

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Маштаков, В. А. Юмагужин, В. Н. Юмагужина, О решениях уравнений Фоккера—Планка, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 178, 102–111

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-178-102-111>

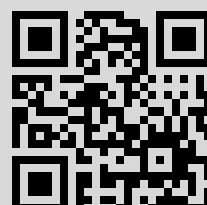
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.55

9 ноября 2020 г., 22:33:09





О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА—ПЛАНКА

© 2020 г. А. П. МАШТАКОВ, В. А. ЮМАГУЖИН, В. Н. ЮМАГУЖИНА

Аннотация. В работе найдены необходимые и достаточные условия существования преобразования независимых пространственных переменных, приводящего уравнение Фоккера—Планка общего вида к уравнению с постоянными коэффициентами. На основе этих условий вычислены некоторые явные решения в двумерном случае. Исследование вдохновлено методами обработки изображений, в которых уравнение Фоккера—Планка описывает процесс размытия изображения.

Ключевые слова: оператор с частными производными второго порядка, расслоение джетов, дифференциальный инвариант, проблема эквивалентности.

ON SOLUTIONS TO FOKKER—PLANCK EQUATIONS

© 2020 А. P. MASHTAKOV, V. A. YUMAGUZHIN, V. N. YUMAGUZHINA

ABSTRACT. In this paper, we find necessary and sufficient conditions for existence of a transformation of independent spatial variables that transforms the Fokker—Planck equation to an equation with constant coefficients. Using these conditions, we calculate explicit solutions for two-dimensional Fokker—Planck equations. Our motivation comes from applications in image processing, where the Fokker—Planck equation typically describes blurring processes.

Keywords and phrases: second-order partial differential operator, jet bundle, differential invariant, equivalence problem.

AMS Subject Classification: 83C05, 83C15, 35A30, 53A55, 58J70, 58D27

1. **Введение.** В работе исследуется уравнение Фоккера—Планка

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \left(- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \circ a^i(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \circ a^{ij}(x) \right) u(t, x), \quad (1)$$

где $x = (x^1, \dots, x^n) \in M \subset \mathbb{R}^n$, a^i , a^{ij} являются гладкими функциями, $(a^i(x))$ — вектор сноса, $(a^{ij}(x))$ — тензор диффузии, удовлетворяющий неравенству

$$\det(a^{ij}(x)) \neq 0 \quad (2)$$

для всех x из области определения коэффициентов уравнения.

Найдены необходимые и достаточные условия существования преобразования независимых пространственных переменных, приводящего уравнение Фоккера—Планка (1) к уравнению с постоянными коэффициентами (теорема 3). На основе этих условий вычислены некоторые явные решения в случае $n = 2$ для уравнений, заданных в изотермических координатах (теорема 5).

Работа А. П. Маштакова и В. А. Юмагужина выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01387).

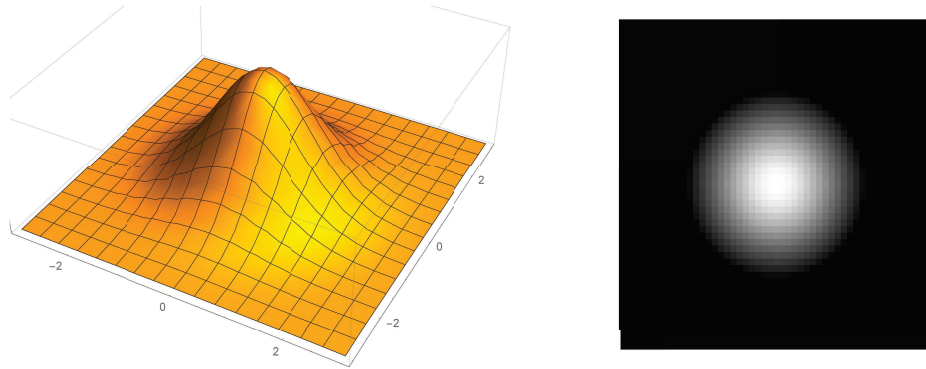


Рис. 1. Синтетическое изображение пятна, заданное функцией Гаусса (5).

Все разделы статьи за исключением раздела 5.1.3 выполнены А. П. Маштаковым и В. А. Юмагужиным. Авторы выражают благодарность Ю. Л. Сачкову, инициировавшему эту работу.

2. Мотивация: анизотропное размытие изображений. Исследование вдохновлено методами обработки изображений, в которых уравнение Фоккера—Планка описывает процесс размытия (диффузии) изображения (см. [12]). Рассмотрим два модельных примера: фильтр Перона—Малика на $\mathbb{R}^2$ и анизотропную диффузию на $SE(2)$. В первом примере коэффициенты диффузии определяются величиной градиента изображения, а фильтр будет применен к синтетическому изображению пятна, моделируемому гауссовой функцией. Второй пример восходит к модели восприятия контура зрительной системой человека (см. [3]); исходное изображение здесь является функциональным параметром.

2.1. Фильтр Перона—Малика для синтетического изображения пятна. В области обработки изображений и компьютерного зрения анизотропная диффузия, также называемая диффузией Перона—Малика, представляет собой способ уменьшения шума на изображении без удаления содержательной части. Анизотропная диффузия — это процесс создания параметрического семейства последовательно все более размытых изображений, основанных на диффузионном процессе. Каждое результирующее изображение представляет собой комбинацию между исходным изображением и фильтром, который зависит от локального содержимого исходного изображения.

Пусть исходное полутоновое изображение задано функцией яркости $I : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] : x \mapsto I(x)$. Анизотропная диффузия описывается эволюционным процессом

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= \nabla c(x) \nabla u(t, x) + c(x) \Delta^L u(t, x), \\ u(0, x) &= I(x), \quad u(t, \partial M) = I(\partial M), \end{aligned} \quad (3)$$

где $x = (x^1, x^2) \in M$ — координаты в области определения изображения, ∂M — граница области, $\nabla = (\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2)$ — градиент, $\Delta^L = \partial^2/(\partial x^1)^2 + \partial^2/(\partial x^2)^2$ — оператор Лапласа; функция $c : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется коэффициентом диффузии.

В своей новаторской работе [7] Перона и Малик предложили выбирать коэффициент диффузии $c(x)$ основываясь на величине градиента изображения $\nabla I(x)$ так, чтобы области изображения с небольшим градиентом размывались сильно (удаление шума), а области с большим значением градиента размывались слабо (сохранение содержательных частей). Одним из способов выбора такой функции $c(x)$ является

$$c(x) = \exp \left(-\frac{\|\nabla I(x)\|^2}{K} \right), \quad (4)$$

где $K > 0$ — параметр чувствительности фильтра.

Важной задачей в области обработки изображений является обнаружение пятен на изображениях (см. [11]). Основываясь на теории масштабирования пространств (см. [9]), модельное

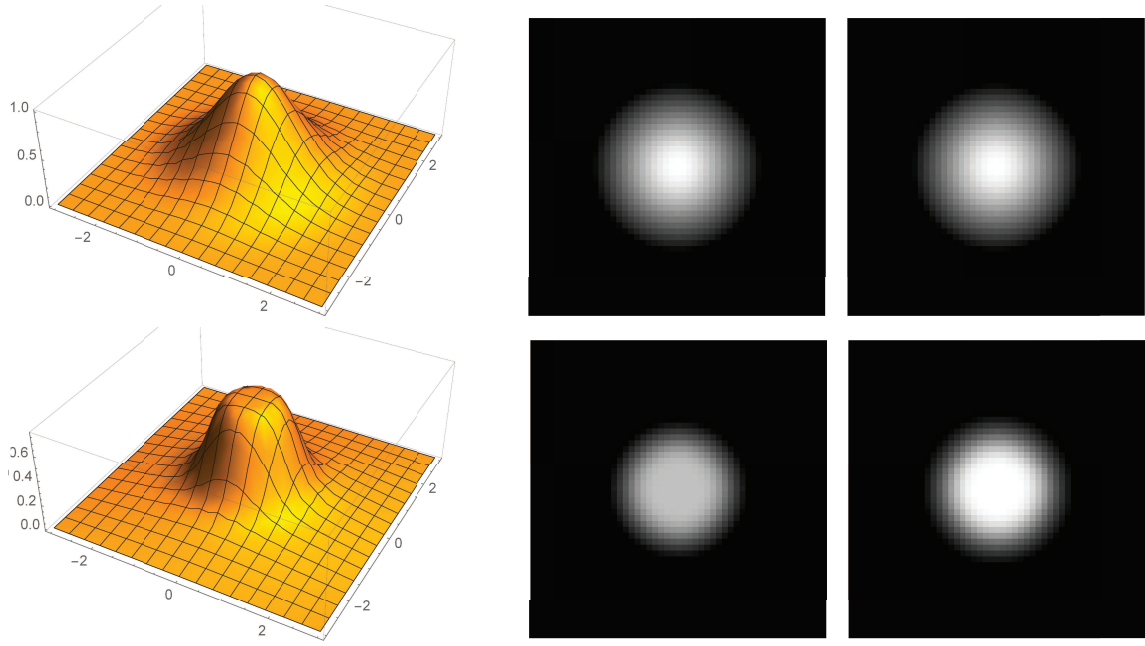


Рис. 2. Анизотропная диффузия (6) для синтетического изображения пятна (5). По строкам: $t = 0$, $t = 1$. По столбцам: график $u(t, x)$, размытое изображение, размытое изображение после нормализации.

изображение пятна зададим с помощью функции Гаусса

$$I(x) = \exp\left(-\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5)$$

где $\sigma > 0$ — масштабный коэффициент (см. рис. 1).

Применим фильтр Перона—Малика (3) к изображению (5) в случае, когда $c(x)$ имеет вид (4). Уравнение Фоккера—Планка принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = & \frac{2(\rho - \sigma^2)}{K\sigma^6} \exp\left(-\frac{\rho(K\sigma^2 + \exp(-\rho/\sigma^2))}{K\sigma^4}\right) \left(x^1 \frac{\partial u}{\partial x^1}(t, x) + x^2 \frac{\partial u}{\partial x^2}(t, x)\right) + \\ & + \exp\left(-\frac{\rho \exp(-\rho/\sigma^2)}{K\sigma^4}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial (x^1)^2}(t, x) + \frac{\partial^2 u}{\partial (x^2)^2}(t, x)\right), \quad (6) \end{aligned}$$

где $\rho = (x^1)^2 + (x^2)^2$.

Результат размытия (диффузии) при $\Omega = [-3, 3] \times [-3, 3]$, $\sigma = 9/10$, $K = 1/7$ изображен на рис. 2.

2.2. Анизотропная диффузия на $SE(2)$. Рассмотрим пример анизотропной диффузии, которая возникает при моделировании процесса дополнения контуров изображения, поступающего с сетчатки глаза, осуществляемого первичной зрительной корой головного мозга человека. Согласно модели Петито—Читти—Сарти (см. [3, 8]), первичная зрительная кора осуществляет «подъем» $\mathcal{F}$ изображения с плоскости сетчатки $\mathbb{R}^2$ в расширенное пространство позиций и направлений $\mathbb{R}^2 \times S^1 \cong SE(2)$ (т.е. на группу евклидовых движений плоскости):

$$\mathcal{F} : I = ((x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]) \rightarrow ((x^1, x^2, x^3) \in SE(2) \rightarrow [0, 1]) = \hat{I},$$

где $x^3 \in S^1$ — угол направления контура в точке (x^1, x^2) . Таким образом, поднятое на $SE(2)$ изображение имеет вид $\hat{I}(x) = \mathcal{F}(I)(x)$.

Обозначим через X_i базисные левоинвариантные векторные поля на $SE(2)$:

$$X_1 = \cos x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_3 = -\sin x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Уравнение Фоккера—Планка, моделирующее процесс дополнения контуров (см. [10]), имеет вид

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -X_1(u)(t, x) + BX_2^2(u)(t, x), \quad (7)$$

где $B > 0$ — коэффициент диффузии, $X_1(u)$ — производная функции u по направлению векторного поля X_1 , $X_2^2(u)$ — вторая производная по направлению X_2 .

3. Предварительный материал.

3.1. Обозначения. Пусть M — ориентированное многообразие размерности n . Обозначим через Diffeo псевдогруппу всех локальных диффеоморфизмов M . В статье подразумевается суммирование по повторяющимся индексам во всех формулах.

3.2. Расслоение джетов. Пусть $\pi : E(\pi) \rightarrow M$ — векторное расслоение, $\Gamma(\pi) — C^\infty(M)$ -модуль его гладких сечений. Через $[s]_a^k$ обозначим k -джет сечения s в точке $a \in M$, через $\pi_k : J^k\pi \rightarrow M$ — расслоения k -джетов сечений π .

Обозначим через $x^1, \dots, x^n$ локальные координаты на M , $x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m$ — локальные координаты на $E(\pi)$ и через $x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m, u_{j_1}^i, \dots, u_{j_\sigma}^i$, где $\sigma = (j_1 \dots j_k)$, — канонические координаты на $J^k(\pi)$.

3.3. Дифференциальные операторы. Пусть π и ξ — векторные расслоения над M . Отображение

$$\Delta : \Gamma(\pi) \longrightarrow \Gamma(\xi)$$

называется *дифференциальным оператором порядка k* , если для любого $s \in \Gamma(\pi)$ и для любого a из области определения s выполнено условие

$$\Delta(s)(a) = f_\Delta([s]_a^k)$$

для некоторого морфизма расслоений $f_\Delta : J^k\pi \rightarrow J^0\xi$ (см., например, [5]).

Дифференциальный оператор Δ называется *линейным*, если f_Δ — $\mathbb{R}$ -линейный морфизм.

4. Дифференциальные операторы второго порядка. Обозначим $C^\infty(M)$ -модуль скалярных линейных дифференциальных операторов порядка k на M через $\text{Diff}_k(M)$, $k = 0, 1, \dots$.

Пусть $x^1, \dots, x^n$ — локальные координаты на M . Тогда любой скалярный линейный дифференциальный оператор второго порядка $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ представляется в этих координатах следующей формулой:

$$\Delta = a^{ij}(x) \partial_{x^i x^j}^2 + a^i(x) \partial_{x^i} + a^0(x), \quad (8)$$

где коэффициенты a^{ij} , a^i и a^0 являются гладкими функциями от $x = (x^1, \dots, x^n)$, и $\partial_{x^i} = \partial/\partial x^i$, $\partial_{x^i x^j}^2 = \partial_{x^i} \circ \partial_{x^j}$, $i, j = 1, \dots, n$.

В этой статье мы предполагаем, что

$$\det(a^{ij}(x)) \neq 0 \quad (9)$$

для всех x из области определения коэффициентов Δ .

4.1. *Преобразования операторов под действием диффеоморфизмов.* Пусть $f \in \text{Diffeo}$. Тогда f порождает преобразование

$$f_* : \text{Diff}_2(M) \mapsto \text{Diff}_2(M)$$

следующим образом.

Пусть $x^1, \dots, x^n$ и $y^1, \dots, y^n$ — локальные координаты в прообразе и образе f соответственно. Тогда $f = (f^1, \dots, f^n)$ в этих координатах, $y^1 = f^1(x), \dots, y^n = f^n(x)$, и

$$f_*(\Delta) = a^{ij} f_i^{i'} f_j^{j'} \partial_{y^{i'} y^{j'}}^2 + (a^{ij} f_{ij}^{i'} + a^i f_i^{i'}) \partial_{y^{i'}} + a^0, \quad (10)$$

где $f_i^{i'} = \partial f^{i'} / \partial x^i$, $f_{ij}^{i'} = \partial^2 f^{i'} / \partial x^i \partial x^j$ и все компоненты a^{ij} , a^i , a^0 и все частные производные f_j^i , f_{jk}^i вычисляются в точках $x = f^{-1}(y)$.

Из (10) следует, что коэффициент a^0 является скалярным дифференциальным оператором порядка 0 для оператора Δ относительно действия Diffeo на $\text{Diff}_2(M)$.

Два линейных дифференциальных оператора второго порядка Δ_1 и Δ_2 на M называются *эквивалентными*, если существует такой диффеоморфизм $f \in \text{Diffeo}$, что $f_*(\Delta_1) = \Delta_2$.

4.2. *Естественные разложения операторов.* Напомним (см., например, [5]), что символ σ_Δ оператора $\Delta \in \text{Diff}_2(M)$ определяется формулой

$$\sigma_\Delta = \Delta \bmod \text{Diff}_1(M).$$

В координатах $x^1, \dots, x^n$ символ σ_Δ отождествляется с невырожденной контравариантной симметричной дифференциальной 2-формой, т.е. контравариантной метрикой на M

$$\sigma_\Delta = a^{ij} \partial_i \partial_j. \quad (11)$$

Пусть $(g_{ij}) = (a^{ij})^{-1}$, где $(a^{ij})^{-1}$ — обратная матрица к (a^{ij}) . Тогда $g_\Delta = g_{ij} dx^i dx^j$ — псевдориманова метрика на M . Эта метрика естественным образом порождает оператор Лапласа — Бельтрами

$$\mathcal{B}_\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad \mathcal{B}_\Delta = a^{ij} \partial_{x^i x^j}^2 + \left(\partial_{x^i} a^{ij} - \frac{1}{2} a^{ij} \partial_{x^i} \ln |\det(a^{ij})| \right) \partial_{x^j} \quad (12)$$

(см., например, [4]). Отсюда следует, что оператор Δ может быть разложен естественным образом на сумму инвариантных дифференциальных операторов $\mathcal{B}_\Delta$, $\mathcal{V}_\Delta$, $a_\Delta^0 = a^0$ порядков 2, 1 и 0 соответственно:

$$\Delta = \mathcal{B}_\Delta + \mathcal{V}_\Delta + a_\Delta^0, \quad (13)$$

где

$$\mathcal{V}_\Delta = \left(a^j - \partial_{x^i} a^{ij} + \frac{1}{2} a^{ij} \partial_{x^i} \ln |\det(a^{ij})| \right) \partial_{x^j}. \quad (14)$$

Напомним, что естественность разложения (13) означает

$$\mathcal{B}_{f_*(\Delta)} = f_*(\mathcal{B}_\Delta), \quad \mathcal{V}_{f_*(\Delta)} = f_*(\mathcal{V}_\Delta), \quad a_{f_*(\Delta)}^0 = f^*(a_\Delta^0)$$

для всех $f \in \text{Diffeo}$.

4.3. *Условия приводимости к постоянным коэффициентам.* В этом разделе найдены необходимые и достаточные условия существования локального диффеоморфизма M , приводящего оператор (8)

$$\Delta = a^{ij}(x) \partial_{x^i x^j}^2 + a^i(x) \partial_{x^i} + a^0(x)$$

к оператору с постоянными коэффициентами.

Пусть, как прежде, $g_\Delta = g_{ij} dx^i dx^j$, $(g_{ij}) = (a^{ij})^{-1}$ — псевдориманова метрика, порожденная оператором Δ , и $\mathcal{V}_\Delta$ — инвариантное векторное поле, порожденное разложением (13).

Обозначим через Γ_{jk}^i компоненты связности Леви-Чивита, порожденной метрикой g_Δ ,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} a^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

через $\mathcal{R}_{g_\Delta} = (\mathcal{R}_{lkj}^i)$ — тензор кривизны g_Δ :

$$\mathcal{R}_{lkj}^i = \partial_{x^k} \Gamma_{lj}^i - \partial_{x^j} \Gamma_{lk}^i + \Gamma_{mk}^i \Gamma_{lj}^m - \Gamma_{mj}^i \Gamma_{lk}^m,$$

и через D_{g_Δ} — ковариантный дифференциал, порожденный связностью Леви-Чивита. Его действие на произвольные векторные поля $Y = Y^i \partial_{x^i}$ на M задается формулой

$$D_{g_\Delta} Y = (\partial_{x^j} Y^i + \Gamma_{jk}^i Y^k) \partial_{x^i} \otimes dx^j.$$

Теорема 1. *Оператор $\Delta = a^{ij}(x) \partial_{x^i x^j}^2 + a^i(x) \partial_{x^i} + a^0(x)$ преобразуется локальным диффеоморфизмом M к оператору с постоянными коэффициентами тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{R}_{g_\Delta} = 0, \quad D_{g_\Delta} \mathcal{V}_\Delta = 0, \quad d a_\Delta^0 = 0.$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [1, 2]), что условие $\mathcal{R}_\Delta = 0$ эквивалентно существованию на M таких локальных координат $y^1, \dots, y^n$, что метрика g_Δ является плоской в этих координатах, т.е.

$$g_\Delta = \delta_{ij} dy^i dy^j, \quad (15)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ -1 & \text{при } 1 \geq i = j \geq s, \\ 1 & \text{при } s \geq i = j \geq n \end{cases}$$

и s является индексом метрики g_Δ . Условие (15) влечет $\Gamma_{jk}^i(y) = 0$ для всех i, j, k ;

$$\Delta = \delta^{ij} \partial_{y^i y^j}^2 + \tilde{a}^i(y) \partial_{y^i} + a^0(x(y)), \quad \mathcal{V}_\Delta = \tilde{a}^i(y) \partial_{y^i}, \quad D_{g_\Delta} \mathcal{V}_\Delta = \partial_{y^j} \tilde{a}^i \partial_{y^i} \otimes dy^j.$$

Теперь доказательство очевидно. $\square$

Следствие 2. *Пусть операторы Δ_1 и Δ_2 удовлетворяют условиям теоремы 1 и пусть сигнатуры их метрик g_{Δ_1} и g_{Δ_2} одинаковы. Тогда эти операторы эквивалентны.*

5. Уравнения Фоккера—Планка. Обозначим через M область в $\mathbb{R}^n$, являющуюся областью определения коэффициентов a^i и a^{ij} уравнения Фоккера—Планка (1).

Пусть $x^1, \dots, x^n$ — локальные координаты в M . Перепишем уравнение (1) в виде

$$\partial_t u = \Delta u, \quad (16)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$ и

$$\Delta = \partial_{x^i x^j}^2 \circ a^{ij} - \partial_{x^i} \circ a^i = a^{ij} \partial_{x^i x^j}^2 + (2\partial_{x^j} a^{ij} - a^i) \partial_{x^i} + \partial_{x^i x^j}^2 a^{ij} - \partial_{x^i} a^i. \quad (17)$$

Из (17) и (14) получаем

$$\mathcal{V}_\Delta = \left(-a^j + \partial_{x^i} a^{ij} + \frac{1}{2} a^{ij} \partial_{x^i} \ln |\det(a^{ij})| \right) \partial_{x^j}.$$

Теорема 1 влечёт следующее утверждение.

Теорема 3. *Уравнение Фоккера—Планка*

$$\partial_t u = (\partial_{x^i x^j}^2 \circ a^{ij}(x) - \partial_{x^i} \circ a^i(x))(u)$$

преобразуется локальным диффеоморфизмом M в уравнение с постоянными коэффициентами тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{R}_{g_\Delta} = 0, \quad D_{g_\Delta} \mathcal{V}_\Delta = 0, \quad \partial_{x^i x^j}^2 a^{ij} - \partial_{x^i} a^i = \text{const}.$$

5.1. Алгоритм поиска решений уравнений Фоккера—Планка. Теорема 3 позволяет сформулировать следующий алгоритм для нахождения решений уравнений Фоккера—Планка.

Пусть уравнение Фоккера—Планка

$$\partial_t u = (\partial_{x^i x^j}^2 \circ a^{ij}(x) - \partial_{x^i} \circ a^i(x))(u)$$

удовлетворяет условиям теоремы 3.

Шаг 1. Найти преобразование координат

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n)),$$

приводящее исходное уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\partial_t u = (\partial_{y^i y^j}^2 \circ \delta^{ij} - \partial_{y^i} \circ \alpha^i)(u).$$

Шаг 2. Решить полученное уравнение.

Шаг 3. Найти обратное преобразование координат и переписать полученное решение в исходных координатах.

Реализовать предложенный алгоритм (особенно шаги 1 и 3) в общем случае не представляется возможным. Опишем реализацию алгоритма в некоторых специальных случаях.

5.1.1. *Решения дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае $n = 2$.* Рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$u_t = u_{11} + u_{22} + \alpha^1 u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^0 u, \quad (18)$$

где $u_{ij} = \partial^2 u / \partial y^i \partial y^j$ и $u_i = \partial u / \partial y^i$. Подстановка

$$u(t, y^1, y^2) = \exp\left(-\frac{\alpha^1 y^1}{2} - \frac{\alpha^2 y^2}{2}\right) z(t, y^1, y^2)$$

приводит уравнение (18) к следующему виду:

$$z_t = z_{11} + z_{22} + \left(\alpha^0 - \frac{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}{4}\right) z.$$

Решая это уравнение методом разделения переменных и возвращаясь к функции $u(t, y^1, y^2)$, получаем следующее решение:

$$u(t, y^1, y^2) = \exp\left(-\frac{\alpha^1 y^1}{2} - \frac{\alpha^2 y^2}{2} + \left(\alpha^0 - \frac{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}{4} - \eta - \mu\right) t\right) \times \\ \times (A_1 \exp(\sqrt{\eta} y^1) + A_2 \exp(-\sqrt{\eta} y^1)) (B_1 \exp(\sqrt{\mu} y^2) + B_2 \exp(-\sqrt{\mu} y^2)), \quad (19)$$

где η , μ , A_1 , A_2 , B_1 и B_2 — произвольные постоянные.

5.1.2. *Приведение к плоской метрике.* Пусть $n = 2$ и пусть

$$g = g_{11}(x)(dx^1)^2 + 2g_{12}(x)dx^1 dx^2 + g_{22}(x)(dx^2)^2$$

является положительно определенной метрикой. Найдем такое преобразование координат

$$(x^1, x^2) \mapsto (y^1(x^1, x^2), y^2(x^1, x^2)), \quad (20)$$

что $g = (dy^1)^2 + (dy^2)^2$ в новых координатах y^1, y^2 , т.е.

$$\delta_{ij} y_k^i y_l^j = g_{kl}, \quad (21)$$

где $y_j^i = \partial y^i / \partial x^j$ для всех i, j . Более подробно, уравнения (21) имеют следующий вид:

$$(y_1^1)^2 + (y_1^2)^2 = g_{11}, \quad y_1^1 y_2^1 + y_1^2 y_2^2 = g_{12}, \quad (y_2^1)^2 + (y_2^2)^2 = g_{22}. \quad (22)$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 \\ y_2^1 & y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (22) переписывается следующим образом:

$$A \begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{22} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Из (21) следует, что

$$(\det A)^2 = \det(g_{ij}) \stackrel{def}{=} g.$$

Перепишем уравнения (23) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{22} \end{pmatrix},$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} y_1^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(g_{11}y_2^2 - g_{12}y_1^2), \\ y_2^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(g_{12}y_2^2 - g_{22}y_1^2), \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} y_1^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}(-g_{11}y_2^1 + g_{12}y_1^1), \\ y_2^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}(-g_{12}y_2^1 + g_{22}y_1^1). \end{cases} \quad (25)$$

Лемма 4. Пусть функции $y^1(x^1, x^2)$ и $y^2(x^1, x^2)$ удовлетворяют уравнениям (24). Тогда

$$\mathcal{B}_\Delta(y^2) = 0, \quad \mathcal{B}_\Delta(y^1) = 0. \quad (26)$$

Доказательство. Прямые вычисления показывают, что из уравнений (24) следует

$$0 = \partial_{x^2}y_1^1 - \partial_{x^1}y_2^1 = \mathcal{B}_\Delta(y^2), \quad 0 = \partial_{x^2}y_1^2 - \partial_{x^1}y_2^2 = \mathcal{B}_\Delta(y^1). \quad \square$$

Приходим к следующему алгоритму поиска преобразования (20):

- (i) Найти $y^2(x^1, x^2)$ как решение уравнения (26), для которого $dy^2 \neq 0$;
- (ii) подставить функцию $y^2(x^1, x^2)$ в уравнение (24) и решить его относительно $y^1(x^1, x^2)$.

5.1.3. *Пример явного решения уравнения Фоккера—Планка.* Пусть $n = 2$, уравнение Фоккера—Планка (16) удовлетворяет условиям теоремы 3, g_Δ — положительно определенная метрика уравнения Фоккера—Планка и x^1, x^2 — изотермические координаты этой метрики. Тогда

$$g_\Delta = e^{\lambda(x^1, x^2)}((dx^1)^2 + (dx^2)^2),$$

рассматриваемое уравнение имеет вид

$$u_t = e^\lambda(u_{11} + u_{22}) + a^1(x^1, x^2)u_1 + a^2(x^1, x^2)u_2 + a^0u \quad (27)$$

и приводится подходящей заменой (20) к уравнению с постоянными коэффициентами

$$u_t = u_{11} + u_{22} + \alpha^1 u_1 + \alpha^2 u_2 + a^0 u.$$

Прямые вычисления показывают, что условие $\mathcal{R}_{g_\Delta} = 0$ эквивалентно следующему:

$$\partial_{x^1 x^1}^2 \lambda + \partial_{x^2 x^2}^2 \lambda = 0,$$

т.е. λ является гармонической функцией. В этом случае уравнения (24) принимают вид условий Коши—Римана

$$y_1^1 = y_2^2, \quad y_2^1 = -y_1^2, \quad y_1^2 = -y_2^1, \quad y_2^2 = y_1^1. \quad (28)$$

Эти условия означают, что функции $y^1(x^1, x^2)$ и $y^2(x^1, x^2)$ — вещественная и мнимая части произвольной аналитической функции. Применяя (10) и используя свойство гармоничности функций $y^1(x^1, x^2)$ и $y^2(x^1, x^2)$, получаем

$$a^1 y_1^1 + a^2 y_2^1 = \alpha^1, \quad a^1 y_1^2 + a^2 y_2^2 = \alpha^2.$$

Решая эту систему относительно a^1, a^2 , находим

$$a^1 = e^{-\lambda}(\alpha^1 y_2^2 - \alpha^2 y_2^1), \quad a^2 = e^{-\lambda}(\alpha^2 y_1^1 - \alpha^1 y_1^2).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть уравнение Фоккера—Планка (27) удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Уравнение имеет вид

$$u_t = e^\lambda(u_{11} + u_{22}) + e^{-\lambda}(\alpha^1 y_2^2 - \alpha^2 y_1^2)u_1 + e^{-\lambda}(\alpha^2 y_1^1 - \alpha^1 y_2^1)u_2 + a^0 u,$$

где $\lambda(x^1, x^2)$, $y^1(x^1, x^2)$, $y^2(x^1, x^2)$ — гармонические функции, $y^1(x^1, x^2) + i y^2(x^1, x^2)$ является комплексно-аналитической функцией, α^1 , α^2 , a^0 — постоянные.

2. Уравнение имеет следующее явное частное решение:

$$u(t, x^1, x^2) = \exp\left(-\frac{\alpha^1 y^1}{2} - \frac{\alpha^2 y^2}{2} + \left(a^0 - \frac{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}{4} - \eta - \mu\right)t\right) \times \\ \times (A_1 \exp(\sqrt{\eta} y^1) + A_2 \exp(\sqrt{\eta} y^2)) (B_1 \exp(\sqrt{\mu} y^2) + B_2 \exp(-\sqrt{\mu} y^2)),$$

где η , μ , A_1 , A_2 , B_1 и B_2 — произвольные постоянные.

6. Заключение. В работе найдены необходимые и достаточные условия приводимости уравнения Фоккера—Планка к уравнению с постоянными коэффициентами путем преобразования независимых пространственных переменных. С помощью этих условий были вычислены явные решения в двумерном случае.

Мотивация изучения уравнений Фоккера—Планка обусловлена приложениями в анализе изображений, где такие уравнения обычно описывают диффузионный процесс на изображении. Применение теорем 1 и 5 в случае (6) показывает, что рассматриваемый диффузионный процесс не допускает представления в виде оператора с постоянными коэффициентами.

Заметим, что в уравнении (7) метрика, заданная коэффициентами при производных второго порядка, вырождена, так что теорема 3 напрямую неприменима. Стандартным приемом в этом случае является рассмотрение римановой аппроксимации с достаточно малым коэффициентом $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -X_1(u)(t, x) + BX_2^2(u)(t, x) + \varepsilon X_1^2(u)(t, x) + \varepsilon X_3^2(u)(t, x).$$

Исследование такого диффузионного процесса на $SE(2)$ планируется в будущих работах, где ставится задача поиска его простейшего представления в зависимости от исходного изображения. Также планируется исследование уравнения Фоккера—Планка, описывающего диффузионный процесс, индуцируемый субримановой структурой на группе Ли $SO(3)$, применительно к обработке сферических изображений (см. [6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков С. П., Тайманов И. А. Современные геометрические структуры и поля. — М.: МЦНМО, 2005.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.
3. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space// J. Math. Imaging Vision. — 2006. — 24, № 3. — С. 307–326.
4. Curtis W. D., Miller F. R. Differential Manifolds and Theoretical Physics. — Orlando, Florida: Academic Press, 1985.
5. Krasil'shchik I. S., Lychagin V. V., Vinogradov A. M. Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations. — New York: Gordon and Breach, 1986.
6. Mashtakov A., Duits R., Sachkov Yu., Bekkers E., Beschastnyi I. Tracking of lines in spherical images via sub-Riemannian geodesics on $SO(3)$ // J. Math. Imaging Vision. — 2017. — 58, № 2. — С. 239–264.
7. Perona P., Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion// IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. — 1990. — 12. — С. 629–639.
8. J. Petitot, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure// J. Physiol. Paris. — 2003. — 97, № 2-3. — С. 265–309.
9. Romeny B. M. H. Front-End Vision and Multi-Scale Image Analysis. — Springer, 2003.
10. Sanguinetti G., Citti G., Sarti A. A model of natural image edge co-occurrence in the roto-translation group// J. Vision. — 2010. — 10. — С. 37.
11. Shapiro L., Stockman G. Computer Vision. — Prentice Hall, New Jersey: Upper Saddle River, 2001.

12. *Sochen N. A.* Stochastic processes in vision: from Langevin to Beltrami// в кн.: Proc. 8th IEEE Int. Conf. on Computer Vision, 2001. — С. 288–293.

Маштаков Алексей Павлович

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

E-mail: alexey.mashtakov@gmail.com

Юмагужин Валерий Афтахович

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

E-mail: yuma@diffiety.botik.ru

Юмагужина Валерия Николаевна

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

E-mail: leyuma@rambler.ru