

MSC 2010: 58E10

## Асимптотика экстремальных управлений в субримановой задаче на группе движений трехмерного пространства

А. П. Маштаков, А. Ю. Попов

Рассматривается субриманова задача на группе движений трехмерного пространства. Такая задача встречается в теории обработки 3D изображений а также при описании движения твердого тела в жидкости. Математически эта задача сводится к решению гамильтоновой системы, вертикальная часть которой представляет собой систему из шести дифференциальных уравнений с неизвестными функциями  $u_1, \dots, u_6$ . Из соображений оптимальности, вытекающих из принципа максимума Понтрягина, следует, что последняя компонента векторного управления  $\bar{u}$ , равная  $u_6$ , должна быть постоянной. В задаче движения твердого тела в жидкости это означает, что течение жидкости обладает однозначным потенциалом скоростей, т.е. является безвихревым. Наиболее важный для приложений и одновременно более простой случай ( $u_6 = 0$ ) был детально исследован авторами в публикации 2017 года: было найдено решение системы в явном виде, а именно получены выражения  $u_1, \dots, u_5$  через эллиптические функции. В этой работе рассматривается общий случай:  $u_6$  — произвольная постоянная. В этом случае удалось получить решение системы уравнений в операторной форме, однако явный вид управлений напрямую из этих формул не следует, их вычисление требует обращения некоторого нетривиального оператора. Для малого параметра  $u_6$  построено приближенное аналитическое решение; численные эксперименты показывают хорошее совпадение построенной аналитической аппроксимации решений с решениями системы, найденными численными методами.

Keywords: Гамильтонова система, принцип максимума Понтрягина, субримановы геодезические, группа Ли

---

Received April 19, 2018

Accepted May 07, 2018

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

---

Алексей Павлович Маштаков

[alexey.mashtakov@gmail.com](mailto:alexey.mashtakov@gmail.com)

ИПС им. А.К. Айламазяна РАН

ул. Петра Первого, д.4 «а», 152021, с. Веськово, Переславский район, Ярославская область, Россия

Антон Юрьевич Попов

[e4e5f4@mail.ru](mailto:e4e5f4@mail.ru)

## 1. Введение

В математической формализации задач управления летательными аппаратами и плавающими роботами возникает субриманова (СР) задача на группе Ли  $SE_3$  движений трехмерного пространства [1, 2]. К СР задачам приводят также исследования, связанные с обработкой изображений. Такая СР задача возникла в [3] при трассировке нервных волокон и кровеносных сосудов на трехмерных изображениях мозга человека, полученных методом магнитно-резонансной томографии.

СР задача на группе Ли  $SE_3$  движений евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  состоит в следующем. По двум заданным ортонормированным реперам  $N_0 = \{v_0^1, v_0^2, v_0^3\}$  и  $N_1 = \{v_1^1, v_1^2, v_1^3\}$ , закрепленным соответственно в двух точках  $q_0 = (x_0, y_0, z_0)$  и  $q_1 = (x_1, y_1, z_1)$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , требуется найти оптимальное движение пространства  $\mathbb{R}^3$  такое, что точка  $q_0$  переходит в точку  $q_1$ , а репер  $N_0$  переходит в репер  $N_1$ . Допустимыми движениями являются параллельный перенос вдоль выделенного вектора репера и вращение вокруг оставшихся двух векторов. Искомое движение должно быть оптимальным в смысле минимума СР длины на группе  $SE_3 \cong \mathbb{R}^3 \rtimes SO_3$ . См. Рис. 1.

Задача эквивалентна задаче поиска липшицевой кривой  $\gamma : [0, t_1] \rightarrow SE_3$ , удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= u_3 \mathcal{A}_3 + u_4 \mathcal{A}_4 + u_5 \mathcal{A}_5, \\ \gamma(0) &= e, \quad \gamma(t_1) = g, \\ l(\gamma) &= \int_0^{t_1} \sqrt{\xi^2 u_3^2 + u_4^2 + u_5^2} dt \rightarrow \min, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $\mathcal{A}_i$  — левоинвариантные векторные поля на группе  $SE_3$ , управления  $u_3, u_4, u_5$  — вещественнозначные функции класса  $\mathbb{L}^\infty(0, t_1)$ , конечное время  $t_1 > 0$  свободно,  $e$  — тождественное преобразование  $\mathbb{R}^3$ ,  $g$  — заданный элемент  $SE_3$  и  $\xi > 0$  — параметр, определяющий влияние параллельного переноса и вращения в  $\mathbb{R}^3$  на результирующую СР-длину соответствующей траектории.

Исследование данной задачи было начато в работах [7, 12]. В частности, было показано, что благодаря симметрии–растяжению, см. [7, Remark 5], общий случай  $\xi > 0$  сводится к случаю  $\xi = 1$  с помощью линейной замены переменных. Далее без ограничения общности мы будем полагать  $\xi = 1$ .

Применение необходимого условия оптимальности — принципа максимума Понтрягина (ПМП) дает выражение экстремальных управлений через сопряженные переменные, а именно экстремальные управления  $u_3, u_4, u_5$  совпадают с тремя сопряженными переменными, см. [7, Sec. 3.1]. Оставшиеся три сопряженные переменные обозначим через  $u_1, u_2$  и  $u_6$ . Далее, используя некоторую вольность речи, мы будем называть экстремальным управлением, весь вектор сопряженных переменных  $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ . Применение ПМП приводит к гамильтоновой системе, горизонтальная часть которой задается системой (1.1) и определяет СР-геодезические, а вертикальная часть (на экстремальные управления) имеет

ИПС им. А.К Айламазяна РАН

ул. Петра Первого, д.4 «а», 152021, с. Веськово, Переславский район, Ярославская область, Россия

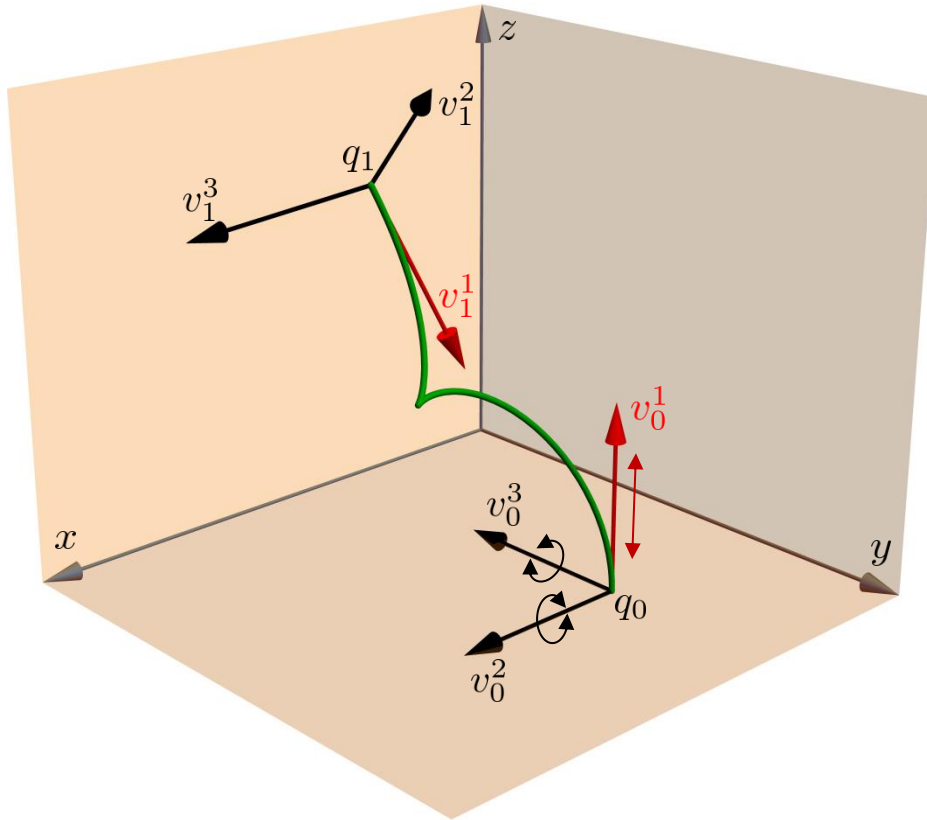


Рис. 1. Постановка субримановой задачи на группе  $SE_3$

следующий вид [7, eq. (3.5)]:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_3 u_5, \\ \dot{u}_2 = u_3 u_4, \\ \dot{u}_3 = u_1 u_5 - u_2 u_4, \\ \dot{u}_4 = u_2 u_3 - u_5 u_6, \\ \dot{u}_5 = u_4 u_6 - u_1 u_3, \\ \dot{u}_6 = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Поиск параметризации СР-геодезических является нетривиальной задачей. Возникает вопрос о теоретической возможности такой параметризации в некотором естественном смысле – вопрос интегрируемости гамильтоновой системы ПМП, см., например, [4–6]. В работе [7, Thm. 2] была установлена интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы (1.1)–(1.2), то есть было показано, что система имеет полный набор функционально независимых первых интегралов в инволюции. Данная статья посвящена исследованию вер-

тикальной части (1.2). Для нее известны следующие первые интегралы:  $u_6$ , гамильтониан  $H = \frac{1}{2}(u_3^2 + u_4^2 + u_5^2)$  и две функции Казимира  $W = u_1u_4 + u_2u_5 + u_3u_6$ ,  $C = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ .

Система уравнений (1.2) встречается при описании движения твердого тела в жидкости [8]. В общем случае уравнения движения были получены и изучены Г. Кирхгофом [9]. Если рассмотреть механическую систему “тело+жидкость” и обозначить  $\gamma = (u_1, u_2, u_3)$  импульс этой системы, а  $M = (u_4, u_5, u_6)$  — кинетический момент системы [10],  $H = \frac{u_3^2 + u_4^2 + u_5^2}{2}$  — гамильтониан, представляющий собой кинетическую энергию системы, то уравнения Кирхгофа

$$\begin{cases} \dot{M} = M \times \frac{\partial H}{\partial M} + \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \frac{\partial H}{\partial M} \end{cases} \quad (1.3)$$

приобретают вид (1.2).

Такая система уравнений исследовалась в работе Альфена [11], в которой, основываясь на знании первых интегралов, автору удалось явно параметризовать эллиптическими функциями Вейерштрасса две компоненты импульса системы “тело+жидкость” (в наших обозначениях  $u_1$  и  $u_2$ ) и вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет оставшаяся компонента  $u_3$ . Заметим, что выведенное уравнение является соотношением на квадрат производной  $\dot{u}_3^2$ , и даже если найти его решения, то возникает проблема выбора знака производной при переходе через критические точки. Помимо этого автор приводит явные выражения для некоторой рациональной функции от  $u_3$  и для компонент  $u_4$ ,  $u_5$  кинетического момента, в предположении, что  $u_3$  известно. Таким образом, в статье [11] получены явные формулы в эллиптических функциях Вейерштрасса для отдельных компонент экстремального управления. В данной работе явную параметризацию экстремальных управлений в общем случае также получить не удалось, однако удалось найти решение задачи в операторной форме и на основе этих формул построить приближенное аналитическое решение при малых значениях  $u_6$ .

Ранее в работе [7] задача была исследована в предположении отсутствия точек возврата на геодезических, т.е. когда  $u_3 \neq 0$ , и при условии  $u_6 = 0$ . Это условие дает минимум из всех возможных траекторий, соединяющих граничные условия  $e$  и  $R_{v_1^1, \alpha} N_1$ , где  $R_{v_1^1, \alpha}$  обозначает вращение на угол  $\alpha \in S^1$  вокруг вектора  $v_1^1$ , см. Рис. 1. Позже в работе [12] были получены явные выражения для экстремальных управлений (решений системы (1.2)) без ограничения на точки возврата, но при условии  $u_6 = 0$ . Такие траектории (с  $u_6 = 0$ ) наиболее востребованы с точки зрения приложения в обработке изображений, см. [7, Theorem 1], но в теоретическом аспекте случай  $u_6 \neq 0$  представляет большой интерес как общий случай модельной задачи.

В данной работе исследуется общий случай, когда значение параметра  $u_6$  произвольно. На основе анализа гамильтоновой системы ПМП, в разделе 2 предлагается способ поиска экстремальных управлений в операторной форме. Далее в разделе 3 исследуется асимптотика экстремальных управлений при  $u_6 \rightarrow 0$ . Результаты численных экспериментов в разделе 4 показывают высокую точность полученных формул.

## 2. Выражение для экстремальных управлений

В этом параграфе мы выразим из системы (1.2) управления  $u_1, u_2, u_4, u_5$  через управление  $u_3$  в операторной форме. Введем функции

$$v_1 = u_1 + u_5, v_2 = u_2 + u_4, v_4 = u_4 - u_2, v_5 = u_5 - u_1. \quad (2.1)$$

В этих обозначениях первое, второе, четвертое и пятое уравнения системы (1.2) перепишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -u_3 v_1 + (v_2 + v_4) \frac{u_6}{2}, \\ \dot{v}_2 = u_3 v_2 - (v_1 + v_5) \frac{u_6}{2}, \\ \dot{v}_4 = -u_3 v_4 - (v_1 + v_5) \frac{u_6}{2}, \\ \dot{v}_5 = u_3 v_5 + (v_2 + v_4) \frac{u_6}{2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Из уравнения  $\dot{u}_6 = 0$  видно, что  $u_6$  — постоянная. Дальнейший план состоит в том, чтобы получить выражения функций  $u_1, u_2, u_4, u_5$  через  $u_3$ , подставить их в уравнение

$$\dot{u}_3 = u_1 u_5 - u_2 u_4 \quad (2.3)$$

и найти из него  $u_3$ , а затем и все остальные экстремальные управления.

Введем функцию

$$U(t) = \int_0^t u_3(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

и будем искать  $v_1(t)$  в виде

$$v_1(t) = A(t) e^{-U(t)}. \quad (2.5)$$

Далее в вычислениях для простоты обозначений мы будем часто опускать зависимость от  $t$ . В силу (2.5) и системы (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \dot{A} e^{-U} - u_3 A e^{-U} = \dot{A} e^{-U} - u_3 v_1, \\ \dot{v}_1 + u_3 v_1 &= (v_2 + v_4) \frac{u_6}{2} = \dot{A} e^{-U} \Rightarrow \dot{A} = u_6 \left( \frac{v_2 + v_4}{2} \right) e^U. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение, находим функцию  $A(t)$ :

$$A(t) = A(0) + u_6 \int_0^t \frac{v_2(\tau) + v_4(\tau)}{2} e^{U(\tau)} d\tau.$$

В силу (2.4), (2.5) выполняются равенство  $A(0) = v_1(0)$ . Следовательно, имеем следующее выражение для  $v_1(t)$ :

$$v_1(t) = v_1(0) e^{-U(t)} + u_6 e^{-U(t)} \int_0^t \frac{v_2(\tau) + v_4(\tau)}{2} e^{U(\tau)} d\tau. \quad (2.6)$$

Аналогичным образом получим выражение для  $v_5(t)$ :

$$v_5(t) = v_5(0) e^{U(t)} + u_6 e^{U(t)} \int_0^t \frac{v_2(\tau) + v_4(\tau)}{2} e^{-U(\tau)} d\tau. \quad (2.7)$$

Сложив (2.6) и (2.7), придём к равенству

$$\begin{aligned} v_1(t) + v_5(t) &= v_1(0)e^{-U(t)} + v_5(0)e^{U(t)} + \\ &u_6 \int_0^t (v_2(\tau) + v_4(\tau)) \operatorname{ch}(U(t) - U(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Далее заметим, что в системе (2.2) второе и третье уравнения связаны так же, как первое и четвертое уравнения и отличаются лишь знаком. Поэтому верны следующие выражения для  $v_2(t)$ ,  $v_4(t)$  и их суммы:

$$v_2(t) = v_2(0)e^{U(t)} - u_6 e^{U(t)} \int_0^t \frac{v_1(\tau) + v_5(\tau)}{2} e^{-U(\tau)} d\tau, \quad (2.9)$$

$$v_4(t) = v_4(0)e^{-U(t)} - u_6 e^{-U(t)} \int_0^t \frac{v_1(\tau) + v_5(\tau)}{2} e^{U(\tau)} d\tau, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} v_2(t) + v_4(t) &= v_2(0)e^{U(t)} + v_4(0)e^{-U(t)} - \\ &u_6 \int_0^t (v_1(\tau) + v_5(\tau)) \operatorname{ch}(U(t) - U(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставляя найденные выражения (2.8) и (2.11) в (2.1), получаем, что экстремальные управления  $u_4(t)$  и  $u_5(t)$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u_4(t) = \frac{u_2(0) + u_4(0)}{2} e^{U(t)} + \frac{u_4(0) - u_2(0)}{2} e^{-U(t)} - \\ \quad u_6 \int_0^t u_5(\tau) \operatorname{ch}(U(t) - U(\tau)) d\tau, \\ u_5(t) = \frac{u_1(0) + u_5(0)}{2} e^{-U(t)} + \frac{u_5(0) - u_1(0)}{2} e^{U(t)} + \\ \quad u_6 \int_0^t u_4(\tau) \operatorname{ch}(U(t) - U(\tau)) d\tau. \end{cases} \quad (2.12)$$

Обозначим

$$G(t) = \frac{u_2(0) + u_4(0)}{2} e^{U(t)} + \frac{u_4(0) - u_2(0)}{2} e^{-U(t)},$$

$$F(t) = \frac{u_1(0) + u_5(0)}{2} e^{-U(t)} + \frac{u_5(0) - u_1(0)}{2} e^{U(t)}.$$

Введем оператор

$$L[f] = \int_0^t f(\tau) \operatorname{ch}(U(t) - U(\tau)) d\tau.$$

В этих обозначениях система (2.12) принимает вид

$$\begin{cases} u_4(t) = G(t) - u_6 L[u_5], \\ u_5(t) = F(t) + u_6 L[u_4]. \end{cases} \quad (2.13)$$

Из первого уравнения системы (2.13) и линейности оператора  $L$  следует равенство

$$L[u_4] = L[G] - u_6^2 L^2[u_5].$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (2.13), находим

$$u_5 = F + u_6 L[G] - u_6^2 L^2[u_5].$$

В операторной форме это уравнение эквивалентно следующему:

$$(I + u_6^2 L^2)[u_5] = F + u_6 L[G], \quad (2.14)$$

где  $I$  — тождественный оператор.

Теперь, используя (2.14), мы можем выписать точное выражение для экстремального управления  $u_5$ :

$$u_5 = (I + u_6^2 L^2)^{-1} [F + u_6 L[G]]. \quad (2.15)$$

Сделаем то же для  $u_4$ :

$$\begin{aligned} L[u_5] &= L[F] + u_6 L^2[u_4], \\ u_4 &= G - u_6 L[F] - u_6^2 L^2[u_4], \\ (I + u_6^2 L^2)[u_4] &= G - u_6 L[F]. \end{aligned}$$

Получаем точное выражение для экстремального управления  $u_4$ :

$$u_4 = (I + u_6^2 L^2)^{-1} [G - u_6 L[F]]. \quad (2.16)$$

Обоснуем корректность представлений (2.15), (2.16). Оператор  $L$  определен во всех пространствах  $\mathbb{L}[0, a]$ ,  $a > 0$ , интегрируемых по Лебегу на отрезке  $[0, a]$  функций  $f$  со стандартной нормой

$$\|f\|_{\mathbb{L}[0, a]} := \int_0^a |f(\tau)| d\tau.$$

Он входит в класс интегральных операторов вида

$$A[f](t) = \int_0^t f(\tau) K(\tau, t) d\tau$$

с непрерывным и симметричным ядром  $K$ . Как известно из курсов функционального анализа [13], нормы

$$\|A\|_{BL} := \sup_{\|f\|_{\mathbb{L}[0, a]} \leq 1} \|Af\|_{\mathbb{L}[0, a]}$$

степеней таких операторов быстро стремятся к нулю:

$$\|A^n\|_{BL} = O\left(\frac{C^n}{n!}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $C$  — постоянная, определяемая ядром  $K$ .

Следовательно, оператор  $I - kA$  обратим при любом значении параметра  $k \in \mathbb{R}$  и обратный к нему оператор запишется в виде ряда  $(I - kA)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n$ , сходящегося по

операторной норме в пространстве линейных операторов, действующих из  $\mathbb{L}[0, a]$  в  $\mathbb{L}[0, a]$ . В нашем случае имеем

$$(I + u_6^2 L^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_6^{2n} L^{2n} = I - u_6^2 L^2 + u_6^4 L^4 - u_6^6 L^6 + \dots$$

Аналогично поступим с парой  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ . В силу (2.1), (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) имеем:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{v_1(t) - v_5(t)}{2} = \frac{1}{2}v_1(0)e^{-U(t)} - \frac{1}{2}v_5(0)e^{U(t)} + \\ &\quad \frac{u_6}{2} \int_0^t (v_2(\tau) + v_4(\tau)) \frac{e^{U(\tau)-U(t)} - e^{U(t)-U(\tau)}}{2} d\tau, \\ u_2(t) &= \frac{v_2(t) - v_4(t)}{2} = \frac{1}{2}v_2(0)e^{U(t)} - \frac{1}{2}v_4(0)e^{-U(t)} - \\ &\quad \frac{u_6}{2} \int_0^t (v_1(\tau) + v_5(\tau)) \frac{e^{U(\tau)-U(t)} - e^{U(t)-U(\tau)}}{2} d\tau. \end{aligned}$$

Упрощая эти выражения, получаем

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{u_1(0) + u_5(0)}{2} e^{-U(t)} - \frac{u_5(0) - u_1(0)}{2} e^{U(t)} - \\ &\quad u_6 \int_0^t u_4(\tau) \operatorname{sh}(U(t) - U(\tau)) d\tau, \\ u_2(t) &= \frac{u_2(0) + u_4(0)}{2} e^{U(t)} - \frac{u_4(0) - u_2(0)}{2} e^{-U(t)} - \\ &\quad u_6 \int_0^t u_5(\tau) \operatorname{sh}(U(t) - U(\tau)) d\tau. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{u_1(0) + u_5(0)}{2} e^{-U(t)} - \frac{u_5(0) - u_1(0)}{2} e^{U(t)}, \\ G_1(t) &= \frac{u_2(0) + u_4(0)}{2} e^{U(t)} - \frac{u_4(0) - u_2(0)}{2} e^{-U(t)}. \end{aligned}$$

Введем оператор

$$M[f] = \int_0^t f(\tau) \operatorname{sh}(U(t) - U(\tau)) d\tau.$$

В этих обозначениях уравнения (2.17) принимают вид

$$\begin{cases} u_1(t) = F_1(t) - u_6 M[u_4], \\ u_2(t) = G_1(t) - u_6 M[u_5]. \end{cases} \tag{2.18}$$



Заметим, что операторы  $L$  и  $M$  коммутируют и выполнены следующие соотношения:

$$M[u_4] = (I + u_6^2 L^2)^{-1} [M[G] - u_6 ML[F]],$$

$$M[u_5] = (I + u_6^2 L^2)^{-1} [M[F] + u_6 ML[G]].$$

Наконец подставим найденные выражения для  $u_1, u_2, u_4, u_5$  в уравнение (2.3) и получим задачу Коши с интегро-дифференциальным операторным уравнением второго порядка на оставшуюся неизвестную функцию  $U(t)$ :

$$\ddot{U}(t) = u_1(t)u_5(t) - u_2(t)u_4(t), \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = u_3(0). \quad (2.19)$$

В результате приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1.** *Экстремальные управления в субримановой задаче на группе движений трехмерного пространства имеют вид*

$$\begin{aligned} u_1(t) &= F_1 - u_6(I + u_6^2 L^2)^{-1} [M[G] - u_6 ML[F]], \\ u_2(t) &= G_1 - u_6(I + u_6^2 L^2)^{-1} [M[F] + u_6 ML[G]], \\ u_3(t) &= \dot{U}(t), \\ u_4(t) &= (I + u_6^2 L^2)^{-1} [G - u_6 L[F]], \\ u_5(t) &= (I + u_6^2 L^2)^{-1} [F + u_6 L[G]], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(t) = \frac{u_1(0) + u_5(0)}{2} e^{-U(t)} - \frac{u_5(0) - u_1(0)}{2} e^{U(t)}, \\ G_1 &= G_1(t) = \frac{u_2(0) + u_4(0)}{2} e^{U(t)} - \frac{u_4(0) - u_2(0)}{2} e^{-U(t)}, \\ F &= F(t) = \frac{u_1(0) + u_5(0)}{2} e^{-U(t)} + \frac{u_5(0) - u_1(0)}{2} e^{U(t)}, \\ G &= G(t) = \frac{u_2(0) + u_4(0)}{2} e^{U(t)} + \frac{u_4(0) - u_2(0)}{2} e^{-U(t)}, \\ L[f] &= L[f](t) = \int_0^t f(\tau) \operatorname{ch}(U(t) - U(\tau)) d\tau, \\ M[f] &= M[f](t) = \int_0^t f(\tau) \operatorname{sh}(U(t) - U(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

и функция  $U(t)$  является решением задачи Коши

$$\ddot{U}(t) = u_1(t)u_5(t) - u_2(t)u_4(t), \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = u_3(0).$$

### 3. Асимптотика экстремальных управлений вблизи $u_6 = 0$

Рассмотрим случай, когда параметр  $u_6$  близок к нулю и получим асимптотику формул в Теореме 1. Из выражений (2.15), (2.16) и (2.18) находим

$$\begin{aligned} u_1 &= F_1 - u_6 M[G] + O(u_6^2), \\ u_2 &= G_1 - u_6 M[F] + O(u_6^2), \\ u_4 &= G - u_6 L[F] + O(u_6^2), \\ u_5 &= F + u_6 L[G] + O(u_6^2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

С точностью до  $O(u_6^2)$  выражение  $u_1u_5 - u_2u_4$  приближенно равно

$$\begin{aligned} & (F_1 - u_6M[G])(F + u_6M[F]) - (G_1 - u_6M[F])(G - u_6L[F]) \\ & \approx F_1F + u_6(F_1L[G] - FM[G]) - GG_1 + u_6(G_1L[F] + GM[F]), \end{aligned}$$

и уравнение (2.19) с точностью до  $O(u_6^2)$  принимает вид

$$\ddot{U} = F_1F - GG_1 + u_6(F_1L[G] - FM[G] + G_1L[F] + GM[F]). \quad (3.2)$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{u_2(0) + u_4(0)}{2}, \quad \beta = \frac{u_4(0) - u_2(0)}{2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{u_1(0) + u_5(0)}{2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{u_5(0) - u_1(0)}{2}.$$

Тогда по определению  $G, F, G_1, F_1$  имеем

$$\begin{aligned} G(t) &= \alpha e^{U(t)} + \beta e^{-U(t)}, \quad F(t) = \tilde{\alpha} e^{-U(t)} + \tilde{\beta} e^{U(t)}, \\ G_1(t) &= \alpha e^{U(t)} - \beta e^{-U(t)}, \quad F_1(t) = \tilde{\alpha} e^{-U(t)} - \tilde{\beta} e^{U(t)}, \end{aligned}$$

Получаем, что главный член правой части уравнения (3.2) равен

$$FF_1 - GG_1 = Ae^{-2U} - Be^{2U},$$

где  $A = \tilde{\alpha}^2 + \beta^2$ ,  $B = \tilde{\beta}^2 + \alpha^2$ .

Далее вычислим операторы  $L[G], L[F], M[G], M[F]$ :

$$\begin{aligned} L[G](t) &= \frac{t}{2} G(t) + \frac{\alpha}{2} e^{-U(t)} \int_0^t e^{2U(\tau)} d\tau + \frac{\beta}{2} e^{U(t)} \int_0^t e^{-2U(\tau)} d\tau, \\ M[G](t) &= \frac{t}{2} G_1(t) - \frac{\alpha}{2} e^{-U(t)} \int_0^t e^{2U(\tau)} d\tau + \frac{\beta}{2} e^{U(t)} \int_0^t e^{-2U(\tau)} d\tau, \\ L[F](t) &= \frac{t}{2} F(t) + \frac{\tilde{\alpha}}{2} e^{U(t)} \int_0^t e^{-2U(\tau)} d\tau + \frac{\tilde{\beta}}{2} e^{-U(t)} \int_0^t e^{2U(\tau)} d\tau, \\ M[F](t) &= \frac{t}{2} F_1(t) + \frac{\tilde{\alpha}}{2} e^{U(t)} \int_0^t e^{-2U(\tau)} d\tau - \frac{\tilde{\beta}}{2} e^{-U(t)} \int_0^t e^{2U(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициент при  $u_6$  в правой части уравнения (3.2) выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} & F_1(t)L[G](t) - F(t)M[G](t) + G_1(t)L[F](t) + G(t)M[F](t) = \\ & (\alpha\tilde{\alpha} - \beta\tilde{\beta}) \left( t + 2 \int_0^t \operatorname{ch}(2(U(t) - U(\tau))) d\tau \right) - t \left( \alpha\tilde{\beta} e^{2U(t)} + \tilde{\alpha}\beta e^{-2U(t)} \right). \end{aligned}$$

В результате приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** Вблизи значения параметра  $u_6 = 0$ , приближенные выражения для экстремальных управлений в субримановой задаче на группе движений трехмерного пространства с точностью до  $O(u_6^2)$  имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(t) &= F_1(t) - u_6 M[G](t), \\ u_2(t) &= G_1(t) - u_6 M[F](t), \\ u_3(t) &= \dot{U}(t), \\ u_4(t) &= G(t) - u_6 L[F](t), \\ u_5(t) &= F(t) + u_6 L[G](t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \tilde{\alpha} e^{-U(t)} - \tilde{\beta} e^{U(t)}, & G_1(t) &= \alpha e^{U(t)} - \beta e^{-U(t)}, \\ F(t) &= \tilde{\alpha} e^{-U(t)} + \tilde{\beta} e^{U(t)}, & G(t) &= \alpha e^{U(t)} + \beta e^{-U(t)}, \\ L[f](t) &= \int_0^t f(\tau) \operatorname{ch}(U(t) - U(\tau)) d\tau, \\ M[f](t) &= \int_0^t f(\tau) \operatorname{sh}(U(t) - U(\tau)) d\tau, \\ \alpha &= \frac{u_2(0) + u_4(0)}{2}, & \beta &= \frac{u_4(0) - u_2(0)}{2}, \\ \tilde{\alpha} &= \frac{u_1(0) + u_5(0)}{2}, & \tilde{\beta} &= \frac{u_5(0) - u_1(0)}{2}. \end{aligned}$$

и функция  $U(t)$  является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) = f_0(U(t)) + u_6 \left( t f_1(U(t)) + k \int_0^t \operatorname{ch}(2U(t) - 2U(\tau)) d\tau \right), \\ U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = u_3(0), \end{cases} \quad (3.3)$$

где  $k = \alpha \tilde{\alpha} - \beta \tilde{\beta}$ ,

$$f_0(U) = (\tilde{\alpha}^2 + \beta^2) e^{-2U} - (\tilde{\beta}^2 + \alpha^2) e^{2U}, \quad (3.4)$$

$$f_1(U) = k - \alpha \tilde{\beta} e^{2U} - \tilde{\alpha} \beta e^{-2U}. \quad (3.5)$$

При численном решении задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения (3.3) возникают некоторые трудности; обыкновенное дифференциальное уравнение для применения численных методов предпочтительнее. В связи с этим мы доказываем следующее утверждение.

**Теорема 3.** Любое решение интегро-дифференциального уравнения (3.3) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению 4-го порядка

$$\dot{U}U^{(4)} = \ddot{U}\ddot{U} + 4\dot{U}\dot{U}^3 - u_6 \ddot{U} f_1(U) - 4u_6 k t \dot{U}^3 + 2u_6 f_1'(U) \dot{U}^2. \quad (3.6)$$

*Доказательство.* Рассмотрим входящую в (3.3) функцию

$$Y(t) = \int_0^t \operatorname{ch}(2U(t) - 2U(\tau)) d\tau$$

и вычислим её первую и вторую производные по времени  $t$ :

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= 1 + 2\dot{U}(t) \int_0^t \operatorname{sh}(2U(t) - 2U(\tau))d\tau, \\ \ddot{Y}(t) &= 2\left(\ddot{U}(t) \int_0^t \operatorname{sh}(2U(t) - 2U(\tau))d\tau + \right. \\ &\quad \left. \dot{U}(t) \frac{d}{dt} \left( \int_0^t \operatorname{sh}(2U(t) - 2U(\tau))d\tau \right) \right) \\ &= \ddot{U}(t) \frac{\dot{Y}(t) - 1}{\dot{U}(t)} + 4\dot{U}^2(t)Y(t).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Согласно (3.3) имеем

$$u_6kY(t) = \ddot{U}(t) - f_0(U(t)) - u_6tf_1(U(t)).\tag{3.8}$$

Продифференцируем по  $t$  равенство (3.8). Получим

$$u_6k\dot{Y}(t) = \ddot{U}(t) - \dot{U}(t)f'_0(U(t)) - u_6f_1(U(t)) - u_6t\dot{U}(t)f'_1(U(t)),\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}u_6k\ddot{Y}(t) &= U^{(4)}(t) - \ddot{U}(t)f'_0(U(t)) - \dot{U}^2(t)f''_0(U(t)) - \\ &\quad 2u_6\dot{U}(t)f'_1(U(t)) - u_6t\dot{U}^2(t)f''_1(U(t)) - \\ &\quad u_6t\ddot{U}(t)f'_1(U(t)).\end{aligned}\tag{3.10}$$

В левую часть (3.10) подставим выражения (3.7)  $\dot{Y}$  через  $Y$ ,  $\dot{Y}$ ,  $\dot{U}$ ,  $\ddot{U}$ . В результате этого придем к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{u_6k\ddot{U}(t)}{\dot{U}(t)} (\dot{Y}(t) - 1) + 4u_6k\dot{U}^2(t)Y(t) &= \\ U^{(4)}(t) - \ddot{U}(t)f'_0(U(t)) - \dot{U}^2(t)f''_0(U(t)) - \\ 2u_6\dot{U}(t)f'_1(U(t)) - u_6t\dot{U}^2(t)f''_1(U(t)) - u_6t\ddot{U}(t)f'_1(U(t)).\end{aligned}\tag{3.11}$$

В левой части уравнения (3.11) выразим  $\dot{Y}$  и  $Y$  через функцию  $U$  и её производные согласно соотношениям (3.8) и (3.9). Получим уравнение (здесь аргумент  $t$  у функции  $U$  для краткости опущен)

$$\begin{aligned}U^{(4)} &= \frac{\ddot{U}\ddot{U}}{\dot{U}} + \ddot{U} \left( 4\dot{U}^2 - u_6 \frac{f_1(U)}{\dot{U}} \right) + 2U_6\dot{U}f'_1(U) + \\ &\quad \dot{U}^2 \left( f''_0(U) + u_6tf''_1(U) - 4f_0(U) - 4u_6tf_1(U) \right).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Это уравнение допускает упрощение ввиду тождеств

$$f''_0(U) \equiv 4f_0(U), \quad f''_1(U) = 4(f_1(U) - k).$$

После применения этих тождеств в (3.12) и умножения обеих частей (3.12) на  $\dot{U}$  выводим уравнение (3.6). Теорема доказана. ■

## 4. Численные эксперименты

В данном разделе приводятся результаты численного моделирования, оценивающие точность с которой решения системы (1.2) приближаются выражениями в Теореме 2.

На Рис. 2 приведено сравнение графиков экстремальных управлений и их приближенными выражениями в Теореме 2 при начальных значениях  $u_1(0) = 0.2$ ,  $u_2(0) = 0.7$ ,  $u_3(0) = 0.3$ ,  $u_4(0) = 1.5$ ,  $u_5(0) = 1$  и при значениях  $u_6 \in \{0.1, 0.5, 1\}$ . Видно, что как и предполагалось, асимптотические формулы в Теореме 2 являются локальными, то есть заданными на достаточно малом отрезке времени  $t \in [0, T]$ , и что при уменьшении значениях  $|u_6|$  точность приближения повышается.

Для численного моделирования была использована система Wolfram Mathematica. Система дифференциальных уравнений (1.2) решалась с помощью функции NDSolve при стандартных параметрах. Файл с демонстрацией Wolfram Demonstration находится в открытом доступе [http://control.botik.ru/?page\\_id=2754](http://control.botik.ru/?page_id=2754).

## 5. Заключение

В данной работе рассматривается задача поиска экстремальных управлений в субримановой (СР) задаче на группе движений трехмерного пространства  $SE_3$ . Она является обобщением работ [7, 12] и посвящена исследованию экстремальных управлений вблизи особого значения  $u_6 = 0$ , исследованного ранее. Получены следующие основные результаты:

- в Теореме 1 получено решение в операторной форме для  $u_6 \in \mathbb{R}$ ;
- в Теореме 2 получены асимптотические формулы для экстремальных управлений в случае, когда  $|u_6|$  мало;
- в Теореме 3 интегро-дифференциальное уравнение на экстремальное управление  $u_3$  сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Практическая применимость найденных формул была обоснована результатами численных экспериментов в разделе 4, которые показали, что при малых значениях параметра  $|u_6|$  решение приближенной системы уравнений в Теореме 2 является близким к решению исходной системы (1.2) на достаточно малом интервале времени.

Авторы выражают благодарность проф. А.В. Цыганову за указание на механический смысл рассматриваемой задачи и содержательную переписку.

## Список литературы

- [1] Jamieson, J. and Holderbaum, W., Trajectory generation using sub-Riemannian curves for quadrotor UAVs, in *2015 European Control Conference (ECC)*, 2015 pp. 1645–1650.
- [2] Biggs, J. and Holderbaum, W., Optimal Kinematic Control of an Autonomous Underwater Vehicle *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, vol. 54, no. 7, pp. 1623–1626.
- [3] Duits, R., Dela Haije, T. C. J., Creusen, E. J. and Ghosh, A., Morphological and Linear Scale Spaces for Fiber Enhancement in DW-MRI, *Journal of mathematical imaging and vision*, 2013, vol. 46, no. 3, pp. 326–368.
- [4] Bizyaev, I. A., Borisov, A. V., Kilin A. A. and Mamaev I. S., Integrability and Nonintegrability of Sub-Riemannian Geodesic Flows on Carnot Groups, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 759–774.

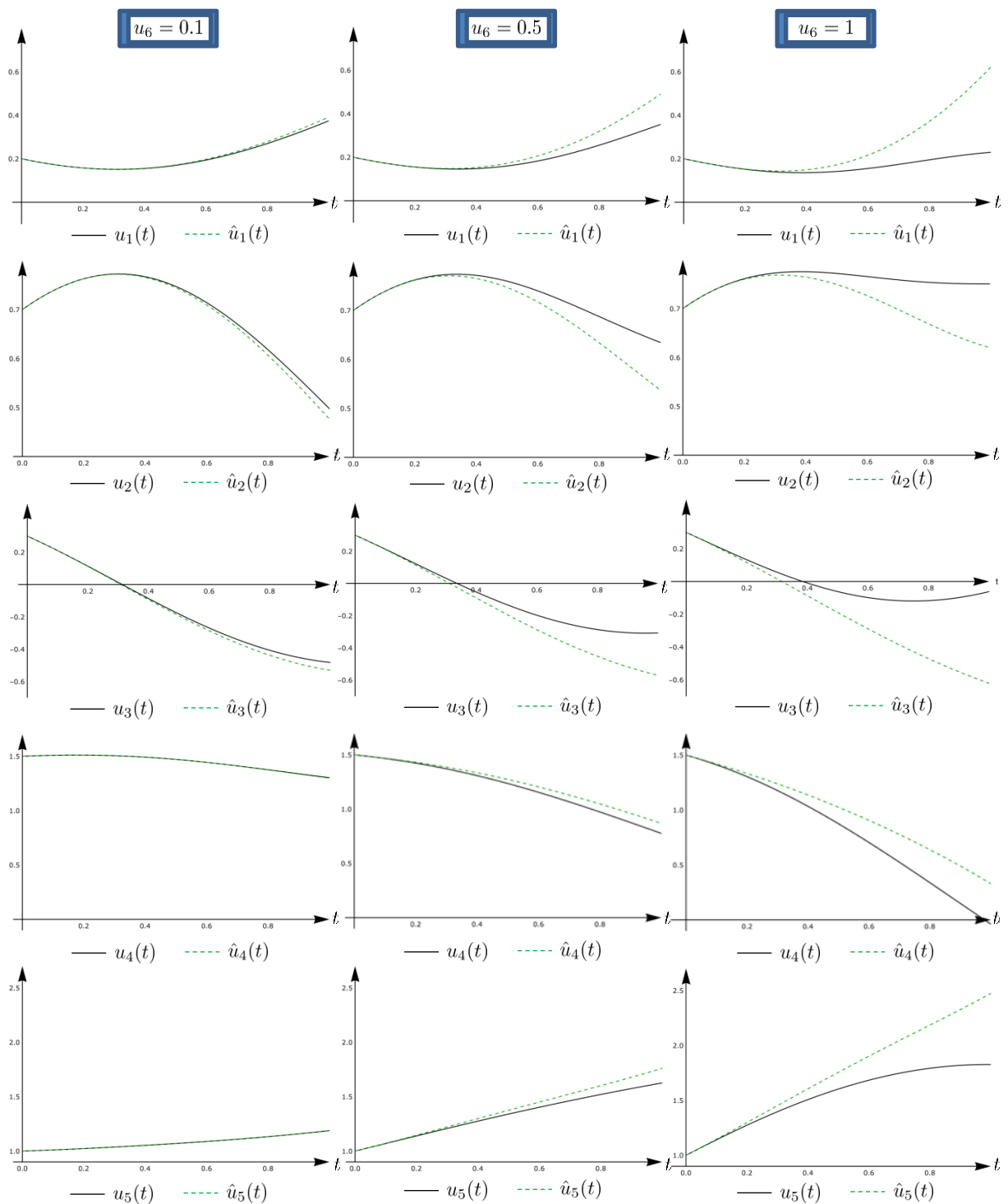


Рис. 2. Сравнение графиков экстремальных управлений  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  (по вертикали) в субримановой задаче на группе  $SE_3$ , вычисленных по приближенным формулам в Теореме 2 (пунктирная линия) и с помощью интегрирования системы (1.2), задающей точные решения (сплошная линия), при значениях  $u_6 \in \{0.1, 0.5, 1\}$  (по горизонтали).

- 
- [5] Локуциевский, Л. В., Сачков, Ю. Л., Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше, *Математический сборник*, 2018, vol. 209, no. 5, pp. 74–119.
- [6] Маштаков, А. П., Сачков, Ю. Л., Суперинтегрируемость левоинвариантных субримановых структур на унимодулярных трехмерных группах Ли, *Дифференциальные уравнения*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1482–1488.
- [7] Duits, R., Ghosh, A., Dela Haije, T. and Mashtakov, A., On sub-Riemannian geodesics in  $SE(3)$  whose spatial projections do not have cusps, *Journal of dynamical and control systems*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 771–805.
- [8] Борисов, А. В., Мамаев, И. С. *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [9] Кирхгоф, Г., *Механика. Лекции по математической физике*. М.: АН СССР, 1962. Пер. с нем.: Kirchhoff G.R. *Vorlesungen uber mathematische Physik. Mechanik*. Leipzig, 1874.
- [10] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., Бизяев, И. А., Динамические системы с неинтегрируемыми связями: вакономная механика, субриманова геометрия и неголономная механика, *Успехи математических наук*, 2017, vol. 72, no. 5(437), pp. 3–62.
- [11] Halphen, G.-H., Sur le mouvement d'un solide dans un liquide, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1888, vol. 4, no. 4, pp. 5–82.
- [12] Mashtakov, A. P. and Popov, A. Yu., Extremal Controls in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of Euclidean Space, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 8, pp. 952–957.
- [13] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа* 7-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 572 стр. – ISBN 5-9221-0266-4.