Механическая интерпретация (2, 3, 5, 8)-задачи.

План

1. Управляемая система в (2, 3, 5, 8)-задаче, граничные условия.
2. Область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, ориентация границы $\partial\mathcal{D}$
3. интегрирование $\dot{x}_3, \dots, \dot{x}_8$ по $\partial\mathcal{D}^{\pm}$.
4. Смысл граничных условий $x(T)$ с точки зрения механики.
5. некоторые сведения из статики и вращения пластины.
6. Примеры.
7. mathematica

1. Управляемая система

$$\dot{x}_1 = u_1$$
$$\dot{x}_2 = u_2$$
$$\dot{x}_3 = -\frac{x_2}{2}u_1 + \frac{x_1}{2}u_2$$
$$\dot{x}_4 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)u_2 \qquad (1)$$
$$\dot{x}_5 = -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)u_1$$
$$\dot{x}_6 = \frac{x_1^3}{6}u_2$$
$$\dot{x}_7 = -\frac{x_1 x_2^2}{4}u_1 + \frac{x_1^2 x_2}{4}u_2$$
$$\dot{x}_8 = -\frac{x_2^3}{6}u_1$$

Граничное условие

$$x(0)=0, \quad x(T) = x^1. \qquad (2)$$

2. Область D и граница ∂D.

Рассмотрим такие решения $x(t)$ системы (1),(2), проекции которых $\pi x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = \gamma(t)$ являются либо простыми (без самопересечений, кроме 0) замкнутыми контурами, ограничивающими область D, либо вместе с хордой γ_0, соединяющей $(x_1(T), x_2(T))$ и $O(0,0)$, образуют простой контур, ограничивающий область D.

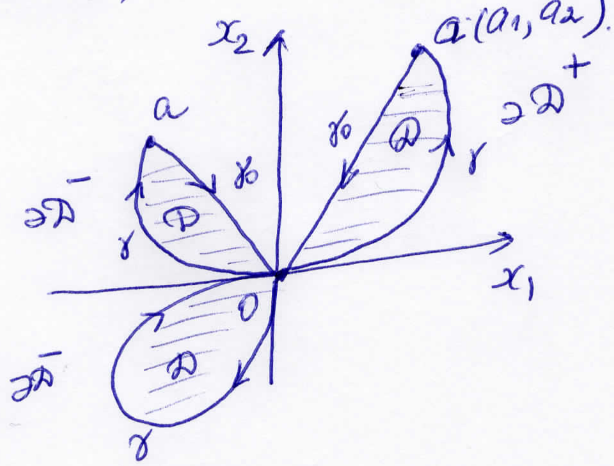
Итак, ∂D — простой контур, $\partial D = \gamma \cup \gamma_0$.

Если обход $\partial D = \gamma_0 \cup \gamma$ осуществляется против ч.с., то обход положителен, т.е. ∂D^+, если же по часовой стрелке, то отрицателен, ~~против~~ ∂D^-.

$x_1(T)=a_1, \quad x_2(T)=a_2,$

$\gamma_0=\{(a_1(1-t), a_2(1-t)), t\in[0,1]\},$

$\gamma=\{(x_1(t), x_2(t)), t\in[0,T]\}.$



3. Интегрирование уравнений системы ① по контуру $\partial D^{\pm}$.

Заметим, что все $\dot{x}_i$, $i=3,\dots,8$, выражаются через $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$.

1). $\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_3 = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D^{\pm}} -x_2dx_1+x_1dx_2 = \text{ф. Гр.} = \pm\iint\limits_{D} dx_1dx_2;$

с др. стороны

$\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_3 = \int\limits_{\gamma} dx_3 + \int\limits_{\gamma_0} dx_3 = x_3(T)+0;$

2). $\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_4 = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D^{\pm}} (x_1^2+x_2^2)dx_2 = \text{ф. Гр} = \pm\iint\limits_{D} x_1dx_1dx_2$

с др. стор.

$\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_4 = \int\limits_{\gamma} dx_4 + \int\limits_{\gamma_0} dx_4 = x_4(T) - \frac{1}{6}a_2(a_1^2+a_2^2).$

3) $\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_5 = -\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D^{\pm}} (x_1^2+x_2^2)dx_1 = \text{ф. Гр} = \pm\iint\limits_{D} x_2 dx_1 dx_2.$

с др. стор.

$\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_5 = \int\limits_{\gamma} dx_5 + \int\limits_{\gamma_0} dx_5 = x_5(T) + \frac{1}{6}a_1(a_1^2+a_2^2)$

4). $\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_6 = \frac{1}{6}\oint\limits_{\partial D^{\pm}} x_1^3 dx_2 = \text{ф. Гр} = \pm\frac{1}{2}\iint\limits_{D} x_1^2 dx_1 dx_2 \mp$

с др. стор.

$\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_6 = \int\limits_{\gamma} dx_6 + \int\limits_{\gamma_0} dx_6 = x_6(T) - \frac{1}{24}a_1^3 a_2.$

5). $\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_8 = -\frac{1}{6}\oint\limits_{\partial D^{\pm}} x_2^3 dx_1 = \text{ф. Гр.} = \pm\frac{1}{2}\iint\limits_{D} x_2^2 dx_1 dx_2.$

с др. стор.

$\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_8 = \int\limits_{\gamma} dx_8 + \int\limits_{\gamma_0} dx_8 = x_8(T) + \frac{1}{24}a_1 a_2^3.$

6). $\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_7 = \frac{1}{4}\oint\limits_{\partial D^{\pm}} -x_1 x_2^2 dx_1 + x_1^2 x_2 dx_2 = \text{ф. Гр.} = \pm\iint\limits_{D} x_1 x_2 dx_1 dx_2.$

с др. стор.

$\oint\limits_{\partial D^{\pm}} dx_7 = \int\limits_{\gamma} dx_7 + \int\limits_{\gamma_0} dx_7 = x_7(T) + 0.$

итоги

1). $x_3(T) = \pm \iint\limits_D dx_1 dx_2 = \pm S$ – алгебр. площадь D.

2). $x_4(T) - \frac{1}{6} a_2(a_1^2+a_2^2) = \pm \iint\limits_D x_1 dx_1 dx_2 = \pm M_{x_2}$ – статический момент D относ. Ox_2 /алгебраический/

3). $x_5(T) + \frac{1}{6} a_1(a_1^2+a_2^2) = \pm \iint\limits_D x_2 dx_1 dx_2 = \pm M_{x_1}$ – – " – Ox_1.

4). $x_6(T) - \frac{1}{24} a_1^3 a_2 = \pm \frac{1}{2} \iint\limits_D x_1^2 dx_1 dx_2 = \pm \frac{1}{2} I_{x_2}$ – момент инерции относ. Ox_2 /алгебр-й/

5). $x_8(T) + \frac{1}{24} a_1 a_2^3 = \pm \frac{1}{2} \iint\limits_D x_2^2 dx_1 dx_2 = \pm \frac{1}{2} I_{x_1}$ – – " – Ox_1.

6). $x_7(T) = \pm \iint\limits_D x_1 x_2 dx_1 dx_2 = \pm K_{x_1 x_2}$ – центробежный момент относ. Ox_1x_2 /алгебраический/.

4. Смысл граничных условий $x(T)$ с точки зрения механики.

Механические характеристики пластины D не зависят от направления обхода контура ее границы. Поэтому рассмотрим абсолютные величины 1) – 6) прил. п. 3.

Введем обозначения:

$\mu_4 = \frac{1}{6} a_2 (a_1^2 + a_2^2)$,

$\mu_5 = \frac{1}{6} a_1 (a_1^2 + a_2^2)$,

$\mu_6 = \frac{1}{12} a_1^3 a_2$,

$\mu_8 = \frac{1}{12} a_1 a_2^3$, где $a_1 = x_1(T)$, $a_2 = x_2(T)$.

 05 06 20

Граничное условие $x(T)$ содержит следующую информацию о механических свойствах пластины D:

$$
\begin{cases}
x_3(T) = S & (1)\\
x_4(T) - \mu_4 = M_{x_2} & (2)\\
x_5(T) + \mu_5 = M_{x_1} & (3)\\
2x_6(T) - \mu_6 = I_{x_2} & (4)\\
2x_8(T) + \mu_8 = I_{x_1} & (5)\\
x_7(T) = K_{x_1x_2} & (6)
\end{cases}
\qquad (3)
$$

из (1), (2), (3) системы (3) $\Rightarrow$ пластины D задан <u>центр масс</u>

$$c_1 = \frac{M_{x_2}}{S}, \quad c_2 = \frac{M_{x_1}}{S},$$

из (4), (5), (6) $\Rightarrow$ задан <u>тензор инерции</u> пластины D:

$$A = \begin{pmatrix} I_{x_1} & -K_{x_1x_2} & 0 \\ -K_{x_1x_2} & I_{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{x_1} + I_{x_2} \end{pmatrix}.$$

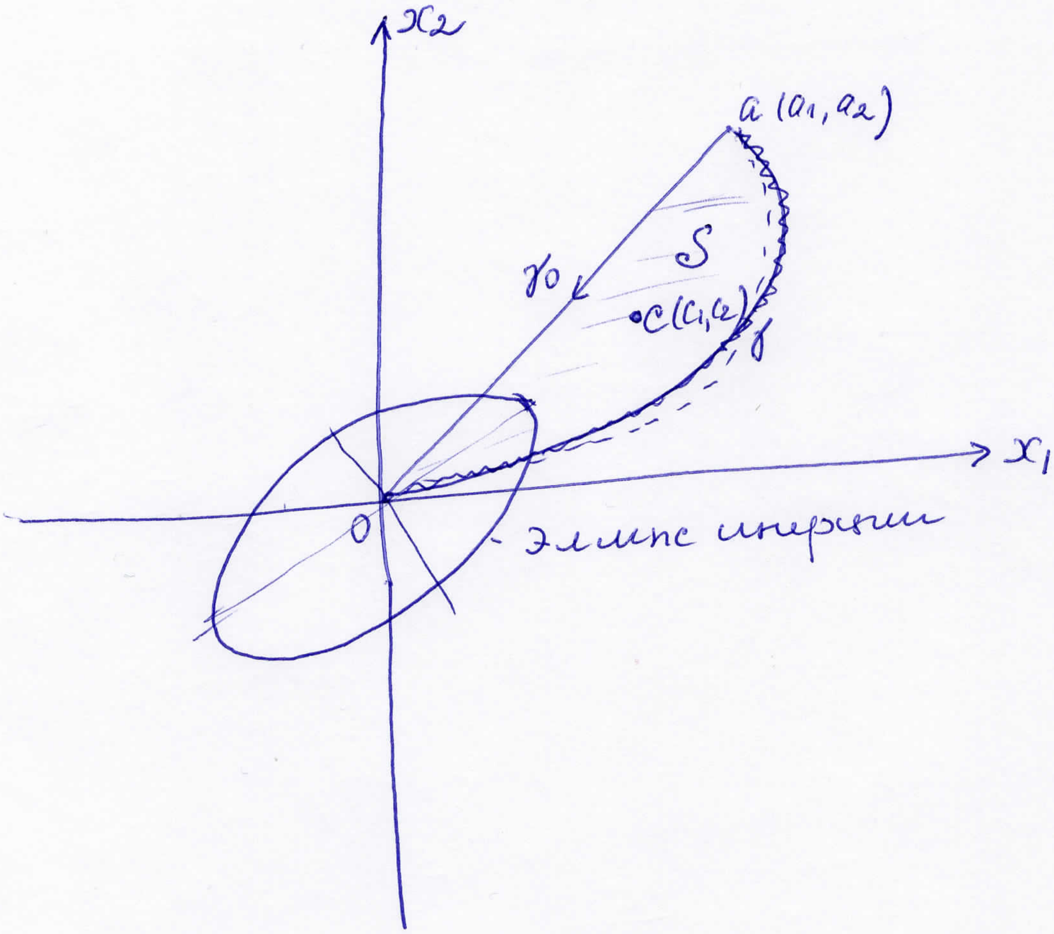
$$\Downarrow$$

задан <u>эллипс инерции</u>

$$I_{x_1} w_1^2 - 2K_{x_1x_2} w_1 w_2 + I_{x_2} w_2^2 = 1,$$

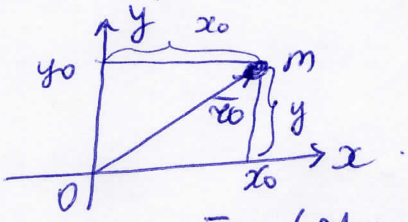
где $\bar{w} = (w_1, w_2, 0)$ – угловая скорость, не зависящая от времени.

05.06.20.



5.1. Статика

1). статический момент материальной точки массы m, рад.-вектор $\bar{r}_0 (x_0, y_0)$:

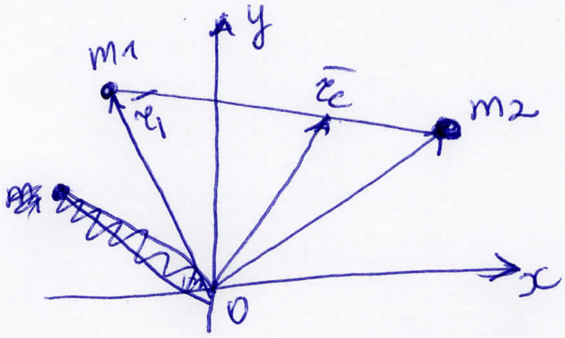


$M_x = m \cdot y_0$, $M_y = m x_0$; $\bar{M} = (M_x, M_y) = \bar{r}_0 \cdot m$.

б). система из 2-х материальных точек $(m_1, \bar{r}_1)$, $(m_2, \bar{r}_2)$.

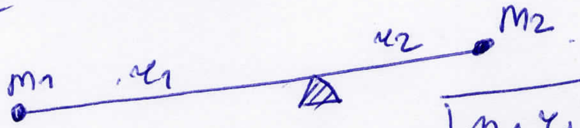
центр масс $\bar{r}_c = \dfrac{\bar{r}_1 m_1 + \bar{r}_2 m_2}{\underbrace{m_1 + m_2}_{m}}$.

$\dfrac{m_1}{m} + \dfrac{m_2}{m} = 1 \Rightarrow \dfrac{m_i}{m}$ – барицентрические коорд-ты точки $\bar{r}_c$.



$\bar{r}_c \in$ выпуклой оболочке масс m_1 и m_2.

Рычаг

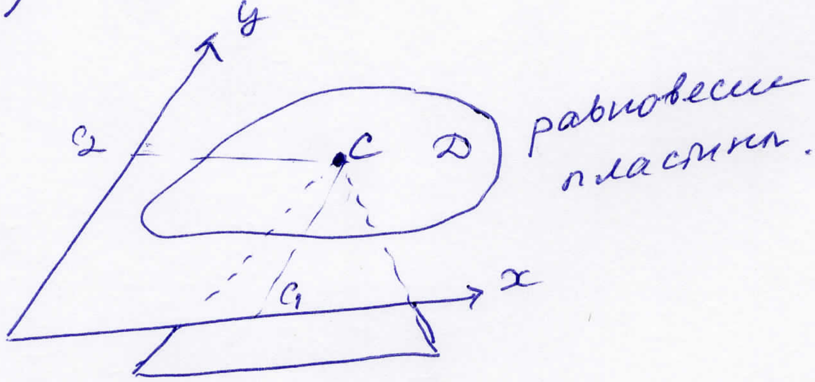


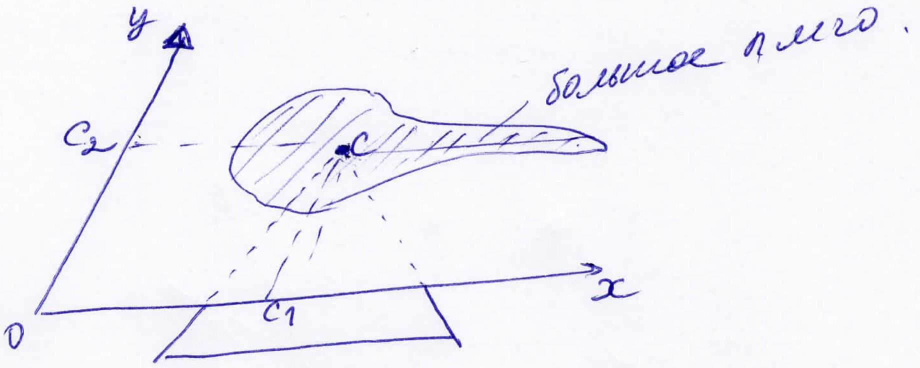
условие равновесия: $\boxed{m_1 r_1 = m_2 r_2}$ $\Leftrightarrow$ $\bar{M}_1 + \bar{M}_2 = 0$

в). D – пластина, однородная (плотность $\rho(x,y) \equiv 1$).

$$m = \iint_D dxdy, \quad M_x = \iint_D y\,dxdy, \quad M_y = \iint_D x\,dxdy.$$

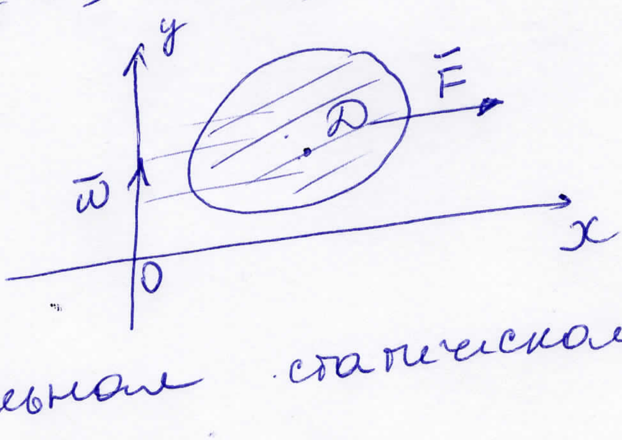
$$\bar{r}_c = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right) \in D.$$

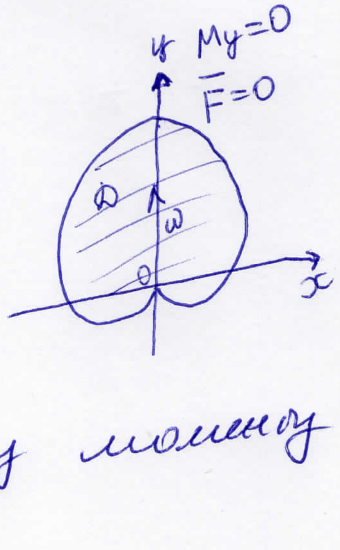




г). При вращении пластины вокруг оси Oy возникает центробежная сила,

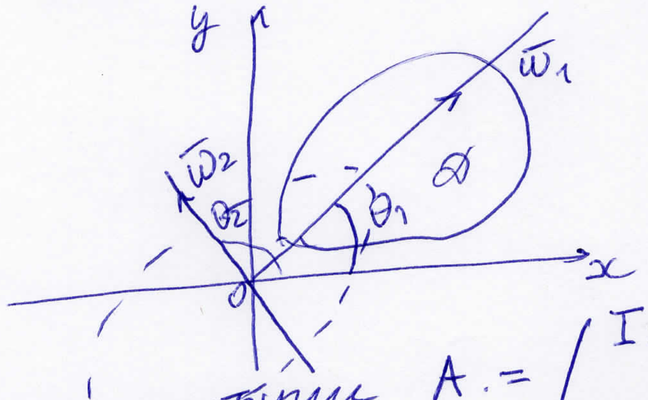
$$\bar{F} = (M_y \omega^2, 0, 0)$$





пропорциональная статическому моменту M_y.

5.2. Кинематика вращательного движения.



$\mathcal{D} \longrightarrow$ тензор инерции $A := \begin{pmatrix} I_x & -K_{xy} & 0 \\ -K_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I^0 \end{pmatrix}$.

Угловые скорости $\bar\omega = (\bar\omega_1, \bar\omega_2, 0) = |\bar\omega|(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Кинетическая энергия вращающейся пластины не зависит от времени:

$$T = \frac{1}{2}(\bar A\bar\omega, \bar\omega) = \frac{1}{2} I_e |\omega|^2,$$

где I_e – момент инерции пл. $\mathcal{D}$ относит. оси $|\omega|(\cos\theta, \sin\theta)$.

Сравним вращательные свойства пластины $\mathcal{D}$ относительно всевозможных угловых скоростей $\bar\omega \in \mathbb{R}^2$. Положим при этом $T = \frac{1}{2}$ $\forall\, \theta \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$I_e|\omega|^2 = 1 \iff$$

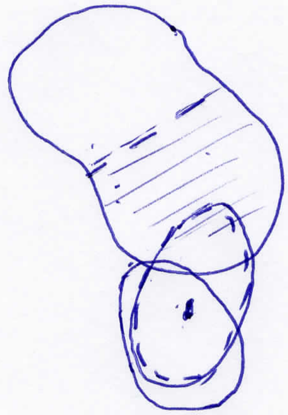
$$I_x \omega_1^2 - 2K_{xy}\omega_1\omega_2 + I_y\omega_2^2 = 1 \quad (4)$$

$$I_x I_y - K_{xy} > 0 \quad (\text{у нер. Коши-Бун.}).$$

$\Rightarrow$ (4) – эллипс, составленный из угловых скоростей $\bar\omega^* = \dfrac{\bar e}{\sqrt{I_e}}$, $\bar e = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\forall\theta$.

Т.к. A - симметрич., то $\exists\ \bar{I}_1 \perp \bar{I}_2$ - собств. направления. В этом базисе эллипс им. вид: $I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 = 1$.

I_1, I_2 - <u>главные оси инерции</u> $(k_{xy} = 0)$.



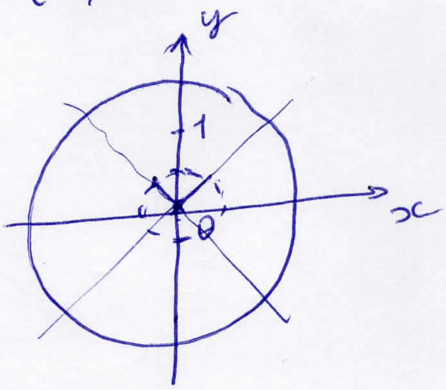
Главные оси эллипса инерции направлены по осям инерции, а их длины обратно пропорциональны $\sqrt{I_i}$, $i = 1, 2$.

6. Примеры.

1. Эллипс инерции круга $(0, R)$: $x^2 + y^2 = R^2$

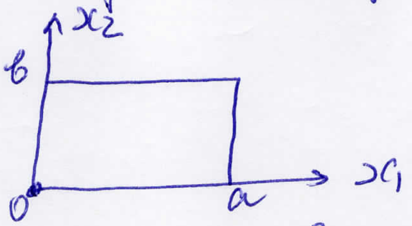
$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} R^4$.

$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{4}{\pi R^4}$



 -05.06.20-

2. Эллипс инерции прямоугольника:



$$I_{x_2} = \frac{a^3 b}{3}, \quad I_{x_1} = \frac{ab^3}{3}, \quad K_{x_1 x_2} = \frac{a^2 b^2}{4}.$$

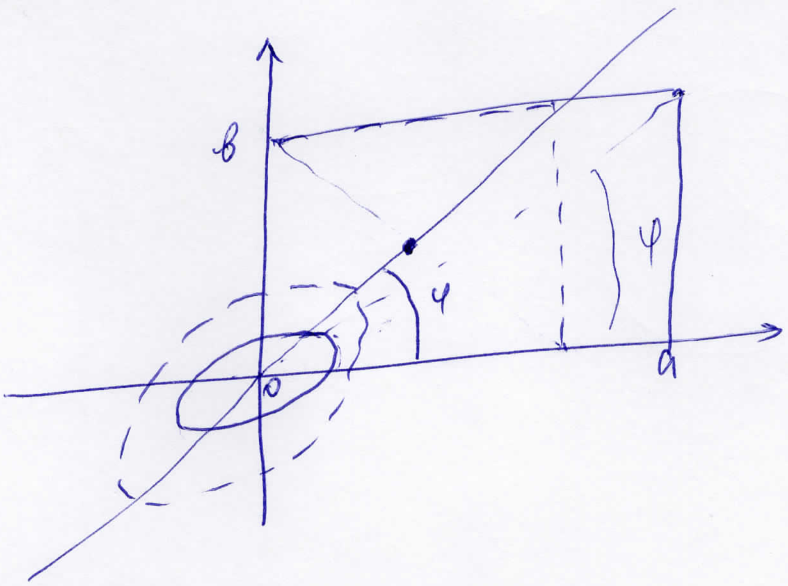
$$A = \begin{pmatrix} \frac{ab^3}{3} & -\frac{a^2b^2}{4} \\ -\frac{a^2b^2}{4} & \frac{a^3 b}{3} \end{pmatrix}, \quad \det A \approx \frac{1}{9} - \frac{1}{16} > 0.$$

Эллипс инерции с ц. в т. O:

$$\frac{ab^3}{3}\omega_1^2 - \frac{a^2b^2}{2}\omega_1\omega_2 + \frac{a^3 b}{3}\omega_2^2 = 1.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4(a^2-b^2) \pm \sqrt{16(b^2-a^2) + 36a^2b^2}}{6ab}.$$ – угол одной из главных осей инерции эл-са.

$\operatorname{tg}\varphi = \pm 1 \Leftrightarrow a = b$. – совпадает с диагон. квадр.; прох. через центр тяжести квадрата.



Резюме.

Граничные условия $x(T)$ в (2, 3, 5, 8)-задаче содержат информацию о массе пластины, о ее статических моментах, о центре тяжести, а также о распределении масс на плоскости через вращательные характеристики, содержащиеся в эллипсе инерции.