

УДК 517.977

Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова

## Структура аномальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$

Рассматривается левоинвариантная субриманова задача на свободной нильпотентной группе Ли с двумя образующими, глубины 4. Описана структура аномальных экстремалей: показано, что аномальные экстремали задают на аннуляторе квадрата распределения аномальное слоение, состоящее из пересечения этого аннулятора с симплектическим слоением на коалгебре Ли. Для аномальных траекторий исследована их строгая/нестрогая аномальность, описаны проекции на плоскость распределения, получены оценки коранга, построены примеры негладких траекторий.

Библиография: 14 названий.

**Ключевые слова:** субриманова задача, аномальные экстремали и траектории, строгая/нестрогая аномальность.

### § 1. Введение

**1.1. Субримановы структуры.** Субриманова структура на связном гладком многообразии  $M$  есть пара  $(D, g)$ , состоящая из гладкого векторного распределения  $D \subset TM$  и скалярного произведения  $g$  в  $D$  [1–3]. Горизонтальная кривая распределения  $D$  есть липшицева кривая в  $M$ , почти всюду касающаяся этого распределения. По теореме Рашевского-Чжоу, любые две точки в  $M$  соединимы горизонтальной кривой тогда и только тогда, когда распределение  $D$  имеет полный ранг; то есть флаг из последовательных скобок Ли распределения стабилизируется на касательном расслоении:

$$D \subset D^2 = D + [D, D] \subset D^3 = D^2 + [D^2, D] \subset \dots \subset D^s = TM.$$

Наименьшее такое  $s$  называется глубиной распределения, а вектор

$$(\dim D_x, \dim D_x^2, \dots, \dim D_x^s), \quad x \in M,$$

называется вектором роста распределения.

Глубина и вектор роста распределения являются его важнейшими инвариантами. Субримановы структуры стратифицированы по глубине их распределений, и сложность субримановых структур быстро возрастает с увеличением их

---

Разделы 2–4 выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук. Разделы 5–7 выполнены за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-31-51023) в Научно-технологическом университете «Сириус», Сочи.

глубины. Субримановы структуры глубины один — это римановы структуры. Для субримановых структур глубины два в минимальной размерности 3 (то есть для вектора роста  $(2, 3)$ ) имеется детальная теория [3]. Для субримановых структур глубины три имеются подробные исследования лишь в простейшем левоинвариантном случае для размерностей 4, 5 (вектора роста  $(2, 3, 4)$  и  $(2, 3, 5)$ ) [4, 5]. Для субримановых структур глубины четыре известны лишь первоначальные результаты в левоинвариантном случае ранга 2 (вектор роста  $(2, 3, 5, 8)$ ) [6, 7].

Нарастание сложности субримановых структур с увеличением их глубины можно наблюдать по двум критически важным характеристикам:

- класс функций, в которых интегрируется гамильтонова система принципа максимума Понтрягина для нормальных геодезических,
- структура аномальных траекторий.

Для левоинвариантных субримановых структур на свободных нильпотентных группах Ли ранга 2 ситуация с этими параметрами отражена в таблице 1.

Таблица 1. Свободные нильпотентные субримановы структуры ранга 2

вектор роста	интегрируемость нормальной гамильтоновой системы ПМП	анормальные траектории
(2)	линейные функции	нет
(2, 3)	тригонометрические функции	постоянны
(2, 3, 5)	функции Якоби [4]	однопараметрические подгруппы, касающиеся $D$ ; все нестрогие аномальны [4]
(2, 3, 5, 8)	неинтегрируема по Лиувиллю [7]	описаны в данной работе

Горизонтальные кривые распределения  $D$ , имеющие наименьшую длину в смысле метрики  $g$ , называются кратчайшими субримановой структуры  $(D, g)$ . Стандартным подходом к поиску субримановых кратчайших является применение принципа максимума Понтрягина (ПМП) [1, 3, 8]. Согласно этому принципу, любая субриманова кратчайшая  $x(t) \in M$  имеет гамильтонов лифт  $\lambda_t \in T^*M$ , проецирующийся в  $x(t)$ , этот лифт  $\lambda_t$  называется экстремалью. Как обычно при применении ПМП, экстремали делятся на нормальные (зависящие от  $D$  и  $g$ ) и аномальные (зависящие только от распределения  $D$ ). Аномальные экстремали образуют гораздо меньшее множество чем нормальные, однако большинство сложных вопросов субримановой геометрии связано именно с аномальными экстремальми. Повторим — аномальные экстремали не зависят от метрики  $g$ , поэтому правильнее говорить об аномальных экстремальных распределения  $D$ ; однако проблематика этих экстремалей приобрела особую остроту именно в рамках субримановой геометрии, поэтому мы будем говорить об аномальных экстремальных субримановой структуры  $(D, g)$  и применять принцип максимума Понтрягина для их параметризации.

Первым, кто отметил особую роль аномальных экстремалей в субримановой геометрии, был Р. Монтгомери [9, 10].

**1.2. Цель и основные результаты работы.** В данной статье исследуются аномальные экстремали для левоинвариантной субримановой структуры с вектором роста  $(2, 3, 5, 8)$  — простейшей субримановой структуры глубины 4 ранга 2 (соответствующая 8-мерная группа Ли есть свободная нильпотентная группа Карно глубины 4 с двумя образующими). Она задает нильпотентную аппроксимацию [3, 11] субримановой структуры общего положения в восьмимерном пространстве с двумерным управлением, поэтому ее исследование крайне важно.

Данная работа продолжает изучение субримановой структуры с вектором роста  $(2, 3, 5, 8)$ , начатое в работе [6], где были исследованы аномальные геодезические специального вида — однопараметрические подгруппы в нильпотентной группе Ли  $M \cong \mathbb{R}^8$ , касающиеся распределения  $D$ .

Общие аномальные экстремали в левоинвариантной субримановой задаче с вектором роста  $(2, 3, 5, 8)$  допускают полное описание в терминах функций Казимира (то есть функций на коалгебре Ли  $L^* = T_{\text{Id}}^* \mathbb{R}^8$ , коммутирующих в смысле скобок Пуассона со всеми гамильтонианами, линейными на слоях). Имеются четыре независимые функции Казимира: три линейные  $h_6, h_7, h_8$  и одна кубическая  $C$  [7]. Аномальные экстремали аннулируют квадрат распределения  $D$ . Аннулятор  $(D^2)^\perp \subset T^* \mathbb{R}^8$  в пересечении с коалгеброй  $L^*$  образует пятимерное пространство  $M_5 = (D^2)^\perp \cap L^*$ . Четыре функции Казимира задают на пространстве  $M_5$  слоение со слоями размерности один и ноль (вообще говоря, негладкими) — это и есть аномальные экстремали. Функция Казимира  $C$  на пересечении  $M_5$  с совместными поверхностями уровня функций Казимира  $h_6, h_7, h_8$  оказывается квадратичной формой от оставшихся свободных переменных  $h_4, h_5$ . Поэтому проекции аномальных экстремалей на плоскость  $(h_4, h_5)$  суть линии уровня этой квадратичной формы (эллипсы и гиперболы в случае общего положения). В общем случае проекции аномальных экстремалей на плоскости  $(h_4, h_5)$  и  $(x_1, x_2)$  связаны между собой аффинным преобразованием, поэтому их проекции на плоскость  $(x_1, x_2)$  суть также эллипсы и гиперболы (в случае общего положения).

В рассматриваемой задаче аномальные экстремали постоянной скорости ( $u_1^2 + u_2^2 \equiv \text{const}$ ) образуют 5-параметрическое семейство (параметризация точками пространства  $M_5$ ). Имеется 2-параметрическое семейство однопараметрических подгрупп нильпотентной группы Ли  $\mathbb{R}^8$ , являющихся нестрогим аномальными траекториями (то есть одновременно аномальными и нормальными). Имеется также 3-параметрическое семейство нестрогим аномальных траекторий, унаследованных из круговых траекторий случая Гейзенберга. Помимо этих двух семейств (2-параметрического и 3-параметрического), все остальные аномальные траектории строго аномальны. Каждая из строго аномальных траекторий имеет коранг 1 (то есть является проекцией одной экстремали с точностью до скалярного множителя). Однопараметрические подгруппы, касающиеся распределения  $D$ , имеют коранг не менее 6, а круговые траектории случая Гейзенберга имеют коранг не менее 2.

**1.3. Структура работы.** В разделе 2 приводится постановка задачи, к ней применяется принцип максимума Понтрягина, который детализируется для аномальных экстремалей.

В разделе 3 вводится важнейший инвариант  $I$  аномальных экстремалей, равный сужению кубической функции Казимира  $\mathcal{C}$  на  $(D^2)^\perp$ . Получено глобальное описание аномальных экстремалей как совместных поверхностей уровня функций Казимира на  $(D^2)^\perp$ . Показана связь аномальных экстремалей с симплектическим слоением на коалгебре  $L^*$ . Описана структура проекций аномальных экстремалей на плоскость  $(h_4, h_5)$  как линий уровня первого интеграла  $I$ . Эти проекции оказываются линиями второго, первого и нулевого порядков. Выведены формулы для аномальных управлений.

В разделе 4 построен удобный канонический параметр времени на аномальных экстремальных общего положения. Показано также, что в данной задаче возникают негладкие аномальные экстремали, чего не было в субримановых задачах глубины меньше четырех.

В разделе 5 описано, какие из аномальных траекторий являются одновременно нормальными (то есть нестрогими аномальными). Это в точности траектории, проекции которых на плоскость распределения имеют постоянную кривизну (прямые и окружности). Доказано, что на эллипсах (не окружностях), гиперболах и параболах кривизна не равна никакому полиному от координат.

В разделе 6 описаны проекции аномальных экстремалей на плоскость распределения — это линии второго, первого и нулевого порядков.

В разделе 7 получены оценки коранга аномальных траекторий (размерности пространства экстремалей, в них проецирующегося).

В заключительном разделе 8 подводятся итоги и намечаются вопросы для дальнейших исследований.

## § 2. Постановка задачи и принцип максимума Понтрягина

Рассматривается задача оптимального управления

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \quad x = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0 = \text{Id} = (0, \dots, 0), \quad x(t_1) = x_1, \quad (2.2)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min, \quad (2.3)$$

где векторные поля в правой части системы имеют вид:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4} \frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6} \frac{\partial}{\partial x_8},$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6} \frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4} \frac{\partial}{\partial x_7},$$

а допустимые управления и траектории:

$$u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^2), \quad x(\cdot) \in \text{Lip}([0, T], \mathbb{R}^8).$$

Задача (2.1)–(2.3) есть задача о субримановых кратчайших для субримановой структуры [1, 2], заданной ортонормированным базисом  $X_1, X_2$ .

Векторные поля  $X_1, X_2$  порождают свободную нильпотентную алгебру Ли  $L$  с двумя образующими, глубины 4:

$$L = \text{span}(X_1, \dots, X_8),$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \quad [X_1, X_4] = X_6, \quad (2.4)$$

$$[X_2, X_4] = [X_1, X_5] = X_7, \quad [X_2, X_5] = X_8, \quad (2.5)$$

где

$$[X_1, X_2] = X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_6} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_7} + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_8},$$

$$[X_1, X_3] = X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_6} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_7},$$

$$[X_2, X_3] = X_5 = \frac{\partial}{\partial x_5} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_7} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_8},$$

$$[X_1, X_4] = X_6 = \frac{\partial}{\partial x_6},$$

$$[X_2, X_4] = [X_1, X_5] = X_7 = \frac{\partial}{\partial x_7},$$

$$[X_2, X_5] = X_8 = \frac{\partial}{\partial x_8},$$

таблица умножения (2.4), (2.5) изображена схематически на рис. 1.

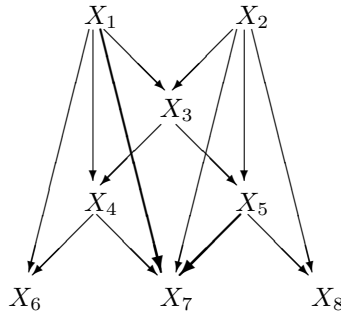


Рис. 1. Алгебра Ли с вектором роста (2, 3, 5, 8)

Распределение  $D = \text{span}(X_1, X_2)$  имеет вектор роста (2, 3, 5, 8) и задача (2.1)–(2.3) есть левоинвариантная субриманова задача с вектором роста (2, 3, 5, 8). Закон умножения в  $\mathbb{R}^8$ , превращающий это пространство в нильпотентную группу Ли с алгеброй Ли  $L$ , а поля  $X_1, \dots, X_8$  в левоинвариантный репер на этой группе Ли, приведен в работе [12].

Оптимальные управления в задаче (2.1)–(2.3) существуют по теоремам Рашевского-Чжоу и Филиппова [1].

Применим к задаче (2.1)–(2.3) принцип максимума Понтрягина [1, 8]. Рассмотрим кокасательное расслоение пространства состояний  $T^*\mathbb{R}^8$ , будем обозначать его элементы  $\lambda \in T^*\mathbb{R}^8$ . Обозначим естественную проекцию  $\pi$  :

$T^*\mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ ,  $T_x^*\mathbb{R}^8 \ni \lambda \mapsto x$ . Определим функцию Понтрягина:

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x) \rangle + \frac{\nu}{2} (u_1^2 + u_2^2), \quad \lambda \in T^*\mathbb{R}^8, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

**ТЕОРЕМА 1** (ПМП [1, 8]). *Если управление  $u(t)$  и соответствующая траектория  $x(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , оптимальны, то существуют липшицева кривая  $\lambda_t \in T_{x(t)}^*\mathbb{R}^8$  и число  $\nu \in \{-1, 0\}$ , для которых следующие условия выполняются для п.в.  $t \in [0, t_1]$ :*

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = u_1(t) \vec{h}_1(\lambda_t) + u_2(t) \vec{h}_2(\lambda_t), \quad (2.6)$$

$$h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{v \in \mathbb{R}^2} h_v^\nu(\lambda_t), \quad (2.7)$$

$$(\nu, \lambda_t) \neq (0, 0). \quad (2.8)$$

Через  $\vec{h}$  обозначается гамильтоново векторное поле на  $T^*\mathbb{R}^8$ , соответствующее гамильтониану  $h \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^8)$ . Кривая  $\lambda_t$  называется *экстремалью*, а удовлетворяющие условиям принципа максимума траектория  $x(t)$  и управление  $u(t)$  называются *экстремальными*. Случай  $\nu = -1$  называется *нормальным*, а случай  $\nu = 0$  — *анормальным*.

В анормальном случае ( $\nu = 0$ ) условия ПМП приобретают следующую форму:

$$\lambda_t \neq 0, \quad (2.9)$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = 0, \quad (2.10)$$

$$u_1 h_4 + u_2 h_5 = 0, \quad (2.11)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0, \quad (2.13)$$

$$\dot{x} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad x(0) = 0. \quad (2.14)$$

Здесь и далее используются линейные на слоях кокасательного расслоения гамильтонианы, соответствующие базисным полям:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i(x) \rangle, \quad x = \pi(\lambda), \quad \lambda \in T^*M, \quad i = 1, \dots, 8.$$

### § 3. Структура анормальных экстремалей

**3.1. Анормальные экстремали и функции Казимира.** Коалгебра Ли  $L^* = T_{\text{Id}}^*\mathbb{R}^8$  имеет четыре независимые функции Казимира, то есть функции  $f : L^* \rightarrow \mathbb{R}$ , коммутирующие в смысле скобки Пуассона со всеми гамильтонианами  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ ; это функции

$$h_6, \quad h_7, \quad h_8, \quad \mathcal{C} = h_8 h_4^2 - 2h_7 h_4 h_5 + h_6 h_5^2 - 2h_3 (h_6 h_8 - h_7^2), \quad (3.1)$$

см. [7]. Все эти функции постоянны на траекториях гамильтоновой системы (2.6), так как производная любой функции Казимира  $f$  вдоль этой системы есть

$$(u_1 \vec{h}_1 + u_2 \vec{h}_2) f = u_1 \{h_1, f\} + u_2 \{h_2, f\} = 0.$$

В частности, функция  $C$  постоянна на любой аномальной экстремали, также как и ее сужение

$$I = C|_{h_1=h_2=h_3=0} = h_8 h_4^2 - 2h_7 h_4 h_5 + h_6 h_5^2.$$

Доказано следующее предложение.

ЛЕММА 3.1. *Функция*

$$I = h_8 h_4^2 - 2h_7 h_4 h_5 + h_6 h_5^2$$

*постоянна на аномальных экстремалях.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Другой способ доказательства леммы 3.1 состоит в вычислении производной функции  $I$  вдоль системы (2.10)–(2.13):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 2h_8 h_4 (h_6 u_1 + h_7 u_2) - 2h_7 h_5 (h_6 u_1 + h_7 u_2) - 2h_7 h_4 (h_7 u_1 + h_8 u_2) + \\ &+ 2h_6 h_5 (h_7 u_1 + h_8 u_2) = 2(h_8 h_6 - h_7^2)(h_4 u_1 + h_5 u_2) = 0. \end{aligned}$$

Пространство, содержащее вертикальные части аномальных экстремалей

$$(D^2)^\perp \cap L^* \cong \{(h_1, \dots, h_8) \mid h_1 = h_2 = h_3 = 0\}, \quad (3.2)$$

пятимерно, и на нем имеется четыре независимых интеграла для аномальных экстремалей:

$$h_6, \quad h_7, \quad h_8, \quad I. \quad (3.3)$$

Поэтому любая аномальная экстремаль содержится в пересечении пространства  $\{(h_1, \dots, h_8) \mid h_1 = h_2 = h_3 = 0\}$  с совместной поверхностью уровня интегралов (3.3). Так как это пересечение одномерно или нульмерно, интегралов (3.3) достаточно для того, чтобы проинтегрировать семейство аномальных экстремалей. Мы делаем это далее.

Введем обозначения для матрицы квадратичной формы  $I(h_4, h_5)$  и ее определителя:

$$K = \begin{pmatrix} h_8 & -h_7 \\ -h_7 & h_6 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det K.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $h_1(t), \dots, h_8(t) \in \text{Lip}[0, t_1]$ . Аномальная экстремаль  $\lambda_t$ ,  $t \in [0, t_1]$ , такая, что  $h_i(t) = h_i(\lambda_t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , существует тогда и только тогда, когда для функций  $h_i(t)$  при всех  $t \in [0, t_1]$  выполнены условия (2.10), (2.13), условия

$$(h_1(t), \dots, h_8(t)) \neq 0, \quad (3.4)$$

$$I \equiv \text{const}, \quad (3.5)$$

а также одно из условий

$$(1) \quad \Delta \neq 0,$$

$$(2) \quad K \neq 0, \quad \Delta = 0, \quad I \neq 0,$$

$$(3) \quad K \neq 0, \Delta = 0, I = 0, (h_4, h_5) \equiv \text{const},$$

$$(4) \quad K = 0, (h_4, h_5) \equiv \text{const} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть  $\lambda_t, t \in [0, t_1]$ , есть аномальная экстремаль. Обозначим  $h_i(t) = h_i(\lambda_t), t \in [0, t_1]$ , и докажем, что эти функции удовлетворяют условиям (2.10), (2.13), (3.4), (3.5), и одному из условий (1)–(4).

Условия (2.10), (2.13), (3.4) следуют из ПМП. Условие (3.5) следует из леммы 3.1. Очевидно, что выполняется одно из условий

$$(1') \quad \Delta \neq 0,$$

$$(2') \quad K \neq 0, \Delta = 0, I \neq 0,$$

$$(3') \quad K \neq 0, \Delta = 0, I = 0,$$

$$(4') \quad K = 0.$$

Осталось доказать, что в случаях (3'), (4') имеем  $(h_4, h_5) \equiv \text{const}$ .

Случай (3'). Имеем

$$I = \pm Q^2, \quad Q = ah_4 + \varepsilon bh_5, \quad (3.6)$$

$$a = \sqrt{|h_8|}, \quad b = \sqrt{|h_6|}, \quad \varepsilon = \mp \text{sign } h_7, \quad h_7 = \mp \varepsilon \sqrt{h_6 h_8}, \quad (3.7)$$

$$\pm = \begin{cases} \text{sign } h_6 = \text{sign } h_8, & h_6 h_8 \neq 0, \\ \text{sign } h_8, & h_6 = 0, h_8 \neq 0, \\ \text{sign } h_6, & h_6 \neq 0, h_8 = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Рассмотрим случай

$$(3'a): \quad h_6 h_8 \neq 0, \text{ поэтому } ab \neq 0.$$

Положим

$$g_5 = -\varepsilon bh_4 + ah_5, \quad (3.9)$$

тогда из условия (2.12) получаем

$$\dot{g}_5 = \pm(a^2 + b^2)(au_2 - \varepsilon bu_1). \quad (3.10)$$

Учитывая условие (2.11), получаем систему, которой удовлетворяют управления:

$$\begin{cases} au_2 - \varepsilon bu_1 = \gamma := \pm(a\dot{h}_5 - \varepsilon b\dot{h}_4)/(a^2 + b^2), \\ u_1 h_4 + u_2 h_5 = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Из первого уравнения  $u_2 = (\varepsilon bu_1 + \gamma)/a$ , тогда второе уравнение дает

$$h_4 u_1 + h_5 u_2 = \gamma h_5 / a \equiv 0.$$

Отсюда  $\gamma = 0$ , поэтому функции  $(h_4, h_5)$  удовлетворяют невырожденной системе

$$\begin{cases} ah_5 - \varepsilon bh_4 \equiv \text{const}, \\ ah_4 + \varepsilon bh_5 \equiv 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

откуда  $(h_4, h_5) \equiv \text{const}$ .



Случай (3'б):  $h_6 \neq 0, h_8 = 0$  или  $h_6 = 0, h_8 \neq 0$ , рассматривается аналогично случаю (3'а).

Случай (4'). Из условия (2.12) получаем  $(h_4, h_5) \equiv \text{const}$ . При этом  $(h_4, h_5) \neq 0$  в силу условия (2.9).

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функции  $h_1(t), \dots, h_8(t)$  удовлетворяют условиям (2.10), (2.13), (3.4), (3.5), и одному из условий (1)–(4). Покажем, что существует экстремаль  $\lambda_t$ , удовлетворяющая условиям  $h_i(\lambda_t) = h_i(t), t \in [0, t_1], i = 1, \dots, 8$ .

Случай (1):  $\Delta = \det A \neq 0$ .

Выразим управление из условия (2.12):

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} h_8 & -h_7 \\ -h_7 & h_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{pmatrix}.$$

Построим соответствующую траекторию  $x(t)$  системы (2.14). Определим липшицеву кривую  $\lambda_t, t \in [0, t_1]$ , такую, что  $h_i(\lambda_t) = h_i(t), \pi(\lambda_t) = x(t), t \in [0, t_1], i = 1, \dots, 8$ . Покажем, что  $\lambda_t$  — аномальная экстремаль, соответствующая управлению  $(u_1(t), u_2(t))$ . Для этого проверим условия (2.9)–(2.14).

Условия (2.9), (2.10), (2.12)–(2.14), очевидно, выполняются. Проверим условие (2.11):

$$u_1 h_4 + u_2 h_5 = (h_8 h_4 \dot{h}_4 - h_7 (h_4 \dot{h}_5 + h_5 \dot{h}_4) + h_6 h_5 \dot{h}_5) / \Delta = \dot{I} / (2\Delta) = 0.$$

В случае (1) достаточность доказана.

Случай (2). Выполняются равенства (3.6)–(3.8). Как и выше в п. (3'а), положим (3.9) и получим (3.10), откуда получаем систему (3.11) на управления. Определитель этой системы равен  $-Q \neq 0$ , поэтому система (3.11) однозначно разрешима:

$$u_1(t) = -\alpha(t)h_5, \quad u_2(t) = \alpha(t)h_4, \quad \alpha(t) = \gamma(t)Q.$$

Как выше в случае (1), построим кривую  $\lambda_t, t \in [0, t_1]$ , такую, что  $h_i(\lambda_t) = h_i(t)$ , а  $\pi(\lambda_t) = x(t)$  есть решение системы (2.14). Очевидно, что  $\lambda_t$  удовлетворяет условиям (2.9)–(2.11), (2.13), (2.14). Условие (2.12) проверяется непосредственно.

Случай (3). Выразим управление из условия (2.11):  $u_1(t) = -\alpha(t)h_5, u_2(t) = \alpha(t)h_4$ .

Построим кривую  $\lambda_t$  как в случае (2). Для этой кривой условия (2.9)–(2.11), (2.13), (2.14), очевидно, выполняются, а условие (2.12) проверяется непосредственно.

Случай (4) рассматривается аналогично случаю (3). □

Из доказательства теоремы 2 получаем следующее предложение.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Если липшицевы функции  $h_1(t), \dots, h_8(t), t \in [0, t_1]$ , удовлетворяют условиям (2.10), (2.13), (3.4), (3.5) и одному из условий (1)–(4) теоремы 2, то соответствующее аномальное управление имеет вид:

$$(1) \quad u_1 = (h_8 \dot{h}_4 - h_7 \dot{h}_5) / \Delta, \quad u_2 = (-h_7 \dot{h}_4 + h_6 \dot{h}_5) / \Delta;$$

$$(2) \quad u_1 = -\alpha h_5, \quad u_2 = \alpha h_4, \quad \alpha = \gamma / Q,$$

где функции  $\alpha, \gamma, Q$  определяются условиями (3.11), (3.6)–(3.8);

- (3), (4)  $u_1 = -\alpha h_5, \quad u_2 = \alpha h_4,$   
 где  $\alpha \in L^\infty[0, t_1]$  — произвольная функция.

Из теоремы 2 получаем следующее описание проекций аномальных экстремалей на плоскость  $(h_4, h_5)$ .

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Если  $\lambda_t$  есть аномальная экстремаль, то кривая  $(h_4(\lambda_t), h_5(\lambda_t))$  принадлежит следующей линии второго порядка:

- (1a)  $\Delta > 0, I \neq 0 \Rightarrow$  эллипс с центром в начале координат,  
 (1a')  $\Delta > 0, I = 0 \Rightarrow$  начало координат,  
 (1b)  $\Delta < 0, I \neq 0 \Rightarrow$  гипербола с центром в начале координат,  
 (1b')  $\Delta < 0, I = 0 \Rightarrow$  пара прямых, пересекающихся в начале координат,  
 (2)  $K \neq 0, \Delta = 0, I \neq 0 \Rightarrow$  прямая, не проходящая через начало координат,  
 (3)  $K \neq 0, \Delta = 0, I = 0 \Rightarrow$  точка,  
 (4)  $K = 0 \Rightarrow$  точка.

Более того, любая из этих кривых может быть получена как проекция некоторой аномальной траектории  $\lambda_t$  на плоскость  $(h_4, h_5)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Следует из геометрии линий уровня квадратичной формы  $I$  и теоремы 2.  $\square$

**3.2. Аномальное слоение и стратификация пространства аномальных экстремалей.** Семейство аномальных экстремалей естественно представляется с помощью симплектического слоения, то есть семейства коприсоединенных орбит, коалгебры  $L^*$  [13]. Симплектическое слоение коалгебры  $L^*$  для левоинвариантной субримановой задачи с вектором роста  $(2, 3, 5, 8)$  описано в работе [7].

**ТЕОРЕМА 3.** Симплектическое слоение коалгебры  $L^*$  в пересечении с аннулятором  $(D^2)^\perp = \{\lambda \in T^*M \mid \langle \lambda, D^2 \rangle = 0\}$  задает слоение этого аннулятора на стратифицированные многообразия размерности один и ноль — вертикальные части аномальных экстремалей. В асимптотическом случае  $\Delta < 0, I = 0$  стратифицированные многообразия суть пары пересекающихся прямых, а в остальных случаях это гладкие многообразия:

- при  $\Delta > 0, I \neq 0$  эти многообразия диффеоморфны окружности,
- при  $(\Delta < 0, I \neq 0)$  и  $(\Delta = 0, K \neq 0, I \neq 0)$  эти многообразия диффеоморфны прямой,
- в остальных случаях каждое из этих многообразий есть точка.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Аномальные экстремали принадлежат аннулятору  $(D^2)^\perp$  в силу условий (2.10). Любая аномальная экстремаль принадлежит пересечению  $(D^2)^\perp$  с совместной поверхностью уровня функций Казимира (3.1), причем семейство аномальных экстремалей задает слоение пятимерного пространства (3.2) на одномерные и нульмерные слои. Остальные утверждения этой теоремы следуют из теоремы 2.  $\square$

Назовем аномальным слоением на пересечении  $(D^2)^\perp \cap L^*$  семейство связанных компонент пересечений аннулятора  $(D^2)^\perp$  с симплектическими слоями в  $L^*$ . В отличие от симплектического слоения, листы аномального слоения не

обязаны быть ни симплектическими, ни даже гладкими многообразиями (см. теорему 3).

Анормальное слоение в рассматриваемой субримановой задаче можно представить следующим образом. Над каждой точкой пересечения  $(D^3)^\perp \cap L^*$  (определяемой значениями линейных функций Казимира  $h_6, h_7, h_8$ ) висит семейство листов анормального слоения — связные компоненты линий уровня первого интеграла  $I$  (сужения кубической функции Казимира  $\mathcal{C}|_{(D^2)^\perp}$ ), см. рис. 2, а также далее рис. 3–7. Семейство линий уровня квадратичной формы  $I$  имеет разный качественный тип в зависимости от знака ее определителя  $\Delta$  и матрицы  $K$ :

- эллипсы и точка при  $\Delta > 0$ ,
- гиперболы и пара прямых при  $\Delta < 0$ ,
- прямые и точки при  $\Delta = 0, K \neq 0$ ,
- точки при  $K = 0$ ,

см. следствие 2. Каждый слой анормального слоения есть анормальная траектория, кроме случая  $(h_4, \dots, h_8) = 0$  — этот случай запрещен в силу условия нетривиальности (2.9) ПМП.

Первый интеграл  $I$  анормальных экстремалей задает естественную стратификацию пространства параметров

$$M_3 = \mathbb{R}_{h_6, h_7, h_8}^3 \cong (D^3)^\perp \cap L^*$$

в зависимости от знакоопределенности квадратичной формы  $I(h_4, h_5)$ :

$$M_3 = E_+ \sqcup E_- \sqcup H \sqcup P_+ \sqcup P_- \sqcup O,$$

где

$$E_\pm = \{\tilde{h} = (h_6, h_7, h_8) \in M_3 \mid \Delta > 0, \text{sign } h_6 = \text{sign } h_8 = \pm 1\}$$

суть эллиптические области,

$$H = \{\tilde{h} \in M_3 \mid \Delta < 0\}$$

есть гиперболическая область,

$$P_\pm = \{\tilde{h} \in M_3 \mid \Delta = 0, K \neq 0, \text{sign } h_6 = \text{sign } h_8 = \pm 1\}$$

суть параболические поверхности, а

$$O = \{\tilde{h} \in M_3 \mid K = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

есть особая точка.

Поверхности  $P_\pm$  образуют две половины эллиптического конуса с вершиной  $O$ , области  $E_\pm$  — внутренние области этих пол, а область  $H$  — внешнюю область, см. рис. 3.

Для каждой точки  $\tilde{h} \in M_3$  квадратичная форма  $I(h_4, h_5)$  задает фазовый портрет семейства проекций анормальных экстремалей на плоскость  $(h_4, h_5)$ :

- эллиптический фазовый портрет при  $\tilde{h} \in E_\pm$ , см. рис. 4,
- гиперболический фазовый портрет при  $\tilde{h} \in H$ , см. рис. 5,
- фазовый портрет из семейства параллельных прямых и одной прямой из неподвижных точек при  $\tilde{h} \in P_\pm$ , см. рис. 6,

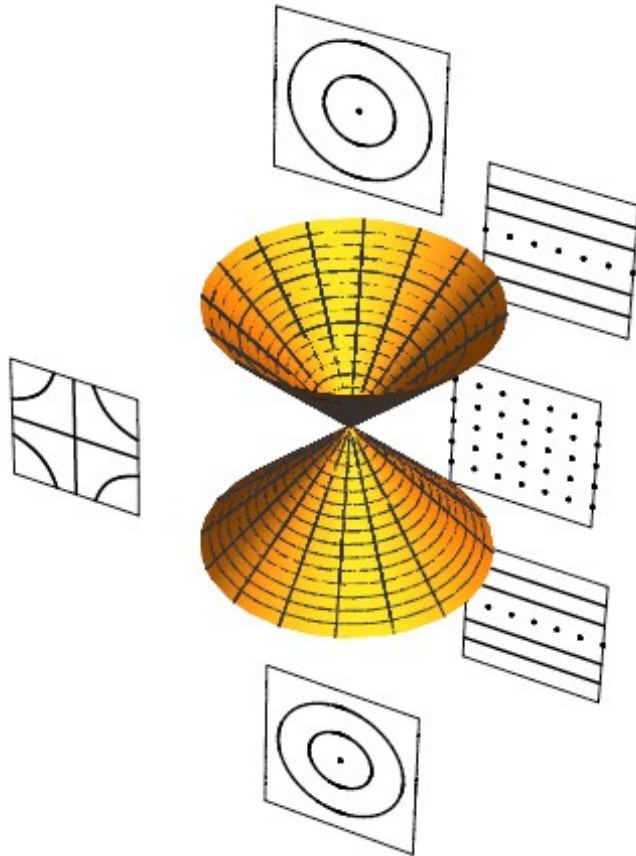


Рис. 2. Анормальное слоение в  $(2, 3, 5, 8)$  субримановой задаче

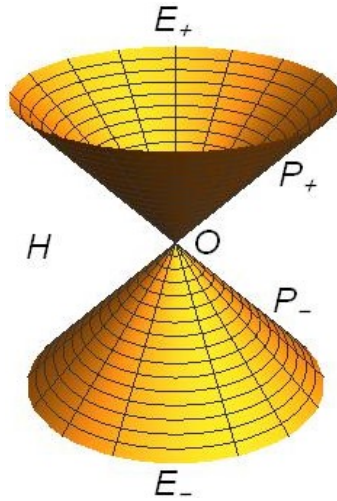


Рис. 3. Стратификация пространства  $M_3$

- и фазовый портрет из семейства неподвижных точек при  $\tilde{h} \in O$ , см. рис. 7. Неподвижные точки отличны от начала координат на плоскости  $(h_4, h_5)$  в силу условия (2.9) — см. окружность в начале координат вместо точки на рис 7.

Таким образом, имеем расслоение пятимерного пространства

$$M_5 = \mathbb{R}_{h_3, \dots, h_8}^5 \cong (D^2)^\perp \cap L^*$$

с трехмерной базой  $M_3$  и двумерным слоем  $\mathbb{R}_{h_4, h_5}^2$ . В свою очередь, каждый двумерный слой  $\mathbb{R}_{h_4, h_5}^2$  расслаивается на линии уровня первого интеграла  $I$ , состоящие из проекций аномальных экстремалей  $(h_4(t), h_5(t))$ .

#### § 4. Сведение к каноническим управлениям

**4.1. Редукция гамильтоновой системы для аномальных экстремалей.** Как показано в разделе 2, гамильтонова управляемая система для аномальных экстремалей имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= u_1 \vec{h}_1 + u_2 \vec{h}_2, \\ h_1 &= h_2 = h_3 = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

в координатах см. (2.9)–(2.14).

Рассмотрим экстремаль  $\lambda_t$ , для которой  $h_4^2 + h_5^2$  отделено от нуля, и определим функцию из пространства  $L^\infty$ :

$$\alpha(t) = \begin{cases} u_2(t)/h_4(\lambda_t) & \text{если } h_4(\lambda_t) \neq 0, \\ -u_1(t)/h_5(\lambda_t) & \text{если } h_5(\lambda_t) \neq 0. \end{cases}$$

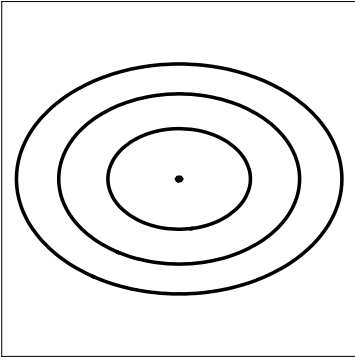


Рис. 4.  
Аномальные  
экстремали  
 $(h_4, h_5)$  в эллиптической  
области  $E_{\pm}$

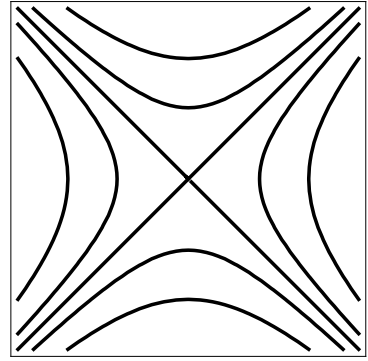


Рис. 5.  
Аномальные  
экстремали  
 $(h_4, h_5)$  в гиперболической  
области  $H$

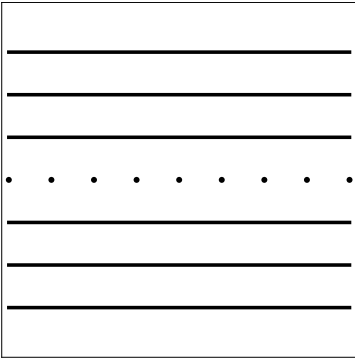


Рис. 6.  
Аномальные  
экстремали  
 $(h_4, h_5)$  в параболической  
области  $P_{\pm}$

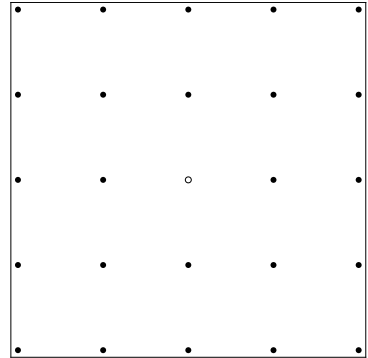


Рис. 7.  
Аномальные  
экстремали  
 $(h_4, h_5)$  в особой  
области  $O$

Тогда  $u_1(t) = -\alpha(t)h_5(\lambda_t)$ ,  $u_2(t) = \alpha(t)h_4(\lambda_t)$ , и управляемая система (4.1) принимает форму

$$\dot{\lambda} = \alpha(-h_5\vec{h}_1 + h_4\vec{h}_2),$$

то есть аномальная экстремаль  $\lambda_t$  является (возможно, немонотонной) перепараметризацией траектории системы

$$\dot{\lambda} = -h_5\vec{h}_1 + h_4\vec{h}_2. \quad (4.2)$$

В координатах вертикальная подсистема системы (4.2) имеет вид:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0. \quad (4.4)$$

Таким образом, гамильтонова система для аномальных траекторий (4.1) редуцируется до системы (4.3) — гамильтоновой системы с гамильтонианом  $\frac{1}{2}I$  и одной степенью свободы. В пунктах 4.3, 4.4 эта редукция выполняется более детально.

**4.2. Асимптотический случай.** В этом пункте рассмотрим случай  $\Delta < 0$ ,  $I = 0$ . В данном случае проекции аномальных экстремалей на плоскость  $(h_4, h_5)$  являются асимптотами гипербол  $\Delta < 0, I \equiv \text{const} \neq 0$ , поэтому будем называть этот случай *асимптотическим*.

4.2.1. Подслучай  $h_8 \neq 0$ . Если  $h_8 \neq 0$ , то имеем разложение

$$I = l_+ \cdot l_- / h_8, \quad l_{\pm} = h_8 h_4 - (h_7 \pm \delta) h_5, \quad \delta = \sqrt{|\Delta|}.$$

Согласно следствию 2, п. (1b'), проекции аномальных экстремалей на плоскость  $(h_4, h_5)$  принадлежат прямым  $l_{\pm} = 0$ . Приведем несколько характерных примеров таких проекций. Для этого обозначим прямые и лучи на плоскости  $(h_4, h_5)$ :

$$\gamma_{\pm} = \{(h_4, h_5) \in \mathbb{R}^2 \mid l_{\pm} = 0\}, \quad (4.5)$$

$$\gamma_{+\pm} = \{(h_4, h_5) \in \mathbb{R}^2 \mid l_+ = 0, \text{sign } h_5 = \pm 1\}, \quad (4.6)$$

$$\gamma_{-\pm} = \{(h_4, h_5) \in \mathbb{R}^2 \mid l_- = 0, \text{sign } h_5 = \pm 1\}. \quad (4.7)$$

Примеры проекций аномальных экстремалей на плоскость  $(h_4, h_5)$  в асимптотическом случае (в скобках указан носитель кривой  $(h_4(\lambda_t), h_5(\lambda_t))$ ):

$$1) (\gamma_+) : (h_4, h_5) = ((h_7 + \delta)t, h_8 t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$2) (\gamma_-) : (h_4, h_5) = ((h_7 - \delta)t, h_8 t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$3) (\gamma_{++} \cup \gamma_{-+}) : (h_4, h_5) = \begin{cases} ((h_7 + \delta)t, h_8 t), & t \leq 0, \\ (-(h_7 - \delta)t, -h_8 t), & t \geq 0, \end{cases}$$

$$4) (\gamma_{++} \cup \gamma_{--}) : (h_4, h_5) = \begin{cases} ((h_7 + \delta)t, h_8 t), & t \leq 0, \\ ((h_7 - \delta)t, h_8 t), & t \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
5) (\gamma_{+-} \cup \gamma_{-+}) : (h_4, h_5) &= \begin{cases} -(h_7 + \delta)t, -h_8t, & t \leq 0, \\ -(h_7 - \delta)t, -h_8t, & t \geq 0, \end{cases} \\
6) (\gamma_{+-} \cup \gamma_{--}) : (h_4, h_5) &= \begin{cases} -(h_7 + \delta)t, -h_8t, & t \leq 0, \\ ((h_7 - \delta)t, h_8t), & t \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

4.2.2. Подслучай  $h_8 = 0$ . Если  $h_8 = 0$ , то  $h_7 \neq 0$ , и имеем разложение

$$I = l_+ \cdot l_-, \quad l_+ = h_5, \quad l_- = h_6 h_5 - 2h_7 h_4.$$

Проекции экстремалей  $(h_4, h_5)(\lambda_t)$  принадлежат прямым  $l_{\pm} = 0$ . Если ввести обозначения (4.5),  $\gamma_{\pm\pm} = \{(h_4, h_5) \in \mathbb{R}^2 \mid l_{\pm} = 0, \text{sign } h_4 = \pm 1\}$ , (4.7), получим примеры проекций аномальных экстремалей на плоскость  $(h_4, h_5)$ :

$$\begin{aligned}
1) (\gamma_+) : (h_4, h_5) &= (t, 0), \quad t \in \mathbb{R}, \\
2) (\gamma_-) : (h_4, h_5) &= (h_6 t, 2h_7 t), \quad t \in \mathbb{R}, \\
3) (\gamma_{++} \cup \gamma_{-+}) : (h_4, h_5) &= \begin{cases} (-t, 0), & t \leq 0, \\ (h_6 t, 2h_7 t), & t \geq 0, \end{cases} \\
4) (\gamma_{++} \cup \gamma_{--}) : (h_4, h_5) &= \begin{cases} (-t, 0), & t \leq 0, \\ (-h_6 t, -2h_7 t), & t \geq 0, \end{cases} \\
5) (\gamma_{+-} \cup \gamma_{-+}) : (h_4, h_5) &= \begin{cases} (t, 0), & t \leq 0, \\ (h_6 t, 2h_7 t), & t \geq 0, \end{cases} \\
6) (\gamma_{+-} \cup \gamma_{--}) : (h_4, h_5) &= \begin{cases} (t, 0), & t \leq 0, \\ (-h_6 t, -2h_7 t), & t \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

В случаях 1), 2) аномальная экстремаль гладкая, а в случаях 3)–6) она имеет угловую точку в начале координат.

**4.3. Основной случай.** Будем называть *основным* случай, дополнительный к асимптотическому:  $\Delta \geq 0$  или  $I \neq 0$ .

ЛЕММА 4.1. Пусть  $\lambda_t, t \in [0, t_1]$ , — аномальная экстремаль, для которой  $\Delta \geq 0$  или  $I \neq 0$ . Тогда соответствующие управления имеют вид

$$u_1(t) = -\alpha(t)h_5(\lambda_t), \quad u_2(t) = \alpha(t)h_4(\lambda_t) \quad \text{для п. в. } t \in [0, t_1], \quad (4.8)$$

где  $\alpha(t)$  — некоторая функция из  $L^\infty[0, t_1]$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны следующие случаи:

- (1a)  $\Delta > 0$ ,
- (1b)  $\Delta < 0, I \neq 0$ ,
- (2)  $K \neq 0, \Delta = 0, I \neq 0$ ,
- (3)  $K \neq 0, \Delta = 0, I = 0$ ,
- (4)  $K = 0$ .

В случаях (1a), (1b), (2), согласно следствию 2, кривая  $(h_4, h_5)$  отделена от начала координат. Тогда функция

$$\alpha(t) = \begin{cases} -u_1(t)/h_5(\lambda_t) = u_2(t)/h_4(\lambda_t), & h_4(\lambda_t)h_5(\lambda_t) \neq 0, \\ -u_1(t)/h_5(\lambda_t), & h_4(\lambda_t) = 0, \\ u_2(t)/h_4(\lambda_t), & h_5(\lambda_t) = 0, \end{cases}$$



очевидно, принадлежит  $L^\infty[0, t_1]$ . Докажем равенства (4.8). Положим  $S = [0, t_1]$ ,  $N = \{t \in S \mid h_4 h_5(\lambda_t) \neq 0\}$ ,  $Z_i = \{t \in S \mid h_i(\lambda_t) = 0\}$ ,  $i = 4, 5$ . Тогда  $S = N \sqcup Z_4 \sqcup Z_5$ .

Если  $t \in N$ , то равенство (4.8) выполнено в силу определения функции  $\alpha(t)$ .

Пусть  $t \in Z_4$ . Положим  $Z_4^1 = \{t \in Z_4 \mid \forall \varepsilon > 0 \ Z_4 \cap \dot{O}_\varepsilon(t) \neq \emptyset\}$ ,  $Z_4^2 = Z_4 \setminus Z_4^1$ .

Если  $t \in Z_4^1$ , то существует последовательность  $t_n \rightarrow t$ ,  $t_n \neq t$ , такая, что  $t_n \in Z_4$ , то есть  $h_4(t_n) = h_4(t) = 0$ , откуда  $h_5(t_n) = h_5(t)$ . Тогда  $\dot{h}_4(t) = \dot{h}_5(t) = 0$ . Если  $\Delta \neq 0$ , то в силу следствия 1,  $(u_1, u_2)(t) = 0$ , и равенство (4.8) доказано. Если  $\Delta = 0$ , то равенство (4.8) вытекает из следствия 1. Итак, это равенство доказано для всех  $t \in Z_4^1$ . Но множество  $Z_4^2$  состоит из изолированных точек и не влияет на выполнение этого равенства почти всюду. Поэтому равенство (4.8) выполняется для п.в.  $t \in Z_4$ .

Аналогично рассматривается случай  $t \in Z_5$ . Поэтому условие (4.8) доказано.

В случаях (3) и (4) имеем  $(h_4, h_5) \equiv \text{const}$ , и условие (4.8) вытекает из следствия 1.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** В асимптотическом случае  $\Delta < 0$ ,  $I = 0$  утверждение Леммы 4.1 неверно во всех случаях 1)( $\gamma_+$ )–6)( $\gamma_{+-} \cup \gamma_{--}$ ). Например, в случае 1)( $\gamma_+$ ) имеем

$$(h_4, h_5) = ((h_7 + \delta)t, h_8 t), \quad (\dot{h}_4, \dot{h}_5) \equiv \text{const},$$

и по следствию 1  $(u_1, u_2) \equiv \text{const}$ . Однако

$$\alpha(t) = -\frac{u_1(t)}{h_4(\lambda_t)} = \frac{u_2(t)}{h_5(\lambda_t)} \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow 0.$$

**СЛЕДСТВИЕ 3.** В основном случае экстремаль  $\lambda_t$  удовлетворяет условиям

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{pmatrix} = \alpha(t) C \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix}, \quad \alpha(t) \in L^\infty[0, t_1],$$

то есть кривая  $\mathbf{h} = (h_4, h_5)^T$  есть (не обязательно монотонная) перепараметризация траектории ОДУ  $\dot{\mathbf{h}} = C\mathbf{h}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из леммы 4.1 получаем (4.8), после этого утверждение получается прямой подстановкой из (2.12).  $\square$

**4.4. Канонический случай.** Будем называть *каноническим* подслучай  $\alpha(t) \equiv 1$  основного случая.

Согласно следствию 3, в основном случае ( $\Delta \geq 0$  или  $I \neq 0$ ) экстремаль  $\lambda_t$  есть перепараметризация некоторой экстремали  $\tilde{\lambda}_s$ , соответствующей каноническому случаю:

$$\lambda_t = \tilde{\lambda}_{s(t)}, \quad s(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau,$$

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} h_4(\tilde{\lambda}_s) \\ h_5(\tilde{\lambda}_s) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} h_4(\tilde{\lambda}_s) \\ h_5(\tilde{\lambda}_s) \end{pmatrix}.$$

Поэтому в основном случае достаточно исследовать аномальные экстремали в каноническом подслучае  $\alpha \equiv 1$ .

В каноническом случае аномальная экстремаль  $\lambda_t$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} h_1 = h_2 = h_3 = 0, \\ \begin{pmatrix} \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0, \\ u_1 = -h_5, \quad u_2 = h_4, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\dot{x} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad x(0) = 0. \quad (4.11)$$

Из уравнения (4.9) для вектора  $\mathbf{h} = (h_4, h_5)^T$  получаем

$$\mathbf{h}(t) = e^{Ct} \mathbf{h}^0. \quad (4.12)$$

Далее, из равенств (4.10) получаем

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -h_7 & -h_8 \\ -h_6 & -h_7 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

поэтому  $u(t) = e^{Bt} u(0)$ .

**4.5. Реконструкция решений гамильтоновой системы для аномальных экстремалей.** В основном случае ( $\Delta \geq 0$  или  $I \neq 0$ ) аномальные экстремальные траектории являются (возможно немонотонными) перепараметризациями решений системы (4.9), (4.10), (4.11). Решения этой системы выражаются в квадратурах:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= - \int_0^t h_5 dt, \\ x_2(t) &= \int_0^t h_4 dt, \\ x_3(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t (h_5 x_2 + h_4 x_1) dt, \\ x_4(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t h_4 (x_1^2 + x_2^2) dt, \\ x_5(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t h_5 (x_1^2 + x_2^2) dt, \\ x_6(t) &= \frac{1}{6} \int_0^t h_4 x_1^3 dt, \\ x_7(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t (h_5 x_1 x_2^2 + h_4 x_1^2 x_2) dt, \\ x_8(t) &= \frac{1}{6} \int_0^t h_5 x_2^3 dt, \end{aligned}$$

где  $(h_4(t), h_5(t))$  задаются равенством (4.12). Эти квадратуры выражаются через тригонометрические, гиперболические и полиномиальные функции, их явные формулы будут приведены в последующей работе.

**§ 5. Строгая и нестрогая аномальность экстремальных траекторий**

Аномальная экстремальная траектория называется *нестрого аномальной*, если она является проекцией некоторой нормальной экстремали; в противном случае она называется *строго аномальной*.

В этом разделе мы классифицируем все аномальные экстремали на строго аномальные и нестрога аномальные.

**5.1. Нормальный случай.** Пусть  $\nu = -1$ . Тогда из условия максимума ПМП (2.7) получаем  $u_i = h_i, i = 1, 2$ , поэтому

$$\max_{u \in \mathbb{R}^2} h_u^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2}(h_1^2(\lambda) + h_2^2(\lambda)) =: H(\lambda). \tag{5.1}$$

Следовательно, нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе  $\lambda' = \vec{H}(\lambda)$ :

$$h'_1 = -h_3h_2, \tag{5.2}$$

$$h'_2 = h_3h_1, \tag{5.3}$$

$$h'_3 = h_1h_4 + h_2h_5, \tag{5.4}$$

$$h'_4 = h_6h_1 + h_7h_2, \tag{5.5}$$

$$h'_5 = h_7h_1 + h_8h_2, \tag{5.6}$$

$$h'_6 = h'_7 = h'_8 = 0, \tag{5.7}$$

$$x' = h_1X_1 + h_2X_2, \quad x(0) = 0. \tag{5.8}$$

Скорость на нормальных экстремальных траекториях постоянна:  $|x'(s)| = 2H \equiv \text{const}$ . Мы обозначаем штрихом производную по натуральному параметру  $s$ , чтобы отличить его от канонического параметра  $t$  на аномальных экстремалих. Очевидно, что нестрога аномальной может быть лишь натуральная перепараметризация аномальной траектории. Натурально параметризованной называется траектория постоянной скорости, то есть траектория, вдоль которой  $u_1^2 + u_2^2 \equiv \text{const}$ .

**5.2. Критерий строгой аномальности.**

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $x(t), t \in [0, t_1]$ , есть каноническая аномальная траектория. Ее натуральная перепараметризация  $\tilde{x}(s) = x(t(s)), |\tilde{x}'(s)| \equiv \text{const}$ , строго аномальна тогда и только тогда, когда не существует постоянного действительного вектора  $c = (c_0, \dots, c_5) \in \mathbb{R}^6$  такого, что на всем отрезке  $[0, t_1]$  выполнялось бы тождество:

$$k(t) + P(t; c) \equiv 0, \tag{5.9}$$

$$k(t) = \frac{\ddot{x}_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1\ddot{x}_2}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.10}$$

$$P(t; c) = c_0 + c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_1^2(t) + c_4x_1(t)x_2(t) + c_5x_2^2(t). \tag{5.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать натуральную перепараметризацию траектории  $x(t)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(s) &= x(t(s)), \quad t: [0, s_1] \rightarrow [0, t_1], \\ t(s) &= \int_0^s \frac{d\tau}{\rho(t(\tau))}, \quad \rho(t) = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}, \\ \left| \frac{d\tilde{x}(s)}{ds} \right| &= |\tilde{x}'(s)| \equiv 1.\end{aligned}$$

Необходимость. Пусть  $x(t)$  есть каноническая строго аномальная траектория. Покажем, что не существует такого  $c \in \mathbb{R}^6$ , что  $k(t) + P(t; c) \equiv 0$  для всех  $t \in [0, t_1]$ .

От противного. Допустим, что

$$\exists c \in \mathbb{R}^6 \quad \forall t \in [0, t_1]: \quad k(t) + P(t; c) \equiv 0. \quad (5.12)$$

Тогда покажем, что существует нормальная экстремаль  $\tilde{\lambda}_s$ , соответствующая аномальной траектории  $\tilde{x}(s)$ . Пусть  $c \neq 0$ , определим функции  $h_1(s), \dots, h_8(s)$  следующим образом:

$$h_1(s) = \frac{d\tilde{x}_1(s)}{ds}, \quad (5.13)$$

$$h_2(s) = \frac{d\tilde{x}_2(s)}{ds}, \quad (5.14)$$

$$h_3(s) = \tilde{P}(s; \bar{c}), \quad (5.15)$$

$$h_4(s) = 2c_3\tilde{x}_1(s) + c_4\tilde{x}_2(s) + c_1, \quad (5.16)$$

$$h_5(s) = c_4\tilde{x}_1(s) + 2c_5\tilde{x}_2(s) + c_2, \quad (5.17)$$

$$h_6 = 2c_3, \quad h_7 = c_4, \quad h_8 = 2c_5, \quad (5.18)$$

где  $\tilde{P}(s; c) = P(t(s); c)$ . Покажем, что функции  $h_1(s), \dots, h_8(s)$  удовлетворяют вертикальной подсистеме (5.2)–(5.7) нормальной гамильтоновой системы ПМП.

Уравнения (5.7), очевидно, выполняются.

Функция (5.17) удовлетворяет уравнению (5.6):

$$h_5' = c_4\tilde{x}_1' + 2c_5\tilde{x}_2' = h_7h_1 + h_8h_2,$$

а функция (5.16) удовлетворяет уравнению (5.5):

$$h_4' = 2c_3\tilde{x}_1' + c_4\tilde{x}_2' = h_6h_1 + h_7h_2.$$

Функция (5.13) удовлетворяет уравнению (5.2). Действительно, имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \dot{x}_2\ddot{x}_2}{\rho^3}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}h_1'(s) &= \tilde{x}_1''(s) = (x_1(t(s)))'' = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}_1(t)}{\rho(t)} \right) \Big|_{t(s)} \frac{1}{\rho(t(s))} = \\ &= \frac{\ddot{x}_1(t)\rho^2(t) - \dot{x}_1(t)(\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \dot{x}_2\ddot{x}_2)}{\rho^4(t)} \Big|_{t(s)} = \\ &= \dot{x}_2(t)t'(s) \frac{\ddot{x}_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1\ddot{x}_2}{\rho^3(t)} \Big|_{t(s)} = \tilde{x}_2'(s)k(t(s)) = -h_2(s)h_3(s),\end{aligned}$$

что подтверждает уравнение (5.2).

Аналогично можно показать, что функция (5.14) удовлетворяет уравнению (5.3):

$$h'_2(s) = -\tilde{x}'_1(s)k(t(s)) = h_3(s)h_1(s).$$

Уравнение (5.4) проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} h'_3(s) &= \tilde{P}'(s; c) = \dot{P}(t(s); c)t'(s) = \\ &= (c_1\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 + 2c_3x_1\dot{x}_1 + c_4(\dot{x}_1x_2 + x_1\dot{x}_2) + 2c_5x_2\dot{x}_2)/\rho|_{t(s)} = \\ &= c_1\tilde{x}'_1 + c_2\tilde{x}'_2 + 2c_3\tilde{x}_1\tilde{x}'_1 + c_4(\tilde{x}'_1\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}'_2) + 2c_5\tilde{x}_2\tilde{x}'_2 = h_1h_4 + h_2h_5. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что функции  $h_1(s), \dots, h_8(s)$  являются решением вертикальной подсистемы (5.2)–(5.7). Определим кривую  $\lambda_s \in T^*\mathbb{R}^8$  такую, что  $h_i(\lambda_s) = h_i(s)$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , и  $\pi(\lambda_s) = \tilde{x}(s)$ . Тогда  $\lambda_s \neq 0$  есть нормальная экстремаль, проецирующаяся в траекторию  $\tilde{x}(s)$ , что противоречит ее строгой аномальности.

Пусть  $c = 0$ . Тогда  $k(t) \equiv 0$ , то есть линия  $(x_1, x_2)(t)$  есть прямая. Как показано в статье [6], такие траектории нестрого аномальны. Необходимость доказана.

Достаточность. По условию

$$\exists c \in \mathbb{R}^6 \quad \forall t \in [0, t_1] : \quad k(t) + P(t; c) \equiv 0. \quad (5.19)$$

Докажем, что  $\tilde{x}(s)$  есть строго аномальная траектория.

От противного, допустим, что  $\tilde{x}(s)$  нестрого аномальна. Тогда ей соответствует нормальная экстремаль  $\lambda_s \neq 0$ , удовлетворяющая условиям (5.2)–(5.8). Докажем, что функции  $h_i(\lambda_s)$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , удовлетворяют условиям (5.13)–(5.18) для некоторого вектора  $c = (c_0, \dots, c_5) \in \mathbb{R}^6$ .

Условия (5.7) означают, что равенства (5.18) выполняются при  $c_3 = h_6/2$ ,  $c_4 = h_7$ ,  $c_5 = h_8/2$ .

Из ОДУ (5.8) для координат  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$  получаем равенства (5.13), (5.14).

Интегрируя ОДУ (5.5), (5.6), получаем равенства (5.16), (5.17) для  $c_1 = h_4(\lambda_0)$ ,  $c_2 = h_5(\lambda_0)$ .

Наконец, из ОДУ (5.4) получаем равенство (5.15) для  $c_0 = h_3(\lambda_0)$ .

Итак, существует вектор  $c = (c_0, \dots, c_5) \in \mathbb{R}^6$ , для которого выполнены условия (5.13)–(5.18) для функций  $h_i(\lambda_s)$ ,  $i = 1, \dots, 8$ . Для этого вектора  $c$  получаем тождество

$$k(t(s)) + P(t(s), c) \equiv 0, \quad s \in [0, s_1].$$

Но монотонная непрерывная функция  $t(s)$  принимает на отрезке  $[0, s_1]$  все значения из отрезка  $[0, t_1]$ , поэтому получаем тождество

$$k(t) + P(t; c) \equiv 0, \quad t \in [0, t_1],$$

противоречие. Достаточность доказана. □

Введем обозначения:  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,  $k(t) = \frac{\dot{x}_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1\ddot{x}_2}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{\frac{3}{2}}}$  — кривизна кривой  $\gamma(t)$ ;  $P_n(x_1, x_2)$  — полином степени  $n$  от  $x_1, x_2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Из теоремы 4 получаем следствие о нормальной экстремальной траектории.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если  $x(t)$  есть нормальная экстремальная траектория, то  $k(t) \equiv P_2(x_1(t), x_2(t))$  для некоторого полинома  $P_2(x_1, x_2)$ .

**5.3. Кривизна конических сечений.** Для того, чтобы получить явные условия строгой/нестрогой аномальности, докажем следующее общее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  есть произвольная дуга эллипса (не окружности), гиперболы или параболы. Тогда

$$k(t) \neq P_n(x_1(t), x_2(t))$$

ни для какого полинома  $P_n(x_1, x_2)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение не зависит от выбора декартовых координат в плоскости  $(x_1, x_2)$ , поэтому можно считать, что кривые второго порядка задаются каноническими уравнениями.

Рассмотрим эллипс (не окружность):

$$x_1 = a \cos t, \quad x_2 = b \sin t, \quad a \neq b, \quad t \in \mathbb{R},$$

его кривизна равна

$$k(t) = -\frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Рассмотрим аналитическое продолжение функции  $k^2(t)$  — однозначную аналитическую функцию

$$k^2(z) = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 z + b^2 \cos^2 z)^3}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция  $k^2(z)$  мероморфна в  $\mathbb{C}$  [14], так как имеет в конечной плоскости только особые точки — изолированные полюсы:

$$z_m = \frac{1}{2i} \ln \frac{a \mp b}{a \pm b} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Гипербола

$$x_1 = a \operatorname{ch} t, \quad x_2 = b \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R},$$

имеет кривизну

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{3/2}},$$

и аналитическое продолжение функции  $k^2(t)$  есть мероморфная аналитическая функция

$$k^2(z) = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \operatorname{sh}^2 z + b^2 \operatorname{ch}^2 z)^3}, \quad z \in \mathbb{C},$$

так как имеет в конечной плоскости только изолированные полюсы

$$z_m = i \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + im\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Парабола

$$x_1 = t^2, \quad x_2 = \sqrt{2p}t, \quad p > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

имеет кривизну

$$k(t) = \frac{p}{(2t^2 + p)^{3/2}},$$

а аналитическое продолжение функции  $k^2(t)$  есть рациональная (поэтому мероморфная) аналитическая функция

$$k^2(z) = \frac{p^2}{(2z^2 + p)^3}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть  $k(t) \equiv P_n(x_1(t), x_2(t))$ , тогда

$$k^2(t) = P_{2n}(x_1(t), x_2(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

По теореме единственности для аналитических функций [14], для аналитических продолжений этих функций выполняется тождество

$$k^2(z) \equiv P_{2n}(x_1(z), x_2(z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Но функция  $P_{2n}(x_1(z), x_2(z))$  целая, а  $k^2(z)$  мероморфна. Полученное противоречие доказывает данное предложение.  $\square$

#### 5.4. Классификация аномальных траекторий на строго и нестрого аномальные.

**ТЕОРЕМА 5.** *Натурально параметризованная аномальная траектория нестрого аномальна тогда и только тогда, когда ее проекция на плоскость  $(x_1, x_2)$  есть прямолинейный отрезок или дуга окружности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $(x_1(t), x_2(t))$  есть прямолинейный отрезок или дуга окружности, то кривизна  $k(t)$  постоянна. Тождество (5.9) выполняется для постоянного полинома  $P(t; c) \equiv c_0$ . Поэтому аномальная траектория нестрого аномальна по теореме 4.

**Необходимость.** Пусть аномальная траектория  $x(t)$  натурально параметризована и нестрого аномальна. Пусть  $\lambda_t$  — соответствующая аномальная экстремаль.

Если  $\lambda_t$  удовлетворяет основному случаю ( $\Delta \geq 0$  или  $I \neq 0$ ), то кривая  $(x_1(t), x_2(t))$  есть дуга эллипса, гиперболы, параболы или прямой. В случае эллипса (не окружности), гиперболы или параболы траектория  $x(t)$  строго аномальна (по теореме 4 и предложению 1). Поэтому в основном случае кривая  $(x_1(t), x_2(t))$  есть дуга окружности или прямолинейный отрезок, что и требовалось доказать.

Если  $\lambda_t$  удовлетворяет асимптотическому случаю ( $\Delta < 0$ ,  $I = 0$ ), то кривая  $(x_1(t), x_2(t))$  есть прямолинейный отрезок или ломаная из прямолинейных отрезков. Из этих кривых гладким является только прямолинейный отрезок, поэтому только он и будет проекцией нестрого аномальной траектории.  $\square$

## § 6. Проекция аномальных экстремалей на плоскость $(x_1, x_2)$

ТЕОРЕМА 6. (а) Проекция аномальной экстремали  $\lambda_t$ ,  $t \in [0, t_1]$ , на плоскость  $(x_1, x_2)$  задается уравнением

$$P(x_1, x_2, \lambda_0) = h_6 x_1^2 + 2h_7 x_1 x_2 + h_8 x_2^2 + 2h_4^0 x_1 + 2h_5^0 x_2 = 0, \quad (6.1)$$

$$h_4^0 = h_4(\lambda_0), \quad h_5^0 = h_5(\lambda_0).$$

(б) Эта проекция является дугой следующей кривой, проходящей через начало координат:

- (1а)  $\Delta > 0, \quad I \neq 0 \Rightarrow$  эллипс,
- (1а')  $\Delta > 0, \quad I = 0 \Rightarrow$  точка,
- (1б)  $\Delta < 0, \quad I \neq 0 \Rightarrow$  гипербола,
- (1б')  $\Delta < 0, \quad I = 0 \Rightarrow$  пара пересекающихся прямых,
- (2)  $K \neq 0, \quad \Delta = 0, \quad I \neq 0 \Rightarrow$  парабола,
- (3)  $K \neq 0, \quad \Delta = 0, \quad I = 0, \quad (h_4^0, h_5^0) \neq 0 \Rightarrow$  прямая,
- (3')  $K \neq 0, \quad \Delta = 0, \quad I = 0, \quad (h_4^0, h_5^0) = 0 \Rightarrow$  точка,
- (4)  $K = 0, \quad (h_4^0, h_5^0) \neq 0 \Rightarrow$  прямая.

(с) Обратно, для любой такой кривой, проходящей через начало координат, существует аномальная траектория, проецирующаяся в нетривиальную дугу этой кривой на плоскости  $(x_1, x_2)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\Delta \neq 0$ . Из равенств

$$I(h_4, h_5) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_4^0 \\ h_5^0 \end{pmatrix}$$

получаем

$$I(h_4(x_1, x_2), h_5(x_1, x_2)) = \Delta P(x_1, x_2, \lambda_0) = 0,$$

и тождество (6.1) доказано в случае  $\Delta \neq 0$ .

Рассмотрим случай аномальной экстремали  $\bar{\lambda}_t$ , для которой  $\bar{\Delta} = 0$ . Пусть экстремали  $\bar{\lambda}_t$  соответствует управление  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ . Выберем любую последовательность  $\lambda_0^n \in T_0^* \mathbb{R}^8$  такую, что  $h_1(\lambda_0^n) = h_2(\lambda_0^n) = h_3(\lambda_0^n) = 0$ ,  $\Delta^n = \Delta(\lambda_0^n) \neq 0$  и  $\lambda_0^n \rightarrow \bar{\lambda}_0$ . Пусть  $\lambda_t^n$ ,  $t \in [0, t_1]$ , есть аномальная экстремаль с начальным условием  $\lambda_0^n$ , соответствующая управлению  $\bar{u}(t)$ . В силу непрерывной зависимости решения ОДУ от начального условия имеем  $\lambda_t^n \rightarrow \bar{\lambda}_t$  при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $t \in [0, t_1]$ . Отсюда

$$0 = P(x_1^n(t), x_2^n(t), \lambda_0^n) \rightarrow P(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{\lambda}_0) = 0$$

для всех  $t \in [0, t_1]$ , и тождество (6.1) доказано при  $\Delta = 0$ .

Пункт (а) доказан. Докажем пункт (б).

В случае (1а) кривая  $(h_4, h_5)$  есть дуга эллипса (следствие 2), а кривая

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} h_4^0 \\ h_5^0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

есть ее аффинный образ, поэтому тоже есть дуга эллипса.



В случае (1а') имеем  $(h_4, h_5) \equiv 0$ , и по лемме 4.1 имеем

$$(u_1, u_2) = (-\alpha h_5, \alpha h_4) \equiv 0,$$

поэтому  $(x_1, x_2)(t) \equiv (0, 0)$ .

Случай (1b), (1b') рассматриваются так же, как случай (1a) выше.

В случае (2) матрица  $C$  имеет жорданову форму

$$M = TCT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det T \neq 0.$$

С точностью до перепараметризации  $\dot{\mathbf{h}} = C\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h}^0 \neq 0$ , поэтому вектор  $\tilde{\mathbf{h}} = T\mathbf{h}$  удовлетворяет ОДУ  $\dot{\tilde{\mathbf{h}}} = M\tilde{\mathbf{h}}$ ,  $\tilde{\mathbf{h}}^0 \neq 0$ , откуда  $\tilde{h}_5 \equiv \text{const}$ ,  $\tilde{h}_4 = \tilde{h}_4^0 + t\tilde{h}_5$ . Поэтому

$$T \begin{pmatrix} -x_2(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix} = \int_0^t T \begin{pmatrix} -u_2(\tau) \\ u_1(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} \tilde{h}_4(\tau) \\ \tilde{h}_5(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \tilde{h}_4^0 t + t^2 \tilde{h}_5^0 / 2 \\ \tilde{h}_5^0 t \end{pmatrix}.$$

Следовательно, кривая  $(x_1(t), x_2(t))$  есть парабола.

Случаи (3), (4) очевидны.

Пункт (b) доказан.

Пункт (c): выбирая параметры  $(h_4^0, h_5^0, h_6, h_7, h_8)$ , можно построить любой полином  $P(x_1, x_2, \lambda_0)$  с нулевым свободным членом. В свою очередь, любая из указанных в п. (1a)–(4) кривых второго порядка, проходящая через начало координат, может быть задана уравнением (6.1). Поэтому любая из этих кривых может быть получена как проекция на плоскость  $(x_1, x_2)$  некоторой аномальной экстремали  $\lambda_t$ .  $\square$

## § 7. Коранг аномальных траекторий

*Корангом* экстремальной траектории называется максимальное число линейно независимых экстремалей, проецирующихся в эту траекторию [1]. Коранг есть мера вырожденности семейства экстремалей в данной задаче. На основе нашего исследования структуры аномальных траекторий и анализа нормальной гамильтоновой системы ПМП [4] можно получить оценки коранга аномальных траекторий.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Пусть  $x(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , есть натурально параметризованная экстремальная траектория.

Если  $(x_1(t), x_2(t))$  есть прямолинейный отрезок, то  $\text{corank } x(\cdot) \geq 6$ .

Если  $(x_1(t), x_2(t))$  есть дуга окружности, то  $\text{corank } x(\cdot) \geq 2$ .

Если  $(x_1(t), x_2(t))$  есть дуга эллипса (не окружности), гиперболы или параболы, или ломаная, то  $\text{corank } x(\cdot) = 1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Перечислим линейно независимые экстремали  $\lambda_t$ , заведомо проецирующиеся в прямую  $(x_1(t), x_2(t))$ :

1. аномальный асимптотический случай  $\Delta < 0$ ,  $I = 0$ ,
2. аномальный параболический случай  $K \neq 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $I = 0$ ,
3. аномальный особый случай  $K = 0$ ,  $(h_4^0, h_5^0) \neq 0$ ,

4. нормальный случай устойчивого равновесия маятника [4]:

$$h_1 \equiv \text{const} \neq 0, \quad h_2 = h_3 = h_4 = h_6 = h_7 = h_8 \equiv 0, \quad h_5 \equiv \text{const} \neq 0,$$

5. нормальный случай неустойчивого равновесия маятника [4]:

$$h_2 \equiv \text{const} \neq 0, \quad h_1 = h_3 = h_5 = h_6 = h_7 = h_8 \equiv 0, \quad h_4 \equiv \text{const} \neq 0,$$

6. нормальный случай Гейзенберга [4]:

$$(h_1, h_2) \equiv \text{const} \neq 0, \quad h_3 = \dots = h_8 = 0.$$

Поэтому коранг прямолинейной траектории не меньше шести.

Если  $(x_1(t), x_2(t))$  есть дуга окружности, то в нее проецируются следующие линейно независимые экстремали:

1. аномальный эллиптический круговой случай:

$$\Delta > 0, \quad h_6 = h_8 \neq 0, \quad h_7 = 0,$$

2. нормальный круговой случай Гейзенберга [4]:

$$h_3 \neq 0, \quad h_4 = \dots = h_8 = 0.$$

Поэтому коранг круговой траектории не меньше двух.

Если  $(x_1(t), x_2(t))$  есть дуга эллипса (не окружности), гиперболы или параболы, то не существует нормальной экстремали, в нее проецирующейся (теорема 5). С другой стороны, аномальная экстремаль, проецирующаяся в эту дугу, единственна с точностью до скалярного множителя (теорема 5). Поэтому коранг соответствующей траектории равен единице.

Пусть  $(x_1(t), x_2(t))$  есть ломаная. Рассмотрим любую экстремаль  $\lambda_t$ , проецирующуюся в траекторию  $x(t)$ . Тогда  $\lambda_t$  аномальна и удовлетворяет асимптотическому случаю ( $\Delta < 0, I = 0$ ), так как в нормальном случае и в аномальном основном случае кривая  $\lambda_t$  гладкая. Поэтому кривая  $(h_4(\lambda_t), h_5(\lambda_t))$  удовлетворяет случаям 3)–6) пунктов 4.2.1 и 4.2.2. Из явных выражений для функций  $h_4, h_5$  в этих пунктах видно, что параметры  $(h_4^0, h_5^0, h_6, h_7, h_8)$  определяются кривой  $x(t)$  однозначно, с точностью до скалярного множителя. Поэтому  $\text{corank } x(\cdot) = 1$ .  $\square$

## § 8. Заключение

В этой работе продолжено исследование аномальных экстремалей в левинвариантной субримановой задаче с вектором роста  $(2, 3, 5, 8)$ , начатое в работе [6]. Описана структура аномальных экстремалей. Для аномальных траекторий исследована их строгая/нестрогая аномальность, описаны проекции на плоскость  $(x_1, x_2)$ , приведены примеры негладких траекторий, получены оценки коранга.

Ряд важных вопросов еще требует изучения:

- явная параметризация аномальных управлений и траекторий;
- оптимальность аномальных траекторий;
- геометрия аномального многообразия (подмножества в пространстве состояний, заполненного аномальными траекториями).

Эти вопросы будут предметом дальнейших исследований.

## Благодарность

Авторы выражают благодарность рецензенту, замечания которого помогли улучшить изложение результатов работы.

## Список литературы

- [1] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005.
- [2] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, American Mathematical Society, 2002.
- [3] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry*, Lecture Notes: Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2019.
- [4] Ю. Л. Сачков, “Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны”, *Математический сборник*, No. 9, 2003, 63–90.
- [5] A. A. Ardentov, Yu. L. Sachkov, “Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group”, *ESAIM: COCV*, No. 4, 2015, 958–988.
- [6] Ю. Л. Сачков, Е. Ф. Сачкова, “Вырожденные аномальные траектории в субримановой задаче с вектором роста  $(2, 3, 5, 8)$ ”, *Дифференциальные уравнения*, No. 3, 2017, 362–374.
- [7] Л. В. Локуцкий, Ю. Л. Сачков, “Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше”, *Матем. сб.*, No. 5, 2018, 74–119.
- [8] Л. С. Понtryгин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М., 1961.
- [9] R. Montgomery, “Abnormal minimizers”, *SIAM J. Control Optim.*, No. 32(6), 1994, 1605–1620.
- [10] R. Montgomery, “Survey of singular geodesics”, *Progress in Mathematics*, **144**, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [11] А. А. Аграчев, А. В. Сарычев, “Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем”, *Докл. АН СССР*, No. 295, 1987.
- [12] J.-P. Gauthier, Yu. L. Sachkov, “On the free Carnot  $(2, 3, 5, 8)$  group”, *Программные системы: теория и приложения*, No. 2, 2015, 45–61.
- [13] A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, American Mathematical Society, 2004.
- [14] А. И. Маркушевич, *Краткий курс теории аналитических функций*, Наука, М., 1978.

**Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)**

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН  
(Переславль-Залесский), Научно-технологический  
университет «Сириус» (Сочи)  
E-mail: [yusachkov@gmail.com](mailto:yusachkov@gmail.com)

Поступила в редакцию

8 июня 2020 г.

**Е. Ф. Сачкова (E. F. Sachkova)**

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН  
(Переславль-Залесский), Научно-технологический  
университет «Сириус» (Сочи)  
E-mail: [efsachkova@mail.ru](mailto:efsachkova@mail.ru)