

ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ УПРАВЛЕНИЯ

Ю.Л. Сачков

13 марта 2020 г.



Рис. 1: Поиск быка



Рис. 2: Видит следы



Рис. 3: Видит быка

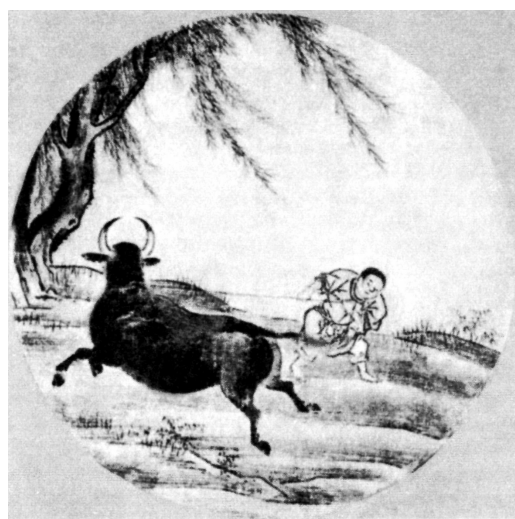


Рис. 4: Бык пойман

Оглавление

Предисловие	v
1 Введение	1
1.1 Постановки задач управления	1
1.1.1 Примеры задач оптимального управления	1
Остановка поезда	1
Машина Маркова-Дубинса	2
Субриманова задача на группе движений плоскости	2
Эластики Эйлера	3
Качение сферы по плоскости	4
Антропоморфное восстановление кривых	5
Задача Дидоны	6
1.1.2 Управляемые системы и задачи теории управления	9
1.2 Гладкие многообразия и векторные поля	11
1.3 Задачи	13
2 Задача управляемости	15
2.1 Управляемость	15
2.1.1 Управляемость линейных систем	15
2.1.2 Локальная управляемость нелинейных систем	18
2.1.3 Задачи	19
2.2 Теорема об орбите	20
2.2.1 Орбита управляемой системы	20
2.2.2 Предварительные сведения	20
2.2.3 Теорема об орбите	22
2.2.4 Следствия из теоремы об орбите	25
2.2.5 Теорема Фробениуса	26
2.2.6 Примеры	27
Субриманова задача на группе движений плоскости	27
Орбиты разной размерности	27
Еще орбиты разной размерности	28
2.2.7 Задачи	28
2.3 Множества достижимости систем полного ранга	28
2.3.1 Теорема Кренера	28
2.3.2 Примеры	30
Остановка поезда	30
Машина Маркова-Дубинса	31
Субриманова задача на группе движений плоскости	32
Задача Эйлера об эластичах	32
Скобки Ли высших порядков	32
2.3.3 Задачи	33

3	Задача оптимального управления	35
3.1	Задача оптимального управления: постановка и существование решений . . .	35
3.1.1	Постановка задачи	35
3.1.2	Сведение к исследованию множеств достижимости	36
3.1.3	Существование решений в задаче оптимального управления	37
3.2	Принцип максимума Понтрягина	38
3.2.1	Элементы симплектической геометрии	38
3.2.2	Формулировка принципа максимума Понтрягина	40
3.2.3	Решение задач оптимального управления	41
	Остановка поезда	41
	Машина Маркова-Дубинса	44
	Эйлеровы эластики	45
3.3	Субриманова геометрия	50
3.3.1	Субримановы структуры и кратчайшие	50
3.3.2	Ранговое условие управляемости для субримановых задач	52
3.3.3	Теорема Филиппова для субримановых задач	52
3.3.4	Принцип максимума Понтрягина для субримановых задач	52
3.3.5	Условия оптимальности для субримановых задач	53
3.3.6	Субриманова задача на группе Гейзенберга (задача Дидоны)	55
3.3.7	Доказательство принципа максимума Понтрягина для субримановых задач	58
3.3.8	Задачи	64
3.4	Субриманова задача на группе движений евклидовой плоскости	65
3.4.1	Группа движений евклидовой плоскости	65
3.4.2	Левоинвариантная субриманова задача на $SE(2)$	65
3.4.3	Существование решений	66
3.4.4	Принцип максимума Понтрягина	66
3.4.5	Геодезические и экспоненциальное отображение	68
3.4.6	Симметрии	68
3.4.7	Сопряженные точки	70
3.4.8	Структура экспоненциального отображения	71
3.4.9	Множество разреза и каустика	71
3.4.10	Субримановы сферы и волновые фронты	73
3.4.11	Симметричный метод	73
	Заключение	77
	Список иллюстраций	79
	Список литературы	81
	Предметный указатель	86

Предисловие

1. Поиск быка:

*Одинокий в пустынном месте, заблудившийся в джунглях, мальчик все ищет
и ищет!*

*Вздымающиеся волны, далекие горы и бесконечная дорога;
Истощенный и потерявший надежду, он не знает, куда идти,
Он лишь слышит вечерних цикад, поющих в кленовых лесах.*

Пу-мин, «Десять рисунков о пастухе и быке» (цит. по [30])

О чем эта книга? Вашему вниманию предлагается краткий вводный курс по геометрической теории управления. Это направление математической теории управления возникло в 70-х годах прошлого века; оно активно использует методы дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли, симплектической геометрии для исследования управляемых систем. Основными источниками по этому направлению являются — в хронологическом порядке — книги В. Джарджевича [23], А.А. Аграчева и автора [1], и совсем недавняя книга А.А. Аграчева, Д. Барилари, У. Боскаина [11].

Цель курса — дать очень краткое первое представление о круге задач, методов и результатов геометрической теории управления, и привить навыки решения таких задач с помощью этих методов и результатов.

Для кого эта книга? Книга рассчитана на широкий круг читателей, начиная со студентов-математиков и прикладных математиков, до специалистов в «классической» теории управления, для которых геометрические методы будут новыми.

Какие знания предполагаются? Предполагается уверенное владение материалом первых двух курсов университета для математиков и прикладных математиков: математический анализ, линейная алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения.

Желательно (но не обязательно) знакомство с гладкими многообразиями и векторными полями на них, элементами теории групп и алгебр Ли.

Знание теории управления не предполагается.

Зачем эта книга? Российские математики внесли определяющий вклад в математическую теорию управления — достаточно перечислить ее основные результаты: принцип максимума Понтрягина, теорема Филиппова, теорема Рашевского-Чжоу. Книга написана для того, чтобы эта замечательная традиция была успешно продолжена новыми поколениями российских математиков.

Книгу можно использовать в качестве учебного пособия для семестрового или полусеместрового спецкурса для студентов старших курсов или аспирантов, как это делал автор в университетах Переславля-Залесского, Москвы, Новосибирска, Сочи, Триеста, Руана, Брно, Брашова, Ювяскюля, Чанчуна.

Структура книги. Книга состоит из трех глав.

Вводная глава 1 посвящена первому знакомству с задачами теории управления и гладкими многообразиями. В разделе 1.1 приведена постановка нескольких конкретных задач геометрической теории управления: остановка поезда, машина Маркова-Дубинса, субриманова задача на группе движений плоскости, эластике Эйлера, качение сферы по плоскости, антропоморфное восстановление кривых, задача Дидоны. После этого описаны основные общие проблемы курса — задача управляемости и задача оптимального управления. В

разделе 1.2 приводятся начальные сведения о гладких многообразиях и векторных полях, используемые далее.

Глава 2 посвящена задаче управляемости. В разделе 2.1 доказаны классические результаты по этой задаче: критерий Калмана управляемости линейных систем и достаточное условие управляемости нелинейной системы по линейному приближению. В разделе 2.2 доказывается фундаментальная Теорема Нагано-Суссмана об орбите управляемой системы, а также ее важные следствия: теоремы Рашевского-Чжоу и Фробениуса. Раздел 2.3 посвящен известной теореме Кренера о структуре множества достижимости систем полного ранга.

Глава 3 посвящена задаче оптимального управления. В разделе 3.1 мы начинаем изучать эту вторую основную задачу курса: приводится ее постановка, обсуждается теорема Филиппова — фундаментальное достаточное условие существования оптимальных управлений. Раздел 3.2 посвящен основному необходимому условию оптимальности в задачах оптимального управления — принципу максимума Понтрягина. С помощью формализма симплектической геометрии приводится бескоординатная формулировка этой теоремы для задач на многообразиях. В разделе 3.3 рассматривается популярный в последние десятилетия класс субримановых задач. Представленные ранее результаты специализируются для этих задач, обсуждаются условия оптимальности (сопряженные точки, точки Максвелла). Доказывается принцип максимума Понтрягина для субримановых задач. В разделе 3.4 приводится, впервые в учебной литературе, решение важной субримановой задачи на группе движений плоскости.

В заключительном разделе приводятся рекомендации для дальнейшего чтения.

В большинстве разделов теоретические результаты иллюстрируются на примерах задач, поставленных в пункте 1.1.1. Некоторые разделы снабжены учебными задачами.

На второй странице обложки на Рис. 1–4 помещены первые четыре рисунка из книги мастера дзен Какуана «Десять рисунков о пастухе и быке». В качестве эпиграфов к предисловию, трем главам и заключительному разделу использованы соответствующие стихи Пу-мина. Рисунки и цитаты взяты из книги Д.Т. Судзуки [30].

Глава 1

Введение

2. Видит следы:

То возле реки, то под деревьями встречаются шаги пропавшего быка;

Душистые травы растут стеной — нашел ли он путь?

Как бы далеко не бродил по холмам зверь,

*Чутье пастуха простирается до небес и ничто не может укрыться от его
взора.*

Пу-мин, «Десять рисунков о пастухе и быке» (цит. по [30])

1.1 Постановки задач управления

1.1.1 Примеры задач оптимального управления

Перед построением общей теории рассмотрим несколько характерных примеров, некоторые из которых мы будем исследовать далее.

Остановка поезда

Рассмотрим материальную точку массы m (математическую модель поезда), движущуюся по прямой под действием силы F , ограниченной по модулю: $|F| \leq F_{\max}$. Пусть в начальный момент точка имеет координату x^0 и скорость \dot{x}^0 . Требуется подобрать силу F так, чтобы точка остановилась в начале координат ($x^1 = 0$, $\dot{x}^1 = 0$) за минимальное время.

Запишем второй закон Ньютона для материальной точки с координатой x :

$$m\ddot{x} = F.$$

Имеем ограничение $|\ddot{x}| = \frac{|F|}{m} \leq \frac{F_{\max}}{m}$. Выберем единицы измерения так, чтобы $\frac{F_{\max}}{m} = 1$. Обозначая $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $u = \ddot{x}$, получим математическую постановку задачи:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & (x_1, x_2) &\in \mathbb{R}^2, \\ \dot{x}_2 &= u, & |u| &\leq 1, \\ x_1(0) &= x^0, & x_2(0) &= \dot{x}^0, \\ x_1(t_1) &= 0, & x_2(t_1) &= 0, \\ t_1 &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Такого рода задача оптимального управления называется *линейной задачей быстрого действия*.

Машина Маркова-Дубинса

Рассмотрим очень упрощенную модель машины, представляющую собой единичный вектор, расположенный в произвольной точке плоскости (направление вектора задает ориентацию машины на плоскости). Машина движется вперед с единичной скоростью и может при этом поворачиваться с угловой скоростью, по абсолютной величине не больше единицы. Требуется перевести машину из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за минимальное время.

Обозначим через (x, y) координаты машины на плоскости, а через θ ее угол ориентации. Тогда поставленная задача формулируется как следующая задача быстродействия:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \theta, & q &= (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1 = M, \\ \dot{y} &= \sin \theta, & |u| &\leq 1, \\ \dot{\theta} &= u, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ t_1 &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Эта задача быстродействия нелинейная, причем пространство состояний есть нетривиальное трехмерное многообразие $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Через S^1 обозначена окружность (одномерная сфера): $S^1 = \mathbb{R} \bmod (2\pi\mathbb{R})$. Параллельные переносы и повороты переводят решения задачи в решения, поэтому задача является *левоинвариантной* задачей быстродействия на группе Ли движений евклидовой плоскости $SE(2) \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$. Подробнее об этой группе см. п. 3.4.1.

Субриманова задача на группе движений плоскости

Модифицируем предыдущий пример: пусть машина может двигаться вперед и назад с линейной скоростью u и при этом поворачиваться с угловой скоростью v . Требуется перекатить машину из заданного начального состояния в заданное конечное состояние по кратчайшей кривой, где расстояние измеряется в пространстве положений и ориентаций машины.

Если состояние машины есть $q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1 = M$, то минимизируемое расстояние равно $l = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt$, см. Рис. 1.1.

Тогда наша задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} &= u \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & q &\in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, & (1.1.1) \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Это нелинейная задача оптимального управления с интегральным функционалом качества. Динамика линейна по управлению (u, v) , а функционал однороден порядка 1 по управлению, поэтому мы имеем *субриманову задачу*. Движения плоскости переводят оптимальные решения в решения, поэтому задача левоинвариантна по группе Ли $SE(2)$. Эта задача подробно рассматривается и решается в разделе 3.4.

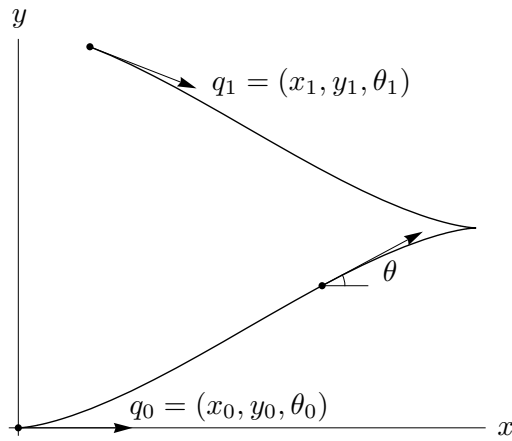


Рис. 1.1: Субриманова задача на группе движений плоскости

Эластики Эйлера

Рассмотрим однородный упругий стержень длины l на плоскости. Пусть у стержня закреплены конечные точки и касательные на концах. Требуется определить форму стержня.

Параметризуем стержень натуральным параметром и обозначим через θ угол наклона стержня, тогда его форма $(x(t), y(t))$ определяется системой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \theta, & q &= (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 = M, \\ \dot{y} &= \sin \theta, & u &\in \mathbb{R}, \\ \dot{\theta} &= u, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, & t_1 &= l, \end{aligned}$$

см. Рис. 1.2.

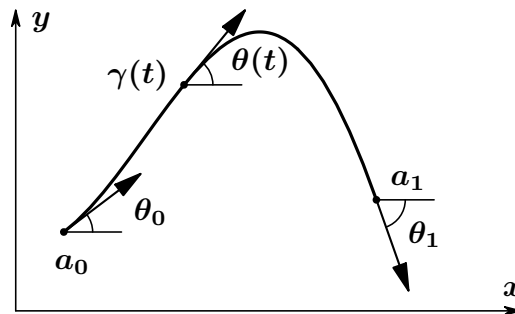


Рис. 1.2: Задача Эйлера об эlastиках

Физика задачи закодирована в функционале упругой энергии стержня

$$J = \int_0^{t_1} k^2 dt,$$

который должен принимать минимальное значение (k — кривизна стержня). Для натурально параметризованной кривой имеем $k = \dot{\theta} = u$, поэтому функционал качества есть

$$J = \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Мы опять имеем нелинейную задачу оптимального управления с интегральным функционалом качества, левоинвариантную на группе Ли $SE(2)$. Заметим, что управляемая система аффинна (линейна неоднородна) по управлению, поэтому задача не является субримановой.

Качение сферы по плоскости

Рассмотрим сферу, катящуюся по горизонтальной плоскости без прокручивания и проскальзывания, см. Рис. 1.3. Можно представлять, что есть две горизонтальные плоскости (неподвижная нижняя и подвижная верхняя), между которыми катится сфера. Отсутствие проскальзывания означает, что точка контакта сферы с плоскостью имеет нулевую мгновенную скорость; а отсутствие прокручивания — что вектор угловой скорости сферы горизонтален. Требуется перекатить сферу из заданной начальной контактной конфигурации в заданную конечную контактную конфигурацию так, чтобы точка контакта сферы и плоскости пробежала кратчайшую кривую.

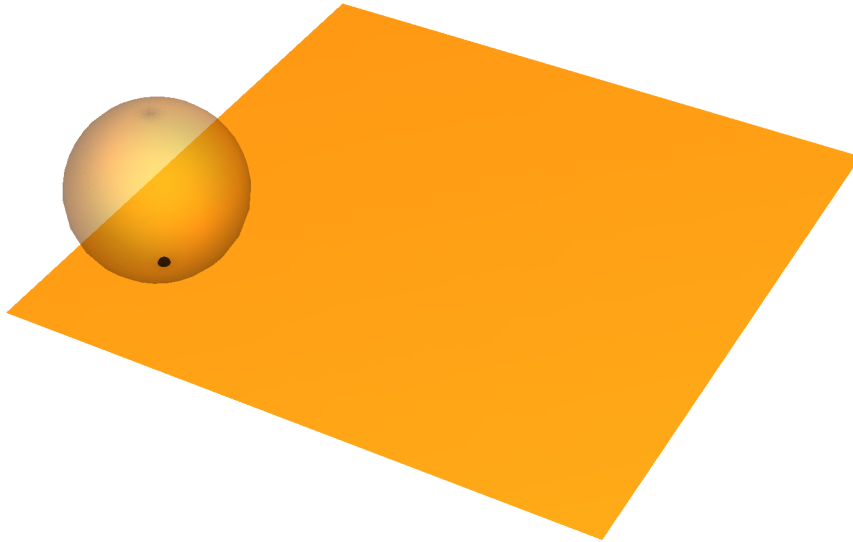


Рис. 1.3: Сфера, катящаяся по плоскости

Состояние системы задается точкой контакта сферы с плоскостью и ее ориентацией в 3-мерном пространстве. Пусть (e_1, e_2, e_3) — ортонормированный репер, закрепленный в пространстве, в котором векторы e_1, e_2 лежат в горизонтальной плоскости, а вектор e_3 направлен вверх. Далее, пусть (f_1, f_2, f_3) — ортонормированный репер, закрепленный в сфере. Обозначим через (x, y, z) и (X, Y, Z) координаты одной и той же точки в реперах (e_1, e_2, e_3) и (f_1, f_2, f_3) :

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = Xf_1 + Yf_2 + Zf_3.$$

Тогда 3×3 матрица ориентации сферы R задается тождеством

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Точка контакта сферы с плоскостью имеет координаты

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

а матрица ориентации принадлежит *специальной ортогональной группе* трехмерного пространства

$$R \in \text{SO}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^T = A^{-1}, \det A = 1\}.$$

Таким образом, состояние системы есть

$$q = (x, y, R) \in \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3) = M,$$

а задача оптимального управления имеет вид

$$\dot{x} = u, \tag{1.1.2}$$

$$\dot{y} = v, \tag{1.1.3}$$

$$\dot{R} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & 0 & -v \\ u & v & 0 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.1.4}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} dt \rightarrow \min,$$

см. Рис. 1.4.

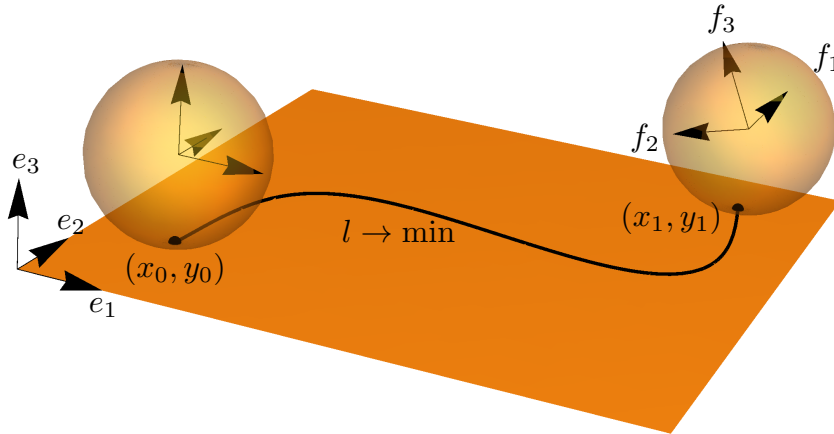


Рис. 1.4: Задача о качении сферы по плоскости

Это — левоинвариантная субриманова задача на 5-мерной группе Ли $\mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$.

Антропоморфное восстановление кривых

Предположим, что имеется черно-белое изображение, разложенное в семейство кривых — изофот (линий постоянной яркости). Пусть изображение повреждено в некоторой его подобласти, и рассмотрим задачу восстановления одной из кривых изображения. Поставим себе цель антропоморфного восстановления кривой, т. е. подобного человеческому способу восстановления, когда мы достраиваем поврежденную кривую до полного контура, см. Рис. 1.5.

Согласно открытию Хьюбела и Визеля (нобелевская премия 1981 г.), первичная зрительная кора V1 мозга млекопитающего хранит кривые не как набор точек (x_i, y_i) на

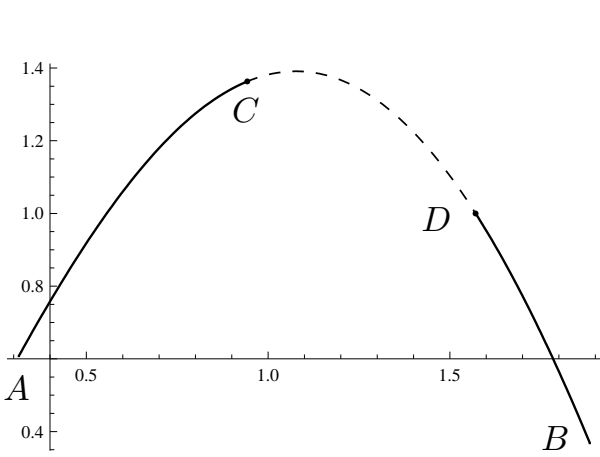


Рис. 1.5: Исходная кривая AB с поврежденной дугой CD

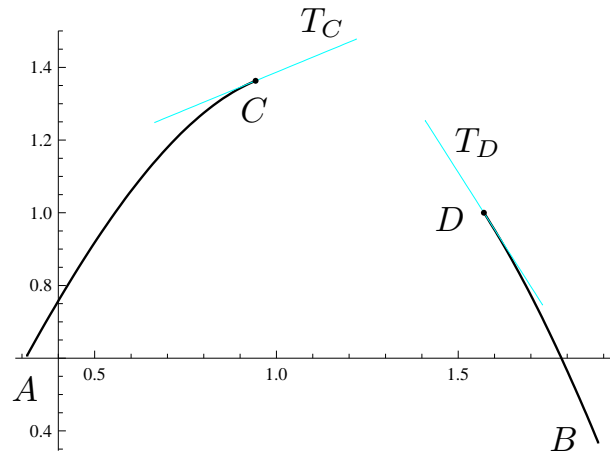


Рис. 1.6: Граничные условия для восстановления дуги CD

кривой (как это делает компьютер), а как семейство точек кривой вместе с ориентацией кривой в этих точках: (x_i, y_i, θ_i) .

Таким образом, наш мозг поднимает кривую $(x(t), y(t))$ в пространство положений и ориентаций $(x(t), y(t), \theta(t))$. Поднятая кривая есть траектория управляемой системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \theta, \\ \dot{y} &= u \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= v, \\ q &= (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1.\end{aligned}$$

Поврежденный участок кривой удовлетворяет известным граничным условиям

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

см. Рис. 1.6. А восстанавливается поврежденный участок исходя из вариационного принципа — так, чтобы при этом минимизировалась энергия активации нейронов, см. Рис. 1.7, 1.8. Согласно одной из распространенных моделей первичной зрительной коры V1, эта энергия активации измеряется интегралом

$$J = \int_0^{t_1} (u^2 + v^2) dt \rightarrow \min. \quad (1.1.5)$$

По неравенству Коши-Буняковского, минимизация энергии J равносильна минимизации длины

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} dt \rightarrow \min. \quad (1.1.6)$$

Таким образом, задача антропоморфного восстановления поврежденной кривой ставится так же, как субриманова задача на группе движений плоскости.

Задача Дидоны

Задача Дидоны (левоинвариантная субриманова задача на группе Гейзенберга) есть простейшая нетривиальная субриманова задача. Она обсуждается почти в любом учебнике или обзоре по субримановой геометрии или геометрической теории управления, см., например, [4, 11, 23, 24]. Мы не хотим нарушать эту традицию.

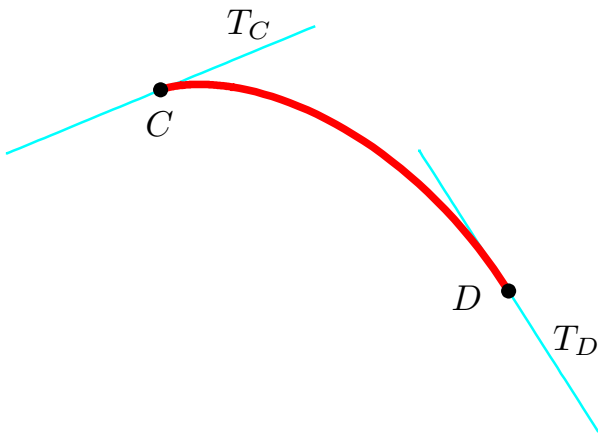


Рис. 1.7: Новая кривая \widetilde{CD}

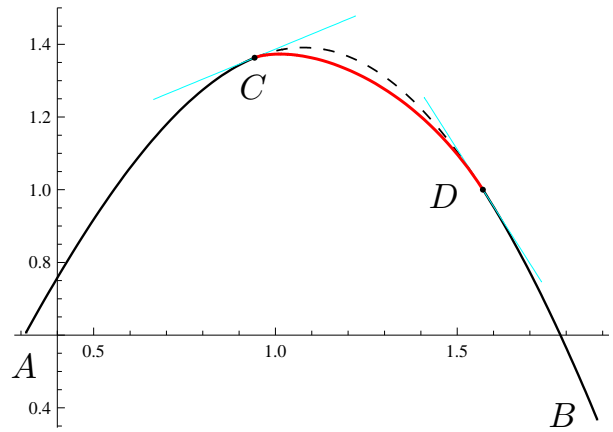


Рис. 1.8: Исходная кривая AB с поврежденной и новой дугами

Рассмотрим следующую формализацию древней задачи оптимизации, восходящей к IX в. до н.э. [24, 31].

Даны точки $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, липшицева кривая $\bar{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$, соединяющая a_1 с a_0 , и число $S \in \mathbb{R}$. Требуется найти кратчайшую липшицеву кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую a_1 с a_0 , для которой замкнутая кривая $\gamma \cup \bar{\gamma}$ ограничивает в \mathbb{R}^2 область алгебраической площади S , см. Рис. 1.9.

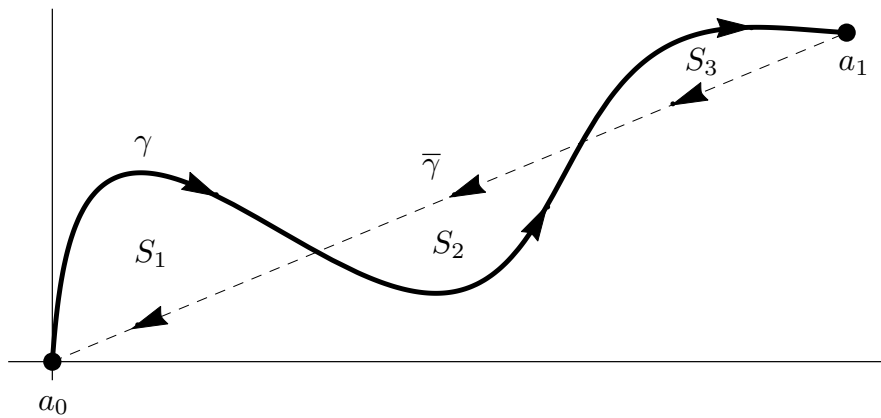


Рис. 1.9: Задача Дидоны: $S = S_1 - S_2 + \dots, l(\gamma) \rightarrow \min$

Введем декартовы координаты x, y на плоскости \mathbb{R}^2 с началом a_0 . Тогда $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (x_1, y_1)$, а кривые $\gamma, \bar{\gamma}$ имеют параметризации

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x(t), y(t)), & t \in [0, t_1], \\ \bar{\gamma}(t) &= (\bar{x}(t), \bar{y}(t)), & t \in [0, \bar{t}_1]. \end{aligned}$$

Параметры t_1, \bar{t}_1 произвольны, их можно считать фиксированными или свободными т.к. длина кривой не зависит от параметризации.

Рассмотрим замкнутую кривую $\hat{\gamma} = \gamma \cup \bar{\gamma}$ и ограниченную ею область $D \subset \mathbb{R}^2, \partial D = \hat{\gamma}$.

Тогда

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\bar{\gamma}} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (xy - y\dot{x})dt - \bar{I},$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (\bar{x}\dot{y} - \bar{y}\dot{x})dt = \frac{1}{2} \int_{\bar{\gamma}} xdy - ydx.$$

Введем переменную

$$z(t) := \frac{1}{2} \int_0^t (xy - y\dot{x})dt,$$

измеряющую алгебраическую секториальную площадь, которая замечена радиус-вектором $(x(t), y(t))$, см. Рис. 1.10.

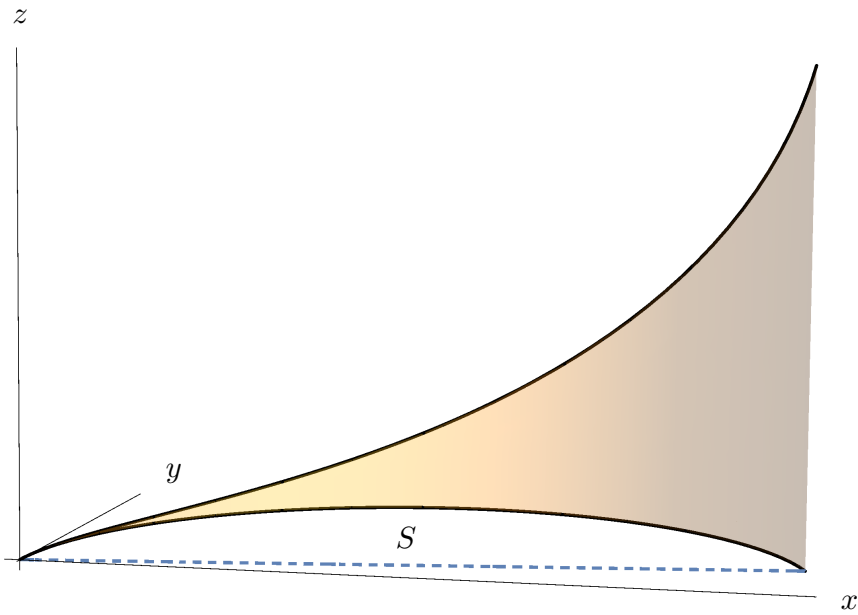


Рис. 1.10: Задача Дидоны: $z(t) = S$

Тогда $z(0) = 0$, а число $z(t_1) = S + \bar{I} =: z_1$ задано.

Обозначим функции из пространства L^∞ :

$$\dot{x}(t) =: u_1(t), \quad \dot{y}(t) =: u_2(t),$$

тогда

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1).$$

Поэтому вдоль решений задачи Дидоны точка $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяет управляемой системе

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad u \in (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad q \in \mathbb{R}^3, \quad (1.1.7)$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.1.8)$$

граничным условиям

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad (1.1.9)$$

и условию оптимальности

$$l(\gamma) = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (1.1.10)$$

1.1.2 Управляемые системы и задачи теории управления

Гладкая динамическая система на гладком многообразии M задается гладким обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{q} = f(q), \quad q \in M.$$

Такая система детерминирована: если задано начальное условие $q(0) = q_0$, то в любой момент времени $t > 0$, для которого *состояние* системы $q(t)$ существует, оно определено однозначно. Характерный пример динамической системы — планета, вращающаяся вокруг Солнца.

Управляемая система получается из динамической системы добавлением в правую часть *управляющего параметра* u :

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^k.$$

Управляющий параметр u меняется со временем в пределах заданного *множества значений управляющего параметра* U , соответствующая функция $u(t)$ называется *управлением*. Многообразию M называется *пространством состояний* системы. Подставляя некоторое управление в правую часть управляемой системы, получаем неавтономное ОДУ $\dot{q} = f(q, u(t))$. Теперь, если задать начальное значение $q(0) = q_0$, то в любой момент времени $t > 0$ получаем однозначно определенную *траекторию* $q_u(t)$, соответствующую управлению $u(t)$ и начальному значению q_0 . Если задать другое управление $\tilde{u}(t)$, то получим другую траекторию $q_{\tilde{u}}(t)$ с тем же начальным условием q_0 .

Всевозможные траектории управляемой системы, начинающиеся в точке $q_0 \in M$, заполняют ее *множество достижимости* из точки q_0 :

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{q_u(t) \mid u = u(t) \in U, q_u(0) = q_0, t \in [0, \infty)\}.$$

Аналогично определяется *множество достижимости за время* $t_1 > 0$:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{q_u(t_1) \mid u = u(t) \in U, t \in [0, t_1], q_u(0) = q_0\},$$

и *множество достижимости за время не больше* $t_1 > 0$:

$$\mathcal{A}_{q_0}(\leq t_1) = \bigcup_{0 \leq t \leq t_1} \mathcal{A}_{q_0}(t).$$

Сформулируем две основные задачи, которыми мы будем заниматься.

1. Задача управляемости

Определение 1. Управляемая система называется глобально управляемой (вполне управляемой) из точки $q_0 \in M$, если

$$\mathcal{A}_{q_0} = M.$$

Глобальная управляемость за время t и за время не больше t определяется аналогично с помощью множеств достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t)$ и $\mathcal{A}_{q_0}(\leq t)$.

Определение 2. Управляемая система называется локально управляемой в точке q_0 , если множество достижимости из этой точки содержит некоторую окрестность данной точки:

$$q_0 \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}.$$

Управляемая система называется локально управляемой в точке q_0 за малое время, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad q_0 \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}(\leq \varepsilon).$$

Отметим, что теория локальной управляемости хорошо разработана в геометрической теории управления. Условия глобальной управляемости известны лишь для очень симметричных систем (линейных систем в линейном пространстве, линейных по управлению систем, левоинвариантных систем на группах Ли).

2. Задача оптимального управления Предположим, что задача управляемости из точки q_0 в точку q_1 за время t_1 решена положительно:

$$q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1).$$

Обычно траектория, ведущая из q_0 в q_1 , неединственна (как правило, существует континуум таких траекторий).

Тогда естественно возникает задача отыскания наилучшей траектории в смысле некоторого функционала качества (энергии, длины, времени и т. п.). Пусть этот функционал измеряется интегралом вида $\int_0^{t_1} \varphi(q, u) dt$. Таким образом получаем задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f(q, u), & q &\in M, & u &\in U, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q, \\ J &= \int_0^{t_1} \varphi(q, u) dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Время движения t_1 может быть как фиксированным, так и свободным.

При постановке задач управления необходимо указать класс допустимых управлений $u = u(t)$. В разных задачах рассматриваются различные классы допустимых управлений; важно, чтобы такой класс содержал все кусочно-постоянные управления и был замкнут относительно конкатенации (последовательного применения) управлений.

Итак, мы сформулировали две основные задачи этого курса:

1. задача управляемости,
2. задача оптимального управления.

Имеется ряд других важных задач математической теории управления: эквивалентность, стабилизируемость, наблюдаемость, ..., которые мы не будем рассматривать.

1.2 Гладкие многообразия и векторные поля

В этом разделе напомним некоторые базовые понятия, относящиеся к гладким многообразиям и векторным полям. Для систематического изучения этих вопросов рекомендуем обратиться к регулярному учебнику по дифференциальной геометрии, например, к [33].

Гладкие подмногообразия пространства \mathbb{R}^n определяются, как правило, одним из двух способов:

а) неявно системой регулярных уравнений

$$f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{rank} \frac{\partial f}{\partial x} = n - k,$$

б) регулярной параметризацией

$$x = \Phi(y) \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^k, \\ \text{rank} \frac{d\Phi}{dy} = k.$$

Абстрактное *гладкое многообразие* (не вложенное в объемлющее пространство) определяется с помощью атласа, т.е. семейства согласованных карт (локальных координат).

Касательное пространство к подмногообразию $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in M$ определяется как следующее подпространство \mathbb{R}^n согласно одному из приведенных выше способов задания подмногообразия:

а) $T_x M = \text{Ker} \frac{\partial f}{\partial x}(x),$

б) $T_x M = \text{Im} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y), \quad x = \Phi(y).$

Для определения касательного пространства абстрактного многообразия сначала определим касательный вектор в точке $q \in M$. Пусть $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ есть гладкая кривая, для которой $\gamma(0) = q$. Рассмотрим ее тейлоровское разложение первой степени в любой системе локальных координат

$$\gamma(t) = q + \dot{\gamma}(0)t + o(t), \quad t \rightarrow 0.$$

Касательный вектор к M в точке $q \in M$ есть класс эквивалентности гладких кривых $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\gamma(0) = q$, имеющих одинаковый многочлен Тейлора в некоторой (и тогда в любой) системе локальных координат вблизи q , см. Рис. 1.11.

Касательное пространство $T_q M$ к абстрактному многообразию M в точке $q \in M$ есть множество всех касательных векторов к M в точке q , см. Рис. 1.12.

Гладкое векторное поле V на многообразии M есть гладкое отображение

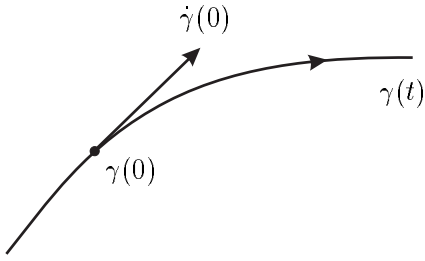
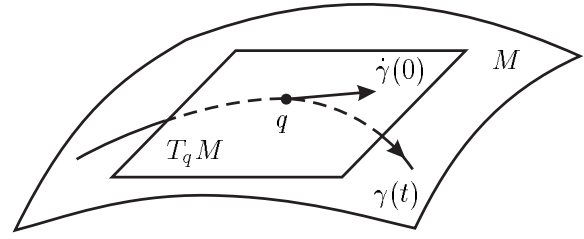
$$M \ni q \mapsto V(q) \in T_q M.$$

Обозначение: $V \in \text{Vec}(M)$.

Здесь и далее под гладким отображением понимается отображение класса C^∞ .

Теперь определим скобку Ли (коммутатор) векторных полей $V, W \in \text{Vec}(M)$. Обозначим решение задачи Коши

$$\dot{q} = V(q), \quad q(0) = q_0,$$

Рис. 1.11: Касательный вектор $\dot{\gamma}(0)$ Рис. 1.12: Касательное пространство $T_q M$

через $e^{tV}(q_0)$. Таким образом, $e^{tV} : M \rightarrow M$ есть *поток векторного поля* V .

Если

$$e^{tV} \circ e^{sW} = e^{sW} \circ e^{tV}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

то говорят, что векторные поля V, W *коммутируют*. Но, вообще говоря, поля не коммутируют, и, в частности,

$$e^{tV} \circ e^{tW} \neq e^{tW} \circ e^{tV}.$$

Поэтому имеется нетривиальная кривая

$$\varphi(t) = e^{-tW} \circ e^{-tV} \circ e^{tW} \circ e^{tV}(q_0) \neq q_0.$$

Разложим кривую $\varphi(t)$ по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t + \ddot{\varphi}(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0, \\ \varphi(0) &= q_0, \\ \dot{\varphi}(0) &= -tW - tV + tW + tV = 0. \end{aligned}$$

В качестве меры некоммутативности векторных полей V, W естественно взять первый нетривиальный тейлоровский член кривой $\varphi(t)$, т.е.

$$\varphi(t) = [V, W](q_0) \cdot t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow 0,$$

см. Рис. 1.13.

Новое гладкое векторное поле $[V, W] \in \text{Vec}(M)$ называется *коммутатором (скобкой Ли)* полей V и W .

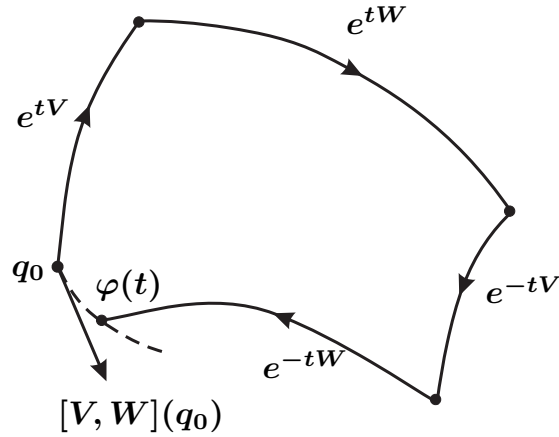
В локальных координатах

$$[V, W] = \frac{\partial W}{\partial q} V - \frac{\partial V}{\partial q} W. \quad (1.2.1)$$

Пример: субриманова задача на группе движений плоскости Рассмотрим понятие скобки Ли для векторных полей из субримановой задачи на группе движений плоскости. Запишем соответствующую управляемую систему (1.1.1) в векторной форме:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= uV(q) + vW(q), \\ V &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad W(q) = \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

и вычислим коммутатор полей V, W .

Рис. 1.13: Скобка Ли векторных полей V, W

Во-первых, геометрически очевидно, что при последовательности малых смещений вдоль потоков $e^{-tW} \circ e^{-tV} \circ e^{tW} \circ e^{tV}(q_0)$ машина перемещается из состояния q_0 вправо (в главном члене).

Во-вторых, вычислим коммутатор в координатах:

$$[V, W] = \frac{\partial W}{\partial q} V - \frac{\partial V}{\partial q} W = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это соответствует геометрическому наблюдению.

1.3 Задачи

1. Найдите \mathcal{A}_{q_0} в задачах пункта 1.1.1.

2. Вычислите для управляемой системы (1.1.2)–(1.1.4):

$$\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1(q_0), X_2(q_0), [X_2, X_2](q_0), [X_1, [X_1, X_2]](q_0), [X_2, [X_1, X_2]](q_0), \dots),$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2.$$

3. Докажите, что двумерная сфера S^2 и специальная ортогональная группа $\text{SO}(3)$ — гладкие многообразия. Вычислите их касательные пространства.

4. Докажите, что задача (1.1.5) эквивалентна задаче (1.1.6).

5. Докажите формулу (1.2.1).

Глава 2

Задача управляемости

3. Видит быка:

Вон на той ветке весело поет соловей;

Солнце греет, дует мягкий прохладный ветерок; зеленые ивы стоят на берегу;

Бык представлен целиком, не скрыта ни одна его часть;

Великолепная голова украшена величественными рогами, — какой художник может воспроизвести его образ?

Пу-мин, «Десять рисунков о пастухе и быке» (цит. по [30])

Начинаем изучение первой основной задачи курса.

2.1 Управляемость

Начнем исследование задачи управляемости с простейшего класса систем, популярного в приложениях.

2.1.1 Управляемость линейных систем

Линейная управляемая система имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^k u_i b_i = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^k. \quad (2.1.1)$$

Здесь A и $B = (b_1, \dots, b_k)$ — постоянные матрицы размера $n \times n$ и $n \times k$ соответственно, а допустимое управление $u \in L^1([0, t_1], \mathbb{R}^k)$.

Проинтегрируем линейную систему методом вариации постоянных. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = Ax$ имеет решение $x(t) = e^{At}C$, где $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ есть матричная экспонента, $C \equiv \text{const}$.

Будем искать решение системы (2.1.1) в виде $x(t) = e^{At}C(t)$. Подставляя это выражение в (2.1.1), получаем

$$\begin{aligned} Ae^{At}C(t) + e^{At}\dot{C}(t) &= Ae^{At}C + Bu, \\ \dot{C} &= e^{-At}Bu(t), \\ C(t) &= \int_0^t e^{-As}Bu(s)ds + C_0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} \left(\int_0^t e^{-As} Bu(s) ds + C_0 \right), \\ x(0) &= x_0 = C_0, \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$x(t) = e^{-At} \left(\int_0^t e^{-As} Bu(s) ds + x_0 \right). \quad (2.1.2)$$

Эта формула называется *формулой Коши* для линейных систем.

Используя формулу Коши, докажем следующий *критерий Калмана* управляемости линейных систем.

Теорема 1 (Калман). *Пусть $t > 0$. Линейная система (2.1.1) управляема за время t тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n. \quad (2.1.3)$$

Доказательство. Множество достижимости системы (2.1.1)

$$\mathcal{A}_{x_0}(t) = \{x_u(t) \mid u \in L^1([0, t], \mathbb{R}^k), x_u(0) = x_0\}$$

есть образ отображения в конце

$$F : u(\cdot) \mapsto x_u(t), \quad L^1([0, t], \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Это отображение аффинно, поэтому его образ $\text{Im } F = \mathcal{A}_{x_0}(t)$ есть аффинное подпространство в \mathbb{R}^n . Далее, легко видеть, что система (2.1.1) управляема за время t , т.е. $\text{Im } F = \mathbb{R}^n$, тогда и только тогда, когда

$$\text{Im} \int_0^t e^{-As} Bu(s) ds = \mathbb{R}^n,$$

см. формулу Коши (2.1.2).

Докажем необходимость. Пусть $\text{Im} \int_0^t e^{-As} Bu(s) ds = \mathbb{R}^n$, но условие (2.1.3) нарушается. Тогда существует ковектор $0 \neq p \in (\mathbb{R}^n)^*$, для которого

$$pB = pAB = \dots = pA^{n-1}B = 0. \quad (2.1.4)$$

По теореме Гамильтона-Кэли,

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

поэтому

$$A^m = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^m A^i, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \beta_i^m \in \mathbb{R}.$$

Отсюда и из условия (2.1.4) получаем

$$\begin{aligned} pA^m B &= 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ pe^{-As} B &= p \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-As)^i}{i!} B = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p \int_0^t e^{-As} Bu(s) ds = 0, \quad u(\cdot) \in L^1([0, t], \mathbb{R}^k),$$

то есть

$$\text{Im} \int_0^t e^{-As} Bu(s) ds \neq \mathbb{R}^n,$$

противоречие.

Докажем достаточность. Пусть условие (2.1.3) выполняется, но $\text{Im} \int_0^t e^{-As} Bu(s) ds \neq \mathbb{R}^n$. Тогда существует ковектор $0 \neq p \in (\mathbb{R}^n)^*$, для которого

$$p \int_0^t e^{-As} Bu(s) ds = 0 \quad \forall u \in L^1([0, t], \mathbb{R}^k).$$

Рассмотрим стандартный базис e_1, \dots, e_k в \mathbb{R}^k и для любого $\tau \in [0, t]$ определим управление

$$u_\tau(s) = \begin{cases} e_i, & s \in [0, \tau], \\ 0, & s \in (\tau, t]. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Тогда

$$\int_0^t e^{-As} Bu(s) ds = \int_0^\tau e^{-As} B_i ds = \frac{\text{Id} - e^{-A\tau}}{A} b_i,$$

где

$$\frac{\text{Id} - e^{-A\tau}}{A} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\tau^i}{i!} A^{i-1}.$$

Поэтому

$$p \frac{\text{Id} - e^{-A\tau}}{A} b_i \equiv 0, \quad \tau \in [0, t], \quad i = 1, \dots, k.$$

Последовательно дифференцируя это тождество по τ при $\tau = 0$, получаем

$$p b_i = -p A b_i = \dots = (-1)^{n-1} p A^{n-1} b_i = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

то есть

$$p B = p A B = \dots = p A^{n-1} B = 0,$$

противоречие. □

Замечание. Управление (2.1.5) кусочно-постоянно. Поэтому, если выполнено условие Калмана (2.1.3), то линейная система (2.1.1) управляема за время t с помощью кусочно-постоянных управлений.

Следствие 1. Для линейной системы (2.1.1) следующие условия эквивалентны:

- $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \exists t > 0: \mathcal{A}_{x_0}(t) = \mathbb{R}^n$,
- $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \forall t > 0: \mathcal{A}_{x_0}(t) = \mathbb{R}^n$,
- $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n: \mathcal{A}_{x_0} = \mathbb{R}^n$,
- $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n: \mathcal{A}_{x_0} = \mathbb{R}^n$,
- $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$.

Во всех этих случаях линейная система называется управляемой.

2.1.2 Локальная управляемость нелинейных систем

Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^k. \quad (2.1.6)$$

Точка $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times U$ называется *положением равновесия* системы (2.1.6), если $f(x_0, u_0) = 0$.

Линеаризация системы (2.1.6) в положении равновесия (x_0, u_0) имеет вид

$$\dot{y} = Ay + Bv, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^k, \quad (2.1.7)$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}. \quad (2.1.8)$$

Теорема 2 (Принцип линеаризации). Пусть (x_0, u_0) есть положение равновесия системы (2.1.6) и $u_0 \in \text{int } U$. Если система (2.1.7), (2.1.8) управляема, то для любого $T > 0$ нелинейная система (2.1.6) локально управляема в точке x_0 за время T :

$$x_0 \in \text{int } \mathcal{A}_{x_0}(T), \quad T > 0.$$

Доказательство. Пусть линеаризация (2.1.7), (2.1.8) управляема. Зафиксируем любое $T > 0$. Обозначим через e_1, \dots, e_n стандартный базис в \mathbb{R}^n . Для любого $i = 1, \dots, n$ существует управление $v_i = v_i(t)$, $t \in [0, T]$, такое, что соответствующая траектория y_{v_i} линеаризации (2.1.7), (2.1.8) удовлетворяет условиям $y_{v_i}(0) = 0$, $y_{v_i}(T) = e_i$. Согласно замечанию после теоремы 1, управления $v_i(t)$ можно считать кусочно-постоянными, потому ограниченными. Определим семейство управлений

$$u(z, t) = u_0 + \sum_{i=1}^n z_i v_i(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T].$$

Если $|z| < \varepsilon$ для малого $\varepsilon > 0$, то $u(z, t) \in U$ для всех $t \in [0, T]$, т.к. $u_0 \in \text{int } U$ и $v_i(t)$ ограничены. Обозначим через $x_u(t)$ траекторию нелинейной системы (2.1.6) с управлением $u = u(z, t)$ и начальным условием $x_u(0) = x_0$. Определим отображение

$$F : O_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad O_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| < \varepsilon\}, \\ F(z) = x_u(T).$$

Включение $F(O_\varepsilon) \subset \mathcal{A}_{x_0}(T)$ очевидно.

Докажем включение $x_0 \in \text{int } F(O_\varepsilon)$, обеспечивающее локальную управляемость системы (2.1.6) за время T . Имеем $F(0) = x_{u_0}(T) = x_0$ т.к. $u(0, t) \equiv u_0$. По теореме о неявной функции достаточно доказать равенство

$$\text{rank} \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_0 = n.$$

Кривая $x_u(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial x_u}{\partial t} = f(x_u(t), u(z, t)).$$

Дифференцируя это равенство по z при $z = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_0 \frac{\partial x_u}{\partial t} &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \right|_0 x_u(t) = \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} \left. \frac{\partial x_u}{\partial z} \right|_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_0 = \\ &= AW(t) + B(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

где

$$W(t) = \frac{\partial x_u(t)}{\partial z} \Big|_0.$$

Получаем

$$\dot{W}(t) = AW(t) + B(v_1(t), \dots, v_n(t)).$$

Обозначая через $W_1(t), \dots, W_n(t)$ столбцы матрицы $W(t)$, получаем

$$\dot{W}_i(t) = AW_i(t) + Bv_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Чтобы найти начальное условие $W_i(0)$, продифференцируем равенство $x_u(z, 0) = x_0$:

$$\frac{\partial x_u}{\partial z} \Big|_{z=0, t=0} = \frac{\partial x_0}{\partial z} = 0.$$

Поэтому векторы $W_i(t)$ удовлетворяют начальному условию $W_i(0) = 0$.

Но управления $v_i(t)$ были подобраны так, чтобы $W_i(T) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому

$$\text{rank} \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_0 = \text{rank} \frac{\partial x_u}{\partial z} \Big|_{z=0, t=0} = \text{rank} W(T) = n.$$

Доказано включение $x_0 \in \text{int} F(O_\varepsilon)$, поэтому $x_0 \in \text{int} \mathcal{A}_{x_0}(T)$, и система (2.1.6) локально управляема в точке x_0 за время T . \square

Пример Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= uf_1(x) + (1-u)f_2(x), & x \in \mathbb{R}^2, & u \in [0, 1], \\ f_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1}, & f_2(x) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Точка $(x_0, u_0) = (0, \frac{1}{2})$ есть положение равновесия системы, причем $u_0 \in \text{int}([0, 1])$. Линеаризация системы (2.1.9) в положении равновесия (x_0, u_0) имеет вид

$$\dot{y} = Ay + Bv, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad v \in \mathbb{R}, \quad (2.1.10)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие Калмана для линеаризации:

$$\text{rank}(B, AB) = \text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

поэтому линейная система (2.1.10) управляема. Следовательно, нелинейная система (2.1.9) локально управляема в точке x_0 за любое время $T > 0$.

Упражнение: докажите это же геометрически, с помощью фазового портрета управляемой системы.

2.1.3 Задачи

1. Для субримановой задачи на группе движений плоскости найдите положения равновесия и исследуйте управляемость линеаризации в этих точках.
2. Для задачи Эйлера об эластичах найдите положения равновесия и исследуйте управляемость линеаризации в этих точках.

2.2 Теорема об орбите

Этот раздел посвящен фундаментальной теореме геометрической теории управления об орбите управляемой системы.

2.2.1 Орбита управляемой системы

В этом разделе под *управляемой системой* будем понимать любое множество векторных полей $\mathcal{F} \subset \text{Vec } M$. Множеством *достижимости* системы \mathcal{F} из точки $q_0 \in M$ называется множество

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{e^{t_N f_N} \circ \dots \circ e^{t_1 f_1}(q_0) \mid t_i \geq 0, f_i \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\},$$

см. Рис. 2.1. Если имеется параметризация системы \mathcal{F} , то такое множество достижимости получается с помощью кусочно-постоянных управлений.

Наряду со множеством достижимости, в котором возможно только движение вперед, полезно также рассматривать большее множество, в котором возможно движение как вперед, так и назад — *орбиту* системы \mathcal{F} из точки q_0 :

$$\mathcal{O}_{q_0} = \{e^{t_N f_N} \circ \dots \circ e^{t_1 f_1}(q_0) \mid t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\},$$

см. Рис. 2.2.

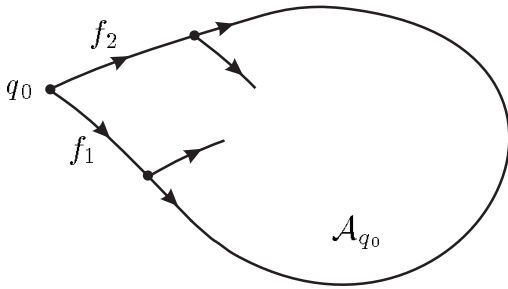


Рис. 2.1: Множество достижимости \mathcal{A}_{q_0}

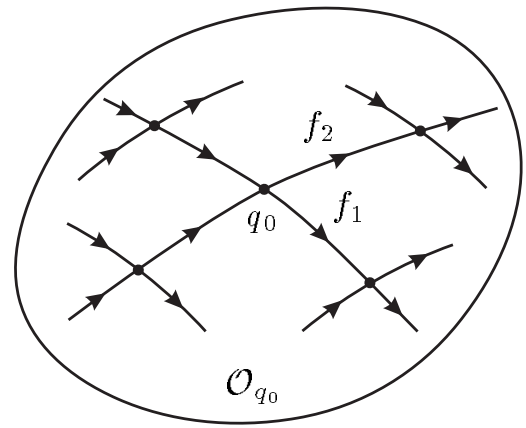


Рис. 2.2: Орбита \mathcal{O}_{q_0}

Отметим важные свойства множеств достижимости и орбит:

1. $\mathcal{A}_{q_0} \subset \mathcal{O}_{q_0}$, это включение очевидно,
2. \mathcal{O}_{q_0} имеет «более простую» структуру, чем \mathcal{A}_{q_0} ,
3. \mathcal{A}_{q_0} имеет «разумную» структуру внутри \mathcal{O}_{q_0} .

Свойства 2, 3 точно сформулированы в Теореме об орбите (см. далее теорему 3).

Система \mathcal{F} называется *симметричной*, если $\mathcal{F} = -\mathcal{F}$. Следующее свойство очевидно:

4. $\mathcal{F} = -\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{A}_{q_0} = \mathcal{O}_{q_0}$.

2.2.2 Предварительные сведения

Перед тем как сформулировать теорему об орбите, напомним необходимые сведения о действии диффеоморфизмов на векторные поля и погруженных подмногообразиях.

Действие диффеоморфизмов на векторные поля Пусть $\Phi : M \rightarrow N$ есть гладкое отображение между гладкими многообразиями. Для любого касательного вектора $v \in T_q M$ его образ $\Phi_{*q} v \in T_{\Phi(q)} N$ определяется так:

$$\Phi_{*q} v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi \circ \gamma(t),$$

где $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ есть любая гладкая кривая, для которой $\gamma(0) = q$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Таким образом, определено отображение $D_q \Phi = \Phi_{*q} : T_q M \rightarrow T_{\Phi(q)} N$, дифференциал отображения F в точке q , см. Рис. 2.3.

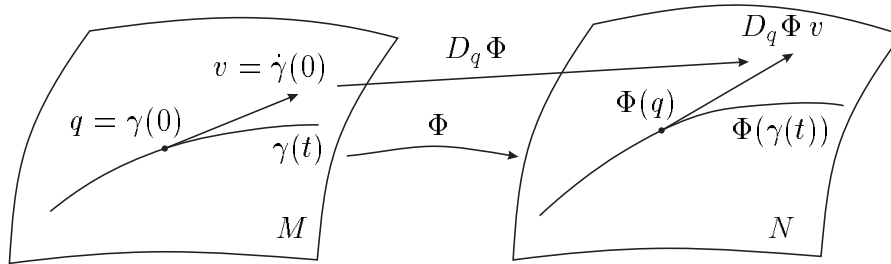


Рис. 2.3: Дифференциал $D_q \Phi$ отображения Φ в точке q

Пусть теперь $F : M \rightarrow N$ есть *диффеоморфизм* (гладкое отображение, имеющее гладкое обратное). Тогда для любого векторного поля $V \in \text{Vec}(M)$ его образ $F_* V \in \text{Vec}(N)$ определяется так:

$$(F_* V)(F(q)) = F_{*q} V(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F \circ e^{tV}(q).$$

Таким образом, определено отображение

$$F_* : \text{Vec}(M) \rightarrow \text{Vec}(N),$$

перенос векторных полей с многообразия M на многообразии N под действием диффеоморфизма F .

При доказательстве теоремы об орбите нам понадобится следующее очевидное свойство, связанное с действием диффеоморфизмов на векторные поля и касательные векторы.

Замечание. Пусть $F : M \rightarrow N$ есть диффеоморфизм между гладкими многообразиями, $V \in \text{Vec}(M)$, $q \in M$. Тогда

$$F_*(V(q)) = (F_* V)(F(q)).$$

Это равенство следует непосредственно из определения действия диффеоморфизмов на векторные поля.

Погруженные подмногообразия Подмножество $N \subset M$ называется *k-мерным погруженным подмногообразием*, если существуют k -мерное многообразие W и гладкое отображение $F : W \rightarrow M$ такие, что:

1. F инъективно,
2. $F(W) = N$,
3. $\text{Ker } F_{*q} = 0$ для всех $q \in W$.

Пример: иррациональная обмотка тора Определим погружение прямой \mathbb{R} в двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi, \psi \in S^1\}$ следующим образом. Рассмотрим векторное поле $V = a\frac{\partial}{\partial\varphi} + b\frac{\partial}{\partial\psi} \in \text{Vec}(\mathbb{T}^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, и управляемую систему $\mathcal{F} = \{V\}$ на \mathbb{T}^2 . Какую структуру имеет орбита $\mathcal{O}_{q_0}(\mathcal{F})$, $q_0 = (0, 0)$?

1) Если $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, то траектория $e^{tV}(q_0)$ периодична, и орбита $\mathcal{O}_{q_0}(\mathcal{F})$ замкнута.

2) Если $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, то орбита $\mathcal{O}_{q_0}(\mathcal{F})$ всюду плотна в торе — это *иррациональная обмотка тора*.

В обоих случаях орбита $\mathcal{O}_{q_0}(\mathcal{F})$ есть погруженное одномерное подмногообразие тора, однако во втором случае топология на орбите, индуцированная погружением $t \mapsto e^{tV}(q_0)$, сильнее, чем топология, индуцированная вложением $\mathcal{O}_{q_0}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{T}^2$.

Таким образом, уже для одного векторного поля орбита может быть погруженным, но не вложенным подмногообразием пространства состояний. (Погруженное подмногообразие $N = F(W) \subset M$ называется *вложенным*, если $F : W \rightarrow N$ есть гомеоморфизм в топологии, индуцированной включением $N \subset M$.)

2.2.3 Теорема об орбите

Теперь мы можем сформулировать фундаментальную *Теорему об орбите*.

Теорема 3 (Нагано-Суссманн). Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ и $q_0 \in M$.

(1) Орбита \mathcal{O}_{q_0} системы \mathcal{F} есть связное погруженное подмногообразие многообразия M .

(2) Для любой точки $q \in \mathcal{O}_{q_0}$

$$\begin{aligned} T_q\mathcal{O}_{q_0} &= (\mathcal{P}_*\mathcal{F})(q) = \{(P_*f)(q) \mid P \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}\}, \\ \mathcal{P} &= \{e^{t_N f_N} \circ \dots \circ e^{t_1 f_1} \mid t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Доказательство. Определим важную для дальнейшего плоскость

$$\Pi_q = (\mathcal{P}_*\mathcal{F})(q) \subset T_qM, \quad q \in M,$$

это кандидат на роль касательного пространства к орбите \mathcal{O}_{q_0} , см. (2.2.1).

1) Докажем, что для всех $q \in \mathcal{O}_{q_0}$

$$\dim \Pi_q = \dim \Pi_{q_0}.$$

Выберем любую точку $q \in \mathcal{O}_{q_0}$, тогда $q = Q(q_0)$, $Q \in \mathcal{P}$. Покажем, что $Q_*^{-1}(\Pi_q) \subset \Pi_{q_0}$. Возьмем любой элемент $(P_*f)(q) \in \Pi_q$, $P \in \mathcal{P}$, $f \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_*^{-1}[(P_*f)(q)] &= (Q_*^{-1} \circ P_*f)(Q^{-1}(q)) = \\ &= [(Q^{-1} \circ P)_*f](q_0) \in (\mathcal{P}_*\mathcal{F})(q_0) = \Pi_{q_0}. \end{aligned}$$

Поэтому $Q_*^{-1}(\Pi_q) \subset \Pi_{q_0}$, откуда

$$\dim \Pi_q \leq \dim \Pi_{q_0}.$$

Меняя местами в этом рассуждении q и q_0 , получаем $\dim \Pi_{q_0} \leq \dim \Pi_q$.

Окончательно имеем $\dim \Pi_q = \dim \Pi_{q_0}$, $q \in \mathcal{O}_{q_0}$.

2) Для любой точки $q \in M$ обозначим $m = \dim \Pi_q$, и выберем такие векторные поля $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{P}_*\mathcal{F}$, что

$$\Pi_q = \text{span}(V_1(q), \dots, V_m(q)).$$

Далее, определим отображение

$$G_q : (t_1, \dots, t_m) \mapsto e^{t_m V_m} \circ \dots \circ e^{t_1 V_1}(q), \quad \mathbb{R}^m \rightarrow M.$$

Имеем $\frac{\partial G_q}{\partial t_i}(0) = V_i(q)$, поэтому векторы $\frac{\partial G_q}{\partial t_1}(0), \dots, \frac{\partial G_q}{\partial t_m}(0)$ линейно независимы.

Следовательно, сужение G_q на достаточно малую окрестность W_0 начала координат в \mathbb{R}^m есть погружение.

3) Образ $G_q(W_0)$ есть (вложенное) подмногообразие M , быть может, для меньшей окрестности W_0 .

4) Покажем, что $G_q(W_0) \subset \mathcal{O}_q$.

Имеем $G_q(W_0) = \{e^{t_m V_m} \circ \dots \circ e^{t_1 V_1}(q) \mid t \in W_0\}$.

Так как $V_1 = P_* f$, $P \in \mathcal{P}$, $f \in \mathcal{F}$, получаем

$$e^{t_1 V_1}(q) = e^{t_1 P_* f}(q) = P \circ e^{t_1 f} \circ P^{-1}(q) \in \mathcal{O}_q.$$

Аналогично заключаем, что $e^{t_2 V_2} \circ e^{t_1 V_1}(q) \in \mathcal{O}_q$, и т.д. Окончательно имеем $G_q(t) \in \mathcal{O}_q$, $t \in W_0$, ч.т.д.

5) Покажем, что $G_{q_*}(T_t \mathbb{R}^m) = \Pi_{G_q(t)}$, $t \in W_0$. Имеем $\dim G_{q_*}(T_t \mathbb{R}^m) = m = \dim \Pi_{G_q(t)}$, поэтому достаточно доказать включение

$$\frac{\partial G_q}{\partial t_i}(t) \in \Pi_{G_q(t)}, \quad t \in W_0.$$

Вычислим эту частную производную:

$$\frac{\partial G_q}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} e^{t_m V_m} \circ \dots \circ e^{t_i V_i} \circ \dots \circ e^{t_1 V_1}(q) =$$

обозначим $Q = e^{t_m V_m} \circ \dots \circ e^{t_{i+1} V_{i+1}}$, $q' = e^{t_{i-1} V_{i-1}} \circ \dots \circ e^{t_1 V_1}(q)$,

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial t_i} Q \circ e^{t_i V_i}(q') = Q_* V_i(e^{t_i V_i}(q')) = \\ &= (Q_* V_i)[Q \circ e^{t_i V_i} \circ \dots \circ e^{t_1 V_1}(q)] = \\ &= (Q_* V_i)(G_q(t)) \in (\mathcal{P}_* \mathcal{F})(G_q(t)) = \\ &= \Pi_{G_q(t)}. \end{aligned}$$

Поэтому $G_{q_*}(T_t \mathbb{R}^m) = \Pi_{G_q(t)}$, т.е. плоскость $\Pi_{G_q(t)}$ есть касательное пространство к гладкому многообразию $G_q(W_0)$ в точке $G_q(t)$.

6) Докажем, что множества $G_q(W_0)$ образуют базу некоторой («сильной») топологии на M .

6а) Очевидно, что любая точка $q \in M$ содержится во множестве $G_q(W_0)$.

6б) Покажем, что для любой точки $\hat{q} \in G_q(W_0) \cap G_{\hat{q}}(\widetilde{W}_0)$ существует множество $G_{\hat{q}}(\widehat{W}_0) \subset G_q(W_0) \cap G_{\hat{q}}(\widetilde{W}_0)$, т.е. эти множества пересекаются как на Рис. 2.4 а не как на Рис. 2.5.

Возьмем любую точку $\hat{q} \in G_q(W_0) \cap G_{\hat{q}}(\widetilde{W}_0)$ и рассмотрим $G_{\hat{q}}(t) = e^{t_m \widehat{V}_m} \circ \dots \circ e^{t_1 \widehat{V}_1}(\hat{q})$. Для любой точки $q' \in G_q(W_0)$ имеем $\widehat{V}_1(q') \in (\mathcal{P}_* \mathcal{F})(q') = \Pi_{q'}$. Но $G_q(W_0)$ есть подмногообразие с касательным пространством $T_{q'} G_q(W_0) = \Pi_{q'}$. Получаем, что векторное поле \widehat{V}_1 касается этого подмногообразия, поэтому $e^{t_1 \widehat{V}_1}(\hat{q}) \in G_q(W_0)$ для малых $|t_1|$. Аналогично заключаем, что $e^{t_2 \widehat{V}_2} \circ e^{t_1 \widehat{V}_1}(\hat{q}) \in G_q(W_0)$ для малых $|t_1|, |t_2|$, и т.д. Окончательно имеем

$$G_{\hat{q}}(t) \in G_q(W_0) \text{ при малых } |t|.$$

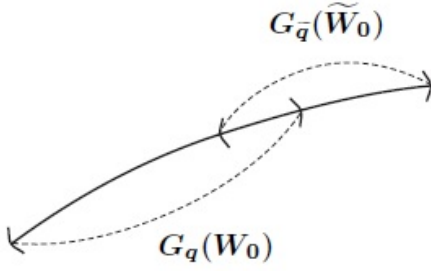


Рис. 2.4: Пересечение окрестностей в базе топологии

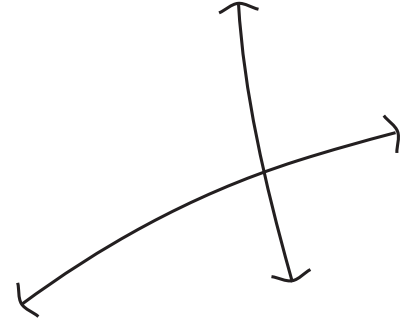


Рис. 2.5: Пересечение окрестностей не в базе топологии

Аналогично

$$G_{\hat{q}}(t) \in G_{\hat{q}}(\widehat{W}_0) \text{ при малых } |t|.$$

Поэтому $G_{\hat{q}}(\widehat{W}_0) \subset G_q(W_0) \cap G_{\hat{q}}(\widehat{W}_0)$ для некоторой окрестности \widehat{W}_0 , и свойство 6б) доказано.

Из свойств 6а) и 6б) следует, что множества $G_q(W_0)$ образуют базу топологии на множестве M . Обозначим соответствующее топологическое пространство через $M^{\mathcal{F}}$.

7) Покажем, что для любого $q_0 \in M$ орбита \mathcal{O}_{q_0} связна, открыта и замкнута в пространстве $M^{\mathcal{F}}$.

Отображения $t_i \mapsto e^{t_i f_i}(q)$ непрерывны в $M^{\mathcal{F}}$ (докажите!), поэтому \mathcal{O}_{q_0} связна.

Любая точка $q \in \mathcal{O}_{q_0}$ содержится в окрестности $G_q(W_0) \subset \mathcal{O}_q = \mathcal{O}_{q_0}$, поэтому орбита открыта в $M^{\mathcal{F}}$.

Наконец, любая орбита есть дополнение в M к орбитам, с которыми она не пересекается. Поэтому любая орбита замкнута в $M^{\mathcal{F}}$.

Итак, любая орбита \mathcal{O}_{q_0} есть компонента связности топологического пространства $M^{\mathcal{F}}$.

8) Введем гладкую структуру на орбите \mathcal{O}_{q_0} следующим образом:

- множества $G_q(W_0)$ назовем координатными окрестностями,
- отображения $G_q^{-1} : G_q(W_0) \rightarrow W_0$ назовем координатными отображениями.

Легко видеть, что эти координатные окрестности и отображения согласованы: для любых пересекающихся окрестностей $G_q(W_0)$ и $G_{\hat{q}}(\widehat{W}_0)$ композиция

$$G_{\hat{q}} \circ G_q : G_q^{-1}(G_q(W_0) \cap G_{\hat{q}}(\widehat{W}_0)) \rightarrow G_{\hat{q}}^{-1}(G_q(W_0) \cap G_{\hat{q}}(\widehat{W}_0))$$

есть диффеоморфизм (докажите!). Поэтому орбита \mathcal{O}_{q_0} есть гладкое многообразие.

При этом $\mathcal{O}_{q_0} \subset M$ есть погруженное подмногообразие размерности $m = \dim \Pi_{q_0}$.

9) Из пункта 5) выше следует, что гладкое многообразие \mathcal{O}_{q_0} имеет касательное пространство

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = \Pi_q = (\mathcal{P}_* \mathcal{F})(q), \quad q \in \mathcal{O}_{q_0}.$$

□

2.2.4 Следствия из теоремы об орбите

Следствие 2. Для любых $q_0 \in M$ и $q \in \mathcal{O}_{q_0}$

$$\begin{aligned} T_q \mathcal{O}_{q_0} &\supset \text{Lie}_q(\mathcal{F}), \\ \text{Lie}_q(\mathcal{F}) &= \text{span}\{[f_N, [\dots, [f_2, f_1] \dots]](q) \mid f_i \in \mathcal{F}, N \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Доказательство. Зафиксируем любую точку $q \in \mathcal{O}_{q_0}$.

Для любого $f \in \mathcal{F}$ кривая $\varphi(t) = e^{tf}(q) \in \mathcal{O}_{q_0}$, поэтому $\dot{\varphi}(0) = f(q) \in T_q \mathcal{O}_{q_0}$. Следовательно, $\mathcal{F}(q) \subset T_q \mathcal{O}_{q_0}$.

Возьмем любые $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\varphi(t) = e^{-tf_2} \circ e^{-tf_1} \circ e^{tf_2} \circ e^{tf_1}(q) \in \mathcal{O}_{q_0},$$

поэтому

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\sqrt{t}) = [f_1, f_2](q) \in T_q \mathcal{O}_{q_0}.$$

Следовательно, $[\mathcal{F}, \mathcal{F}](q) \subset T_q \mathcal{O}_{q_0}$.

Далее, возьмем любые $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}$. Тогда $[f_1, f_2](q') \in T_{q'} \mathcal{O}_{q_0}$ для всех $q' \in \mathcal{O}_{q_0}$, поэтому $e^{t[f_1, f_2]}(q) \in \mathcal{O}_{q_0}$. Следовательно,

$$\varphi(t) = e^{-tf_3} \circ e^{-t[f_1, f_2]} \circ e^{tf_3} \circ e^{t[f_1, f_2]}(q) \in \mathcal{O}_{q_0},$$

откуда

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\sqrt{t}) = [[f_1, f_2], f_3](q) \in T_q \mathcal{O}_{q_0}.$$

Доказано включение $[[\mathcal{F}, \mathcal{F}], \mathcal{F}](q) \subset T_q \mathcal{O}_{q_0}$.

Аналогично по индукции доказываем включение $\text{Lie}_q(\mathcal{F}) \subset T_q \mathcal{O}_{q_0}$. □

Теорема 4 (Рашевский-Чжоу). Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$, многообразие M связно, и

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M, \quad q \in M. \quad (2.2.3)$$

Тогда $\mathcal{O}_q = M$ для любой точки $q \in M$.

Система $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$, удовлетворяющая свойству (2.2.3), называется *вполне неголономной (системой полного ранга)*.

Доказательство. Пусть $q_0 \in M$. Тогда для любой точки $q \in \mathcal{O}_{q_0}$ имеем

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} \supset \text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M,$$

т.е. $T_q \mathcal{O}_{q_0} = T_q M$, и орбита \mathcal{O}_{q_0} открыта в M . Так же, как в п. 7) доказательства теоремы об орбите, заключаем, что \mathcal{O}_{q_0} есть компонента связности многообразия M .

Из связности M заключаем $\mathcal{O}_{q_0} = M$. □

Следствие 3. Если многообразие M связно, а система $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ симметрична и вполне неголономна, то она управляема на M .

Замечание. Если M и \mathcal{F} вещественно аналитичны, то

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{Lie}_q(\mathcal{F}) \quad \forall q_0 \in M, \quad q \in \mathcal{O}_{q_0}. \quad (2.2.4)$$

Доказательство. См. [1]. □

Приведем пример неаналитической системы, для которой равенство (2.2.4) нарушается.

Пример: неаналитическая система Пусть

$$M = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{F} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, a(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \right\},$$

$$a \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad a|_{x_1 \leq 0} = 0, \quad a|_{x_1 > 0} > 0.$$

Легко видеть, что

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{O}_x = \mathbb{R}^2,$$

$$\forall x' \in \mathbb{R}^2 \quad T_{x'} \mathcal{O}_x = \mathbb{R}^2,$$

однако

$$\text{Lie}_x(\mathcal{F}) = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x_1} \text{ при } x_1 \leq 0.$$

Равенство (2.2.4) нарушается, т.к. векторное поле $a(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2}$ неаналитично.

2.2.5 Теорема Фробениуса

Определение 3. Распределение Δ на гладком многообразии M есть гладкое отображение

$$M \ni q \mapsto \Delta_q \subset T_q M,$$

где линейные подпространства Δ_q имеют одну и ту же размерность.

Определение 4. Интегральное многообразие N распределения Δ есть гладкое погруженное подмногообразие $N \subset M$, для которого

$$T_q N = \Delta_q, \quad q \in N,$$

см. Рис. 2.6.

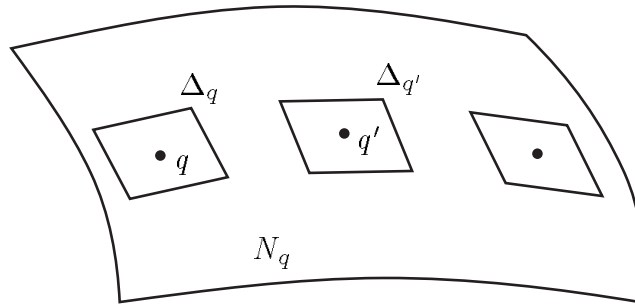


Рис. 2.6: Интегральное многообразие N_q распределения Δ

Определение 5. Распределение Δ называется интегрируемым, если через любую точку $q \in M$ проходит интегральное многообразие N_q этого распределения.

Теорема 5 (Фробениус). Распределение Δ интегрируемо тогда и только тогда, когда для любого локального базиса

$$\text{span}(f_1(q), \dots, f_k(q)) = \Delta_q \tag{2.2.5}$$

выполнено условие Фробениуса

$$[f_i, f_j](q) = \sum_{l=1}^k C_{ij}^l(q) f_l(q), \quad C_{ij}^l \in C^\infty. \tag{2.2.6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Δ интегрируемо, рассмотрим любой локальный базис (2.2.5). Выберем любую точку $q \in M$, тогда существует интегральное многообразие $N_q \ni q$. Векторные поля f_i, f_j базиса (2.2.5) касаются многообразия N_q , поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{-tf_j} \circ e^{-tf_i} \circ e^{tf_j} \circ e^{tf_i}(q) \in N_q, \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(\sqrt{t}) &= [f_i, f_j](q) \in T_q N_q = \Delta_q, \end{aligned}$$

откуда следует условие Фробениуса (2.2.6).

Достаточность (в аналитическом случае; в общем гладком случае см. [1]).

Рассмотрим семейство векторных полей, касающихся распределения Δ :

$$\bar{\Delta} = \{f \in \text{Vec}(M) \mid \forall q \in M f(q) \in \Delta_q\}.$$

Для любой точки $q \in M$ положим

$$N_q = \mathcal{O}_q(\bar{\Delta}).$$

Тогда

$$\forall q' \in N_q \quad T_{q'} N_q = T_{q'} \mathcal{O}_{q'}(\bar{\Delta}) = \text{Lie}_{q'}(\bar{\Delta}) = \Delta_{q'},$$

то есть N_q есть интегральное многообразие распределения Δ , проходящее через точку q . \square

2.2.6 Примеры

Субриманова задача на группе движений плоскости

Управляемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{u_1 f_1 + u_2 f_2 \mid (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\} \subset \text{Vec}(\mathbb{R}^2 \times S^1), \\ f_1 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Система симметрична: $\mathcal{F} = -\mathcal{F}$. Вычислим ее алгебру Ли:

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} =: f_3, \\ \text{Lie}_q(\mathcal{F}) &= \text{span}(f_1(q), f_2(q), f_3(q)) = T_q(\mathbb{R}^2 \times S^1). \end{aligned}$$

Система \mathcal{F} вполне неголономна, поэтому управляема.

Орбиты разной размерности

Пусть

$$M = \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} = \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} \right\}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow \mathcal{O}_x = \{x > 0\}, \\ x = 0 &\Rightarrow \mathcal{O}_x = \{x = 0\}, \\ x < 0 &\Rightarrow \mathcal{O}_x = \{x < 0\}, \end{aligned}$$

то есть система имеет две одномерные и одну нульмерную орбиту.

Еще орбиты разной размерности

Пусть

$$M = \mathbb{R}_{x,y,z}^3, \quad \mathcal{F} = \left\{ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Тогда для любой точки $q \in \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{A}_q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = q^2\},$$

Это сфера при $q \neq 0$ и точка при $q = 0$.

Орбита управляемой системы есть обобщение фазового портрета векторного поля.

2.2.7 Задачи

1. Пусть $N \subset M$ есть погруженное подмногообразие. Докажите, что если векторное поле $f \in \text{Vec}(M)$ удовлетворяет условию $f(q) \in T_q N$ для всех $q \in N$, то $e^{tf}(q) \in N$ для всех $q \in N, t \in \mathbb{R}$.
2. В каком из примеров раздела 1.1.1 система локально управляема за малое время?
3. Дана управляемая система

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U,$$

и пусть множество $f(q_0, U)$ выпукло. Докажите, что если $f(q_0, U) \not\equiv 0$, то система не является локально управляемой в точке q_0 за малое время.

4. Постройте пример управляемой системы $\dot{q} = f(q, u), q \in M, u \in U$, с невыпуклым множеством $f(q_0, U) \not\equiv 0$, локально управляемой в точке q_0 за малое время.
5. Исследуйте локальную управляемость в положении равновесия системы $F = \{f_1, f_2\} \subset \text{Vec}(\mathbb{R}^2)$,

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad f_2 = -\frac{\partial}{\partial x} + x^k \frac{\partial}{\partial y}, \quad k = 2, 3, \dots$$

6. Исследуйте интегрируемость распределения $\Delta = \text{span}(f_1, f_2), f_1 = z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}, f_2 = z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0$. Если оно интегрируемо, опишите его интегральные многообразия.
7. Докажите, что отображения $t_i \mapsto e^{t_i f_i}(q)$ непрерывны в топологии $M^{\mathcal{F}}$ (п. 7) доказательства теоремы 3).
8. Восполните пробелы п. 8) доказательства теоремы 3.

2.3 Множества достижимости систем полного ранга

2.3.1 Теорема Кренера

Рассмотрим управляемую систему $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ полного ранга, т.е. пусть $\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M$ для всех $q \in M$.

Условие полного ранга является не очень ограничительным: если оно нарушается, то можно рассмотреть сужение системы на ее орбиту, и это сужение уже будет системой полного ранга.

Какую структуру может иметь множество достижимости системы полного ранга? Несложно построить примеры систем, имеющих следующие множества достижимости:

- гладкое многообразие без границы, см. Рис. 2.7,
- гладкое многообразие с гладкой границей, см. Рис. 2.8,
- гладкое многообразие, имеющее границу с особенностями типа угловой точки или точки возврата, см. Рис. 2.9, 2.10.

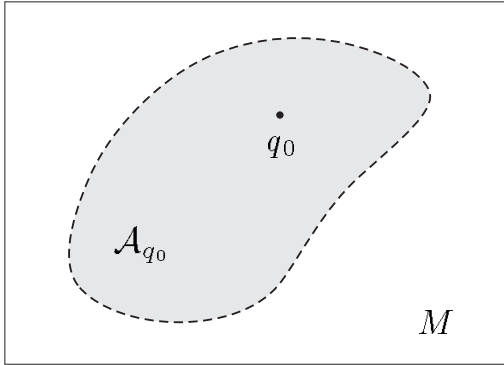


Рис. 2.7: Множество достижимости — открытое множество

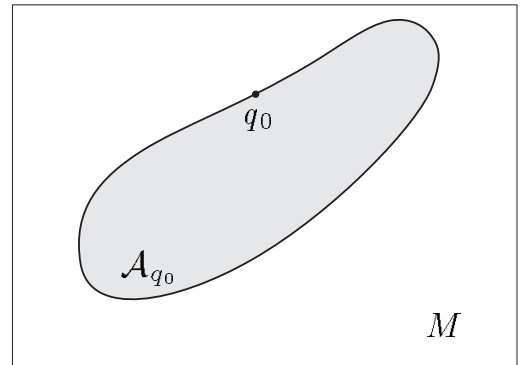


Рис. 2.8: Множество достижимости — многообразие с гладкой границей

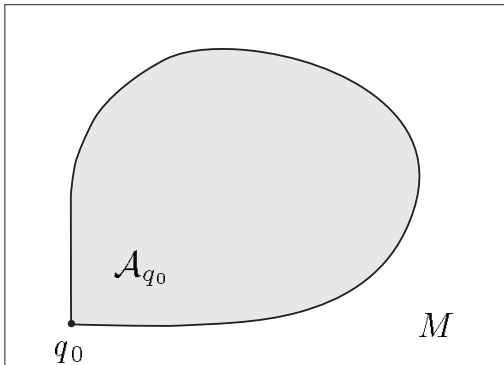


Рис. 2.9: Множество достижимости — многообразие с негладкой границей

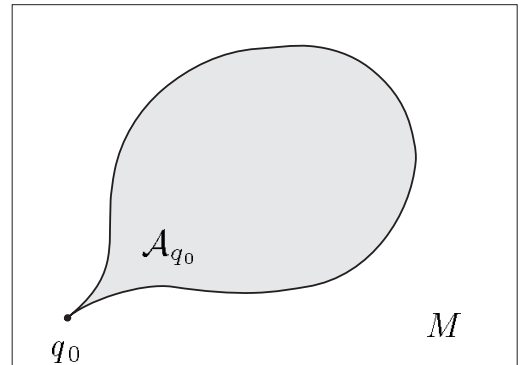


Рис. 2.10: Множество достижимости — многообразие с негладкой границей

Однако следующие множества достижимости невозможны для систем полного ранга:

- подмножество меньшей размерности, см. Рис. 2.11,
- множество с граничными точками, изолированными от внутренности, см. Рис. 2.12.

Эти возможности запрещает следующая важная теорема.

Теорема 6 (Кренер). Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ и $\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q M$ для всех $q \in M$. Тогда:

- (1) $\forall q \in M \quad \text{int } \mathcal{A}_q \neq \emptyset,$
- (2) $\forall q \in M \quad \text{cl}(\text{int } \mathcal{A}_q) \supset \mathcal{A}_q.$

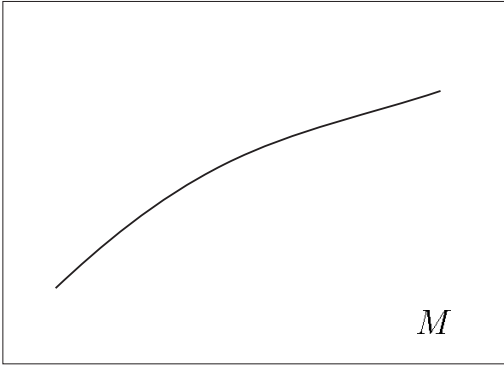


Рис. 2.11: Запрещенное множество достижимости: подмножество неполной размерности

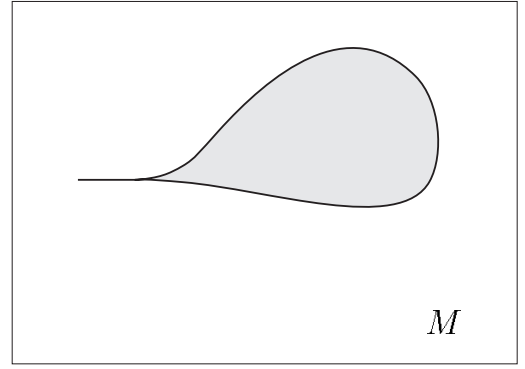


Рис. 2.12: Запрещенное множество достижимости: подмножество с изолированными граничными точками

Доказательство. Докажем пункт (2), т.к. пункт (1) из него следует.

Возьмем любые точки $q \in M$ и $q' \in \mathcal{A}_q$. Выберем любую окрестность $W \ni q'$ и докажем, что $W \cap \text{int } \mathcal{A}_q \neq \emptyset$.

Можно считать, что существует векторное поле $f_1 \in \mathcal{F}$, для которого $f_1(q') \neq 0$. Иначе $\mathcal{F}(q') = \{0\} = T_{q'}M$, а $M = \{q\} = \{q'\}$, и доказывать нечего. Далее, существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что

$$M_1 = \{e^{t_1 f_1}(q') \mid 0 < t_1 < \varepsilon_1\}$$

есть гладкое 1-мерное подмногообразие, содержащееся в W . Если $\dim M = 1$, то $M_1 = \text{int } M_1 \subset \text{int } \mathcal{A}_q \cap W$, и все доказано.

Пусть $\dim M > 1$. Тогда существует векторное поле $f_2 \in \mathcal{F}$ и время $\bar{t}_1 \in (0, \varepsilon_1)$, такие, что в точке $\bar{q}_1 = e^{\bar{t}_1 f_1}(q')$ выполняется условие $f_2(\bar{q}_1) \notin T_{\bar{q}_1}M_1$. Иначе для любой точки $\bar{q} \in M_1$ имеем $\mathcal{F}(\bar{q}) \subset T_{\bar{q}}M_1$, откуда $\text{Lie}_{\bar{q}}(\mathcal{F}) = T_{\bar{q}}M \subset T_{\bar{q}}M_1$, и $\dim M = 1$.

Далее, существуют такие $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, что

$$M_2 = \{e^{t_2 f_2} \circ e^{t_1 f_1}(q') \mid \bar{t}_1 < t_1 < \bar{t}_1 + \varepsilon_1, 0 < t_2 < \varepsilon_2\}$$

есть гладкое 2-мерное многообразие, содержащееся в W . Если $\dim M = 2$, то $M_2 = \text{int } M_2 \subset \text{int } \mathcal{A}_q \cap W$, и все доказано.

Если $\dim M > 2$, то доказательство выполняется аналогично по индукции. \square

2.3.2 Примеры

Вычислим орбиты и множества достижимости в задачах п. 1.1.1.

Остановка поезда

Управляемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) + u f_2(x), & x \in \mathbb{R}^2, & \quad |u| \leq 1, \\ f_1 &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, & f_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Имеем $[f_1, f_2] = -\frac{\partial}{\partial x_1}$, откуда

$$\text{Lie}_x(\mathcal{F}) = \text{span} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = T_x \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

поэтому

$$\mathcal{O}_x = \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Для отыскания множества достижимости вычислим траектории системы с постоянным управлением $u \neq 0$: это параболы

$$\frac{x_2^2}{2} = ux_1 + C.$$

После этого из наглядных соображений очевидно, что система управляема.

Машина Маркова-Дубинса

Управляемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_1(q) + uf_2(q), \quad q \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad |u| \leq 1, \\ f_1 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Имеем

$$[f_1, f_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} =: f_3,$$

поэтому

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span}(f_1(q), f_2(q), f_3(q)) = T_q M \quad \forall q \in M,$$

следовательно,

$$\mathcal{O}_q = M \quad \forall q \in M.$$

Для описания множества достижимости вместо исходной системы $\mathcal{F} = \{f_1 + uf_2 \mid |u| \leq 1\}$ рассмотрим суженную систему $\mathcal{F}_1 = \{f_1 \pm f_2\} \subset \mathcal{F}$ и докажем, что последняя управляема (тогда управляема и первая).

Траектории суженной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \theta, & x(0) &= 0, \\ \dot{y} &= \sin \theta, & y(0) &= 0, \\ \dot{\theta} &= \pm 1, & \theta(0) &= 0, \end{aligned}$$

имеют вид

$$\theta = \pm t, \quad x = \sin t, \quad y = \pm(1 - \cos t).$$

То есть эти траектории периодические:

$$e^{(t+2\pi n)(f_1 \pm f_2)} = e^{t(f_1 \pm f_2)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому сдвиг вдоль полей $f_1 \pm f_2$ в отрицательном времени может быть получен как сдвиг в положительном времени.

Поэтому, если ввести систему

$$\mathcal{F}_2 = \{f_1 \pm f_2, -f_1 \pm f_2\},$$

то получим

$$\mathcal{A}_q(\mathcal{F}_2) = \mathcal{A}_q(\mathcal{F}_1), \quad q \in M.$$

Но система \mathcal{F} симметрична, поэтому

$$\mathcal{A}_q(\mathcal{F}_2) = \mathcal{O}_q(\mathcal{F}) = M,$$

откуда

$$\mathcal{A}_q(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_q(\mathcal{F}_1) = M \text{ для всех } q \in M.$$

То есть машина Маркова-Дубинса вполне управляема в пространстве $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

Субриманова задача на группе движений плоскости

Соответствующая система симметрична и имеет полный ранг, поэтому вполне управляема.

Задача Эйлера об эластиках

Имеем управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_1(q) + uf_2(q), & q \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, & & u \in \mathbb{R}, \\ f_1 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, & f_2 &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Так же как для машины Дубинса, имеем

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = T_q M \Rightarrow \mathcal{O}_q = M \quad \forall q \in M.$$

Из геометрических соображений легко получить явное выражение для множества достижимости:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{(x, y, \theta) \in M \mid (x, y, \theta) = (t_1, 0, 0) \text{ или } x^2 + y^2 < t_1^2\},$$

см. Рис. 2.13.

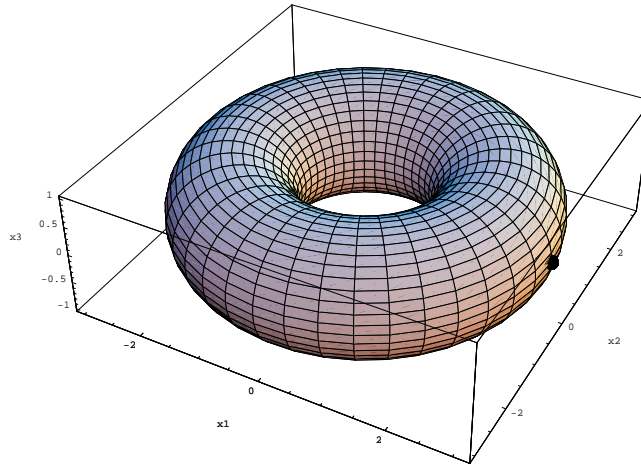


Рис. 2.13: Множество достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ в задаче об эластиках

Этот пример показывает, что множество достижимости может не быть многообразием, а также может не быть ни открытым, ни замкнутым множеством.

Скобки Ли высших порядков

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - u & u &\in [0, 1], \\ \dot{y} &= ux^k, & k &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В векторной форме

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_1(q) + uf_2(q), \\ f_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & f_2 &= -\frac{\partial}{\partial x} + x^k \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Вычислим первый коммутатор этих полей, всюду линейно независимый с f_1 :

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= kx^{k-1} \frac{\partial}{\partial y}, \\ [f_1, [f_1, f_2]] &= k(k-1)x^{k-2} \frac{\partial}{\partial y}, \\ &\dots \\ [f_1, [\dots, [f_1, f_2] \dots]] &= k! \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\text{Lie}_q(\mathcal{F}) = \text{span} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = T_q \mathbb{R}^2,$$

поэтому $\mathcal{O}_q = \mathbb{R}^2$ для любого $q \in \mathbb{R}^2$.

Из геометрических соображений заключаем:

- при $k = 2l + 1$ система управляема,
- при $k = 2l$ система имеет инвариантное множество (например, верхнюю полуплоскость), поэтому неуправляема.

2.3.3 Задачи

1. Постройте примеры управляемых систем, имеющих множеством достижимости:

- (a) гладкое многообразие без границы,
- (b) гладкое многообразие с гладкой границей,
- (c) гладкое многообразие с границей с угловой особой точкой,
- (d) гладкое многообразие с границей с точкой возврата.

Глава 3

Задача оптимального управления

4. Бык пойман:

Приложив усилия, мальчик в конце концов одерживает верх над быком.

Но как необузданна воля быка, как неукротима его сила!

Порой он самодовольно передвигается по равнине,

Как вдруг, гляди! Он вновь скрывается в непроницаемом тумане горного ущелья.

Пу-мин, «Десять рисунков о пастухе и быке» (цит. по [30])

Переходим ко второй основной задаче этого курса.

3.1 Задача оптимального управления: постановка и существование решений

3.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (3.1.1)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (3.1.2)$$

$$t_1 \text{ закреплено или свободно,} \quad (3.1.3)$$

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q, u) dt \rightarrow \min. \quad (3.1.4)$$

Будем предполагать, что динамика $f(q, u)$ удовлетворяет условиям:

- $\forall u \in U$ отображение $q \mapsto f(q, u)$ гладкое на M ,
- отображения $(q, u) \mapsto f(q, u), \frac{\partial f}{\partial q}(q, u)$ непрерывны при $(q, u) \in M \times \text{cl}(U)$.

Подынтегральная функция $\varphi(q, u)$ в функционале качества J удовлетворяет таким же условиям.

Допустимые управления — измеримые по Лебегу существенно ограниченные функции со значениями в U : $u \in L^\infty([0, t_1], U)$.

3.1.2 Сведение к исследованию множеств достижимости

Для того, чтобы включить функционал J в динамику системы, введем новую переменную, равную текущему значению функционала вдоль траектории $q_u(t)$:

$$y(t) = \int_0^t \varphi(q, u) dt.$$

Соответственно введем расширенное состояние $\hat{q} = \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times M$, удовлетворяющее расширенной управляемой системе

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(q, u) \\ f(q, u) \end{pmatrix} =: \hat{f}(\hat{q}, u). \quad (3.1.5)$$

Граничные условия для этой системы имеют вид

$$\hat{q}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{q}(t_1) = \begin{pmatrix} J \\ q_1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Траектория $q(t)$ оптимальна для задачи (3.1.1)–(3.1.4) тогда и только тогда, когда соответствующая траектория $\hat{q}(t)$ расширенной системы (3.1.5) приходит в такую точку (y_1, q_1) множества достижимости $\hat{\mathcal{A}}_{(0, q_0)}(t_1)$, что

$$\hat{\mathcal{A}}_{(0, q_0)}(t_1) \cap \{(y, q_1) \mid y < y_1\} = \emptyset,$$

см. Рис. 3.1.

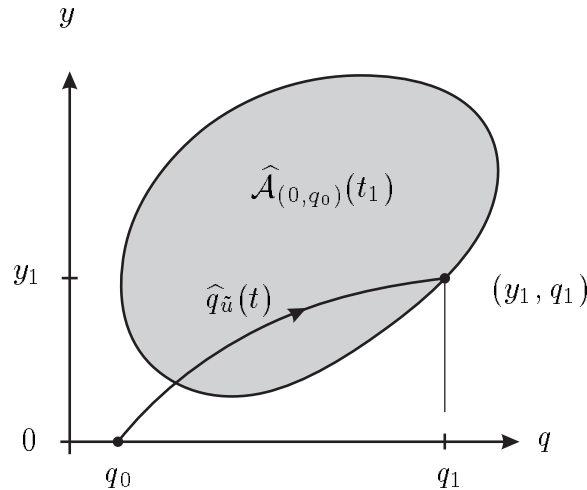


Рис. 3.1: Траектория $q(t)$ оптимальна

Следствие 4. Если множество достижимости $\tilde{\mathcal{A}}_{(q_0, 0)}(t_1)$ (соотв. $\tilde{\mathcal{A}}_{(q_0, 0)}(\leq t_1) \in q_1$) компактно, то задача оптимального управления (3.1.1)–(3.1.4) с фиксированным временем t_1 (соотв. со свободным временем t_1) имеет решение.

Теорема 7 (Филиппов). Пусть управляемая система (3.1.1) удовлетворяет условиям:

- (1) U компактно,

(2) $f(q, U)$ выпукло для всех $q \in M$,

(3) существует компакт $K \subset M$ такой, что для всех $q \in M \setminus K$, $u \in U$ выполнено равенство $f(q, u) = 0$.

Тогда множества достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t)$, $\mathcal{A}_{q_0}(\leq t)$ компактны.

Доказательство. См. [1]. □

3.1.3 Существование решений в задаче оптимального управления

Следствие 5. Пусть задача оптимального управления (3.1.1)–(3.1.4) удовлетворяет условиям:

(1) U компактно,

(2) множество $\left\{ \begin{pmatrix} f(q, u) \\ \varphi(q, u) \end{pmatrix} \mid u \in U \right\}$ выпукло для всех $q \in M$,

(3) существует компакт $K \subset M \times \mathbb{R}$ такой, что $\tilde{\mathcal{A}}_{(q_0, 0)}(t_1) \subset K$ для задачи с закрепленным t_1 (соотв. $\tilde{\mathcal{A}}_{(q_0, 0)}(\leq t_1) \subset K$ для $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(\leq t_1)$ для задачи со свободным t_1).

Тогда задача (3.1.1)–(3.1.4) имеет решение.

Доказательство. Рассмотрим задачу с закрепленным временем t_1 (задача со свободным t_1 рассматривается аналогично).

Существует компакт $K' \subset M \times \mathbb{R}$ такой, что $K \subset \text{int } K'$. Возьмем функцию $a \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ такую, что

$$a|_K \equiv 1, \quad a|_{(M \times \mathbb{R}) \setminus K'} \equiv 0.$$

Рассмотрим новую расширенную управляемую систему:

$$\dot{\tilde{q}} = a(\tilde{q})f(\tilde{q}, u), \quad \tilde{q} \in M \times \mathbb{R}, \quad u \in U.$$

Эта система имеет компактные множества достижимости за время t_1 (по теореме 7), совпадающие с соответствующими множествами достижимости расширенной системы (3.1.5). Но тогда задача оптимального управления (3.1.1)–(3.1.4) имеет решение (по следствию 4). □

Рассмотрим теперь задачу быстродействия:

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (3.1.6)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (3.1.7)$$

$$t_1 \rightarrow \min. \quad (3.1.8)$$

Для этой задачи следствие 5 детализируется следующим образом.

Следствие 6. Пусть выполняются условия:

(1) U компактно,

(2) $f(q, U)$ выпукло для всех $q \in M$,

(3) существуют $t_1 > 0$ и компакт $K \subset M$ такие, что

$$q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(\leq t_1) \subset K.$$

Тогда задача быстродействия (3.1.6)–(3.1.8) имеет решение.

3.2 Принцип максимума Понтрягина

Этот раздел посвящен основному необходимому условию оптимальности для задач оптимального управления — принципу максимума Понтрягина (ПМП).

3.2.1 Элементы симплектической геометрии

Для инвариантной формулировки принципа максимума Понтрягина на многообразиях нам понадобятся некоторые начальные сведения из симплектической геометрии, напомним их здесь.

Касательное расслоение гладкого многообразия есть несвязное объединение касательных пространств

$$TM = \bigsqcup_{q \in M} T_q M = \{(q, v) \mid q \in M, v \in T_q M\}.$$

Если (x_1, \dots, x_n) — локальные координаты на M вблизи точки $q \in M$, то любой касательный вектор $v \in T_q M$ имеет разложение по базисным векторам $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда $(x_1, \dots, x_n; v_1, \dots, v_n)$ суть локальные координаты на TM , превращающие его в гладкое $2n$ -мерное многообразие.

Аналогично *кокасательное расслоение* есть несвязное объединение кокасательных пространств

$$T^*M = \bigsqcup_{q \in M} T_q^*M = \{(q, \lambda) \mid q \in M, \lambda \in T_q^*M\}.$$

Если (x_1, \dots, x_n) — локальные координаты в окрестности точки $q \in M$, то любой ковектор $\lambda \in T_q^*M$ имеет разложение по базисным ковекторам $\lambda = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$. Поэтому набор переменных $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ дает локальные координаты на T^*M , превращающие его в гладкое $2n$ -мерное пространство. Эти координаты на кокасательном расслоении называются *каноническими координатами*.

Каноническая проекция есть отображение

$$\pi : T^*M \rightarrow M, \quad T_q^*M \ni \lambda \mapsto q \in M.$$

Тавтологическая 1-форма (форма Лиувилля) $s \in \Lambda^1(T^*M)$ определяется следующим образом. Пусть $\lambda \in T^*M$, $\omega \in T_\lambda(T^*M)$. Тогда

$$\langle s_\lambda, \omega \rangle := \langle \lambda, \pi_* \omega \rangle.$$

В канонических координатах имеем $\lambda = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$ и $s_\lambda = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$, т.е. форма s_λ имеет то же представление, что и λ . В механике форма s обозначается как pdq .

Симплектическая 2-форма $\sigma \in \Lambda^2(T^*M)$ есть $\sigma = ds$. В канонических координатах

$$\sigma = d \left(\sum_{i=1}^n \xi_i dx_i \right) = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i.$$

В механике эта форма обозначается $\sigma = dp \wedge dq$.

Гамильтониан (функция Гамильтона) есть любая гладкая функция $h \in C^\infty(T^*M)$.

Гамильтоновое векторное поле, соответствующее гамильтониану h , есть векторное поле $\vec{h} \in \text{Vec}(T^*M)$, удовлетворяющее условию $\sigma(\cdot, \vec{h}) = dh$. В канонических координатах

$$\vec{h} = \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Соответствующая гамильтонова система ОДУ есть $\dot{\lambda} = \vec{h}(\lambda)$, в канонических координатах

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial h}{\partial \xi_i}, \\ \dot{\xi}_i &= -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Для гамильтонианов $h, g \in C^\infty(T^*M)$ их скобка Пуассона $\{h, g\} \in C^\infty(T^*M)$ определяется равенствами

$$\{h, g\} = \vec{h}g = \sigma(\vec{h}, \vec{g}).$$

В канонических координатах

$$\{h, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i}.$$

Отметим простейшие свойства скобки Пуассона.

Лемма 1. Пусть $a, b, c \in C^\infty(T^*M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:

- (1) $\{a, b\} = -\{b, a\}$,
- (2) $\{a, a\} = 0$,
- (3) $\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0$,
- (4) $\{\alpha a + \beta b, c\} = \alpha\{a, c\} + \beta\{b, c\}$,
- (5) $\{ab, c\} = \{a, c\}b + a\{b, c\}$,
- (6) $\overrightarrow{\{a, b\}} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Доказательство. (1) $\{a, b\} = \sigma(\vec{a}, \vec{b}) = -\sigma(\vec{b}, \vec{a}) = -\{b, a\}$.

$$(2) \{a, a\} = -\{a, a\} = 0.$$

(3) доказывается вычислением в канонических координатах.

$$(4) \{\alpha a + \beta b, c\} = \overrightarrow{(\alpha a + \beta b)}c = (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b})c = \alpha\{a, c\} + \beta\{b, c\}.$$

$$(5) \{ab, c\} = -\{c, ab\} = -\vec{c}(ab) = -(\vec{c}a)b - a(\vec{c}b) = -\{c, a\}b - a\{c, b\} = \{a, c\}b + a\{b, c\}.$$

$$(6) \overrightarrow{\{a, b\}}c = \{\{a, b\}, c\} = \{\{a, c\}, b\} + \{a, \{b, c\}\} = \vec{a}\vec{b}c - \vec{b}\vec{a}c = [\vec{a}, \vec{b}]c, \text{ поэтому } \overrightarrow{\{a, b\}} = [\vec{a}, \vec{b}].$$

□

Теорема 8 (Нётер). Пусть $a, h \in C^\infty(T^*M)$.

Функция a является интегралом гамильтонова поля \vec{h} тогда и только тогда, когда $\{a, h\} = 0$.

Доказательство. $a(e^{t\vec{h}}(\lambda)) \equiv \text{const} \Leftrightarrow \vec{h}a = 0 \Leftrightarrow \{h, a\} = 0$.

□

Опишем последнюю необходимую нам конструкцию симплектической геометрии — *линейные на слоях гамильтонианы*. Пусть $X \in \text{Vec}(M)$. Тогда гамильтониан

$$h_X(\lambda) = \langle \lambda, X(q) \rangle, \quad \lambda \in T^*M, \quad q = \pi(\lambda),$$

линеен на слоях касательного расслоения. В канонических координатах $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\lambda = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$, откуда $h_X(\lambda) = \sum_{i=1}^n \xi_i X_i(x)$.

Лемма 2. Пусть $X, Y \in \text{Vec}(M)$. Тогда:

$$(1) \{h_X, h_Y\} = h_{[X, Y]},$$

$$(2) [\vec{h}_X, \vec{h}_Y] = \vec{h}_{[X, Y]}.$$

Доказательство. (1) доказывается вычислением в канонических координатах.

(2) Пусть $g \in C^\infty(T^*M)$, тогда

$$\begin{aligned} [\vec{h}_X, \vec{h}_Y]g &= (\vec{h}_X \vec{h}_Y - \vec{h}_Y \vec{h}_X)g = \{h_X, \{h_Y, g\}\} - \{h_Y, \{h_X, g\}\} = \\ &= \{\{h_X, h_Y\}, g\} = \overrightarrow{\{h_X, h_Y\}}g = \vec{h}_{[X, Y]}g, \end{aligned}$$

откуда $[\vec{h}_X, \vec{h}_Y] = \vec{h}_{[X, Y]}$.

□

В канонических координатах имеем

$$\begin{aligned} h_X &= \sum_{i=1}^n X_i \xi_i X_i(x), \\ \vec{h}_X &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + (\dots) \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \end{aligned}$$

поэтому $\pi_* \vec{h}_X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} = X$. По этой причине поле \vec{h}_X называется *гамильтоновым лифтом* поля X .

3.2.2 Формулировка принципа максимума Понтрягина

Итак, рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f(q, u), \quad q \in M, \quad u \in U, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ J &= \int_0^{t_1} \varphi(q, u) dt \rightarrow \min, \\ t_1 &\text{ фиксировано.} \end{aligned}$$

Зададим семейство гамильтонианов

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f(q, u) \rangle + \nu \varphi(q, u), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad u \in U, \quad \lambda \in T^*M.$$

Фундаментальное необходимое условие оптимальности для задач оптимального управления дается следующим утверждением.

Теорема 9 (Принцип максимума Понтрягина). *Если траектория $q(t)$ и управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимальны, то существуют кривая $\lambda_t \in \text{Lip}([0, t_1], T^*M)$, $\pi(\lambda_t) = q(t)$, и число $\nu \in \{-1, 0\}$ такие, что для п.в. $t \in [0, t_1]$ выполнены условия:*

$$(1) \dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}^\nu(\lambda_t),$$

$$(2) h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{v \in U} h_v^\nu(\lambda_t),$$

$$(3) (\lambda_t, \nu) \neq (0, 0).$$

Доказательство. См. [1]. □

Мы докажем принцип максимума Понтрягина в частном случае — для субримановых задач — в п. 3.3.7.

Удовлетворяющая принципу максимума кривая λ_t называется *экстремалью*, кривая $q(t)$ — *экстремальной траекторией*, управление $u(t)$ — *экстремальным управлением*.

Замечание. *Для задачи со свободным терминальным временем t_1 выполнены условия (1)–(3), а также дополнительное условие*

$$(4) h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) \equiv 0.$$

Применим принцип максимума к задаче быстродействия:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f(q, u), & q &\in M, & u &\in U, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ t_1 &= \int_0^{t_1} 1 dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Гамильтониан ПМП имеет вид $h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f(q, u) \rangle + \nu$. Введем *укороченный гамильтониан* $g_u(\lambda) = \langle \lambda, f(q, u) \rangle$. Тогда утверждения принципа максимума для задачи быстродействия принимают форму:

$$(1) \dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \vec{g}_{u(t)}(\lambda_t),$$

$$(2) h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{v \in U} h_v^\nu(\lambda_t) \Leftrightarrow g_{u(t)}(\lambda_t) = \max_{v \in U} g_v(\lambda_t),$$

$$(3) \lambda_t \neq 0,$$

$$(4) h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) + \nu \equiv 0 \Leftrightarrow g_{u(t)}(\lambda_t) \equiv \text{const} \geq 0.$$

3.2.3 Решение задач оптимального управления

Применим теорему Филиппова и принцип максимума Понтрягина к задачам п. 1.1.1.

Остановка поезда

Имеем задачу быстродействия

$$\dot{x} = y, \quad q = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.2.1)$$

$$\dot{y} = u, \quad |u| \leq 1, \quad (3.2.2)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (3.2.3)$$

$$t_1 \rightarrow \min. \quad (3.2.4)$$

Как мы показали в п. 2.3.2, система управляема: $\mathcal{A}_{q_0} = \mathbb{R}^2$ для любого $q_0 \in \mathbb{R}^2$. Проверим выполнение условий (следствия 6) теоремы Филиппова.

- (1) $U = [-1, 1]$ компактно,
 (2) $f(q, U) = \{f_1(q) + uf_2(q) \mid u \in [-1, 1]\}$ выпукло.
 (3) Априорная оценка:

$$\begin{aligned}
 f(q, u) &= (y, u), \\
 |f(q, u)| &= \sqrt{y^2 + u^2} \leq \sqrt{y^2 + 1} \leq |q| + 1, \\
 |q \cdot f(q, u)| &\leq q^2 + |q| \leq 2(q^2 + 1), \\
 \left| \left(\frac{q^2}{2} \right) \dot{\cdot} \right| &= |q \cdot \dot{q}| \leq 2(q^2 + 1), \\
 q^2 &= r, \\
 \left| \frac{\dot{r}}{2} \right| &\leq 2(r + 1), \\
 r + 1 &\leq e^{4t}(r_0 + 1), \\
 r &\leq \varphi(t) = e^{4t}(r_0 + 1) - 1, \\
 \mathcal{A}_{q_0}(\leq t_1) &\subset \{q \in \mathbb{R}^2 \mid q^2 \leq \varphi(t_1)\} = K.
 \end{aligned}$$

Итак, все условия теоремы Филиппова выполнены, поэтому существует оптимальное управление.

Для записи принципа максимума Понтрягина воспользуемся каноническими координатами: $T^*M \in \lambda = (\xi_1, \xi_2; x, y)$. Укороченный гамильтониан ПМП имеет вид

$$h_u(\lambda) = \xi_1 y + \xi_2 u.$$

Выпишем утверждение принципа максимума:

- (1) Гамильтонова система

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\frac{\partial h_u}{\partial x} = 0, \\ \dot{\xi}_2 = -\frac{\partial h_u}{\partial y} = -\xi_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u. \end{cases}$$

- (2) Условие максимума

$$h_u(\lambda) = \xi_1 y + \xi_2 u \rightarrow \max_{|u| \leq 1}.$$

- (3) Условие нетривиальности

$$(\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0).$$

- (4) Постоянство гамильтониана $h_u(\lambda) = \xi_1 y + \xi_2 u \equiv \text{const} \geq 0$.

Из гамильтоновой системы получаем $\xi_1 \equiv \text{const}$, $\xi_2(t)$ линейно и не равно тождественно нулю, поэтому $\xi_2(t)$ имеет не более одного корня.

Из условия максимума заключаем, что если $\xi_2 \neq 0$, то $u = \text{sgn } \xi_2$.

Следовательно, оптимальное управление $u(t)$ постоянно или кусочно-постоянно с одним переключением, со значениями ± 1 . Найдем соответствующие траектории $(x(t), y(t))$, входящие в начало координат.

Проинтегрируем управляемую систему для постоянного управления:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{u}{y}, \\
 y dy &= u dx, \\
 \frac{y^2}{2} &= ux + C.
 \end{aligned}$$

Будем двигаться из начала координат в обратном времени (см. Рис. 3.2). Траектории, входящие в начало координат с постоянным управлением, имеют вид:

$$\begin{aligned} u = 1 : & \quad x = \frac{y^2}{2}, & \quad x \geq 0, \\ u = -1 : & \quad x = -\frac{y^2}{2}, & \quad x \leq 0. \end{aligned}$$

Обозначим эти траектории соответственно через Γ_+ и Γ_- .

Кривая $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ разделяет плоскость \mathbb{R}^2 на две связные области: верхнюю Π_+ и нижнюю Π_- .

Теперь рассмотрим траектории с одним переключением, входящие в начало координат. Траектории с $u = 1$, входящие в дугу Γ_- , заполняют область Π_- ; а траектории с $u = -1$, входящие в дугу Γ_+ , заполняют область Π_+ .

Таким образом, через каждую точку в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ проходит единственная траектория, подозрительная на оптимальность (соответствующая кусочно-постоянному управлению с не более чем одним переключением, и значениями ± 1).

В силу того, что оптимальная траектория существует, найденная траектория является оптимальной.

Для любой точки в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ мы нашли оптимальное управление:

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Gamma_+ \cup \Pi_-, \\ -1, & (x, y) \in \Gamma_- \cup \Pi_+. \end{cases}$$

Такого рода оптимальное управление $u = u(x, y)$, зависящее от текущей координаты (x, y) , называется *оптимальным синтезом*. Соответствующее семейство оптимальных траекторий см. на Рис. 3.2.

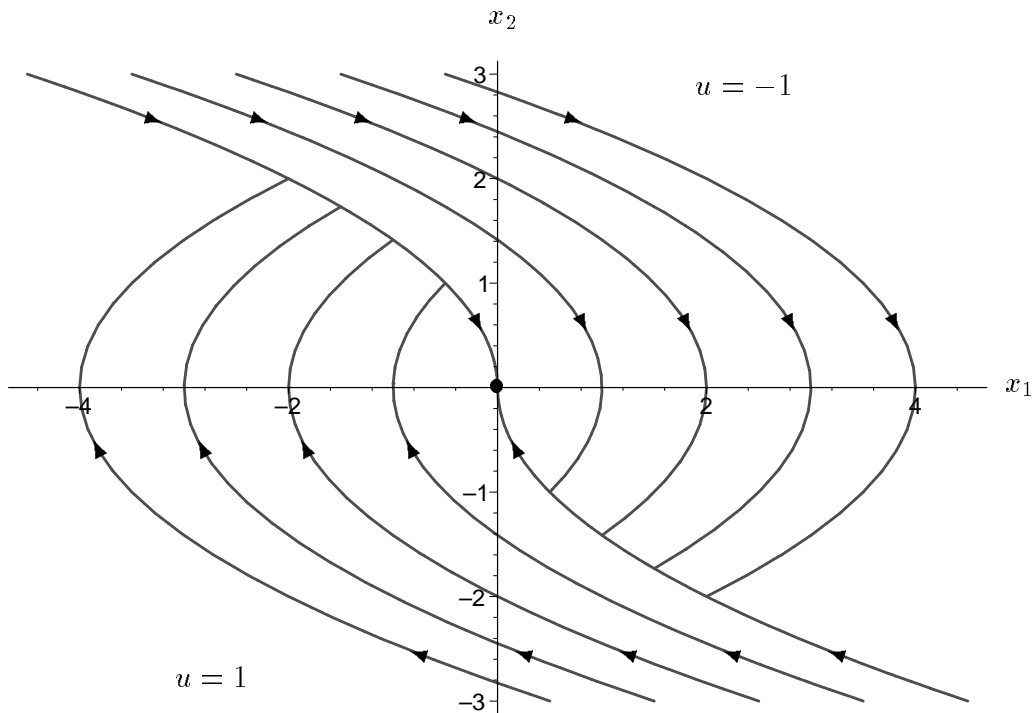


Рис. 3.2: Оптимальный синтез в задаче об остановке поезда

Машина Маркова-Дубинса

Имеем задачу быстрогодействия

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_1(q) + uf_2(q), \quad q \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad |u| \leq 1, \\ f_1 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ t_1 &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Как мы показали в п. 2.3.2, система вполне управляема.

Проверим условие теоремы Филиппова:

- (1) $U = [-1, 1]$ компактно,
- (2) $f(q, U) = \{f_1(q) + uf_2(q) \mid u \in [-1, 1]\}$ выпукло.
- (3) Априорная оценка:

$$\begin{aligned} |f(q, u)| &\leq C, \\ |\dot{q}| &\leq C, \\ |q(t)| &\leq Ct + |q_0|, \\ \mathcal{A}_{q_0}(\leq t_1) &\subset \{q \in M \mid |q| \leq Ct_1 + |q_0|\} = K. \end{aligned}$$

Оптимальное управление существует.

Рассмотрим репер в касательном пространстве, порожденный нашей задачей:

$$\begin{aligned} T_q M &= \text{span}(f_1(q), f_2(q), f_3(q)), \\ f_3 &= [f_1, f_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Введем соответствующие линейные на слоях кокасательного расслоения гамильтонианы:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i(q) \rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$

Получаем систему координат (h_1, h_2, h_3) в кокасательном пространстве. Такие неканонические координаты, построенные по векторным полям управляемой системы и их коммутаторам, обычно удобнее для записи гамильтоновой системы принципа максимума.

Укороченный гамильтониан ПМП имеет вид

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_1 + uf_2 \rangle = h_1(\lambda) + uh_2(\lambda).$$

Выпишем утверждения ПМП.

- (1) Гамильтонова система $\dot{\lambda} = \vec{h}_u(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \{h_u, h_1\} = \{h_1 + uh_2, h_1\} = \underbrace{\{h_1, h_1\}}_0 + u \underbrace{\{h_2, h_1\}}_{-h_3} = -uh_3, \\ \dot{h}_2 &= \{h_1 + uh_2, h_2\} = \{h_1, h_2\} = h_3, \\ \dot{h}_3 &= \{h_1 + uh_2, h_3\} = \underbrace{\{h_1, h_3\}}_0 + u \underbrace{\{h_2, h_3\}}_{h_1} = uh_1, \end{aligned}$$

так как $[f_1, f_3] = 0$, $[f_2, f_3] = f_2$.

Итак, гамильтонова система ПМП имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -uh_3, & \dot{x} &= \cos \theta, \\ \dot{h}_2 &= h_3, & \dot{y} &= \sin \theta, \\ \dot{h}_3 &= uh_1, & \dot{\theta} &= u. \end{aligned}$$

(2) Условие максимума $h_1 + uh_2 \rightarrow \max_{|u| \leq 1}$.

Если $h_2 \neq 0$, то $u = \operatorname{sgn} h_2$.

Если же $h_2 \equiv 0$, то из гамильтоновой системы получаем $h_3 \equiv 0$, $h_1 \equiv \operatorname{const} \neq 0$ (т.к. $\lambda \neq 0$), поэтому $u \equiv 0$.

В случае $h_2 \neq 0$ экстремальные траектории $(x(t), y(t))$ суть окружности единичного радиуса, а в случае $h_2 \equiv 0$ это прямолинейные отрезки.

Можно показать [1], что оптимальные траектории — конкатенации окружностей и прямолинейных отрезков следующих видов:

- $O_1 \Pi O_2$,
- $O_1 O_2 O_3 O_4$,

где O_i — дуги окружностей, Π — отрезок.

Если начальное и конечное положения машины Маркова-Дубинса удалены между собой, то имеется простой способ отыскания оптимальной траектории. Нужно построить две окружности единичного радиуса, касающиеся начального вектора, и такие же две окружности, касающиеся конечного вектора. Затем нужно провести 4 общие касательные к начальным и конечным окружностям, совместимые с направлением движения по окружностям. Наконец, из четырех построенных экстремальных траекторий вида $O_1 \Pi O_2$ нужно выбрать оптимальную. Этот алгоритм используется для планирования оптимальных траекторий самолетов.

Оптимальный синтез в этой задаче известен, хотя и довольно сложен.

Эйлеровы эластики

Задача оптимального управления имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q} &= f_1(q) + uf_2(q), & q &\in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, & u &\in U = \mathbb{R}, \\ f_1 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, & f_2 &= \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ q(0) &= q_0, & q(t_1) &= q_1, \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Множество достижимости было описано в п. 2.3.2:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid (x, y, \theta) = (t_1, 0, 0) \text{ или } x^2 + y^2 < t_1^2\},$$

будем предполагать $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$.

Теорема Филишова в данном случае неприменима, т.к. множество значений управляющего параметра $U = \mathbb{R}$ некомпактно. Однако можно доказать существование оптимального управления $u \in L^2[0, t_1]$ на основе общих результатов [36].

Как и в предыдущей задаче, рассмотрим гамильтониан ПМП в форме

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, f_1 + uf_2 \rangle + \frac{\nu}{2} u^2 = h_1 + uh_2 + \frac{\nu}{2} u^2.$$

- (1) Гамильтонова система ПМП (вертикальная подсистема для сопряженных переменных h_i):

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= \{h_1 + uh_2, h_1\} = -uh_3, \\ \dot{h}_2 &= \{h_1 + uh_2, h_2\} = h_3, \\ \dot{h}_3 &= \{h_1 + uh_2, h_3\} = uh_1.\end{aligned}$$

- (2) Условие максимума.

- (2.1) $\nu = 0$ (анормальный случай):

$$h_1 + uh_2 \rightarrow \max_{u \in \mathbb{R}}.$$

Тогда с учетом гамильтоновой системы ПМП получаем

$$h_2 \equiv 0 \Rightarrow h_3 \equiv 0 \Rightarrow h_1 \equiv \text{const} \neq 0 \Rightarrow u \equiv 0.$$

Анормальная траектория $(x(t), y(t))$ — прямая; она оптимальна, т.к. в этом случае упругая энергия $J = 0$.

- (2.2) $\nu = -1$ (нормальный случай):

$$h_1 + uh_2 - \frac{1}{2}u^2 \rightarrow \max_{u \in \mathbb{R}},$$

откуда

$$u = h_2.$$

Поэтому в нормальном случае гамильтонова система ПМП принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= -h_2h_3, & \dot{x} &= \cos \theta, \\ \dot{h}_2 &= h_3, & \dot{y} &= \sin \theta, \\ \dot{h}_3 &= h_2h_1, & \dot{\theta} &= h_2.\end{aligned}$$

Эта система имеет интеграл $r^2 = h_1^2 + h_3^2$.

Введем полярные координаты

$$h_1 = r \cos \alpha, \quad h_3 = r \sin \alpha,$$

тогда вертикальная подсистема (подсистема для сопряженных переменных h_i) гамильтоновой системы ПМП принимает форму

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= h_2, \\ \dot{h}_2 &= r \sin \alpha.\end{aligned}$$

Для переменных $\beta = \alpha + \pi$, $c = h_2$ получаем стандартное уравнение маятника

$$\dot{\beta} = c, \tag{3.2.5}$$

$$\dot{c} = -r \sin \beta, \tag{3.2.6}$$

см. Рис. 3.3, 3.4.

Эта система имеет интеграл энергии $E = \frac{c^2}{2} + h_1 = \frac{c^2}{2} - r \cos \beta \in [-r, +\infty]$:

$$\dot{E} = c \cdot (-r \sin \beta) + r \sin \beta \cdot c = 0.$$

В зависимости от значений интеграла энергии получаем разные типы колебаний маятника и разные типы кривых $(x(t), y(t))$ — *эластик Эйлера*:

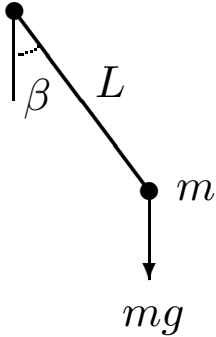


Рис. 3.3: Математический маятник

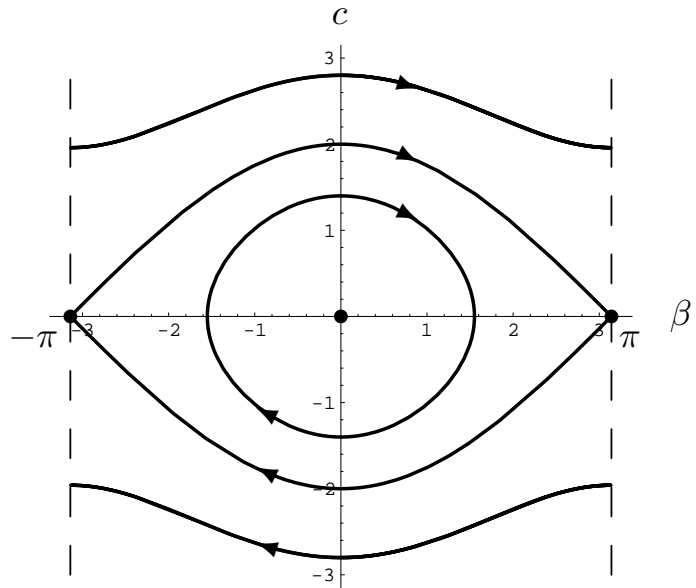


Рис. 3.4: Фазовый портрет маятника (3.2.5), (3.2.6)

- если $r > 0$, $E = -r$, то маятник покоится в устойчивом положении равновесия, а эластика является прямой, см. Рис. 3.5,
- если $r > 0$, $E \in (-r, r)$, то маятник колеблется между крайними положениями, и эластика имеет точки перегиба (инфлекссионная эластика), см. Рис. 3.6–3.10,
- если $r > 0$ и $E = r$, то маятник покоится в неустойчивом положении равновесия или неограниченно приближается к нему за бесконечное время, а эластика соответственно является прямой или имеет одну петлю и стремится к прямой (критическая эластика), см. Рис. 3.11,
- если $r > 0$ и $E > r$, то маятник неравномерно вращается по часовой или против часовой стрелки, и эластика не имеет точек перегиба (неинфлекссионная эластика), см. Рис. 3.12,
- если $r = 0$, то маятник либо покоится, либо равномерно вращается в отсутствие силы тяжести, и эластика является прямой или окружностью, см. Рис. 3.13.

Эту задачу впервые детально рассмотрел Л. Эйлер в 1742 году, однако оптимальный синтез до сих пор неизвестен. На Рис. 3.14 представлены эскизы эластик из его книги [18].

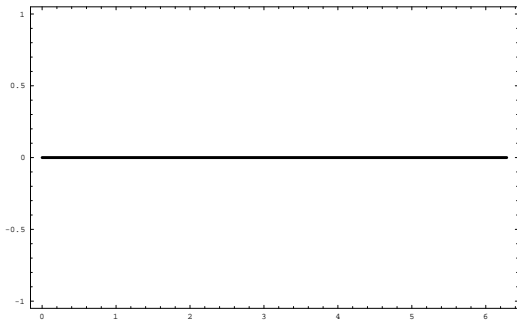


Рис. 3.5: Эластика: $E = \pm r$, $r > 0$, $c = 0$

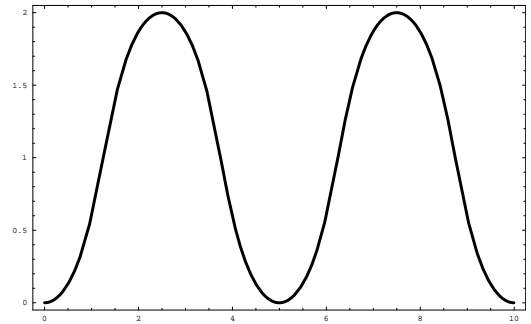


Рис. 3.6: Эластика: $E \in (-r, r)$, $r > 0$, $k \in (0, \sqrt{2})$

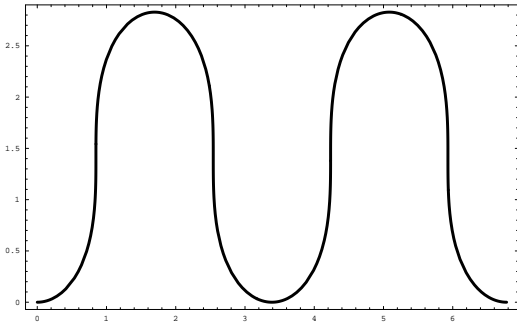


Рис. 3.7: Эластика: $E \in (-r, r)$, $r > 0$, $k = \sqrt{2}$

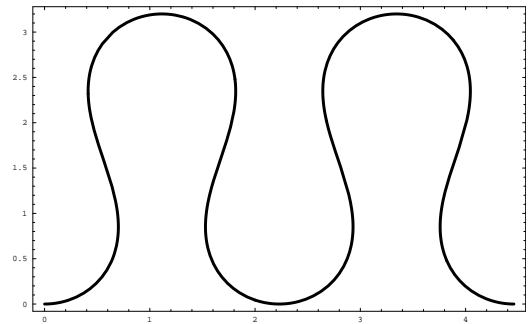


Рис. 3.8: Эластика: $E \in (-r, r)$, $r > 0$, $k \in (\sqrt{2}, k_0)$

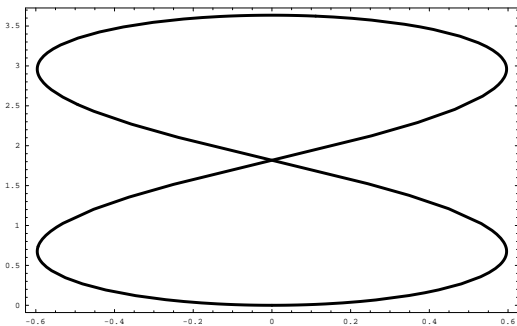


Рис. 3.9: Эластика: $E \in (-r, r)$, $r > 0$, $k = k_0 \approx 0.909$

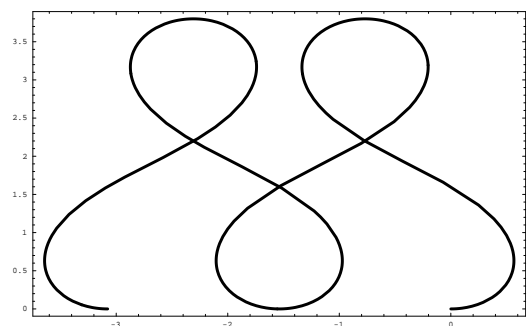


Рис. 3.10: Эластика: $E \in (-r, r)$, $r > 0$, $k \in (k_0, 1)$

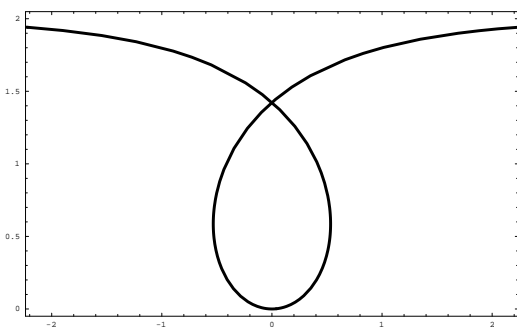


Рис. 3.11: Эластика: $E = r > 0$, $\beta \neq \pi$

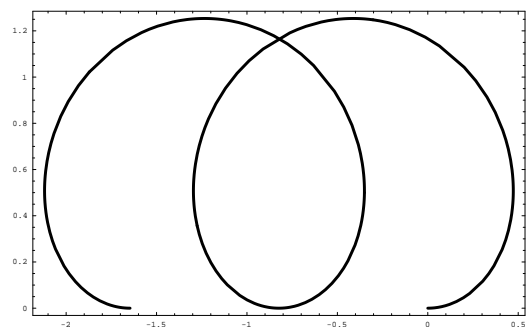


Рис. 3.12: Эластика: $E > r > 0$

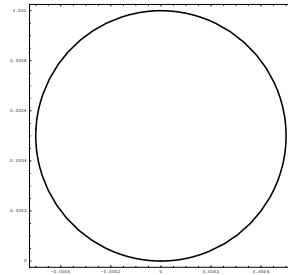


Рис. 3.13: Эластика:
 $r = 0, c \neq 0$

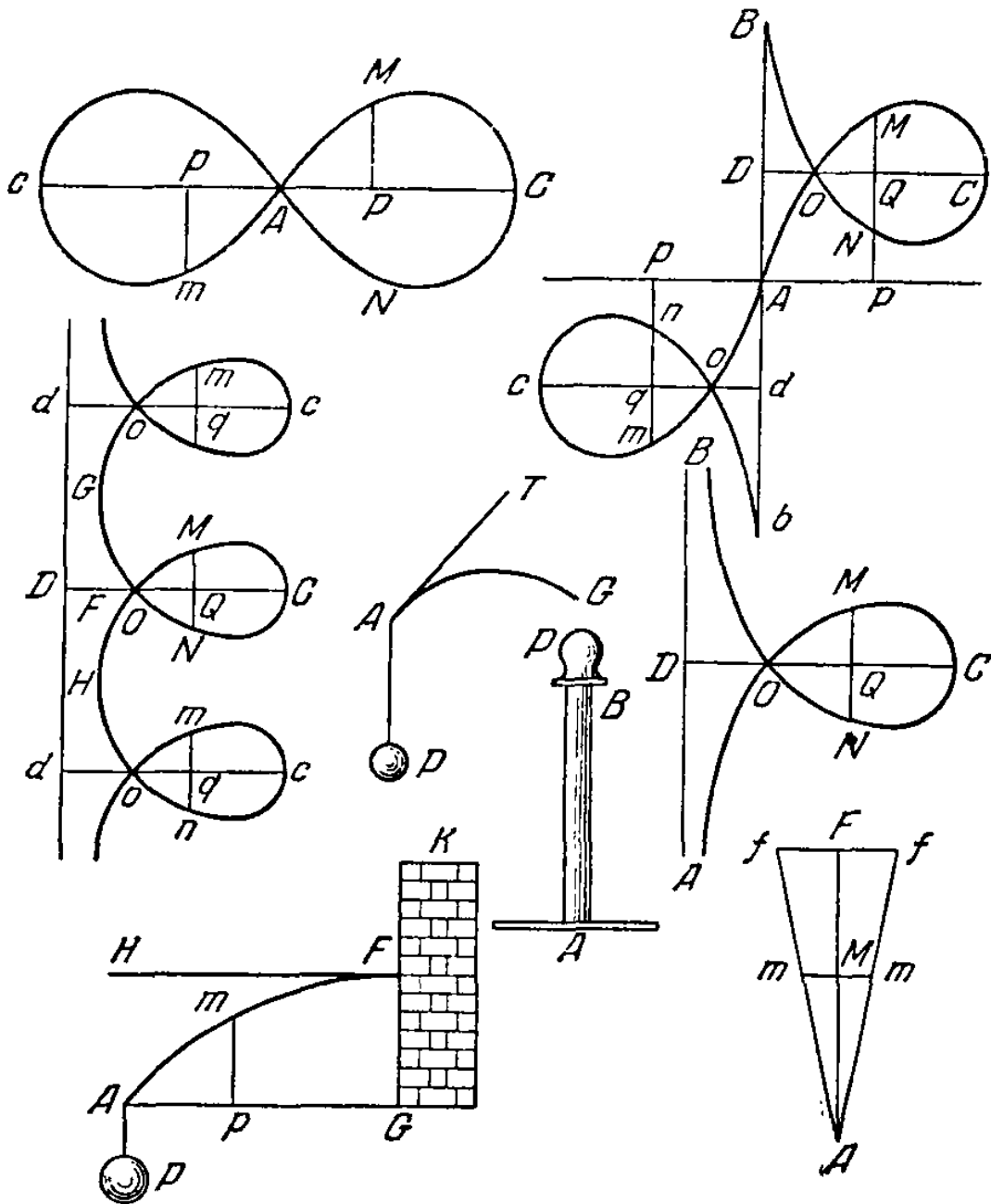


Рис. 3.14: Эйлеровы эскизы эластик [18]

3.3 Субриманова геометрия

В этом разделе рассмотрим важный специальный класс задач оптимального управления — субримановы задачи.

3.3.1 Субримановы структуры и кратчайшие

Субриманова структура (Δ, g) на гладком многообразии M состоит из распределения $\Delta = \{\Delta_q \subset T_q M \mid q \in M\}$ и скалярного произведения в Δ :

$$g = \{g_q - \text{скалярное произведение в } \Delta_q \mid q \in M\},$$

т.е. g_q есть положительно определенная невырожденная квадратичная форма на пространстве Δ_q , гладко зависящая от q . Горизонтальная кривая есть кривая $q \in \text{Lip}([0, t_1], M)$, для которой

$$\dot{q}(t) \in \Delta_{q(t)} \text{ для п.в. } t \in [0, t_1].$$

Субриманова длина горизонтальной кривой определяется как

$$l(q(\cdot)) = \int_0^{t_1} \sqrt{g(\dot{q}, \dot{q})} dt.$$

Субриманово расстояние (расстояние Карно-Каратеодори) между точками $q_0, q_1 \in M$ есть

$$d(q_0, q_1) = \inf \{l(q(\cdot)) \mid q(\cdot) \text{ горизонтальна, } q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\}.$$

Субриманова кратчайшая есть горизонтальная кривая $q(\cdot)$, для которой

$$l(q(\cdot)) = d(q_0, q_1),$$

где q_0 и q_1 — граничные точки $q(\cdot)$, см. Рис. 3.15.

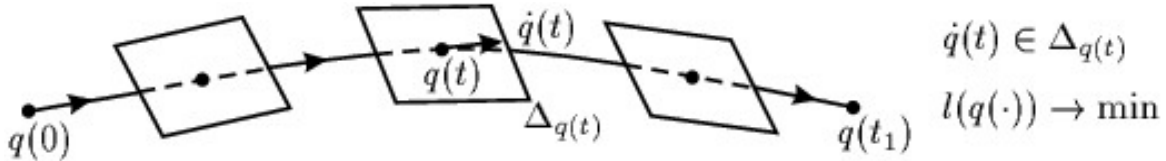


Рис. 3.15: Субриманова кратчайшая

Пусть субриманова (СР) структура имеет ортонормированный репер

$$\begin{aligned} f_1, \dots, f_k &\in \text{Vec}(M), \\ \text{span}(f_1(q), \dots, f_k(q)) &= \Delta_q, \quad q \in M, \\ g(f_i, f_j) &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Тогда СР кратчайшие являются решениями задачи оптимального управления

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i f_i(q), \quad q \in M, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \quad (3.3.1)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (3.3.2)$$

$$l(q(\cdot)) = \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^k u_i^2 \right)^{1/2} dt \rightarrow \min. \quad (3.3.3)$$

Замечание. *СР длина не зависит от параметризации кривой $q(t)$. А именно, если*

$$\tilde{q}(s) = q(t(s)), \quad t(\cdot) \in \text{Lip}([0, s_1], [0, t_1]), \quad t'(s) > 0,$$

есть перепараметризация кривой $q(t)$, то $l(\tilde{q}(\cdot)) = l(q(\cdot))$. Действительно,

$$\begin{aligned} l(\tilde{q}(\cdot)) &= \int_0^{s_1} \sqrt{g(\tilde{q}'(s), \tilde{q}'(s))} ds = \int_0^{s_1} \sqrt{g(\dot{q}(t), \dot{q}(t))} t'(s) ds = \int_0^{t_1} \sqrt{g(\dot{q}(t), \dot{q}(t))} dt = \\ &= l(q(\cdot)). \end{aligned}$$

Наряду с функционалом длины, полезно рассмотреть функционал энергии

$$J(q(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} g(\dot{q}, \dot{q}) dt.$$

Обозначим $\|\dot{q}\| = \sqrt{g(\dot{q}, \dot{q})}$.

Лемма 3. *Минимали энергии суть в точности минимали длины постоянной скорости:*

$$J(q(\cdot)) \rightarrow \min \Leftrightarrow l(q(\cdot)) \rightarrow \min, \quad \|\dot{q}\| = \text{const}.$$

Доказательство. В силу неравенства Коши-Буняковского,

$$(l(q(\cdot)))^2 = \left(\int_0^{t_1} \|\dot{q}\| \cdot 1 dt \right)^2 \leq \int_0^{t_1} \|\dot{q}\|^2 dt \cdot \int_0^{t_1} 1^2 dt = 2J(q(\cdot)) t_1,$$

причем равенство здесь достигается только при $\|\dot{q}\| = \text{const}$.

Очевидно, что на кривых постоянной скорости задачи $l \rightarrow \min$ и $J \rightarrow \min$ эквивалентны. А при $\|\dot{q}\| \neq \text{const}$ имеем $l < 2t_1 J$, т.е. J не достигает минимума. \square

Пример: Субриманова задача на группе движений плоскости

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), \quad q \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ f_1 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Эта задача подробно исследуется в разделе 3.4.

Пример: Качение S^2 по \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), \quad q = (x, y, R) \in \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ f_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + R \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial y} + R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R}, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

В следующих трех пунктах мы посмотрим, как общие теоремы теории управления специализируются для субримановых задач (3.3.1)–(3.3.3).

3.3.2 Ранговое условие управляемости для субримановых задач

Управляемая система $\mathcal{F} = \left\{ \sum_{i=1}^k u_i f_i \mid u \in \mathbb{R}^k \right\}$ симметрична, поэтому $\mathcal{A}_{q_0} = \mathcal{O}_{q_0}$, $q_0 \in M$.

Пусть M и \mathcal{F} аналитичны, а M связно.

Тогда для любой точки $q_0 \in M$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{q_0} = M &\Leftrightarrow \mathcal{O}_{q_0} = M \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{Lie}_{q_0}(\mathcal{F}) = \text{Lie}_{q_0}(f_1, \dots, f_k) = T_{q_0}M. \end{aligned}$$

3.3.3 Теорема Филиппова для субримановых задач

Задача оптимального управления (3.3.1)–(3.3.3) эквивалентна следующей задаче быстрого действия:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \sum_{i=1}^k u_i f_i(q), \quad q \in M, \quad \sum_{i=1}^k u_i^2 \leq 1, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ t_1 &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Проверим условия теоремы Филиппова для этой новой задачи:

- (1) $U = \left\{ \sum_{i=1}^k u_i^2 \leq 1 \right\}$ компактно,
- (2) $f(q, U) = \left\{ \sum_{i=1}^k u_i f_i(q) \mid \sum_{i=1}^k u_i^2 \leq 1 \right\}$ выпукло,
- (3) Остается доказать априорную оценку.

Если априорная оценка получена, то существование СР кратчайших доказано.

3.3.4 Принцип максимума Понтрягина для субримановых задач

Применим ПМП к задаче на минимум энергии J (эквивалентной задаче на минимум длины l)

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \sum_{i=1}^k u_i f_i(q), \quad q \in M, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k u_i^2 dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Введем линейные на слоях кокасательного расслоения T^*M гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i(q) \rangle$, $i = 1, \dots, k$, тогда гамильтониан ПМП принимает форму:

$$h_u^\nu(\lambda) = \left\langle \lambda, \sum_{i=1}^k u_i f_i(q) \right\rangle + \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^k u_i^2 = \sum_{i=1}^k u_i h_i(\lambda) + \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^k u_i^2.$$

Нормальный случай: $\nu = -1$. Тогда из условия максимума

$$\sum_{i=1}^k u_i h_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k u_i^2 \rightarrow \max_{u \in \mathbb{R}^k}$$

получаем $u_i(t) = h_i(\lambda_t)$, $i = 1, \dots, k$, и нормальный максимизированный гамильтониан ПМП принимает форму

$$h_{u(t)}^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k h_i^2 =: H(\lambda).$$

Поэтому в нормальном случае экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\dot{\lambda}_t = \overrightarrow{h_{u(t)}^{-1}}(\lambda_t) = \vec{H}(\lambda_t).$$

Если M и f_i аналитичны, то H и \vec{H} аналитичны, поэтому λ_t и $q(t)$ аналитичны.

Анормальный случай: $\nu = 0$. Из условия максимума

$$h_u^0(\lambda) = \sum_{i=1}^k u_i h_i(\lambda) \rightarrow \max_{u \in \mathbb{R}^k}$$

получаем

$$h_i(\lambda_t) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Помимо этих тождеств, анормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\dot{\lambda}_t = \overrightarrow{h_{u(t)}^0}(\lambda_t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) \vec{h}_i(\lambda_t).$$

Важной открытой проблемой является вопрос о том, являются ли анормальные кратчайшие гладкими.

Мы докажем принцип максимума Понтрягина для субримановых задач в п. 3.3.7.

3.3.5 Условия оптимальности для субримановых задач

Рассмотрим подробнее нормальные экстремальные траектории:

$$\dot{\lambda}_t = \vec{H}(\lambda_t), \quad q(t) = \pi(\lambda_t).$$

Как определить, являются ли они оптимальными?

Горизонтальная кривая $q(t)$ называется *субримановой геодезической*, если:

1. $\|\dot{q}(t)\| \equiv \text{const}$,
2. малые дуги кривой $q(t)$ оптимальны.

Теорема 10 (Лежандр). *Нормальные экстремальные траектории являются CP геодезическими.*

Доказательство. См. [1]

□

Пример: геодезические на S^2 Рассмотрим стандартную двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, риманова метрика на которой индуцирована объемлющим евклидовым пространством \mathbb{R}^3 .

Тогда геодезические, выходящие из северного полюса $N \in S^2$, — это дуги больших окружностей, начинающиеся в N и бесконечно продолженные. Эти геодезические теряют свою оптимальность в южном полюсе $S \in S^2$, причем имеются две причины для потери оптимальности. Во-первых, вариация геодезических, выходящих из N (поворот) дает неподвижную диаметрально противоположную точку S ; поэтому S есть сопряженная точка для N . Во-вторых, существует несколько (в данном случае однопараметрическое семейство) геодезических одной и той же длины, начинающихся в N и заканчивающихся в S ; поэтому S есть точка Максвелла для N .

Для того, чтобы развести эти две причины потери оптимальности, необходимо разрушить симметрию (вращений), как в следующем примере.

Пример: геодезические на эллипсоиде Рассмотрим трехосный эллипсоид, из вершины N которого выпущены геодезические. Посмотрим на это семейство геодезических из диаметрально противоположной вершины S . Во-первых, мы увидим огибающую этого семейства — астроиду с центром S . Точка касания геодезической и огибающей называется сопряженной точкой, и в ней геодезическая теряет свою локальную оптимальность (относительно всех достаточно близких геодезических). Во-вторых, мы увидим, что пары геодезических равной длины пересекаются на интервале, соединяющем одну из двух пар противоположных вершин астроиды. Такие точки пересечения геодезических равной длины называются точками Максвелла, и в них геодезические теряют свою глобальную оптимальность (относительно всех геодезических).

Наши наблюдения на эллипсоиде обобщаются далее для произвольных субримановых задач.

Гамильтониан H является первым интегралом нормальной гамильтоновой системы $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$. Можно считать, что $H \equiv \frac{1}{2}$, это соответствует натуральной параметризации геодезических $\|\dot{q}\| \equiv 1$. Семейство всех таких геодезических параметризуется *экспоненциальным отображением*, которое определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Exp} &: (\lambda_0, t) \mapsto q(t) = \pi \circ e^{t\vec{H}}(\lambda_0), \\ \text{Exp} &: C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M, \\ C &= T_{q_0}^* M \cap \{H = 1\}. \end{aligned}$$

Точка $q(t_1) = \text{Exp}(\lambda_0, t_1)$ называется *сопряженной*, если дифференциал $\text{Exp}_{*(\lambda_0, t_1)}$ вырожден. Геометрически, в сопряженной точке геодезическая «отражается» от огибающей семейства всех геодезических, выходящих из начальной точки, см. Рис. 3.16.

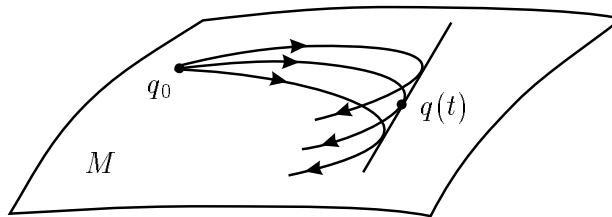


Рис. 3.16: Сопряженная точка на геодезической $q(t)$

Теорема 11 (Якоби). Пусть нормальная геодезическая $q(t)$ является проекцией единственной, с точностью до скалярного множителя, экстремали. Тогда $q(t)$ теряет свою локальную оптимальность в первой сопряженной точке.

Доказательство. См. [1] □

Точка $q_1 = q(t_1)$ на натурально параметризованной геодезической $q(t)$ называется *точкой Максвелла*, если существует другая натурально параметризованная геодезическая $\tilde{q}(t) \not\equiv q(t)$ такая, что $q(0) = \tilde{q}(0) = q_0$, $q(t_1) = \tilde{q}(t_1) = q_1$.

Лемма 4. Нормальная геодезическая не может быть оптимальной после точки Максвелла, если субриманова задача вещественно-аналитическая.

Доказательство. Пусть имеются две натурально параметризованные нормальные геодезические $q(t) \not\equiv \tilde{q}$, такие что $q(0) = \tilde{q}(0) = q_0$, $q(t_1) = \tilde{q}(t_1) = q_1$.

Предположим, что геодезическая $q(t)$, $t \in [0, t_1 + \varepsilon]$, оптимальна.

Тогда оптимальна и геодезическая

$$\bar{q}(t) = \begin{cases} \tilde{q}(t), & t \in [0, t_1], \\ q(t), & t \in (t_1, t_1 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Нормальные геодезические $q(t)$ и $\bar{q}(t)$, $t \in [0, t_1 + \varepsilon]$, совпадают на отрезке $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon]$ и аналитичны, потому совпадают и тождественно. Поэтому $q(t) \equiv \bar{q}(t)$, $t \in [0, t_1]$, противоречие. □

Теорема 12. Пусть нормальная геодезическая является проекцией единственной, с точностью до постоянного множителя, экстремали. Тогда $q(t)$ теряет свою оптимальность в первой точке Максвелла или в первой сопряженной точке (в той из них, которая наступает раньше).

Доказательство. См. [11] □

3.3.6 Субриманова задача на группе Гейзенберга (задача Дидоны)

Как описано в п. 1.1.1, эту простейшую нетривиальную СР задачу можно сформулировать следующим образом (см. (1.1.7)–(1.1.10)):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 f_1 + u_2 f_2, & q &\in \mathbb{R}_{x,y,z}^3 = M, & u &\in \mathbb{R}^2, \\ f_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, & f_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ q(0) &= q_0 = (0, 0, 0), & q(t_1) &= q_1, \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Управляемость: имеем $f_3 = [f_1, f_2] = \frac{\partial}{\partial z}$, $\text{Lie}_{q_0}(f_1, f_2, f_3) = T_{q_0}M$, поэтому система вполне управляема.

Существование оптимальных управлений: правая часть управляемой системы допускает оценку $|f(q, u)| \leq C(|q|+1)$, откуда следует априорная оценка множества достижимости. По теореме Филишова, оптимальное управление существует.

Принцип максимума Понтрягина. Определим линейные на слоях T^*M гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i(q) \rangle$, $i = 1, 2, 3$.

Аномальный случай: аномальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе $\dot{\lambda} = u_1 \vec{h}_1 + u_2 \vec{h}_2$, в координатах

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= -u_2 h_3, \\ \dot{h}_2 &= u_1 h_3, \\ \dot{h}_3 &= 0, \\ \dot{q} &= u_1 f_1 + u_2 f_2,\end{aligned}$$

и тождествам

$$h_1(\lambda_t) = h_2(\lambda_t) \equiv 0.$$

Из условия $\lambda_t \neq 0$ получаем $h_3(\lambda_t) \neq 0$.

Тогда аномальные управления имеют вид $u_1(t) = u_2(t) \equiv 0$, т.е. аномальные траектории постоянны.

Нормальный случай: нормальные экстремали удовлетворяют гамильтоновой системе $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$, в координатах

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= -h_2 h_3, & \dot{h}_2 &= h_1 h_3, & \dot{h}_3 &= 0, & \dot{x} &= h_1, & \dot{y} &= h_2, & \dot{z} &= (-h_1 y + h_2 x)/2.\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

На поверхности уровня $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2) \equiv \frac{1}{2}$ введем координату θ :

$$h_1 = \cos \theta, \quad h_2 = \sin \theta.$$

тогда вертикальная подсистема (3.3.4) гамильтоновой системы принимает форму

$$\dot{\theta} = h_3, \quad \dot{h}_3 = 0.$$

Если $h_3 = 0$, то

$$\begin{aligned}\theta &\equiv \theta_0, \\ x &= t \cos \theta_0, \\ y &= t \sin \theta_0, \\ z &= 0.\end{aligned}$$

А если $h_3 \neq 0$, то

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + h_3 t, \\ x &= (\sin(\theta_0 + h_3 t) - \sin \theta_0)/h_3, \\ y &= (\cos \theta_0 - \cos(\theta_0 + h_3 t))/h_3, \\ z &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin h_3 t}{h_3} \right).\end{aligned}$$

В случае $h_3 = 0$ проекция геодезической $(x(t), y(t))$ есть прямая, поэтому траектория $q(t)$, $t \in [0, +\infty)$, оптимальна.

В случае $h_3 \neq 0$ при $t_1 = \frac{2\pi n}{h_3}$ имеем $x = y = 0$, поэтому $q(t_1)$ есть одновременно точка Максвелла и сопряженная точка.

Можно показать, что $t_1 = \frac{2\pi}{|h_3|}$ есть первое время Максвелла и сопряженное время, поэтому есть время потери оптимальности (*время разреза*).

Более того, для любой точки $q_1 \in \{z \neq 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$ существует единственная экстремальная траектория $q(t) = \text{Exp}(\theta, h_3, t)$ такая, что $q(t_1) = q_1$, $t_1 < \frac{2\pi}{|h_3|}$. Эта траектория оптимальна.

Для любой точки $q_1 \in \{z = 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$ существует единственная траектория $q(t) = \text{Exp}(\theta, h_3, t)$ такая, что $q(t_1) = q_1$; эта траектория оптимальна.

Наконец, для любой точки $q_1 \in \{z \neq 0, x^2 + y^2 = 0\}$ существует однопараметрическое семейство экстремальных траекторий $q(t) = \text{Exp}(\theta, h_3, t)$, для которых $q(t_1) = q_1$, $t_1 = \frac{2\pi}{|h_3|} = l(q(\cdot))$. Все такие траектории оптимальны.

Оптимальные траектории, выходящие из точки q_0 с одним и тем же касательным вектором, изображены на Рис. 3.17.

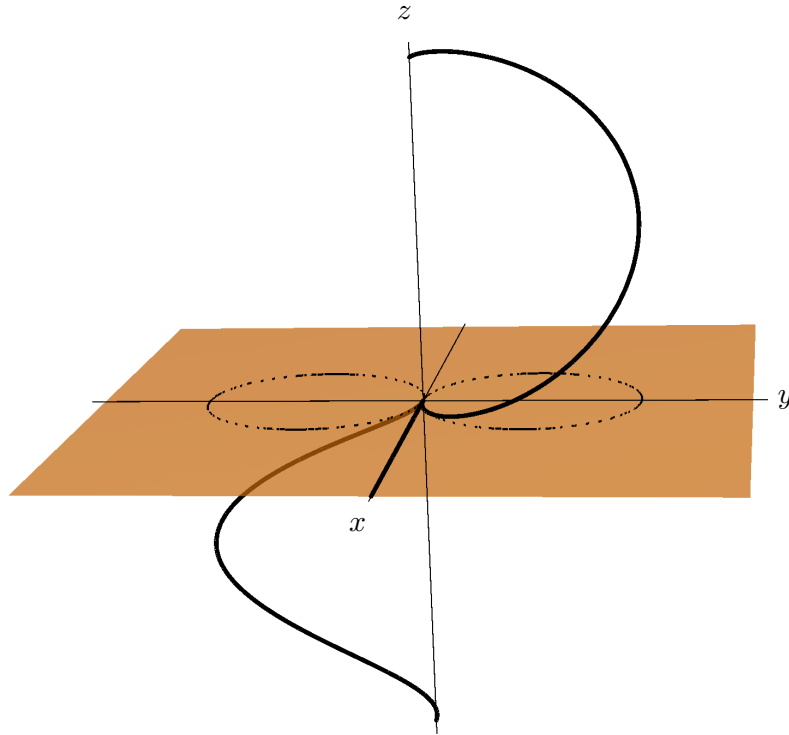


Рис. 3.17: Оптимальные траектории в задаче Дидоны

Опишем субриманово расстояние $d_0(q) = d(q_0, q)$, $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} z = 0 & \Rightarrow d_0 = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z \neq 0, \quad x^2 + y^2 = 0 & \Rightarrow d_0 = \sqrt{2\pi|z|}, \\ z \neq 0, \quad x^2 + y^2 \neq 0 & \Rightarrow d_0 = \frac{p}{\sin p} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{2p - \sin 2p}{4 \sin^2 p} = \frac{z}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Субриманова сфера $S = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid d_0(q) = 1\}$ есть поверхность вращения вокруг оси z , похожая на яблоко, см. Рис. 3.18, 3.19. Она имеет две особые конические точки $z = \pm \frac{1}{2\pi}$, $x^2 + y^2 = 0$.

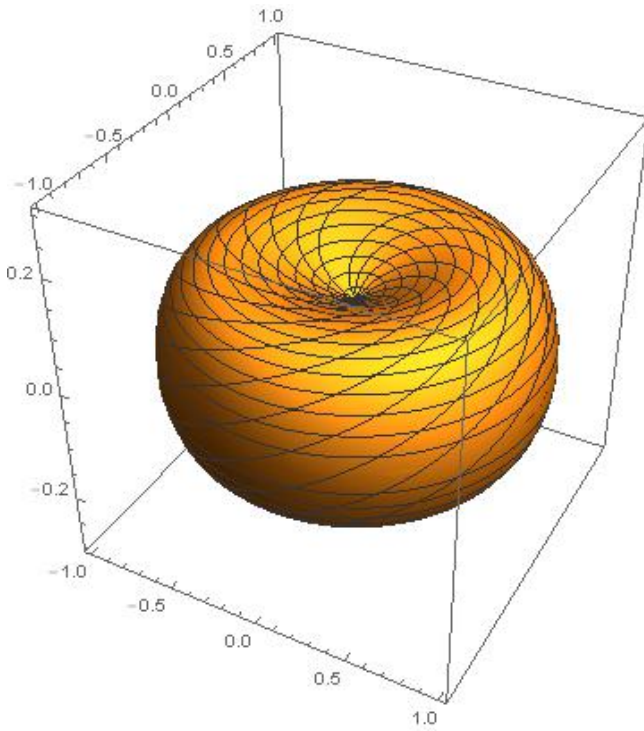


Рис. 3.18: Субриманова сфера на группе Гейзенберга

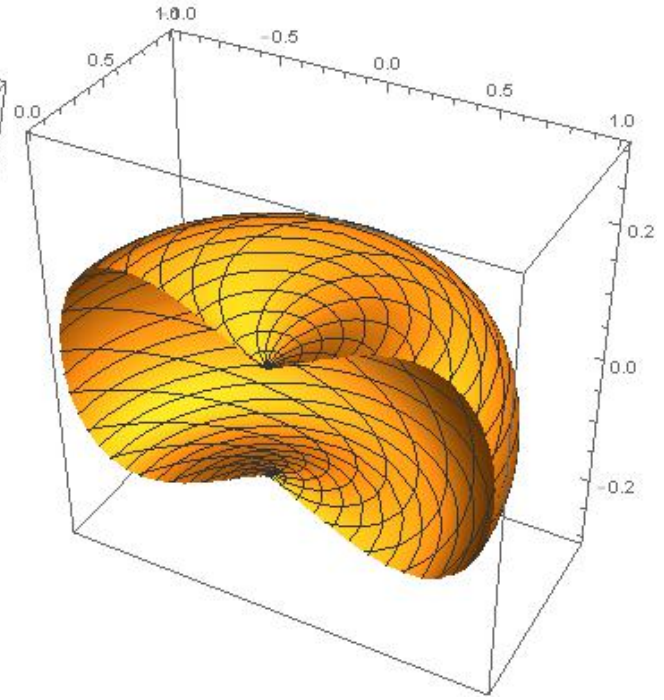


Рис. 3.19: Субриманова полусфера на группе Гейзенберга

3.3.7 Доказательство принципа максимума Понтрягина для субримановых задач

В этом подразделе мы докажем ПМП для задачи оптимального управления (3.3.1)–(3.3.3):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \sum_{i=1}^k u_i f_i(q) =: f_u(q), \quad q \in M, \quad u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^k u_i^2 \right)^{1/2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Легко видеть (проверьте!), что принцип максимума Понтрягина (теорема 9) для этой задачи принимает следующую форму.

Теорема 13 (ПМП для СР задач). Пусть $\bar{q} \in \text{Lip}([0, t_1], M)$ есть СР кратчайшая, для которой соответствующее управление $\bar{u}(t)$ удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^k \bar{u}_i^2(t) \equiv \text{const} > 0$. Тогда существует кривая $\lambda_t \in \text{Lip}([0, t_1], T^*M)$, $\pi(\lambda_t) = \bar{q}(t)$, такая что для п.в. $t \in [0, t_1]$

$$\dot{\lambda}_t = \sum_{i=1}^k \bar{u}_i(t) \vec{h}_i(\lambda_t), \quad (3.3.5)$$

и выполнено одно из условий:

$$(N) \quad h_i(\lambda_t) \equiv \bar{u}_i(t), \quad i = 1, \dots, k, \quad \text{или}$$

$$(A) \quad h_i(\lambda_t) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \lambda_t \neq 0 \quad \forall t \in [0, t_1].$$

В условиях (N) , (A) , как обычно, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$.

Теорема 13 вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 14. Пусть выполнены условия теоремы 13. Пусть $P_{0,t} : M \rightarrow M$ обозначает поток неавтономного векторного поля $f_{\bar{u}(t)} = \sum_{i=1}^k \bar{u}_i(t) f_i$. Тогда существует $\lambda_0 \in T_{q_0}^* M$ такое, что кривая

$$\lambda_t = (P_{0,t}^{-1})^*(\lambda_0) \in T_{\bar{q}(t)}^* M \quad (3.3.6)$$

удовлетворяет одному из условий (N) , (A) теоремы 13.

Теорема 15. Пусть выполнены условия теорем 13 и 14. Тогда ОДУ (3.3.5) следует из равенства (3.3.6).

Очевидно, что теорема 13 следует из теорем 14 и 15.

Замечание. В теореме 14 поток $P_{0,t} : M \rightarrow M$ задается следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{0,t}(q_0) &= \bar{q}(t), \\ \frac{d}{dt} \bar{q}(t) &= \sum_{i=1}^k \bar{u}_i(t) f_i(\bar{q}(t)), \quad \bar{q}(0) = q_0. \end{aligned}$$

Далее, в теореме 14 используется отображение $(P_{0,t}^{-1})^* : T_{q_0}^* M \rightarrow T_{\bar{q}(t)}^* M$, напомним необходимое определение. Если $F : M \rightarrow N$ есть гладкое отображение между гладкими многообразиями и $q \in M$, то определен дифференциал

$$F_{*q} : T_q M \rightarrow T_{F(q)} N,$$

а также двойственное к нему отображение кокасательных пространств:

$$\begin{aligned} F_q^* &= (F_{*q})^* : T_{F(q)}^* N \rightarrow T_q^* M, \\ \langle F_q^*(\lambda), v \rangle &= \langle \lambda, F_{*q}(v) \rangle, \quad v \in T_q M, \quad \lambda \in T_{F(q)}^* N. \end{aligned}$$

Докажем теорему 14.

Доказательство. Кривая $\bar{q}(t)$ есть минималь функционала длины l постоянной скорости, поэтому она является минималью функционала энергии $J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k u_i^2(t) dt$ при фиксированном t_1 .

Возьмем любое управление $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot) + v(\cdot)$ и рассмотрим соответствующую задачу Коши:

$$\dot{q}(t) = f_{u(t)}(q(t)), \quad q(0) = q_0.$$

Напомним, что $P_{0,t} : M \rightarrow M$ есть поток неавтономного поля $f_{\bar{u}(t)}$. Рассмотрим кривую $x(t) = P_{0,t}^{-1}(q(t))$ и выведем ОДУ для $x(t)$. Дифференцируя тождество $q(t) = P_{0,t}(x(t))$, получаем

$$\dot{q}(t) = f_{\bar{u}(t)}(P_{0,t}(x(t))) + (P_{0,t})_* \dot{x}(t),$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (P_{0,t}^{-1})_* [\dot{q}(t) - f_{\bar{u}(t)}(P_{0,t}(x(t)))] = \\ &= (P_{0,t}^{-1})_* [(f_{u(t)} - f_{\bar{u}(t)})(P_{0,t}(x(t)))] = \\ &= [(P_{0,t}^{-1})_* (f_{u(t) - \bar{u}(t)})](x(t)) = \\ &= [(P_{0,t}^{-1})_* f_{v(t)}](x(t)). \end{aligned}$$

Обозначая $g_v^t = (P_{0,t}^{-1})_* f_v$, получаем искомое ОДУ:

$$\dot{x}(t) = g_{v(t)}^t(x(t)), \quad x(0) = P_{0,0}^{-1}(q_0) = q_0. \quad (3.3.7)$$

Заметим, что f_v линейно по v , поэтому g_v^t линейно по v .

Для любого $v \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^k)$ рассмотрим отображение

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto \begin{pmatrix} x(t_1; \bar{u} + sv) \\ J(\bar{u} + sv) \end{pmatrix} \in M \times \mathbb{R},$$

где $x(t_1; \bar{u} + sv)$ — решение задачи Коши (3.3.7), соответствующее управлению $\bar{u} + sv$, а $J(\bar{u} + sv)$ — соответствующая энергия.

Лемма 5. *Существует такое $\bar{\lambda} \in (T_{q_0}M \oplus \mathbb{R})^*$, $\bar{\lambda} \neq 0$, что для любого $v \in L^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^k)$ выполняется равенство*

$$\left\langle \bar{\lambda}, \left(\frac{\partial x(t_1; \bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0}, \frac{\partial J(\bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \right\rangle = 0. \quad (3.3.8)$$

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(v) = \left(\frac{\partial x(t_1; \bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0}, \frac{\partial J(\bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right),$$

$$\Phi : L^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^k) \rightarrow T_{q_0}M \oplus \mathbb{R}.$$

Вычислим производные в определении отображения Φ . Легко видеть, что

$$\frac{\partial J(\bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k \bar{u}_i(t) v_i(t) dt. \quad (3.3.9)$$

Действительно, это следует из разложения

$$\begin{aligned} J(\bar{u} + sv) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} |\bar{u} + sv|^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left(\bar{u}^2 + 2s \sum_{i=1}^k \bar{u}_i(t) v_i(t) + s^2 |v|^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Далее, покажем, что

$$\frac{\partial x(t_1; \bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \int_0^{t_1} g_{v(t)}^t(q_0) dt = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k ((P_{0,t}^{-1})_* f_i)(q_0) v_i(t) dt. \quad (3.3.10)$$

Из ОДУ $\dot{x}(t; \bar{u} + sv) = g_{sv(t)}^t(x(t; \bar{u} + sv))$ получаем в локальных координатах

$$\begin{aligned} x(t_1; \bar{u} + sv) &= q_0 + \int_0^{t_1} g_{sv(t)}^t(x(t; \bar{u} + sv)) dt = \\ &= q_0 + s \int_0^{t_1} g_{v(t)}^t(x(t; \bar{u} + sv)) dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t_1; \bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \int_0^{t_1} g_{v(t)}^t(x(t; \bar{u})) dt = \\ &= \int_0^{t_1} g_{v(t)}^t(q_0) dt = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k ((P_{0,t}^{-1})_* f_i)(q_0) v_i(t) dt. \end{aligned}$$

Из равенств (3.3.9), (3.3.10) видно, что отображение Φ линейно.

Пусть $\text{Im } \Phi = T_{q_0} M \oplus \mathbb{R}$, тогда существуют такие $v^0, \dots, v^n \in L^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^k)$, что $\Phi(v^0), \dots, \Phi(v^n)$ линейно независимы, т.е. векторы

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial x(t_1; \bar{u} + sv^0)}{\partial s} \Big|_{s=0} \\ \frac{\partial J(\bar{u} + sv^0)}{\partial s} \Big|_{s=0} \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} \frac{\partial x(t_1; \bar{u} + sv^n)}{\partial s} \Big|_{s=0} \\ \frac{\partial J(\bar{u} + sv^n)}{\partial s} \Big|_{s=0} \end{array} \right)$$

линейно независимы.

Рассмотрим отображение

$$F : (s_0, \dots, s_n) \mapsto \left(\begin{array}{c} x \left(t_1; \bar{u} + \sum_{i=1}^n s_i v^i \right) \\ J \left(\bar{u} + \sum_{i=1}^n s_i v^i \right) \end{array} \right),$$

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow M \times \mathbb{R}.$$

Отображение F гладкое в точке $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ и имеет в этой точке невырожденный якобиан. Поэтому существует окрестность $O_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, сужение на которую $F|_{O_0}$ есть диффеоморфизм.

Имеем

$$F(0) = \left(\begin{array}{c} x(t_1; \bar{u}) \\ J(\bar{u}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} q_0 \\ J(\bar{u}) \end{array} \right) \in \text{int } F(O_0).$$

Поэтому существует управление $v(\cdot) = \sum_{i=1}^n s_i v^i(\cdot)$, для которого

$$x(t_1; \bar{u} + v) = q_0, \quad J(\bar{u} + v) < J(\bar{u}).$$

Рассмотрим соответствующую траекторию $t \mapsto q(t; \bar{u} + v)$. Имеем

$$q(0; \bar{u} + v) = q_0,$$

$$q(t_1; \bar{u} + v) = P_{0, t_1}(x(t_1; \bar{u} + v)) = P_{0, t_1}(q_0) = q_1.$$

Следовательно, кривая $q(t; \bar{u} + v)$ соединяет точки q_0 и q_1 с меньшим значением функционала J чем оптимальная траектория $\bar{q}(t) = q(t; \bar{u})$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. \square

Продолжаем доказательство теоремы 14. Итак, по предыдущей лемме существует такой ковектор $0 \neq \bar{\lambda} \in (T_{q_0} M \oplus \mathbb{R})^*$, что для любого $v \in L^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^k)$

$$\left\langle \bar{\lambda}, \left(\frac{\partial x(t_1; \bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0}, \frac{\partial J(\bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \right\rangle = 0.$$

Очевидно, что если это условие выполняется для некоторого ковектора $\bar{\lambda}$, то оно выполняется и для любого ковектора $\alpha \bar{\lambda}$, $\alpha \neq 0$. Следовательно, можно подобрать ковектор $\bar{\lambda}$ вида:

$$\bar{\lambda} = (\lambda_0, -1) \quad \text{или} \quad \bar{\lambda} = (\lambda_0, 0), \quad \lambda_0 \neq 0.$$

Поэтому существует ковектор $\lambda_0 \in T_{q_0}^* M$ такой, что для любого $v \in L^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^k)$

$$\frac{\partial J(\bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0} - \left\langle \lambda_0, \frac{\partial x(t_1; \bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right\rangle = 0 \quad (3.3.11)$$

или

$$0 = \left\langle \lambda_0, \frac{\partial x(t_1; \bar{u} + sv)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right\rangle, \quad \lambda_0 \neq 0. \quad (3.3.12)$$

Рассмотрим случай (3.3.11). Из равенств (3.3.9) и (3.3.10) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k u_i(t) v_i(t) dt &= \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k \langle \lambda_0, ((P_{0,t}^{-1})_* f_i)(q_0) \rangle v_i(t) dt = \\ &= \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k \langle \lambda_t, f_i(\bar{q}(t)) \rangle v_i(t) dt = \\ &= \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^k h_i(\lambda_t) v_i(t) dt. \end{aligned}$$

Учитывая произвольность функций $v_i \in L^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^k)$, получаем в случае (3.3.11)

$$(N) \quad \bar{u}_i(t) = h_i(\lambda_t), \quad i = 1, \dots, k.$$

Аналогично в случае (3.3.12) получается условие

$$(A) \quad 0 = h_i(\lambda_t), \quad i = 1, \dots, k; \quad \lambda_0 \neq 0.$$

Теорема 14 доказана. \square

Докажем теорему 15.

Доказательство. Напомним: требуется доказать, что кривая $\lambda_t = (P_{0,t}^{-1})^* \lambda_0 \in T_{\bar{q}(t)}^* M$ удовлетворяет ОДУ $\dot{\lambda}_t = \sum_{i=1}^k \bar{u}_i(t) \vec{h}_i(\lambda_t)$. Докажем это для потока автономного векторного поля.

Лемма 6. Пусть $X \in \text{Vec}(M)$, $P_{0,t} = e^{tX}$. Тогда кривая $\lambda_t = (P_{0,t}^{-1})^* \lambda_0$ удовлетворяет ОДУ $\dot{\lambda}_t = \vec{h}_X(\lambda_t)$.

Доказательство. Положим $\varphi(t) = (P_{0,t}^{-1})^*(\lambda_0)$, нам нужно проверить равенство

$$\dot{\varphi}(t) = \vec{h}_X(\varphi(t)) \in T_{\varphi(t)}(T^*M).$$

Функция $a \in C^\infty(T^*M)$ называется *постоянной на слоях* T^*M , если она имеет вид $a = \alpha \circ \pi$ для некоторой функции $\alpha \in C^\infty(M)$. Обозначение: $a \in C_{\text{cst}}^\infty(T^*M)$.

Функция $h_Y \in C^\infty(T^*M)$ называется *линейной на слоях* T^*M , если

$$h_Y(\lambda) = \langle \lambda, Y(q) \rangle, \quad q = \pi(\lambda),$$

для некоторого векторного поля $Y \in \text{Vec}(M)$. Обозначение: $h_Y \in C_{\text{lin}}^\infty(T^*M)$.

Аффинная на слоях T^*M функция есть сумма постоянной на слоях и линейной на слоях функций:

$$C_{\text{aff}}^\infty(T^*M) = C_{\text{cst}}^\infty(T^*M) + C_{\text{lin}}^\infty(T^*M).$$

Замечание. Пусть $v, \omega \in T_\lambda(T^*M)$. Тогда $v = \omega$ тогда и только тогда, когда

$$(vg)(\lambda) = (\omega g)(\lambda) \quad \forall g \in C_{\text{aff}}^\infty(T^*M).$$

Действительно, значение $(vg)(\lambda) = \langle d_\lambda g, v \rangle$ зависит только от многочлена Тейлора порядка 1 функции g .

Итак, проверим необходимое равенство $\dot{\varphi}(t) = \vec{h}_X(\varphi(t))$ на аффинных на слоях T^*M функциях.

Пусть $a = \alpha \circ \pi \in C_{\text{cst}}^\infty(T^*M)$, проверим равенство $\dot{\varphi}(t)a = \vec{h}_X a$. Имеем

$$\begin{aligned}\vec{h}_X a &= \{h_X, a\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_X}{\partial \xi_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = X\alpha, \\ \dot{\varphi}(t)a &= \frac{d}{dt} a(\varphi(t)) = \frac{d}{dt} \alpha \circ e^{tX}(q_0) = (X\alpha)(\varphi(t)),\end{aligned}$$

и необходимое равенство доказано на функциях $a \in C_{\text{cst}}^\infty(T^*M)$.

Пусть теперь $h_Y \in C_{\text{lin}}^\infty(T^*M)$, проверим равенство $\dot{\varphi}(t)h_Y = \vec{h}_X h_Y$. Имеем

$$\vec{h}_X h_Y = \{h_X, h_Y\} = h_{[X, Y]}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t)h_Y &= \frac{d}{dt} h_Y \circ \varphi(t) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} h_Y \circ \varphi(t + \tau) = \\ &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} h_Y \circ (e^{-\tau X})^* \circ (e^{-tX})^*(\lambda_0) = \\ &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \langle (e^{-\tau X})^* \circ (e^{-tX})^*(\lambda_0), Y(e^{t+\tau}(q_0)) \rangle = \\ &= \left\langle \varphi(t), \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} e_*^{-\tau X} Y(e^{\tau X}(q_0)) \right\rangle = \\ &= \langle \varphi(t), [X, Y](e^{tX}(q_0)) \rangle = h_{[X, Y]}(\varphi(t)).\end{aligned}$$

В предпоследнем переходе мы воспользовались равенством

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} e_*^{-\tau X} Y(e^{\tau X}(q)) = [X, Y](q), \quad (3.3.13)$$

которое сейчас докажем.

Имеем

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} e_*^{-\tau X} Y(e^{\tau X}(q)) = \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial s} \Big|_{\tau=0, s=0} e^{-\tau X} \circ e^{sY} \circ e^{\tau X}(q).$$

Выпишем тейлоровские разложения композиций в правой части:

$$e^{\tau X}(q) = q + \tau X(q) + o(\tau),$$

$$\begin{aligned}e^{sY} \circ e^{\tau X} &= e^{sY}(q + \tau X(q) + o(\tau)) = \\ &= q + \tau X(q) + o(\tau) + sY(q + \tau X(q) + o(\tau)) + o(s) = \\ &= q + \tau X(q) + sY(q) + s\tau \frac{\partial Y}{\partial q} X(q) + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{-\tau X} \circ e^{sY} \circ e^{\tau X}(q) &= q + \tau X(q) + sY(q) + s\tau \frac{\partial Y}{\partial q} X(q) - \tau X(q) - \tau s \frac{\partial X}{\partial q} Y(q) + \dots = \\ &= q + sY(q) + s\tau [X, Y](q) + \dots,\end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial s} \Big|_{\tau=0, s=0} e^{-\tau X} \circ e^{sY} \circ e^{\tau X}(q) = [X, Y](q),$$

и равенство (3.3.13) доказано.

Лемма 6 доказана. \square

Аналогично лемме 6 для случая автономного векторного поля X , доказывается равенство $\dot{h}_t = \sum_{i=1}^k \bar{u}_i(t) \vec{h}_i(\lambda_t)$ для кривой $\lambda_t = (P_{0,t}^{-1})^* \lambda_0$ для случая неавтономного векторного поля $f_{\bar{u}(t)}$.

Это завершает доказательство теоремы 15. \square

Как было сказано ранее, теорема 13 следует из теорем 14 и 15.

Принцип максимума для СР задач доказан.

3.3.8 Задачи

1. Исследуйте задачу о качении сферы по плоскости (п. 1.1.1):

- (a) докажите полную управляемость системы,
- (b) докажите, что при оптимальном качении точка контакта сферы и плоскости пробегает эйлерову эластику.

2. Рассмотрим следующее естественное обобщение задачи Дидоны. Зададим, кроме двух точек $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединяющей их кривой γ_0 и числа $S \in \mathbb{R}$, также точку на плоскости $c = (c_x, c_y) \in \mathbb{R}^2$. Необходимо найти кратчайшую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , такую, чтобы область $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченная парой кривых γ_0 и γ , имела заданные площадь S и центр масс c .

- (a) Покажите, что эта обобщенная задача Дидоны может быть сформулирована как следующая *субриманова задача на группе Кармана*:

$$\begin{aligned} q &= (x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5, & u &= (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \dot{x} &= u_1, \\ \dot{y} &= u_2, \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_2, \\ \dot{w} &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_1, \\ q(0) &= 0, & q(t_1) &= q_1, \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

- (b) Докажите, что проекции субримановых кратчайших на плоскость (x, y) — эйлеровы эластики.

3. Исследуйте *субриманову задачу на группе Энгеля*:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix}, & q &\in \mathbb{R}^4, & u &\in \mathbb{R}^2, \\ q(0) &= q_0 = (x_0, y_0, z_0, v_0), & q(t_1) &= q_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1), \\ l &= \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

- (а) Переформулируйте данную задачу как некоторое обобщение задачи Дидоны, по аналогии с субримановой задачей на группе Картана.
- (б) Докажите, что проекции субримановых кратчайших на плоскость (x, y) — эйлеровы эластики.

3.4 Субриманова задача на группе движений евклидовой плоскости

Напомним постановку задачи оптимального управления для субримановой задачи на группе движений плоскости, см. п. 1.1.1:

$$\dot{x} = u_1 \cos \theta, \quad q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad (3.4.1)$$

$$\dot{y} = u_1 \sin \theta, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.4.2)$$

$$\dot{\theta} = u_2, \quad (3.4.3)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (3.4.4)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (3.4.5)$$

В данном разделе мы получим решение этой задачи.

3.4.1 Группа движений евклидовой плоскости

Собственные движения евклидовой плоскости (повороты и параллельные переносы) параметризуются матрицами

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta \in S^1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.4.6)$$

Действие движения Q на точку $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ представляется в виде

$$Q(a, b) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta + x \\ a \sin \theta + b \cos \theta + y \\ 1 \end{pmatrix},$$

это поворот на угол θ вокруг начала координат и параллельный перенос на вектор (x, y) .

Таким образом, группа собственных движений двумерной евклидовой плоскости имеет представление

$$\text{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \theta \in S^1, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3.4.2 Левоинвариантная субриманова задача на SE(2)

Покажем, что задача (3.4.1)–(3.4.5) есть левоинвариантная задача на группе SE(2).

Дифференцируя матрицу (3.4.6) вдоль системы (3.4.1)–(3.4.3), получаем

$$\dot{Q} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{\theta} \cos \theta & \dot{x} \\ \dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{y} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 & -u_2 & u_1 \\ u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому задача (3.4.1)–(3.4.5) переписывается в виде

$$\dot{Q} = Q \begin{pmatrix} 0 & -u_2 & u_1 \\ u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q \in \text{SE}(2), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.4.7)$$

$$Q(0) = Q_0, \quad Q(t_1) = Q_1, \quad (3.4.8)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (3.4.9)$$

Поэтому если $Q(t)$ есть решение данной задачи, то $RQ(t)$ есть также решение, для любой постоянной матрицы $R \in \text{SE}(2)$. Следовательно, задача (3.4.7)–(3.4.9), а, значит, и изоморфная ей задача (3.4.1)–(3.4.5), есть левоинвариантная субриманова задача на группе $\text{SE}(2)$.

Поэтому начало любой траектории можно перенести левыми сдвигами в единицу группы и считать, что начальная точка есть единица группы: $Q_0 = \text{Id}$, т.е. $q_0 = (0, 0, 0)$.

3.4.3 Существование решений

Запишем систему (3.4.1)–(3.4.3) в векторном виде:

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), \quad q \in M = S^1 \times \mathbb{R}^2, \quad (3.4.10)$$

$$f_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (3.4.11)$$

Как отмечено в п. 1.1.1, эта система вполне управляема по теореме Рашевского-Чжоу.

Правая часть системы (3.4.10) удовлетворяет неравенству $|u_1 f_1 + u_2 f_2| \leq C$, из которого следует априорная оценка множества достижимости. По теореме Филиппова, оптимальное управление существует.

3.4.4 Принцип максимума Понтрягина

Введем линейные на слоях T^*M гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i(q) \rangle$, $\lambda \in T^*M$, $q = \pi(\lambda)$, и гамильтониан ПМП:

$$h_u^\nu = u_1 h_1(\lambda) + u_2 h_2(\lambda) + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2).$$

Соответствующая гамильтонова система имеет вид

$$\dot{h}_1 = \{u_1 h_1 + u_2 h_2, h_1\} = -u_2 h_3,$$

$$\dot{h}_2 = \{u_1 h_1 + u_2 h_2, h_2\} = -u_1 h_3,$$

$$\dot{h}_3 = \{u_1 h_1 + u_2 h_2, h_3\} = -u_2 h_1,$$

$$\dot{q} = u_1 f_1 + u_2 f_2.$$

Аномальный случай $\nu = 0$. Имеем

$$u_1 h_1 + u_2 h_2 \rightarrow \max_{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2},$$

откуда

$$h_1 = h_2 = 0 \Rightarrow h_3 \neq 0,$$

поэтому из гамильтоновой системы получаем

$$0 = \dot{h}_1 = -u_2 h_3 \Rightarrow u_2 \equiv 0,$$

$$0 = \dot{h}_2 = u_1 h_3 \Rightarrow u_1 \equiv 0,$$

т.е. аномальная траектория тривиальна: $q(t) \equiv q_0$.

Нормальный случай $\nu = -1$. Условие максимума

$$u_1 h_1 + u_2 h_2 - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \rightarrow \max_{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2}$$

дает

$$u_1 = h_1, \quad u_2 = h_2.$$

Поэтому в нормальном случае гамильтонова система переписывается в виде

$$\dot{h}_1 = -h_2 h_3, \quad \dot{h}_2 = h_1 h_3, \quad \dot{h}_3 = h_2 h_1, \quad (3.4.12)$$

$$\dot{x} = h_1 \cos \theta, \quad \dot{y} = h_1 \sin \theta, \quad \dot{\theta} = h_2. \quad (3.4.13)$$

Нормальный гамильтониан есть первый интеграл: $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2) \equiv \text{const}$. Более того, можно положить $H \equiv \frac{1}{2}$, это соответствует натуральной параметризации геодезических. Введем полярную координату: $h_1 = \cos \alpha$, $h_2 = \sin \alpha$, тогда вертикальная подсистема нормальной гамильтоновой системы (3.4.12), (3.4.13) принимает форму

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= h_3, \\ \dot{h}_3 &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Введем переменные

$$\gamma = 2\alpha + \pi, \quad C = 2h_3,$$

тогда вертикальная подсистема принимает форму (двулистного покрытия) маятника

$$\dot{\gamma} = c, \quad \gamma \in \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}, \quad (3.4.14)$$

$$\dot{c} = -\sin \gamma, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3.4.15)$$

Маятник имеет интеграл энергии

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos \beta = 2h_3^2 + h_1^2 - h_2^2 \equiv \text{const} \in [-1, \infty)$$

т.к. $\dot{E} = 0$.

Фазовый цилиндр маятника

$$C = T_{q_0}^* M \cap \left\{ H = \frac{1}{2} \right\}$$

стратифицируется согласно значениям энергии:

$$\begin{aligned} C &= \bigcup_{i=1}^5 C_i, \\ C_1 &= \{\lambda \in C \mid E \in (-1, 1)\}, \\ C_2 &= \{\lambda \in C \mid E \in (1, \infty)\}, \\ C_3 &= \{\lambda \in C \mid E = 1, c \neq 0\}, \\ C_4 &= \{\lambda \in C \mid E = -1\}, \\ C_5 &= \{\lambda \in C \mid E = 1, c = 0\}. \end{aligned}$$

3.4.5 Геодезические и экспоненциальное отображение

Вычислим кривизну κ проекций траекторий геодезических на плоскость (x, y) . Используя вертикальную подсистему нормальной гамильтоновой системы (3.4.12), получаем

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{h_2}{h_1} = -\operatorname{ctg} \gamma.$$

Поэтому кривая $(x(t), y(t))$ имеет перегиб тогда и только тогда, когда $\kappa \equiv 0$, т.е. $\gamma = \pi + 2\pi n$. Кривая $(x(t), y(t))$ имеет точку возврата тогда и только тогда, когда $\kappa = \infty$, т.е. $\gamma = 2\pi n$. Эскизы кривых $(x(t), y(t))$ для $\lambda \in \bigcup_{i=1}^3 C_i$ приведены на Рис. 3.20–3.22.

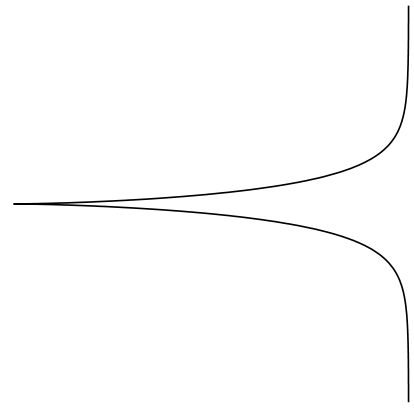
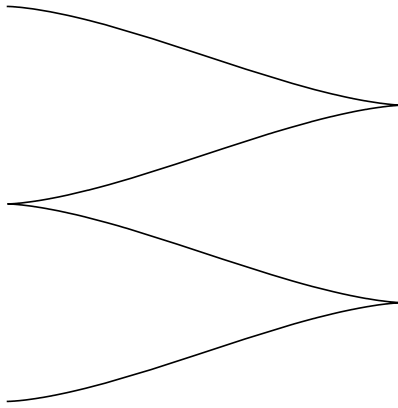
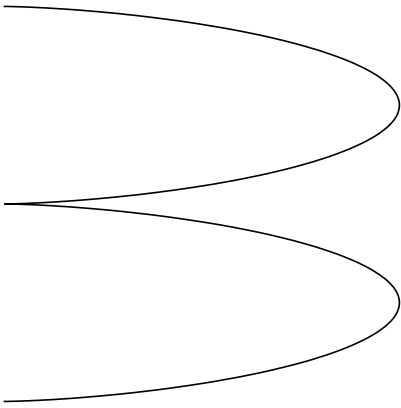


Рис. 3.20: Неинфлексионная траектория в $SE(2)$: $\lambda \in C_1$

Рис. 3.21: Инфлексионная траектория в $SE(2)$: $\lambda \in C_2$

Рис. 3.22: Критическая траектория в $SE(2)$: $\lambda \in C_3$

В случае $\lambda \in C_4$ кривая $(x(t), y(t))$ постоянна (машина крутится на месте), а в случае $\lambda \in C_5$ это прямая.

Семейство всех геодезических параметризуется экспоненциальным отображением

$$\begin{aligned} \operatorname{Exp} : N &\rightarrow M, & (\lambda_0, t) &\mapsto \pi \circ e^{t\bar{H}}(\lambda_0) = q(t), \\ N &= C \times \mathbb{R}_+, & C &= T_{q_0}^* M \cap \left\{ H = \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

3.4.6 Симметрии

Определение 6. Пара отображений $\varepsilon : N \rightarrow N$, $\delta : M \rightarrow M$, называется симметрией экспоненциального отображения, если $\delta \circ \operatorname{Exp} = \operatorname{Exp} \circ \varepsilon$, а также отображение δ сохраняет время t .

Отражения в прообразе экспоненциального отображения N

$$\varepsilon^i : (\lambda, t) \mapsto (\lambda^i, t), \quad i = 1, \dots, 7,$$

задаются следующим образом. Пусть $(\lambda, t) = (\gamma, c, t) \in N$ и (γ_s, c_s) , $s \in [0, t]$, есть решение уравнения маятника (3.4.14), (3.4.15) с начальным условием $(\gamma_0, c_0) = (\gamma, c)$. Тогда

$$\varepsilon^i(\lambda, t) = (\lambda^i, t) = (\gamma^i, c^i, t) \in N,$$

где

$$\begin{aligned}(\gamma^1, c^1) &= (\gamma_t, -c_t), \\(\gamma^2, c^2) &= (-\gamma_t, c_t), \\(\gamma^3, c^3) &= (-\gamma, -c), \\(\gamma^4, c^4) &= (\gamma + 2\pi, c), \\(\gamma^5, c^5) &= (\gamma_t + 2\pi, -c_t), \\(\gamma^6, c^6) &= (-\gamma_t + 2\pi, c_t), \\(\gamma^7, c^7) &= (-\gamma, -c).\end{aligned}$$

Эти отражения образуют группу

$$\{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 =: G.$$

Отражения в образе экспоненциального отображения M

$$\delta^i : q \rightarrow q^i, \quad i = 1, \dots, 7,$$

зададим следующим образом. Пусть $q = (x, y, \theta) \in M$. Тогда $q^i = \delta^i(q) = (x^i, y^i, \theta^i) \in M$, где

$$\begin{aligned}(x^1, y^1, \theta^1) &= (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, \theta), \\(x^2, y^2, \theta^2) &= (-x \cos \theta - y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, \theta), \\(x^3, y^3, \theta^3) &= (-x, -y, \theta), \\(x^4, y^4, \theta^4) &= (-x, y, -\theta), \\(x^5, y^5, \theta^5) &= (-x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -\theta), \\(x^6, y^6, \theta^6) &= (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, -\theta), \\(x^7, y^7, \theta^7) &= (x, -y, -\theta).\end{aligned}$$

По модулю вращений, действие отражений δ^i на кривые $(x(t), y(t))$ имеет следующий наглядный смысл:

- δ^1, δ^2 — отражения в серединном перпендикуляре к хорде кривой $(x(t), y(t))$, см. Рис. 3.23,
- δ^4, δ^7 — отражения в этой хорде, см. Рис. 3.24,
- δ^5, δ^6 — отражения в центре этой хорды, см. Рис. 3.25.

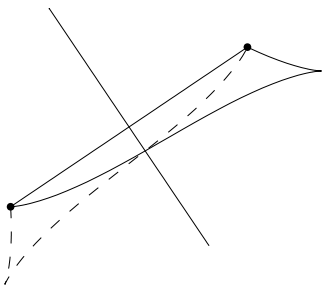


Рис. 3.23: Действие δ^1, δ^2

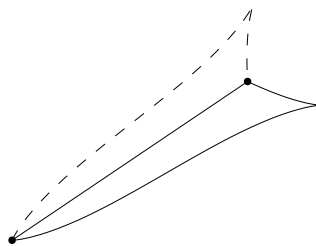


Рис. 3.24: Действие δ^4, δ^7

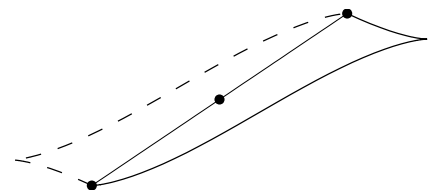


Рис. 3.25: Действие δ^5, δ^6

Отражения δ^i образуют такую же группу, как и ε^i :

$$\{\text{Id}, \delta^1, \dots, \delta^7\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = G.$$

Определим *первое время Максвелла, соответствующее i -ой симметрии*

$$t_{\text{Max}}^i(\lambda) = \inf\{t > 0 \mid \delta^i \circ \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\lambda, t), \varepsilon^i(\lambda_0, t) \neq (\lambda, t)\}, \quad i = 1, \dots, 7,$$

и *первое время Максвелла, соответствующее группе G :*

$$t_{\text{Max}}^G(\lambda) = \min\{t_{\text{Max}}^i(\lambda) \mid i = 1, \dots, 7\}.$$

В работе [43] получено следующее выражение для этого времени:

$$t_{\text{Max}}^G(\lambda) = \begin{cases} 2K(k) = T/2, & \lambda \in C_1, \\ 2kp_1(k) \in (T/2, T), & \lambda \in C_2, \\ \pi = T/2, & \lambda \in C_4, \\ +\infty, & \lambda \in C_3 \cup C_5, \end{cases}$$

где $p = p_1(k) \in (K(k), 2K(k))$ есть первый положительный корень уравнения

$$f(p, k) = \text{cn } p(\text{E}(p) - p) - \text{dn } p \text{sn } p = 0,$$

а sn , sn , dn — эллиптические функции Якоби, E — эллиптическая функция Якоби [32]; T есть период колебаний маятника (3.4.14), (3.4.15).

Оценим *время разреза*

$$t_{\text{cut}}(\lambda_0) = \sup\{t_1 > 0 \mid \text{Exp}(\lambda_0, t) \text{ оптимальна при } t \in [0, t_1]\}.$$

На основе произведенного исследования точек Максвелла, соответствующих группе G , имеем верхнюю оценку времени разреза.

Теорема 16. *Для любого $\lambda_0 \in C$ имеем $t_{\text{cut}}(\lambda_0) \leq t_{\text{Max}}^G(\lambda_0)$.*

3.4.7 Сопряженные точки

Рассмотрим *первое сопряженное время*

$$t_{\text{conj}}^1(\lambda) = \inf\{t > 0 \mid \text{Exp}_{*(\lambda, t)} \text{ вырождено}\}.$$

Теорема 17. *Если $\lambda \in C_1 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$, то $t_{\text{conj}}^1(\lambda) = +\infty$.*

Если $\lambda \in C_2$, то $t_{\text{conj}}^1(\lambda) \in [t_{\text{Max}}^G(\lambda), 4kK(k)]$.

Доказательство. [44]. □

Теорема 17 доказывается с помощью гомотопической инвариантности индекса второй вариации (количества сопряженных точек с учетом кратности). Экстремаль, соответствующая некоторому движению маятника, непрерывно деформируется в экстремаль, соответствующую движению маятника вблизи устойчивого положения равновесия ($k \rightarrow 0$), где эллиптические функции вырождаются:

$$\begin{aligned} \text{cn}(\varphi, k) &\rightarrow \cos \varphi, & \text{sn}(\varphi, k) &\rightarrow \sin \varphi, \\ \text{dn}(\varphi, k) &\rightarrow 1, & \text{E}(\varphi, k) &\rightarrow \varphi. \end{aligned}$$

Следствие 7. *Для любого $\lambda \in C$ имеем $t_{\text{conj}}^1(\lambda) \geq t_{\text{Max}}^G(\lambda)$.*

Поэтому геодезическая $\text{Exp}(\lambda, t)$ локально оптимальна при $t \in [0, t_{\text{Max}}^G(\lambda)]$.

3.4.8 Структура экспоненциального отображения

Экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : N \rightarrow M, \quad N = C \times \mathbb{R}_+,$$

имеет кратные точки (точки Максвелла), потому не биективно. Ограничим его на подмножества без точек Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{Exp} : \tilde{N} &\rightarrow \tilde{M}, \\ \tilde{N} &= \{(\lambda, t) \in N \mid t < t_{\text{Max}}^G(\lambda)\}, \\ \tilde{M} &= M \setminus \{q \in M \mid \exists i = 1, \dots, 7 \text{ т.ч. } \delta^i(q) = q\}. \end{aligned}$$

Ограниченное экспоненциальное отображение $\text{Exp} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{M}$ уже инъективно.

Его биективность можно доказать с помощью следующей теоремы.

Теорема 18 (Адамар). Пусть $F : X \rightarrow Y$ есть гладкое отображение между гладкими многообразиями, для которого выполнены условия:

- (1) $\dim X = \dim Y$,
- (2) X, Y связны, а Y односвязно,
- (3) F невырождено,
- (4) F собственное (прообраз компакта компактен).

Тогда F есть диффеоморфизм, и потому биекция.

Доказательство. См. [34]. □

С помощью этой теоремы доказано следующее утверждение [44].

Теорема 19. Ограниченное экспоненциальное отображение $\text{Exp} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{M}$ есть диффеоморфизм, и потому биекция.

Следствие 8. Для любой точки $q_1 \in \tilde{M}$ обозначим прообраз $\text{Exp}^{-1}(q_1) = (\lambda_0, t) \in \tilde{N}$. Тогда геодезическая $\text{Exp}(\lambda_0, t)$ оптимальна при $t \in [0, t_1]$.

Следствие 9. Для любого $\lambda \in C$ имеем $t_{\text{cut}}(\lambda) = t_{\text{Max}}^G(\lambda)$.

3.4.9 Множество разреза и каустика

Множество разреза определяется как

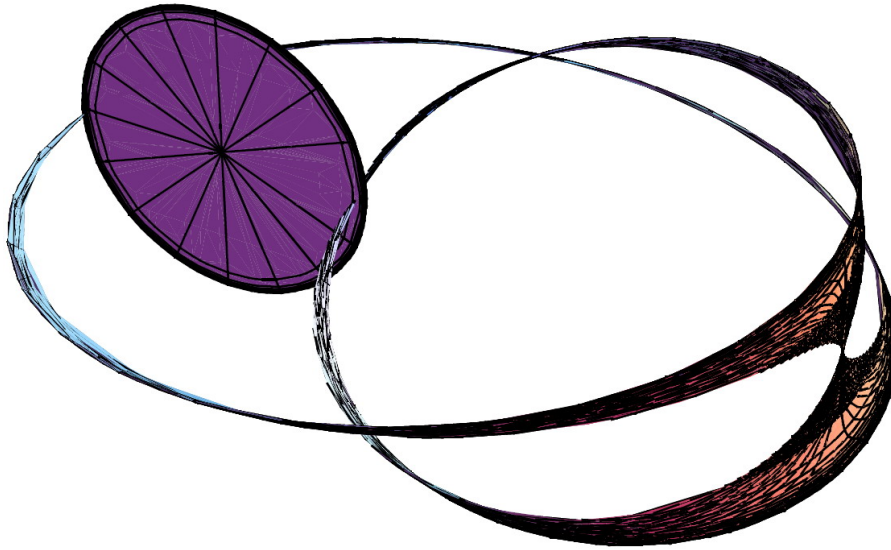
$$\text{Cut} = \{\text{Exp}(\lambda, t) \mid t = t_{\text{cut}}(\lambda), \lambda \in C\}.$$

Доказано [45], что в данной задаче множество разреза имеет 3 компоненты связности:

$$\begin{aligned} \text{Cut} &= \text{Cut}_{\text{loc}}^+ \cup \text{Cut}_{\text{loc}}^- \cup \text{Cut}_{\text{glob}}, \\ q_0 &\in \text{cl}(\text{Cut}_{\text{loc}}^\pm), \\ q_0 &\text{ изолирована от } \text{Cut}_{\text{glob}}, \end{aligned}$$

см. Рис. 3.26. Глобальная компонента множества разреза есть

$$\text{Cut}_{\text{glob}} = \{q \in M \mid \theta = \pi\}.$$

Рис. 3.26: Множество разреза $\text{Cut} \subset \text{SE}(2)$

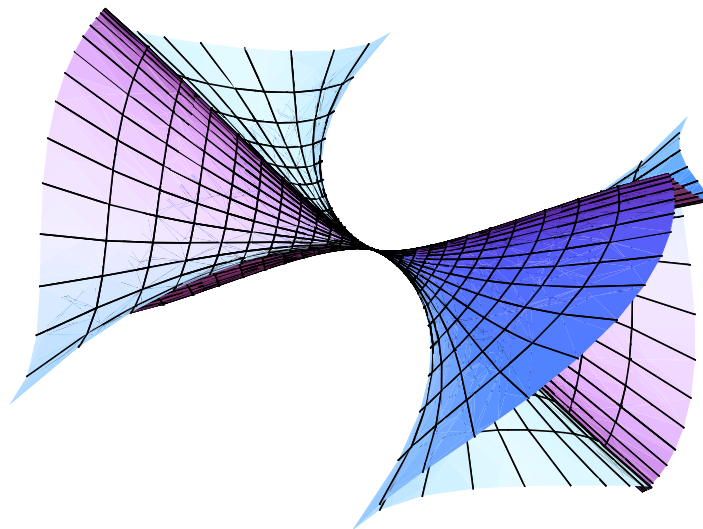
Локальные компоненты содержатся в ленте Мебиуса:

$$\text{Cut}_{\text{loc}}^{\pm} \subset \{q \in M \mid R(q) = 0\},$$

$$R(q) = x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2}.$$

На Рис. 3.27 показана субриманова каустика

$$\{\text{Exp}(\lambda, t) \mid \lambda \in C, t = t_{\text{conj}}(\lambda)\}.$$

Рис. 3.27: Субриманова каустика на $\text{SE}(2)$

В работах [43–45] построен оптимальный синтез в данной задаче.

3.4.10 Субримановы сферы и волновые фронты

В данной задаче субримановы сферы

$$S_R = \{q \in \text{SE}(2) \mid d(\text{Id}, q) = R\}$$

могут быть четырех различных топологических типов:

1. сфера нулевого радиуса — точка,
2. если $R \in (0, \pi)$, то S_R гомеоморфна стандартной 2-мерной сфере S^2 , см. Рис. 3.28,
3. при $R = \pi$ сфера S_R гомеоморфна сфере S^2 с отождествленными северным N и южным S полюсами: $S_\pi \cong S^2/\{N = S\}$, см. Рис. 3.29,
4. если же $R > \pi$, то S_R гомеоморфна 2-мерному тору \mathbb{T}^2 , см. Рис. 3.30.

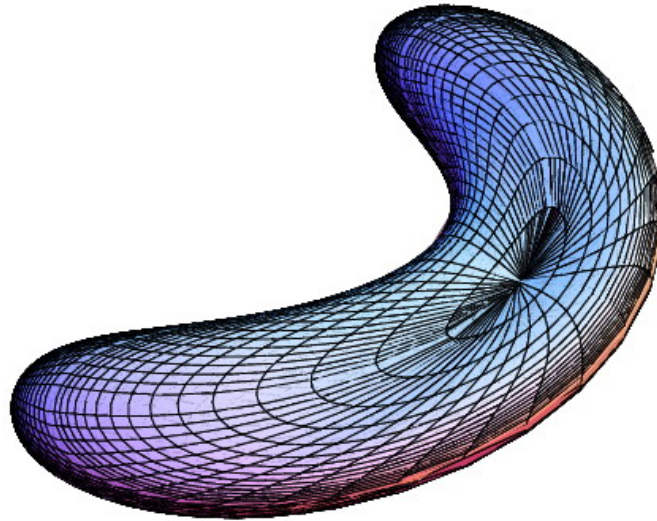


Рис. 3.28: Субриманова сфера $S_{\pi/2} \subset \text{SE}(2)$

На Рис. 3.31 показаны самопересечения *волнового фронта*

$$W_R = \{\text{Exp}(\lambda, R) \mid \lambda \in C\}$$

для $R = \pi$.

3.4.11 Симметричный метод

В предыдущих пунктах описано исследование субримановой задачи на группе $\text{SE}(2)$ с помощью общего *симметричного метода* [2] исследования левоинвариантных задач оптимального управления.

Перечислим задачи, исследованные с помощью этого метода:

1. СР задачи на группах $\text{SE}(2)$ и $\text{SH}(2)$ [43–45, 58–60],
2. СР задача на группе Энгеля [48–52],
3. СР задача на группе Картана [53–57],

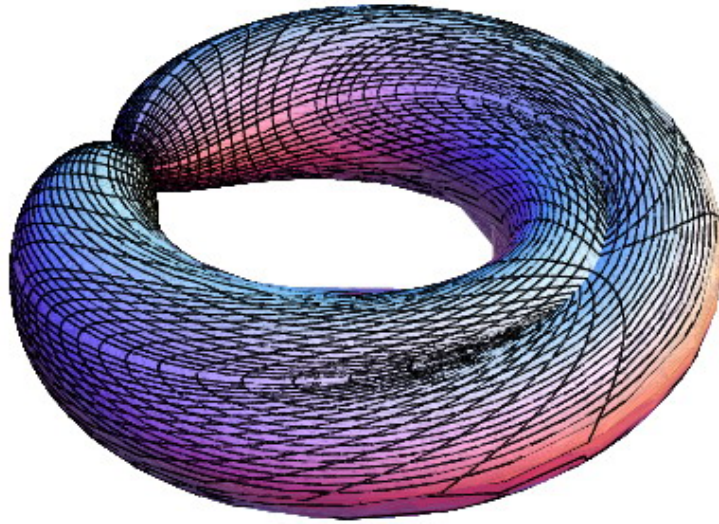


Рис. 3.29: Субриманова сфера $S_\pi \subset SE(2)$

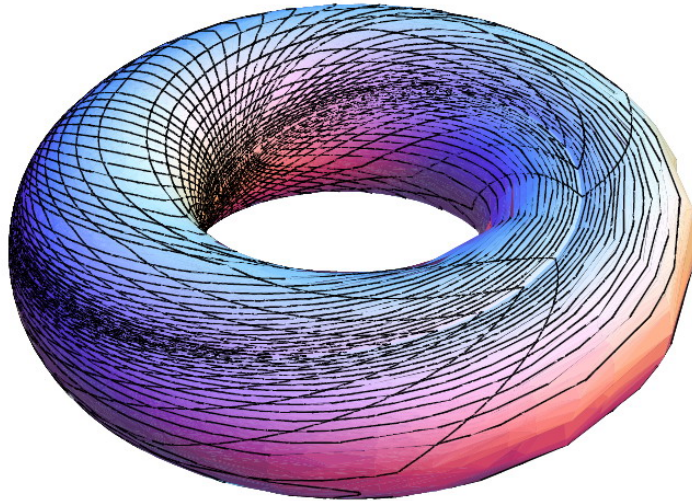


Рис. 3.30: Субриманова сфера $S_{3\pi/2} \subset SE(2)$

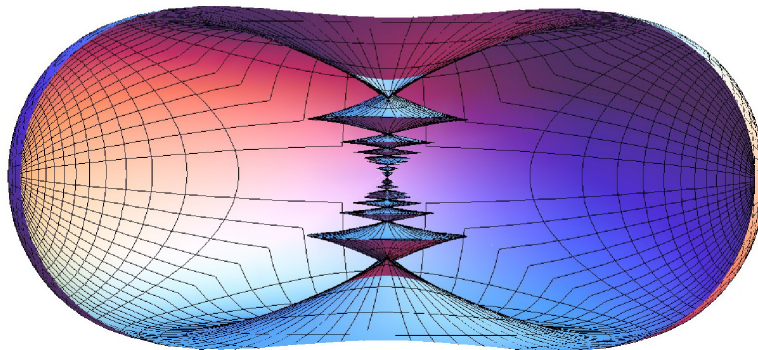


Рис. 3.31: Волновой фронт $W_\pi \subset SE(2)$ в разрезе

4. задача Эйлера об эластиках [36–42],
5. задача о качении S^2 по \mathbb{R}^2 [46, 47],
6. римановы задачи на $SO(3)$ и $SL(2)$ с левоинвариантной осесимметричной метрикой [61–63].

В задачах 1, 2, 6 построен полный оптимальный синтез, а остальные задачи исследованы с различной степенью полноты.

Заключение

5. Пасет быка:

Чтобы животное не убежало в мир омрачений,

Мальчик не должен расставаться с плеткой и привязью;

Если о быке хорошо заботиться, он станет чистым и послушным;

Без цепей и без привязи он сам последует за пастухом.

Пу-мин, «Десять рисунков о пастухе и быке» (цит. по [30])

В качестве дальнейшего чтения рекомендуем книги:

- М.И. Зеликин, Оптимальное управление и вариационное исчисление [6],
- А.А.Аграчев, Д. Барилари, У. Боскаин, A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint [11],
- А.А.Аграчев, Ю.Л. Сачков, Геометрическая теория управления [1],
- В. Джарджевич, Geometric Control Theory [23],
- А.А. Ардентов, А.П. Маштаков, А.В. Подобряев, Ю.Л. Сачков, Симметричный метод для задач оптимального управления на группах Ли [2].

Список иллюстраций

1	Поиск быка	ii
2	Видит следы	ii
3	Видит быка	ii
4	Бык пойман	ii
1.1	Субриманова задача на группе движений плоскости	3
1.2	Задача Эйлера об эластиках	3
1.3	Сфера, катящаяся по плоскости	4
1.4	Задача о качении сферы по плоскости	5
1.5	Исходная кривая AB с поврежденной дугой CD	6
1.6	Граничные условия для восстановления дуги CD	6
1.7	Новая кривая \widetilde{CD}	7
1.8	Исходная кривая AB с поврежденной и новой дугами	7
1.9	Задача Дидоны: $S = S_1 - S_2 + \dots, l(\gamma) \rightarrow \min$	7
1.10	Задача Дидоны: $z(t) = S$	8
1.11	Касательный вектор $\dot{\gamma}(0)$	12
1.12	Касательное пространство $T_q M$	12
1.13	Скобка Ли векторных полей V, W	13
2.1	Множество достижимости \mathcal{A}_{q_0}	20
2.2	Орбита \mathcal{O}_{q_0}	20
2.3	Дифференциал $D_q \Phi$ отображения Φ в точке q	21
2.4	Пересечение окрестностей в базе топологии	24
2.5	Пересечение окрестностей не в базе топологии	24
2.6	Интегральное многообразие N_q распределения Δ	26
2.7	Множество достижимости — открытое множество	29
2.8	Множество достижимости — многообразие с гладкой границей	29
2.9	Множество достижимости — многообразие с негладкой границей	29
2.10	Множество достижимости — многообразие с негладкой границей	29
2.11	Запрещенное множество достижимости: подмножество неполной размерности	30
2.12	Запрещенное множество достижимости: подмножество с изолированными граничными точками	30
2.13	Множество достижимости $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ в задаче об эластиках	32
3.1	Траектория $q(t)$ оптимальна	36
3.2	Оптимальный синтез в задаче об остановке поезда	43
3.3	Математический маятник	47
3.4	Фазовый портрет маятника (3.2.5), (3.2.6)	47
3.5	Эластика: $E = \pm r, r > 0, c = 0$	48
3.6	Эластика: $E \in (-r, r), r > 0, k \in (0, \sqrt{2})$	48
3.7	Эластика: $E \in (-r, r), r > 0, k = \sqrt{2}$	48
3.8	Эластика: $E \in (-r, r), r > 0, k \in (\sqrt{2}, k_0)$	48

3.9	Эластика: $E \in (-r, r)$, $r > 0$, $k = k_0 \approx 0.909$	48
3.10	Эластика: $E \in (-r, r)$, $r > 0$, $k \in (k_0, 1)$	48
3.11	Эластика: $E = r > 0$, $\beta \neq \pi$	48
3.12	Эластика: $E > r > 0$	48
3.13	Эластика: $r = 0$, $c \neq 0$	49
3.14	Эйлеровы эскизы эластик [18]	49
3.15	Субриманова кратчайшая	50
3.16	Сопряженная точка на геодезической $q(t)$	54
3.17	Оптимальные траектории в задаче Дидоны	57
3.18	Субриманова сфера на группе Гейзенберга	58
3.19	Субриманова полусфера на группе Гейзенберга	58
3.20	Неинфлексионная траектория в $SE(2)$: $\lambda \in C_1$	68
3.21	Инфлексионная траектория в $SE(2)$: $\lambda \in C_2$	68
3.22	Критическая траектория в $SE(2)$: $\lambda \in C_3$	68
3.23	Действие δ^1, δ^2	69
3.24	Действие δ^4, δ^7	69
3.25	Действие δ^5, δ^6	69
3.26	Множество разреза $Cut \subset SE(2)$	72
3.27	Субриманова каустика на $SE(2)$	72
3.28	Субриманова сфера $S_{\pi/2} \subset SE(2)$	73
3.29	Субриманова сфера $S_{\pi} \subset SE(2)$	74
3.30	Субриманова сфера $S_{3\pi/2} \subset SE(2)$	74
3.31	Волновой фронт $W_{\pi} \subset SE(2)$ в разрезе	74

Литература

Книги по теории управления, вариационному исчислению и неголономной геометрии

- [1] А.А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, 2005.
- [2] А.А. Ардентов, А.П. Маштаков, А.В. Подобрывев, Ю.Л. Сачков, *Симметричный метод для задач оптимального управления на группах Ли*, в работе.
- [3] А. Брессан, Б. Пикколи, *Введение в математическую теорию управления*, М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.
- [4] Вершик А.М., Гершкович В.Я. *Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи*. Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16, ВИНТИ, Москва, 1987, 5–85.
- [5] Р.В. Гамкредидзе, *Основы оптимального управления*. – М: URSS, 2019.
- [6] М.И. Зеликин, *Оптимальное управление и вариационное исчисление*, М.: URSS, 2014.
- [7] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Наука, 1961.
- [8] Сачков Ю.Л. Теория управления на группах Ли, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2007, т. 27, 5–59.
- [9] Сачков Ю.Л. *Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах*. —М.: Физматлит, 2007.
- [10] A. A. Agrachev. *Some open problems*, pp. 1–13. Springer International Publishing, Cham, 2014.
- [11] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian viewpoint*, Cambridge University Press, 2019.
- [12] A. Bellaïche, J. Risler, Eds., *Sub-Riemannian geometry*. Birkhäuser, Progress in Math., 1996, v.144
- [13] A. Bloch, *Nonholonomic Mechanics and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Volume 24, Springer, 2003.
- [14] U. Boscain, B. Piccoli, *Optimal synthesis for control systems on 2-D manifolds*. Springer SMAI, v.43, 2004.
- [15] R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussmann, Eds., *Differential geometric control theory*. Birkhäuser Boston, 1983

- [16] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scott D. Pauls, and Jeremy T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [17] A. A. Davydov, *Qualitative theory of control systems*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1994.
- [18] Euler L., *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive Solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Lausanne, Geneva, 1744.
- [19] J.-P. Gauthier, I. A. K. Kupka, *Deterministic observation theory and applications*, Cambridge University Press, 2001.
- [20] A. Isidori, *Nonlinear control systems: an introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [21] B. Jakubczyk, W. Respondek, Eds., *Geometry of feedback and optimal control*. Marcel Dekker, 1998
- [22] Frédéric Jean. *Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Cham, 2014.
- [23] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [24] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Amer. Math. Soc., 2002
- [25] H. Nijmeijer, A. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [26] L. Rifford. *Sub-Riemannian geometry and Optimal Transport*. SpringerBriefs in Mathematics, 2014.
- [27] E.D. Sontag, *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [28] H. J. Sussmann, Ed., *Nonlinear controllability and optimal control*. Marcel Dekker, 1990
- [29] M. I. Zelikin, V. F. Borisov, *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering*, Basel: Birkhauser, 1994.

Другие книги

- [30] Д.Т. Судзуки, *Антология дзэн-буддийских текстов*, С.-Пб.: Наука, 2005.
- [31] В.М. Тихомиров, *Рассказы о максимумах и минимумах*, М.: МЦНМО, 2006.
- [32] Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, М.: УРСС, 2002.
- [33] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, М.: Мир, 1987.
- [34] Krantz S. G., Parks H. R., *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*, Birkauser, 2001.

Статьи, в которых исследуются задачи п. 1.1.1 и родственные задачи оптимального управления

Задача Эйлера об эластиках

- [35] Сачков Ю.Л. Оптимальность эйлеровых эластик, *Доклады Академии Наук*, том 417, No. 1, ноябрь 2007, С. 23–25.
- [36] Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 14 (2008), No. 2 (April), pp. 169–234.
- [37] Yu. L. Sachkov, Conjugate points in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, vol. 14 (2008), No. 3 (July).
- [38] А.А.Ардентов, Ю.Л.Сачков. Решение задачи Эйлера об эластиках. *Автоматика и телемеханика*, 2009, No. 4, 78–88.
- [39] Сачков Ю.Л., Левяков С.В. Устойчивость инфлекссионных эластик, центрированных в вершинах или точках перегиба, *Труды МИАН*, 2010, Т. 271, 187–203.
- [40] Yu. Sachkov, Closed Euler Elasticae, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, V. 278 (2012), 218–232.
- [41] Yu. L. Sachkov, E.Sachkova, Exponential mapping in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 20 (2014), No. 4, 443–464.
- [42] A. Mashtakov, A. Ardentov, Yu. Sachkov, Relation between Euler's elasticae and sub-Riemannian geodesics on $SE(2)$, *Regular and Chaotic Dynamics*, December 2016, Volume 21, Issue 7, pp 832–839.

Субриманова задача на группе $SE(2)$

- [43] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 380–399.
- [44] Yu. L. Sachkov, Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 1018–1039.
- [45] Yu. L. Sachkov, Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 17 (2011), 293–321.

Задача о качении сферы по плоскости

- [46] Сачков Ю.Л. Симметрии и страты Максвелла и симметрии в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости, *Мат. Сборник*, 2010, Т. 201, N 7, С. 99–120.
- [47] Маштаков А.П., Сачков Ю.Л., Экстремальные траектории и точки Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости, *Математический сборник* (2011), Т. 202, No. 9, С. 97–120.

Субриманова задача на группе Энгеля

- [48] Ардентов А.А., Сачков Ю.Л., Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля, *Мат. сборник* (2011), Т. 202, No. 11, С. 31–54.
- [49] Ardentov, A. A. and Sachkov, Yu. L., Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 195, no. 3, pp. 369–390.
- [50] Ardentov, A. A. and Sachkov, Yu. L., Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group, *ESAIM: COCV*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 958–988.
- [51] A.A. Ardentov, Yu. L. Sachkov, Maxwell Strata and Cut Locus in the Sub-Riemannian Problem on the Engel Group, *Regular and Chaotic Dynamics*, December 2017, Vol. 22, Issue 8, pp 909–936.
- [52] А.А.Ардентов, Ю.Л.Сачков, Множество разреза в субримановой задаче на группе Энгеля, *Доклады Академии Наук*, Выпуск 6, 2018, Том 478, 623–626.

Субриманова задача на группе Картана

- [53] Сачков Ю.Л., Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны, *Математический сборник*, 2003, 194 (9), 63–90.
- [54] Sachkov Yu. L., Symmetries of flat rank two distributions and sub-Riemannian Structures, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2004, 356 (2) 457–494
- [55] Сачков Ю.Л. Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, N 2, S. 95–116.
- [56] Сачков Ю.Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, № 4, С. 123–150.
- [57] Сачков Ю.Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны, *Мат. Сборник*, 2006, Т. 197, N 6, С. 111–160.

Субриманова задача на группе SH(2)

- [58] Y.A.Butt, A.I. Bhatti, Yu. L. Sachkov, Parametrization of Extremal Trajectories in Sub-Riemannian Problem on Group of Motions of Pseudo Euclidean Plane, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 20 (2014), No. 3 (July), 341–364.
- [59] Y.A.Butt, A.I. Bhatti, Yu. L. Sachkov, Maxwell strata and conjugate points in sub-Riemannian problem on the group SH(2), *Journal of Dynamical and Control Systems*, 22 (2016), 747–770
- [60] Y.A.Butt, A.I. Bhatti, Yu. L. Sachkov, Cut Locus and Optimal Synthesis in Sub-Riemannian Problem on the Lie Group SH(2), *Journal of Dynamical and Control Systems*, 23 (2017), 155–195

Римановы задачи на группах $SO(3)$, $SU(2)$, $SL(2)$ и $PSL(2)$

- [61] A.Podobryaev, Yu. L. Sachkov, Cut locus of a left invariant Riemannian metric on $SO(3)$ in the axisymmetric case, *Journal of Geometry and Physics*, 110 (2016) 436–453.
- [62] А.В.Подобряев, Ю.Л.Сачков, Левоинвариантные симметричные римановы задачи на группах собственных движений плоскости Лобачевского и сферы, *Доклады Академии Наук*, 2017, 473, No. 6, с. 640–642
- [63] A.Podobryaev, Yu. L. Sachkov, Symmetric Riemannian Problem on the Group of Proper Isometries of Hyperbolic Plane, *J Dyn Control Syst* (2018) 24: 391

Предметный указатель

- \mathcal{A}_{q_0} , 9, 20
- $\mathcal{A}_{q_0}(\leq t_1)$, 9
- $\mathcal{A}_{q_0}(t_1)$, 9
- \mathcal{O}_{q_0} , 20
- Cut, 71
- SE(2), 65
- SO(3), 5
- Vec(M), 11
- \mathcal{F} , 20
- Exp, 54
- Lie $_q(\mathcal{F})$, 25
- σ , 38
- \vec{h} , 38
- $\{h, g\}$, 39
- s , 38
- t_{cut} , 70
- диффеоморфизм, 21
- дифференциал, 21
- длина
 - субриманова, 50
- экстремаль, 41
- эластика Эйлера, 46
- энергия, 51
- форма Лиувилля, 38
- формула
 - Коши, 16
- фронт
 - волновой, 73
- функционал качества, 10
- функция
 - Гамильтона, 38
 - аффинная на слоях T^*M , 62
 - линейная на слоях T^*M , 62
 - постоянная на слоях T^*M , 62
- гамильтониан, 38
 - линейный на слоях T^*M , 40
 - укороченный, 41
- геодезическая
 - субриманова, 53
- группа
 - собственных движений двумерной евклидовой плоскости, 65
 - специальная ортогональная, 5
- каустика
 - субриманова, 72
- координаты
 - канонические, 38
- кратчайшая
 - субриманова, 50
- критерий Калмана, 16
- кривая
 - горизонтальная, 50
- лифт
 - гамильтонов, 40
- линеаризация, 18
- машина Маркова-Дубинса, 2
- метод
 - симметричный, 73
- многообразие
 - гладкое, 11
 - интегральное, 26
- множество
 - достижимости, 9, 20
 - за время t_1 , 9
 - за время не больше t_1 , 9
 - разреза, 71
 - глобальная компонента, 71
 - локальная компонента, 72
 - значений управляющего параметра, 9
- обмотка тора
 - иррациональная, 22
- орбита, 20
- отображение
 - экспоненциальное, 54
 - в конец, 16
- отражения
 - в образе Exp, 69
 - в прообразе Exp, 68
- параметр
 - управляющий, 9
- перенос векторных полей, 21
- подмногообразие
 - гладкое, 11
 - погруженное, 21

- вложенное, 22
- поле
 - векторное, 11
 - гамильтоново, 38
 - перенос, 21
- положение равновесия, 18
- поля
 - векторные
 - коммутирующие, 12
- поток векторного поля, 12
- принцип максимума Понтрягина, 41
- проекция
 - каноническая, 38
- произведение
 - скалярное, 50
- пространство
 - касательное, 11
- распределение, 26
 - интегрируемое, 26
- расслоение
 - касательное, 38
 - кокасательное, 38
- расстояние
 - субриманово, 50, 57
- расстояние Карно-Каратеодори, 50
- репер
 - ортонормированный, 50
- сфера
 - субриманова, 57
- симметрия
 - экспоненциального отображения, 68
- синтез
 - оптимальный, 43
- система
 - динамическая, 9
 - глобально управляемая, 10
 - линейная, 15
 - управляемая, 17
 - локально управляемая, 10
 - локально управляемая за малое время, 10
 - полного ранга, 25
 - симметричная, 20
 - управляемая, 9, 20
 - вполне неголономная, 25
 - вполне управляемая, 10
- система ОДУ
 - гамильтонова, 39
- скобка Пуассона, 39
- состояние, 9
- структура
 - субриманова, 50
- теорема
 - Филиппова, 36
 - Фробениуса, 26
 - Кренера, 29
 - Рашевского-Чжоу, 25
 - об орбите, 22
- точка
 - Максвелла, 55
 - сопряженная, 54
- траектория, 9
 - экстремальная, 41
- управление, 9
 - допустимое, 10
 - экстремальное, 41
- вектор
 - касательный, 11
- векторные поля
 - коммутатор, 12
 - скобка Ли, 12
- время
 - сопряженное
 - первое, 70
- время Максвелла
 - соответствующее группе
 - первое, 70
 - соответствующее симметрии
 - первое, 70
- время разреза, 56, 70
- задача
 - Дидоны, 6
 - Эйлера об эластичах, 3
 - антропоморфного восстановления кривых, 5
 - быстродействия, 1
 - левоинвариантная, 2
 - о качении сферы по плоскости, 4
 - оптимального управления, 10, 35
 - субриманова, 2
 - на группе Энгеля, 64
 - на группе Гейзенберга, 6
 - на группе Картана, 64
 - на группе движений плоскости, 2
 - управляемости, 10
- 1-форма
 - тавтологическая, 38
- 2-форма
 - симплектическая, 38