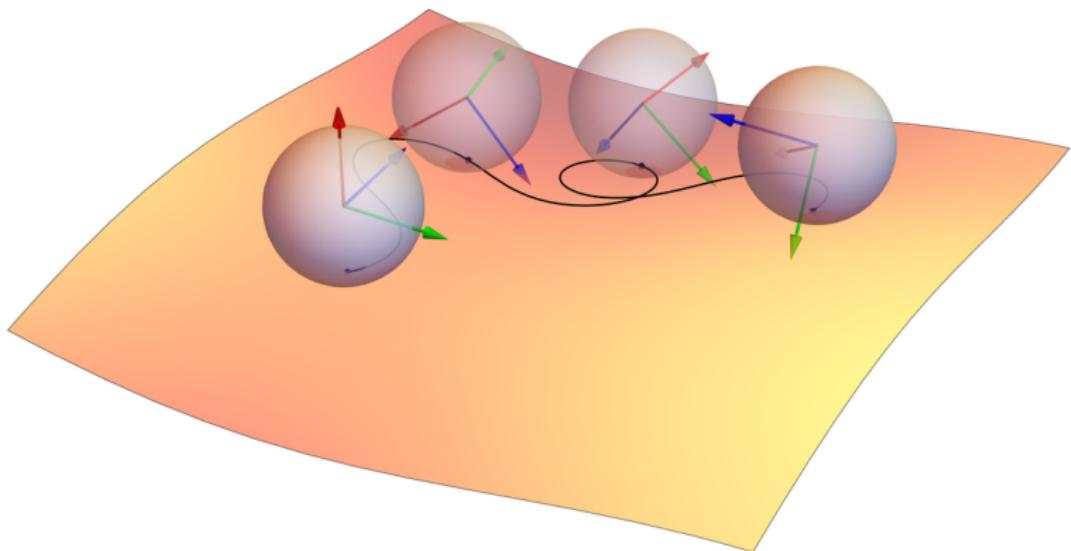
$$\gamma : [0, T] \rightarrow M = \mathbb{R}^2 \times S^3 \ni (x, y, q), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$I = \int_0^T \mathcal{C}(\gamma(t)) \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \, dt \rightarrow \min.$$

где X_i — базисные левоинвариантные векторные поля на группе Ли M , соответствующие инфинитезимальному качению вдоль осей O_x и O_y , а функция внешней стоимости $\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ моделирует неоднородность поверхности качения (анизотропию метрики).

Качение твердых тел с анизотропной метрикой

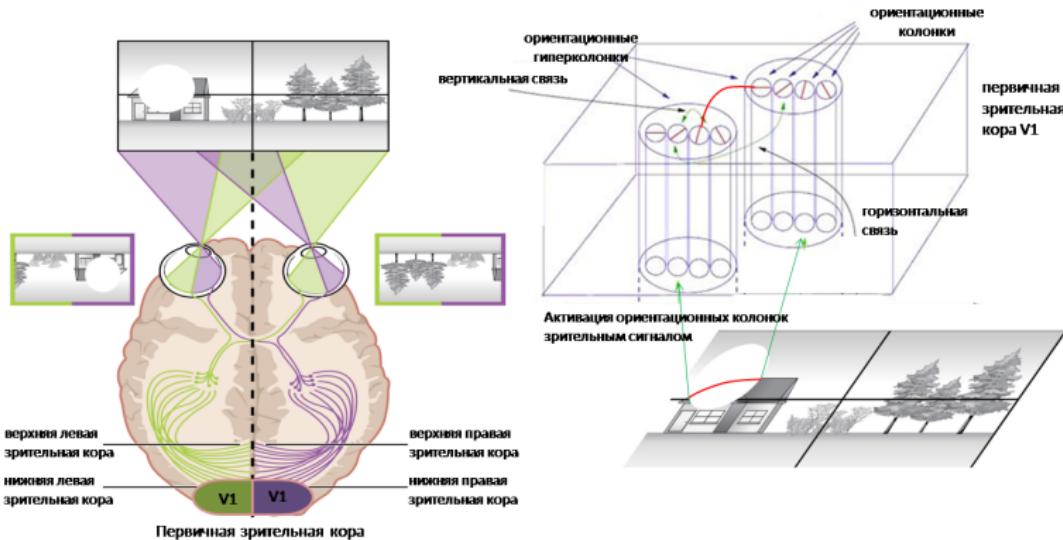
Разработан численный метод решения задачи и компьютерная модель визуализации качения.



Модели первичной зрительной коры человека

- Предложена и обоснована новая математическая модель первичной зрительной коры V1 головного мозга.
- Для соответствующей задачи оптимального управления были исследованы вопросы локальной и глобальной управляемости.
- Исследованы вопросы интегрируемости гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина.

Модель первичной зрительной коры человека



Уточнение модели Петито-Читти-Сарти: добавление параметра кривизны при анализе контуров изображений.

Модель первичной зрительной коры человека

Рассматривается управляемая система

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u_1 k, \\ \dot{k} = u_2, \end{cases} \quad (x, y, \theta, k) \in \text{SE}(2) \times \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Для траектории $\gamma(t)$, соответствующей управлению $(u_1(t), u_2(t))$ за время $T > 0$, определим функционал качества — субриманову длину этой траектории:

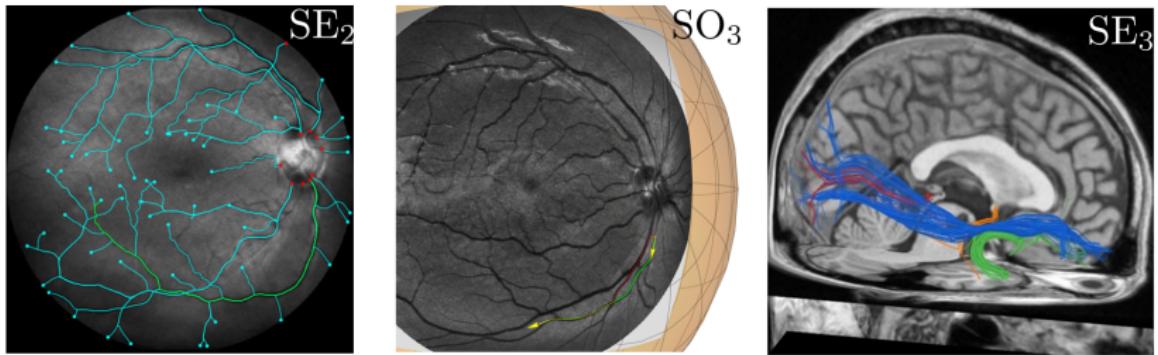
$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt.$$

Для заданных граничных условий $\gamma(0) = (0, 0, 0, k_0)$, $\gamma(T) = (x_1, y_1, \theta_1, k_1)$, требуется найти траекторию, имеющую минимальную субриманову длину.

Антропоморфная обработка изображений

- Исследована математическая модель обработки трехмерных изображений: субриманова задача на группе движений трехмерного пространства.
- К задаче был применен принцип максимума Понтрягина, найдены первые интегралы гамильтоновой системы и доказана ее интегрируемость по Лиувиллю.
- Получена явная параметризация экстремальных управлений в эллиптических интегралах в форме Лежандра.

Антропоморфная обработка изображений



Конфигурационным пространством Q являются следующие группы Ли: группа движений плоскости $SE(2)$ для плоских изображений, группа вращений пространства $SO(3)$ для сферических изображений, группа движений пространства $SE(3)$ для трехмерных изображений.

Антропоморфная обработка изображений

Математическая модель антропоморфной обработки изображений имеет следующий вид:

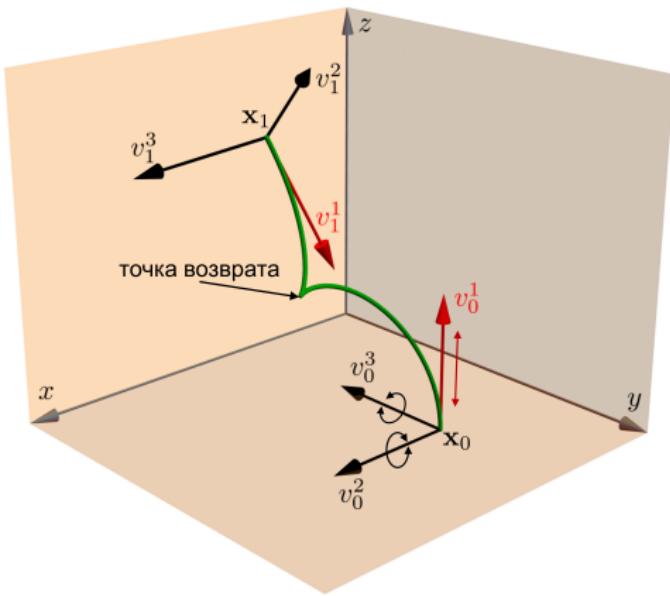
$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= \sum_{i=1}^d u_i(t) X_i(\gamma(t)), \\ \gamma(0) &= g_0, \quad \gamma(T) = g_1, \\ \int_0^T \mathcal{C}(\gamma(t)) \sqrt{\sum_{i=1}^d u_i^2(t)} dt &\rightarrow \min,\end{aligned}$$

где $d = 2, 3$ для плоских и трехмерных изображений соответственно; управление $u_i \in \mathbb{R}$ неограниченно; граничные условия $g_i \in Q$ заданы; \mathcal{C} — функционал внешней стоимости, задаваемый обрабатываемым изображением; X_i — базисные левоинвариантные векторные поля на Q .

Субриманова задача на группе Ли SE(3)

Математическая модель обработки трехмерных изображений задается субримановой задачей на группе Ли SE(3).

По двум реперам $N_i = \{v_i^1, v_i^2, v_i^3\}$ в точках $x_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1$, требуется найти оптимальное движение \mathbb{R}^3 , переводящее (x_0, N_0) в (x_1, N_1) . Допустимыми движениями являются параллельный перенос вдоль выделенного вектора репера и вращение вокруг оставшихся двух векторов. Искомое движение должно быть оптимальным в смысле минимума СР длины на группе SE(3).



Субриманова задача на группе Ли $SE(3)$

Получена явная параметризация экстремального управления $u_3(t)$ через эллиптический интеграл 1-го рода. Выражение оставшихся компонент u_1, u_2, u_4, u_5 имеет вид

$$\begin{aligned}u_1(t) &= F_1 - u_6(I + u_6^2 L^2)^{-1} [M[G] - u_6 M L[F]], \\u_2(t) &= G_1 - u_6(I + u_6^2 L^2)^{-1} [M[F] + u_6 M L[G]], \\u_4(t) &= (I + u_6^2 L^2)^{-1} [G - u_6 L[F]], \\u_5(t) &= (I + u_6^2 L^2)^{-1} [F + u_6 L[G]],\end{aligned}$$

где

$$F_1 = F_1(t) = \frac{u_1^0 + u_5^0}{2} e^{-U(t)} - \frac{u_5^0 - u_1^0}{2} e^{U(t)},$$

$$G_1 = G_1(t) = \frac{u_2^0 + u_4^0}{2} e^{U(t)} - \frac{u_4^0 - u_2^0}{2} e^{-U(t)},$$

$$F = F(t) = \frac{u_1^0 + u_5^0}{2} e^{-U(t)} + \frac{u_5^0 - u_1^0}{2} e^{U(t)},$$

$$G = G(t) = \frac{u_2^0 + u_4^0}{2} e^{U(t)} + \frac{u_4^0 - u_2^0}{2} e^{-U(t)},$$

$$L[f] = L[f](t) = \int_0^t f(\tau) \cosh(U(t) - U(\tau)) d\tau,$$

$$M[f] = M[f](t) = \int_0^t f(\tau) \sinh(U(t) - U(\tau)) d\tau,$$

$$U(t) = \int_0^t u_3(\tau) d\tau.$$

Учебный модуль в НТУ Сириус (2–23 августа 2020 г.)

- Направление «Геометрическая теория управления» в рамках модуля «Современные методы теории информации, оптимизации и управления»
- Теоретическая часть: 7 лекций.
- Практическая часть: 13 проектов со студентами и аспирантами.
- Работа со студентами после модуля: 3 студента включены в научную работу по гранту.

Учебный модуль в НТУ Сириус: Сачков Ю.Л.

- Прочитаны лекции «Задачи и методы геометрической теории управления» (2 части), «Субриманова геометрия» (2 части)
- Проект 1: «Субриманова сфера Мартине», Шишминцев Денис (закреплен в гранте РФФИ)
- Проект 2: «Субриманова задача на группе $SE(2)$ », Юхновец Илья.
- Проект 3: «Субриманова задача Картана», Сбоев Данил.
- Проект 4: «Субриманова задача на группе $SH(2)$ », Поздняков Григорий.

Проект «Субриманова сфера Мартине», Шишминцев Д.

Рассмотрим субриманову структуру на пространстве $M = \mathbb{R}_{x,y,z}^3$ с ортонормированным репером

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

1. Запишите задачу оптимального управления для поиска субримановых кратчайших.
2. Исследуйте глобальную управляемость полученной управляемой системы.
3. Вычислите вектор роста распределения.
4. Найдите аномальные траектории и аномальное множество, проходящие через $q_0 = (0, 0, 0)$.
5. Выпишите гамильтонову систему ПМП для нормальных траекторий.

Проект «Субриманова сфера Мартине», Шишминцев Д.

6. Выясните, существуют ли:
 - 6.1 аномальные траектории, являющиеся нормальными (т.е. нестрого аномальные траектории)?
 - 6.2 аномальные траектории, не являющиеся нормальными (т.е. строго аномальные траектории)?
7. Покажите, что гамильтонова система для нормальных экстремалей интегрируема в квадратурах.
8. Опишите проекции экстремальных траекторий на плоскость (x, y) .
9. Изучите раздел 4 статьи [1]¹ Извлеките оттуда параметризацию геодезических и время разреза.
10. Постройте стратификацию Уитни пересечения сферы Мартине с плоскостью Мартине $\{y = 0\}$.

¹[1] A.A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, I. Kupka. "Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case", J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2(1997), pp. 377–448.

Проект «Субриманова сфера Мартине», Шишминцев Д.

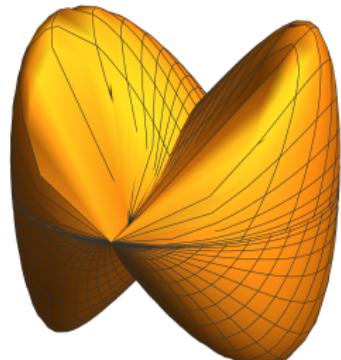


Рис.: Сфера в плоском случае
Мартине

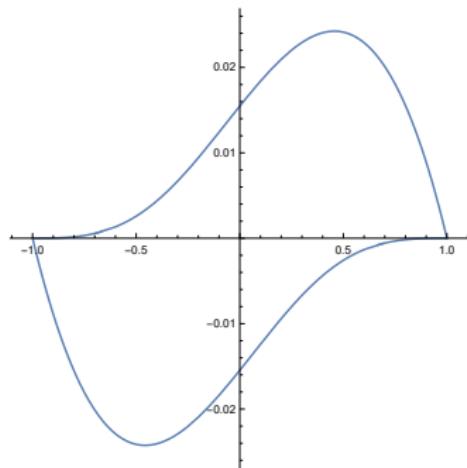


Рис.: Пересечение сферы с
плоскостью Мартине $\{y = 0\}$

- Готовится статья для научного журнала.

Проект «Субриманова задача на группе $SE(2)$ »,

Юхновец Илья

Рассмотрим субриманову задачу на группе движений плоскости.

1. Исследуйте глобальную управляемость полученной управляемой системы.
2. Докажите конструктивно глобальную управляемость: для любых точек $q_0, q_1 \in SE(2)$ постройте управление, переводящее q_0 в q_1 .
3. Выпишите гамильтонову систему ПМП для нормальных траекторий. Докажите ее интегрируемость в квадратурах.
4. Вычислите параметризацию экстремальных траекторий.
5. Постройте изображения субримановых сфер и касательных полуплоскостей в точках излома сфер.

Проект «Субриманова задача на группе $SE(2)$ », Юхновец Илья

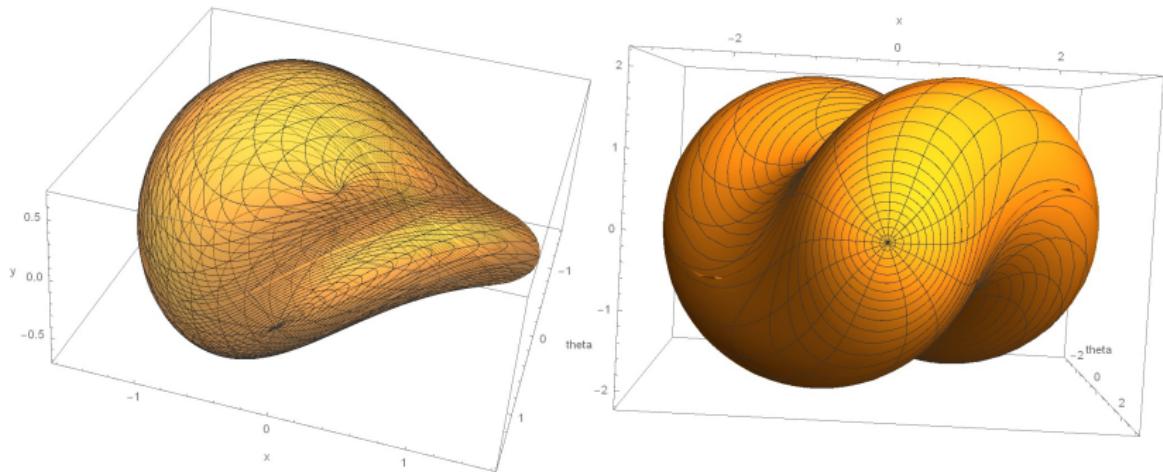
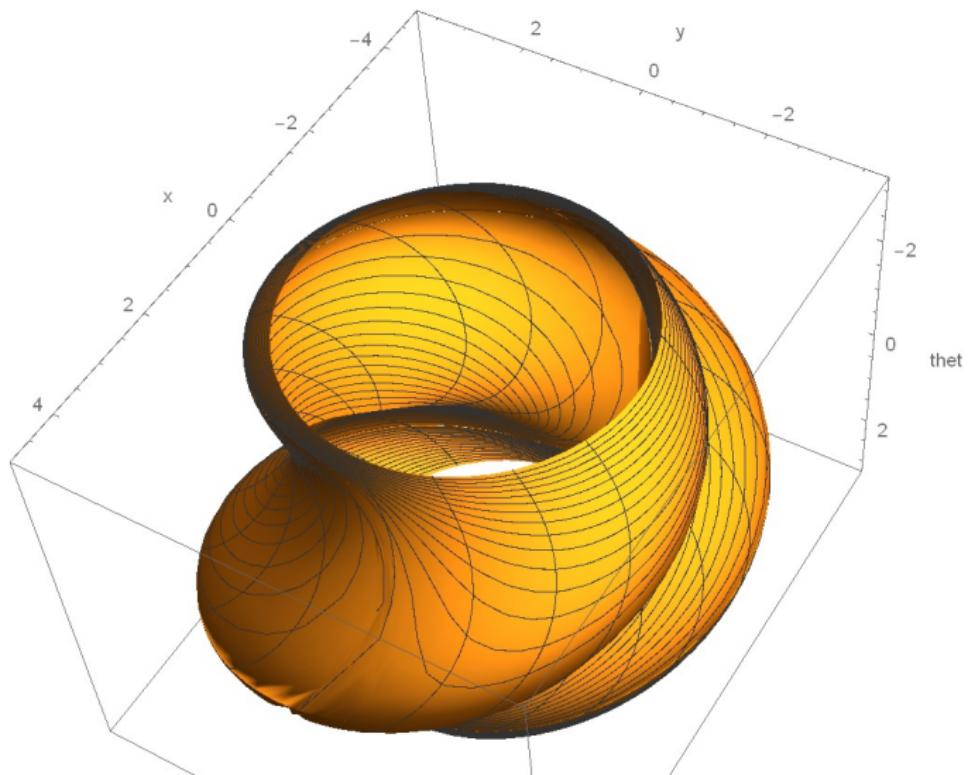


Рис.: Субримановы сферы радиусов $\pi/2$ и π

Проект «Субриманова задача на группе $SE(2)$ »,
Юхновец Илья



Проект «Субриманова задача на группе $SE(2)$ », Юхновец Илья

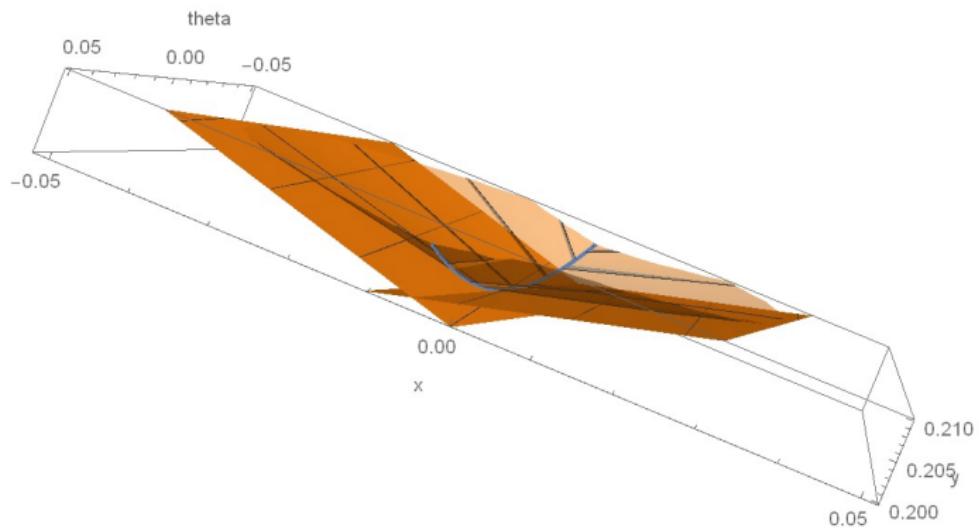
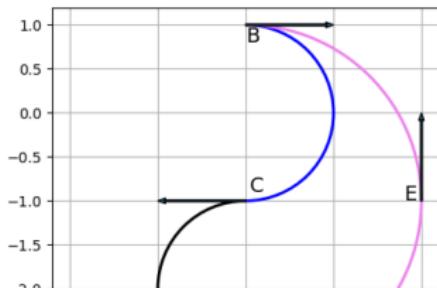
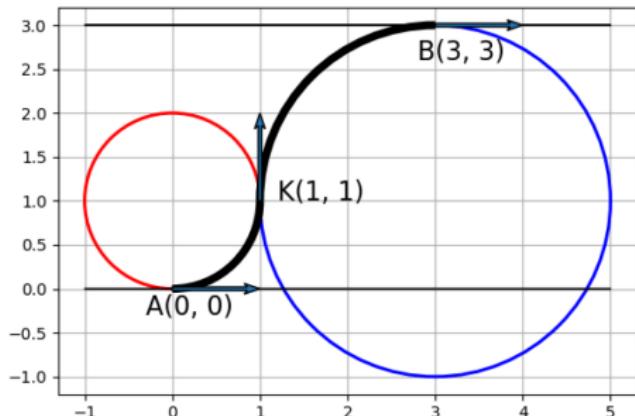


Рис.: Касательные полуплоскости к сфере в точке излома

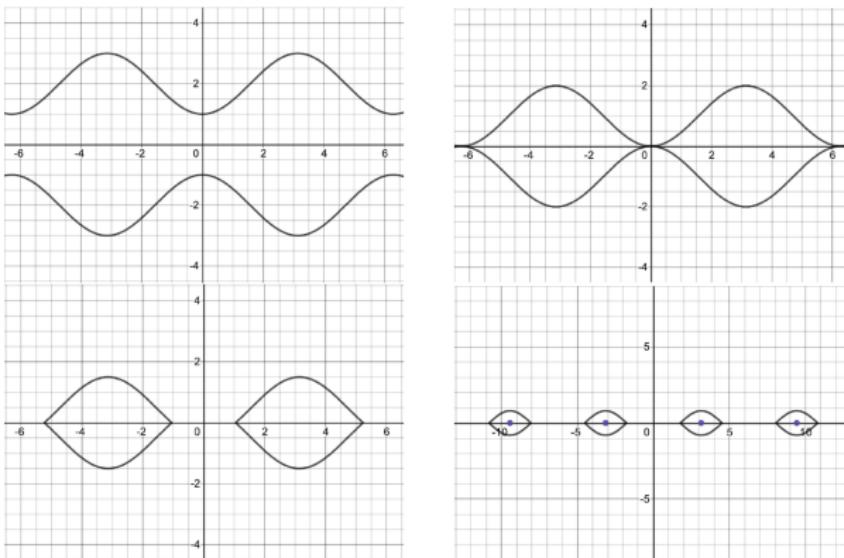
Учебный модуль в НТУ Сириус: Ардентов А.А.

- Прочитана лекция «Приложение геометрической теории управления в робототехнике».
- Проект 1: «Исследование задачи Маркова-Дубинса методами геометрической теории управления», Дюков Владислав.
- Проект 2: «Исследование задачи Ридса-Шеппа методами геометрической теории управления», Кузьмин Сергей.
- Проект 3: «Задача быстродействия для колёсного робота при ограничении на максимальную скорость приводных колёс», Лысенко Павел.
- Проект 4: «Субриманова задача для колёсного робота с прицепом», Артемова Лиза (закреплена в гранте РФФИ).

Проект «Исследование задачи Маркова-Дубинса
методами геометрической теории управления»,
Дюков Владислав



Проект «Исследование задачи Маркова-Дубинса
методами геометрической теории управления»,
Дюков Владислав



Фазовые траектории.

Проект «Исследование задачи Ридса-Шеппа методами геометрической теории управления», Кузьмин Сергей

$$\text{Lie}_q(X_1, X_2) = \text{span}(X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q), [X_1, [X_1, X_2]](q), \dots).$$

$$X_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3(q) = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

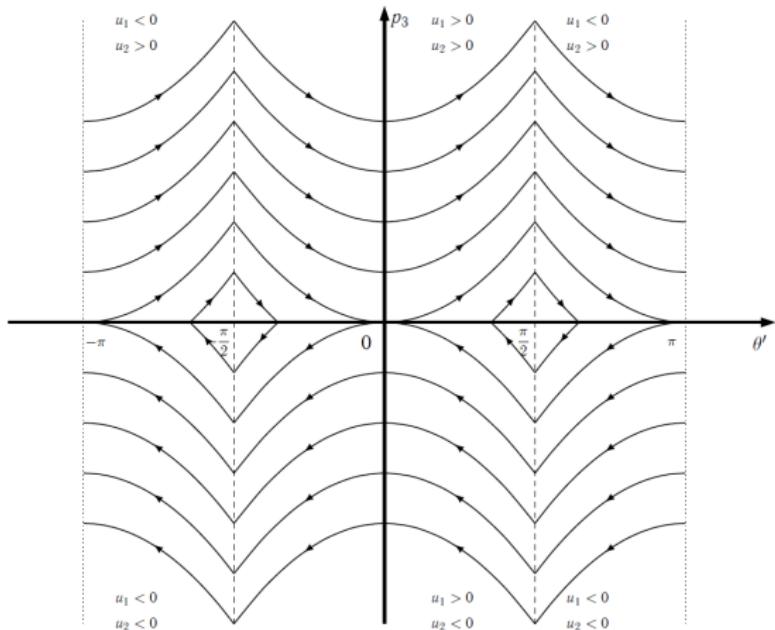
$$\det(X_1(q), X_2(q), X_3(q)) = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0.$$

$X_1(q)$, $X_2(q)$ и $X_3(q)$ - линейно-независимые векторы $\Rightarrow \text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M$.

Система симметрична $\mathcal{F} = -\mathcal{F}$, следовательно, имеет место глобальная управляемость.

Доказательство управляемости через теорему
Рашевского-Чжоу.

Проект «Исследование задачи Ридса-Шеппа методами геометрической теории управления», Кузьмин Сергей



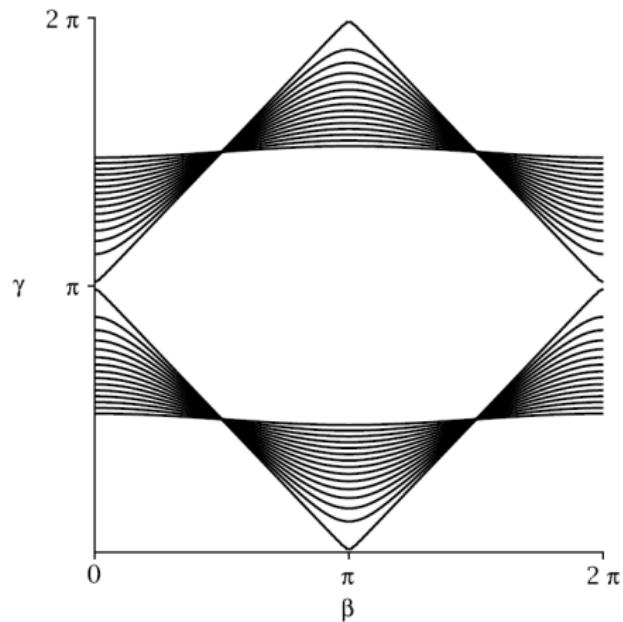
Фазовый портрет вертикальной подсистемы.

Проект «Исследование задачи Ридса-Шеппа методами геометрической теории управления», Кузьмин Сергей

ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7
ε_1	ε_0	ε_4	ε_7	ε_2	ε_6	ε_5	ε_3
ε_2	ε_4	ε_0	ε_5	ε_1	ε_3	ε_7	ε_6
ε_3	ε_7	ε_5	ε_0	ε_6	ε_2	ε_4	ε_1
ε_4	ε_2	ε_1	ε_6	ε_0	ε_7	ε_3	ε_5
ε_5	ε_6	ε_3	ε_2	ε_7	ε_0	ε_1	ε_4
ε_6	ε_5	ε_7	ε_4	ε_3	ε_1	ε_0	ε_2
ε_7	ε_3	ε_6	ε_1	ε_5	ε_4	ε_2	ε_0

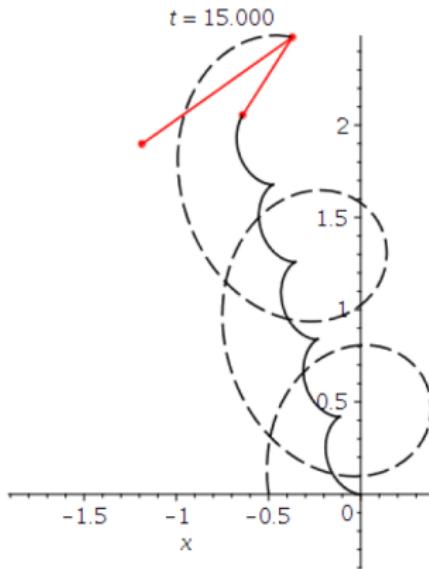
Таблица умножения дискретной группы симметрий задачи.

Проект «Субриманова задача для колёсного робота с прицепом», Артемова Лиза



Исследование аномального случая.

Проект «Субриманова задача для колёсного робота с прицепом», Артемова Лиза

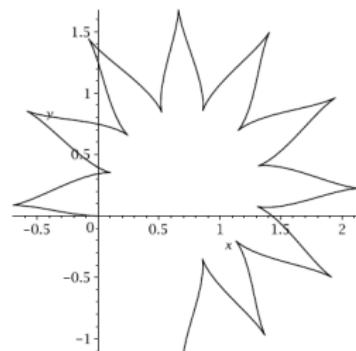
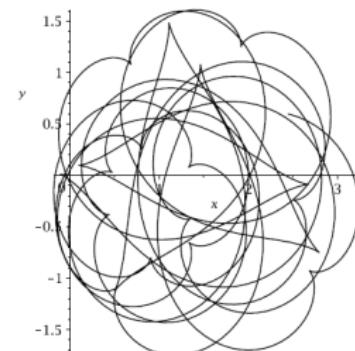
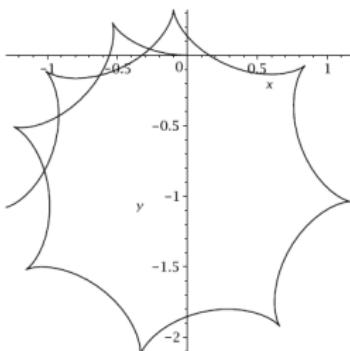


Пример аномальной траектории при $I_r = 1/2, I_t = 1$.

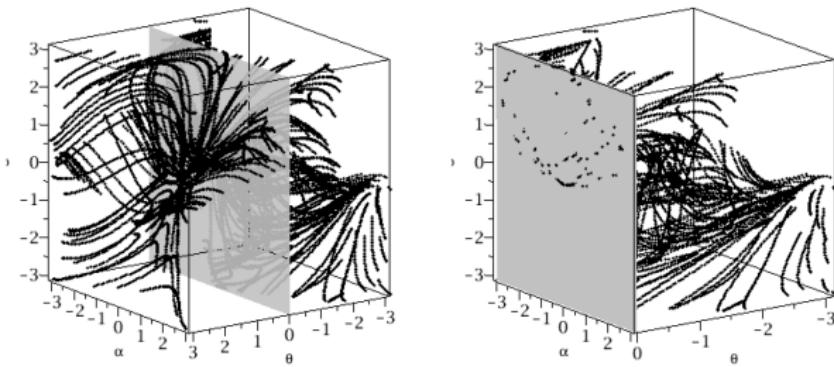
Проект «Субриманова задача для колёсного робота с прицепом», Артемова Лиза

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= -\frac{h_2 h_3}{\mu^2}, \quad \dot{h}_2 = h_1 h_3, \\ \dot{h}_3 &= \frac{h_1(h_4 \mu^2 + h_2)(l_t + l_r \cos \varphi) - h_4 h_2 l_r^2 \sin \varphi}{\mu^2(l_t + l_r \cos \varphi)}, \quad \dot{h}_4 = \frac{h_4 h_1(l_r + l_t \cos \varphi)}{l_t(l_t + l_r \cos \varphi)} \\ \dot{x} &= h_1 \cos \vartheta, \quad \dot{y} = h_1 \sin \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = \frac{h_2}{\mu^2}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{l_t \mu^2}(h_1 \mu^2 \sin \varphi + h_2(l_t + l_r \cos \varphi)).\end{aligned}$$

Нормальная гамильтонова система.



Проект «Субриманова задача для колёсного робота с прицепом», Артемова Лиза



Исследование наличия хаоса в задаче
через отображение Пуанкаре.

Подготовлена статья для публикации в научном журнале:
А.А. Ардентов, Е.М. Артёмова, «Анормальные траектории в
субримановой задаче для колёсного робота с прицепом».

Учебный модуль в НТУ Сириус: Маштаков А.П.

- Прочитана лекция «Субриманова геометрия в обработке изображений и моделировании зрительной системы человека»
- Проект 1: «Моделирование зрительной коры головного мозга», Галяев Иван
- Проект 2: «Управление качением твердых тел», Матросов Сергей

Проект Ивана Галяева

«Моделирование зрительной коры головного мозга»

Рассматривается управляемая система

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u_1 k, \\ \dot{k} = u_2, \end{cases} \quad (x, y, \theta, k) \in \text{SE}(2) \times \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Для траектории $\gamma(t)$, соответствующей управлению $(u_1(t), u_2(t))$ за время $T > 0$, определим функционал качества — субриманову длину этой траектории:

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt.$$

Для заданных граничных условий $\gamma(0) = (0, 0, 0, k_0)$, $\gamma(T) = (x_1, y_1, \theta_1, k_1)$, требуется найти траекторию, имеющую минимальную субриманову длину.

Проект Ивана Галяева

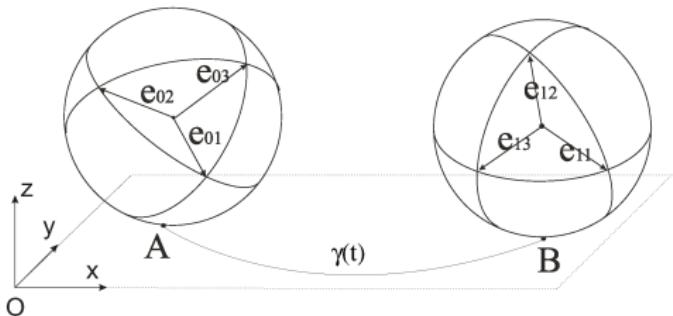
«Моделирование зрительной коры головного мозга»

Получены следующие основные результаты:

- доказана полная управляемость системы и существование оптимальных управлений;
- выписана гамильтонова система ПМП;
- найдена явная параметризация аномальных траекторий;
- в нормальном случае найдены три функционально независимых первых интеграла;
- сформулирована гипотеза, подтвержденная численными экспериментами, что нормальная гамильтонова система является интегрируемой по Лиувиллю.
- Готовится статья для научного журнала.

Проект «Управление качением твердых тел», Матросов Сергей

Рассматривается задача об оптимальном качении шара по плоскости без прокручиваний и проскальзываний.



$$\begin{cases} \dot{x} = u_1, \\ \dot{y} = u_2, \\ \dot{q}_0 = \frac{1}{2} (q_2 u_1 - q_1 u_2), \\ \dot{q}_1 = \frac{1}{2} (q_3 u_1 + q_0 u_2), \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{2} (-q_0 u_1 + q_3 u_2), \\ \dot{q}_3 = \frac{1}{2} (-q_1 u_1 - q_2 u_2), \end{cases}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, q \in S^3,$$

$$g(0) = g_0, g(t_1) = g_1, g_i \in \mathbb{R}^2 \times S^3,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Проект «Управление качением твердых тел», Матросов Сергей

Получены следующие основные результаты:

- математическая постановка задачи;
- доказана полная управляемость системы и существование оптимальных управлений;
- получены аналитические выражения для экстремального управления;
- разработана программа визуализации качения шара по плоскости.

Проект «Управление качением твердых тел», Матросов
Сергей

Учебный модуль в НТУ Сириус: Сачкова Е.Ф.

- Прочитана лекция: Инерциальные свойства круговых сегментов

План

- Субриманова задача с вектором роста (2, 3, 5, 8)
- Задача Диоды
- Решение двухточечной (2,3,5,8)- задачи управления в классе круговых управлений;
- Механический смысл граничных условий в (2,3,5,8)- задаче;
- Исторические заметки; (Я. Бернулли, Эйлер, Геккелер, Колмогоров)
- Проект 1: Характеристика инерциальных свойств круговых сегментов, Даниил Панин, Ирина Шпаковская.

Постановка механической задачи

Построить сечение однородной балки в форме кругового сегмента, у которого известны только длина хорды ϱ_0 , площадь S , а дуга окружности ϱ неизвестна. Балку с полученным сечением теоретически подвергнуть нагружению силой, изгибающей ее. Рассмотреть случай чистого прямого изгиба. Вычислить максимальный момент сопротивления построенного сечения при изгибе.

Подход к решению: применить результаты исследования двухточечной (2, 3, 5, 8)-задачи оптимального управления в классе круговых аномальных управлений.

Решение двухточечной задачи

Пусть $\pi(x^1) = \pi(x(T)) = \bar{x}^1 = (a_1, a_2, a_3)$. Если
 $\bar{x}^1 = (a_1, a_2, a_3) \in O$, то

$$\frac{\bar{t} - \sin \bar{t}}{\sin^2 \frac{\bar{t}}{2}} = \frac{8a_3}{r^2}, \quad (1)$$

$$\bar{p}_1 = \frac{\bar{t}}{2T} (a_2 \operatorname{ctg} \frac{\bar{t}}{2} - a_1), \quad (2)$$

$$\bar{p}_2 = -\frac{\bar{t}}{2T} (a_1 \operatorname{ctg} \frac{\bar{t}}{2} + a_2), \quad (3)$$

$$\bar{p}_3 = \frac{\bar{t}}{T}; \quad (4)$$

Решение двухточечной задачи

Если $\bar{x}^1 = (0, 0, a_3 > 0)$, то

$$\bar{t} = 2\pi, \quad (5)$$

$$\bar{p}_1 = \frac{2}{T} \sqrt{\pi a_3} \cos \varphi, \quad \bar{p}_2 = \frac{2}{T} \sqrt{\pi a_3} \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (6)$$

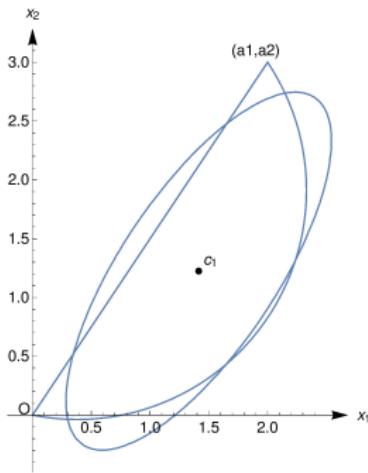
$$\bar{p}_3 = \frac{2\pi}{T}. \quad (7)$$

Однозначно вычислены компоненты:

$$a_4 = x_4(T, \psi(\bar{x}^1)), \dots, a_8 = x_8(T, \psi(\bar{x}^1));$$

Сегмент и эллипс инерции

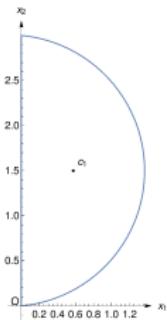
Эллипс инерции центрирован в центре тяжести сегмента:



Момент сопротивления при изгибе

Максимальный момент сопротивления при изгибе построенного сегмента D относительно его нейтральной оси $\{x_2 = a_2/2\}$:

$$\widehat{W}_1 = \frac{\widehat{l}_1}{(\widehat{x}_2)^{\max}} = \begin{cases} \frac{8a_8 - a_2^2 a_3}{2a_2}, & \bar{t} \in (0, \pi], \\ \frac{8a_8 - a_2^2 a_3}{2a_2} \sin \bar{t}/2, & \bar{t} \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$



Благодаря симметрии вращения

Рис.:

$$a_1 = 0, a_2 \neq 0 \bar{t} = \pi$$

рассмотрены сегменты с $a_1 = 0$.

Итоги работы

Проведено численное сравнение моментов сопротивления балок с одной и той же площадью S сечения в виде кругового

сегмента в зависимости от длины хорды a_2 .

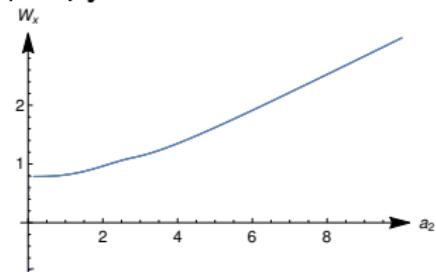


Рис.: Момент
сопротивления от a_2

- Написана и представлена в журнал «Прикладная математика и механика» статья.

Публикации

1. P. Bozek, Yu. L. Karavaev, A. A. Ardentov, K. S. Yefremov, Neural network control of a wheeled mobile robot based on optimal trajectories, *Intern. J. of Advanced Robotic Systems*, 2020, 17 (2).
2. Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова, Структура аномальных экстремалей в субриemannовой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8), *Математический сборник*, 2020 , 211 (10), 112–138.
3. Mashtakov Alexey, On Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Rigid Body Motions, Proceedings of 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), Moscow, 3-5 June 2020, *IEEE Xplore*, 15 July 2020.

Публикации

4. А.А. Ардентов, Л.В. Локуциевский, Ю.Л. Сачков, Решение классических задач оптимального управления с 2-мерным управлением на основе выпуклой тригонометрии, *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, 2020, 494, С. 86—92
5. A.A. Ardentov, L.V. Lokutsievskiy, Yu.L. Sachkov, Extremals for a series of sub-Finsler problems with 2-dimensional control via convex trigonometry, *ESAIM: COCV*, принята к публикации.
6. Сачков Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления. – М.: URSS, 2021, 160 С.
7. Направлена в журнал 1 статья, готовятся 3 статьи (в продолжение учебного модуля в Сириусе в августе 2020 г.)