

О множестве разреза на двухступенных свободных группах Карно



Алексей Маштаков

ИПС им. А.К. Айламазяна РАН
г. Переславль-Залесский



Национальный Суперкомпьютерный Форум 2019
г. Переславль-Залесский, 25.11.2019

Нильпотентная аппроксимация неголономных управляемых систем

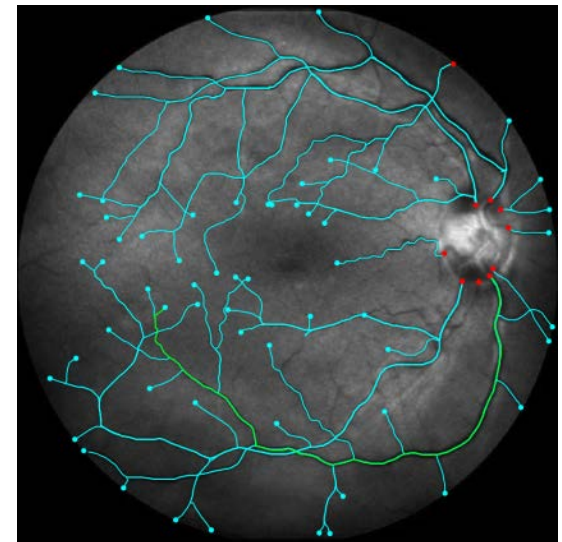
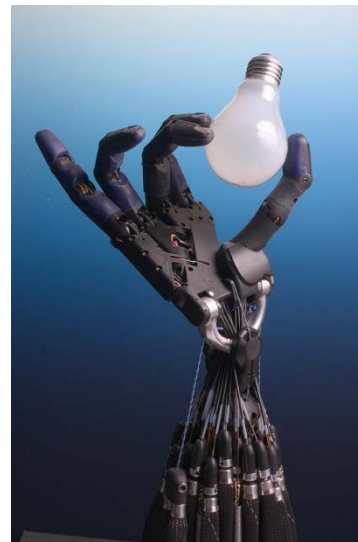
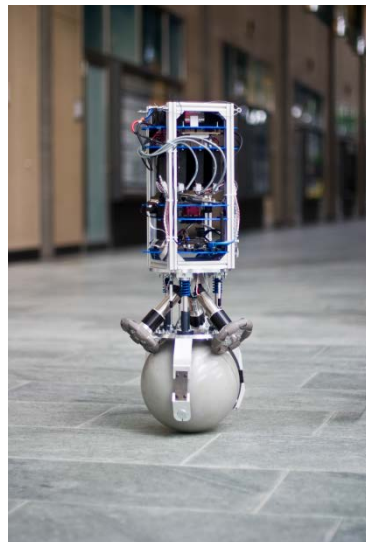
- Нелинейные управляемые системы на гладких многообразиях M :

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + \dots + u_n X_n(q), \quad q \in M, \quad \dim M = k > n.$$

- Нильпотентная аппроксимация:

$$\dot{x} = u_1 Y_1(x) + \dots + u_n Y_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad [Y_i, \dots [Y_l, Y_m] \dots] = 0.$$

- Приложения в механике, робототехнике, обработке изображений:
неголономные системы; мобильные роботы; модели биологических систем; сегментация изображений; восстановление изображений.



Двухступенные свободные группы Карно

- Группа Ли G на пространстве $\mathbb{R}^k$ называется *двухступенной нильпотентной группой Ли* ранга n , если ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разлагается в

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_2, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = 0, \quad (*)$$

где $\dim \mathfrak{g}_1 = n$, $\dim \mathfrak{g}_2 = k - n$.

- Рассматриваются *свободные* группы Ли $\mathbb{G}_n$, то есть такие группы G , что их алгебра Ли не имеет других соотношений кроме $(*)$.

- Для $\mathbb{G}_n$ выполнено $k = \frac{n(n+1)}{2}$. Удобно использовать представление

$$\mathbb{G}_n = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{so}(n).$$

- Обозначим базисные левоинвариантные векторные поля X_i, X_{ij} :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \mathfrak{g}_1 = \text{span}(X_1, \dots, X_n), \quad \mathfrak{g}_2 = \text{span}(X_{ij})_{i < j}.$$

- Групповая операция имеет вид

$$L_{(x,y)}(x', y') = (x + x', y + y' + x \wedge x').$$

- $\mathbb{G}_n$ снабжена левоинвариантной СР структурой, индуцированной выбором скалярного произведения на подпространстве $\mathfrak{g}_1$.

Задача субримановой геометрии

- На группе Ли $\mathbb{G}_n$ задано левоинвариантное распределение $\Delta \subset T\mathbb{G}_n$:

$$\Delta = \text{span}(X_1, \dots, X_n) = \mathfrak{g}_1$$

и скалярное произведение $\mathcal{G}$ на Δ : $\mathcal{G}(X_i, X_j) = \delta_{ij}$.

- $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{G}_n$ — горизонтальная (допустимая) кривая, если

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)} \text{ для п.в. } t \in [0, T].$$

- СР кратчайшая — горизонтальная кривая γ минимальной длины

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\mathcal{G}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \rightarrow \min.$$

- СР геодезическая — кривая на $\mathbb{G}_n$, достаточно малые дуги которой являются СР кратчайшими.
- Точка разреза — точка потери оптимальности вдоль геодезической γ .
Время разреза: $t_{cut}(\gamma) := \sup\{t > 0 \mid \gamma \text{ оптимальна на } [0, t]\}$.
- Множество конечных точек всех геодезических, выходящих из одной точки, за время $T > 0$ называется волновым фронтом радиуса T

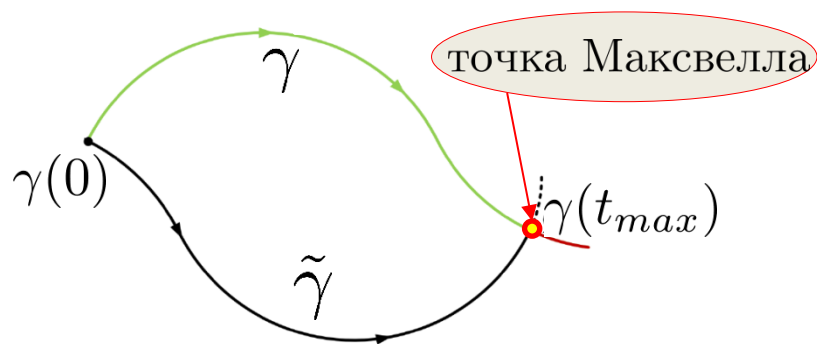
Оптимальность геодезических

- Малые дуги геодезических γ оптимальны
- Точка разреза вдоль γ :

$$t_{cut} = \sup\{\tau > 0 \mid \gamma(t) \text{ оптимальна при } t \in [0, \tau]\}.$$

- Точка Максвелла:

$$\exists \tilde{\gamma} \neq \gamma : \begin{cases} \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0), \\ \gamma(t_{max}) = \tilde{\gamma}(t_{max}) \end{cases}$$

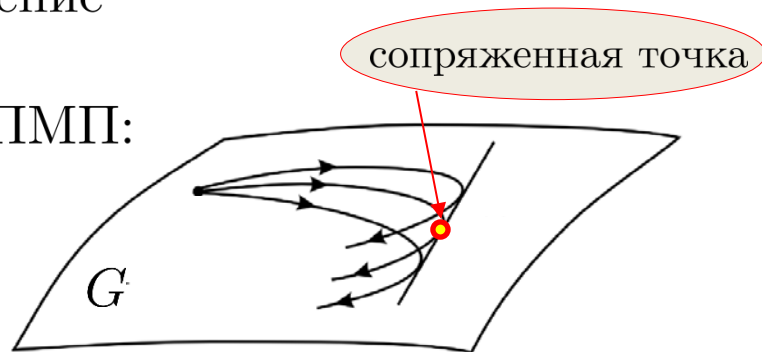


- Сопряженная точка — критическое значение экспоненциального отображения, интегрирующей гамильтонову систему ПМП:

$$\frac{\partial \text{Exp}}{\partial (\lambda, t)}(\lambda_0, t_{conj}) = 0.$$

- Соотношение на время разреза:

$$t_{cut} = \min(t_{max}^1, t_{conj}^1).$$



Задача оптимального управления

- $(x, y) \in \mathbb{G}_n$. Задано $(x^1, y^1) \in \mathbb{G}_n$ требуется найти $\gamma : [0, T] \mapsto \mathbb{G}_n$:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x, u \in \mathbb{R}^n, & x(0) = y(0) = 0, \\ \dot{y} = x \wedge u, & y \in \mathfrak{so}(n), & x(T) = x^1, y(T) = y^1, \end{cases}$$

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2(t)} \, dt \rightarrow \min \iff J(\gamma) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2(t)}{2} \, dt \rightarrow \min.$$

- Традиционный подход состоит из следующих этапов:
 1. доказательство существования СР кратчайших:
стандартное следствие т. Рашевского-Чжоу и т. Филиппова;
 2. параметризация СР геодезических с помощью ПМП:
известный результат F. Monroy-Pérez, A. Anzaldo-Meneses, 2006;
 3. выбор СР кратчайших среди СР геодезических с помощью условий оптимальности второго порядка и детального изучения структуры семейства СР геодезических:
известно в случаях малой размерности $n = 2$ — Brockett(1980), Вершик–Гершкович(1987), и $n = 3$ — Мясниченко (2002), в общем случае сформулирована гипотеза Rizzi–Serres, 2017 .

Принцип максимума Понтрягина

- Управляемая система: $\dot{\gamma} = u_1 X_1 + \dots + u_n X_n$
- Левонивариантные гамильтонианы: $h_i = \langle \lambda, X_i \rangle, \rho_{ij} = \langle \lambda, X_{ij} \rangle, \lambda \in T^* \mathbb{G}_n$.
- Скобки Пуассона: $\{h_i, h_j\} = \rho_{ij}, \quad \{\rho_{jk}, h_i\} = 0, \quad \{\rho_{ij}, \rho_{kl}\} = 0$.
- Условие Гоха влечет отсутствие строго аномальных геодезических
- Функция Понтрягина: $H_u = u_1 h_1 + \dots + u_n h_n - \frac{1}{2} (u_1^2 + \dots + u_n^2)$
- Условие максимума: $u_i = h_i \Rightarrow H = \max_{u \in \mathbb{R}^n} H_u = \frac{1}{2} (h_1^2 + \dots + h_n^2)$
- Вертикальная подсистема: $\dot{h}_i = \{h_i, H\}, \quad i = 1, \dots, n$
- Обозначим $h := (h_1, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \rho := (\rho_{ij}) \in \mathfrak{so}(n)$

Утверждение Нормальная гамильтонова система ПМП для двухступенных свободных нильпотентных групп Ли имеет вид

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = h, \\ \dot{y} = x \wedge h, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \dot{h} = \rho h, \\ \dot{\rho} = 0. \end{array} \right. \\ \text{(горизонтальная часть)} & \text{(вертикальная часть)} \end{array}$$

Свойства гамильтоновой системы ПМП

Гамильтонова система:

$$\begin{cases} \dot{x} = h, \\ \dot{y} = x \wedge h, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{h} = \rho h, \\ \dot{\rho} = 0. \end{cases}$$

Утверждение *Решение гамильтоновой системы с начальным условием $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $h(0) = h_0$, $\rho(0) = \rho_0$ имеет вид*

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{\rho_0 \tau} h_0 \, d\tau, & h(t) &= e^{\rho_0 t} h_0, \\ y(t) &= \int_0^t \left(\int_0^\tau e^{\rho_0 s} h_0 \, ds \right) \wedge \left(e^{\rho_0 \tau} h_0 \right) \, d\tau, & \rho(t) &= \rho_0. \end{aligned}$$

Утверждение *Гамильтонова система инвариантна относительно действия группы $SO(n) \ni R$:*

$$(x, y, h, \rho) \mapsto (Rx, RyR^T, Rh, R\rho R^T).$$

Утверждение *Гамильтонова система инвариантна относительно действия группы растяжений $D = \{D_k \mid k > 0\}$, где D_k :*

$$(x, y, h, \rho) \mapsto (kx, k^2 y, kh, \rho), \quad k > 0.$$

Гипотеза о множестве разреза

Гипотеза (Рицци–Серрес) Множество разреза $\text{Cut}_0(\mathbb{G}_n)$ состоит из неподвижных точек $(x, y) \in \mathbb{G}_n$ нетривиальных ортогональных преобразований $R \in O(n)$, тождественно действующих на подпространстве $\ker y$:

$$C_k := \left\{ (x, y) \in \mathbb{G}_n \mid y \neq 0, \exists R \in O(n) : \begin{array}{l} R \neq \mathbb{1}, \quad R|_{\ker y} = \mathbb{1}, \\ Rx = x, \quad RyR^T = y \end{array} \right\}.$$

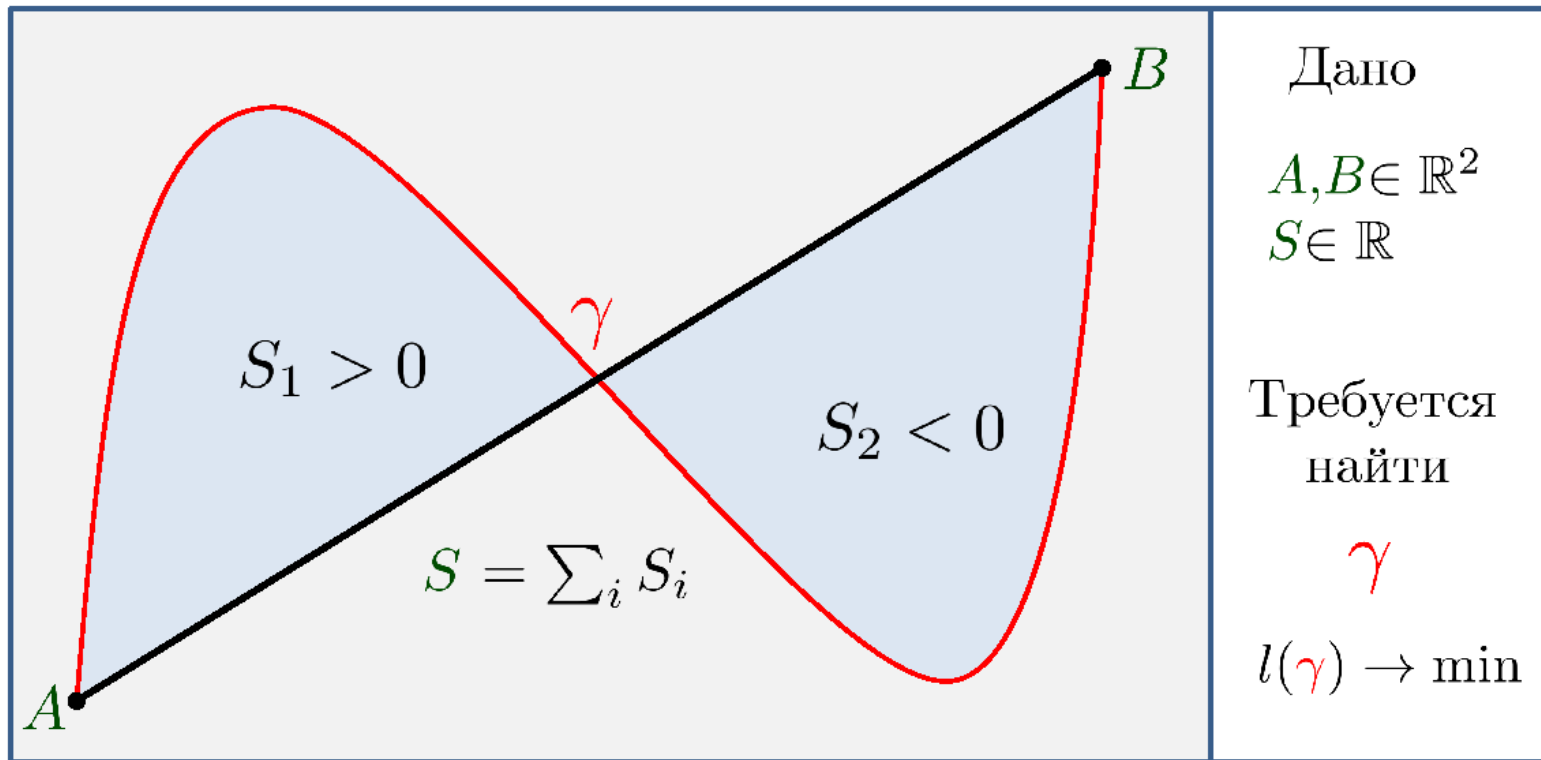
Здесь $\mathbb{1}$ обозначает тождественное преобразование.

Идея доказательства:

- 1) используя вращательную симметрию, ρ приводится к блочно-диагональному виду с собственными значениями λ_i ;
- 2) используя симметрию–растяжение, фиксируется $T = 1$;
- 3) используя натуральную параметризацию геодезических, $h_0 \in S^{n-1}$, и в силу непрерывности субриманова расстояния достаточно рассмотреть λ_i из некоторой окрестности $\mathcal{O}$ начала координат, ограниченной точками, соответствующим неподвижным точкам вращательной симметрии.

Для окончательного доказательства гипотезы требуется проверить, что экспоненциальное отображение инъективно внутри области $\mathcal{O}$. Это требует аккуратного анализа уравнений для каждого конкретного n .

Частный случай (2,3): группа Гейзенберга



- $q = (x_1, x_2, y) \in \mathbb{G}_2$. Заданы $q^0, q^1 \in \mathbb{G}_2$ требуется найти $\gamma : [0, T] \mapsto \mathbb{G}_2$:

$$\dot{\gamma}(t) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + u_2(t)X_2(\gamma(t)), \quad (\text{управляемая система})$$

$$\gamma(0) = q^0, \quad \gamma(T) = q^1, \quad (\text{граничные условия})$$

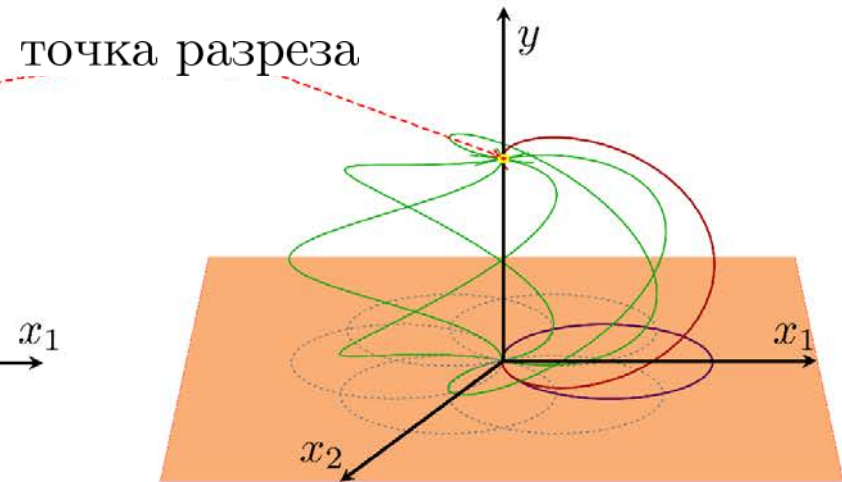
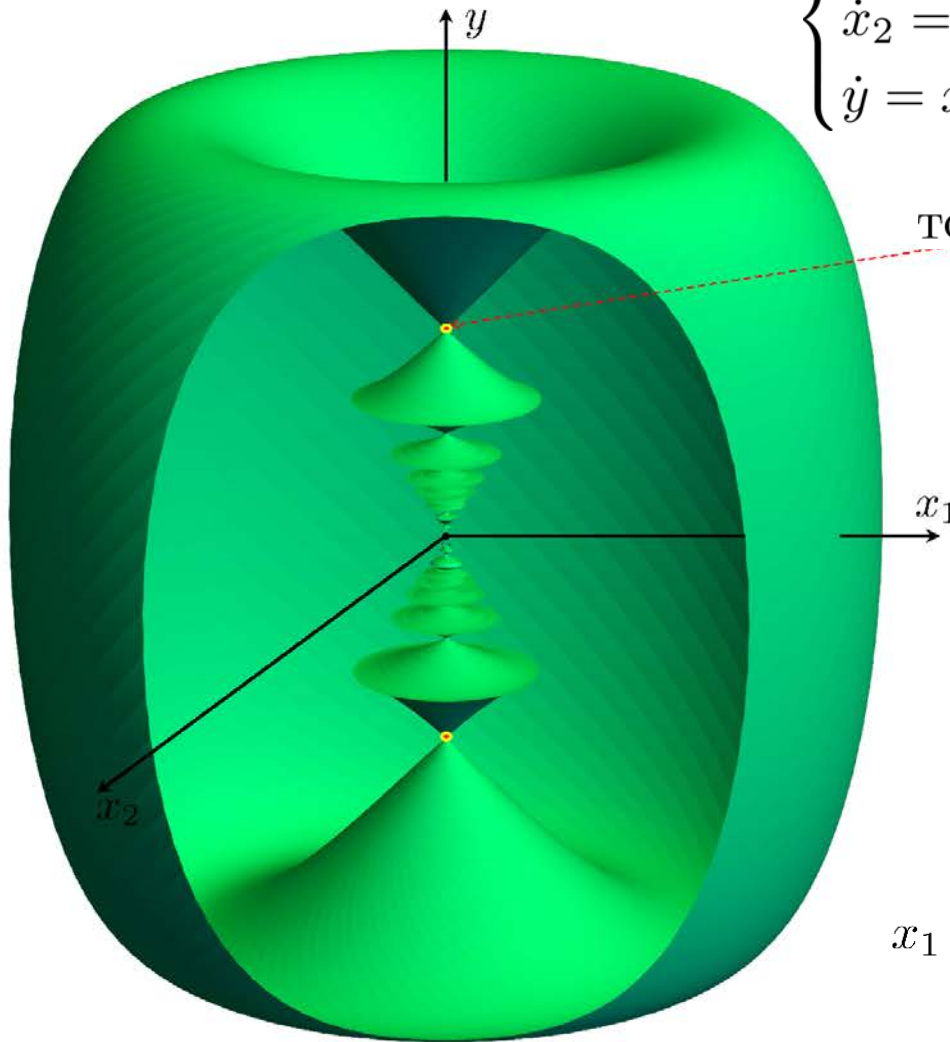
$$l(q) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} \, dt \rightarrow \min, \quad (\text{критерий качества})$$

где $X_1 = \partial_{x_1} - x_2 \partial_y$, $X_2 = \partial_{x_2} + x_1 \partial_y$; $u_1, u_2 \in L^\infty((0, T), \mathbb{R})$.

(2,3): Волновой фронт и множество разреза

Гамильтонова система ПМП:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = h_1, \\ \dot{x}_2 = h_2, \\ \dot{y} = x_1 h_2 - x_2 h_1. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = h_2 h_3, \\ \dot{h}_2 = -h_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = 0. \end{cases}$$



$(x_1(t), x_2(t))$ — дуги окружностей

$(x_1(t), x_2(t), y(t))$ — витки спиралей

$x_1 = 0, x_2 = 0, y \neq 0$ — множество разреза

Время разреза: $t_{cut} = \min\{t > 0 \mid x_1(t) = x_2(t) = 0\} = \frac{2\pi}{|h_3|}$.

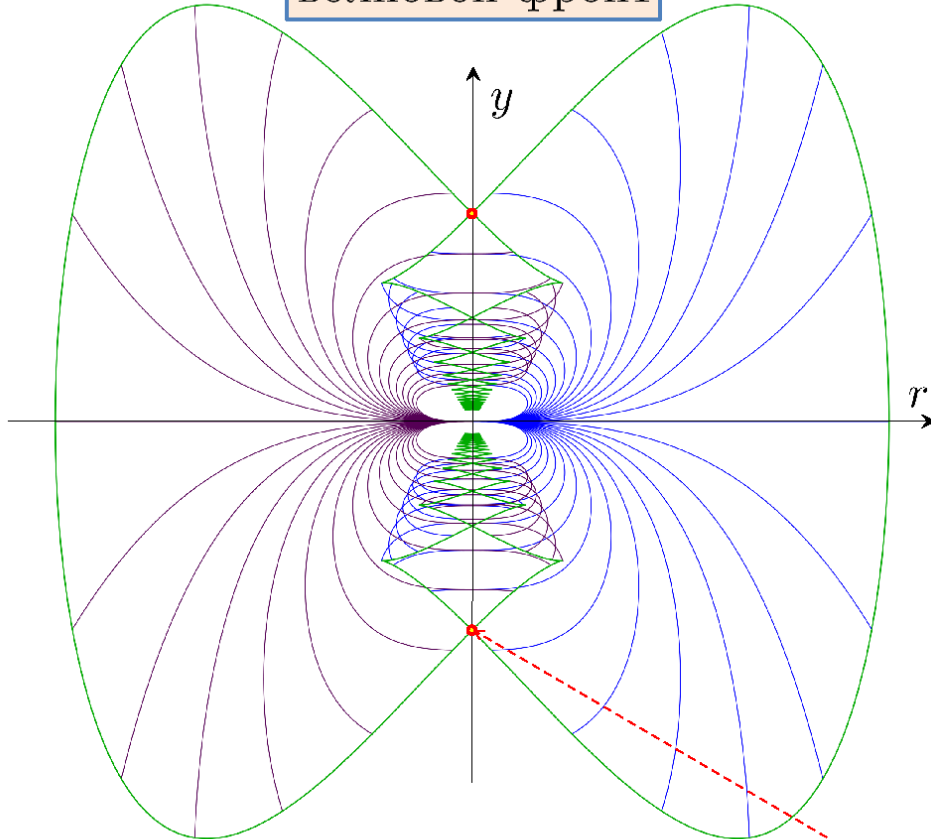
(2,3): редукция по вращательной симметрии

Полярные координаты: $\cos \phi = \frac{x_1}{r}$, $\sin \phi = -\frac{x_2}{r}$, где $r = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

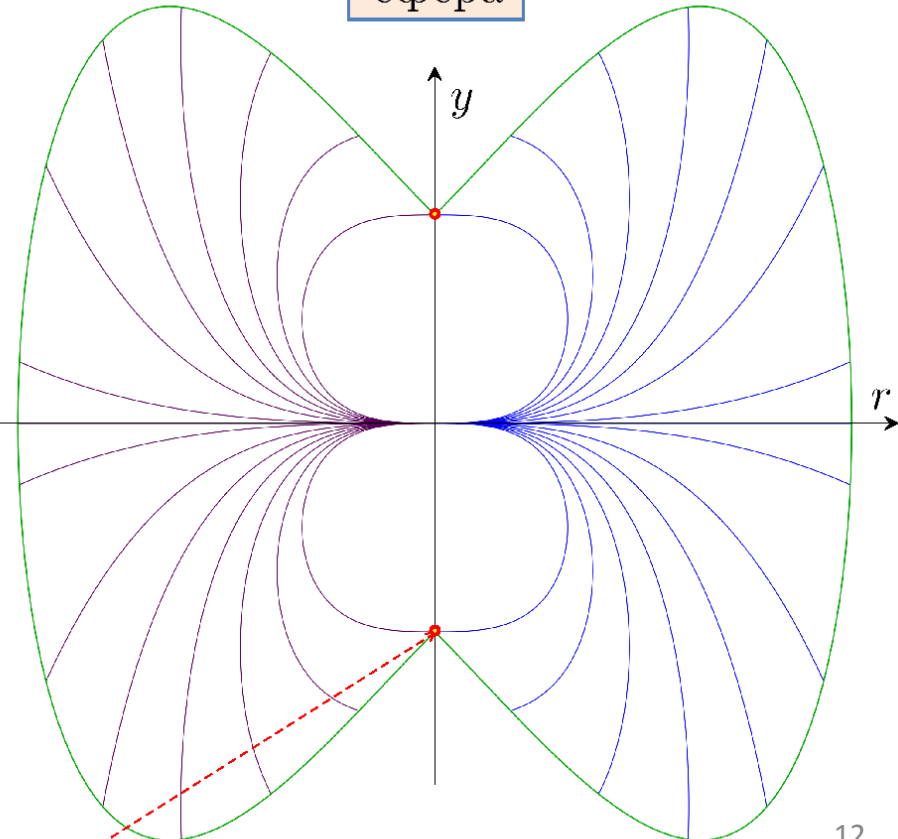
Почти риманова задача на плоскости Грушина:

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = u_1(t), & r(0) = 0, \quad r(T) = r^1, \\ \dot{y}(t) = u_2(t)r(t), & y(0) = 0, \quad y(T) = y^1, \end{cases} \quad \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt \rightarrow \min.$$

волновой фронт



сфера



точка разреза

(2,3): редукция по симметрии растяжения

Гамильтонова система ПМП для задачи на плоскости Грушина:

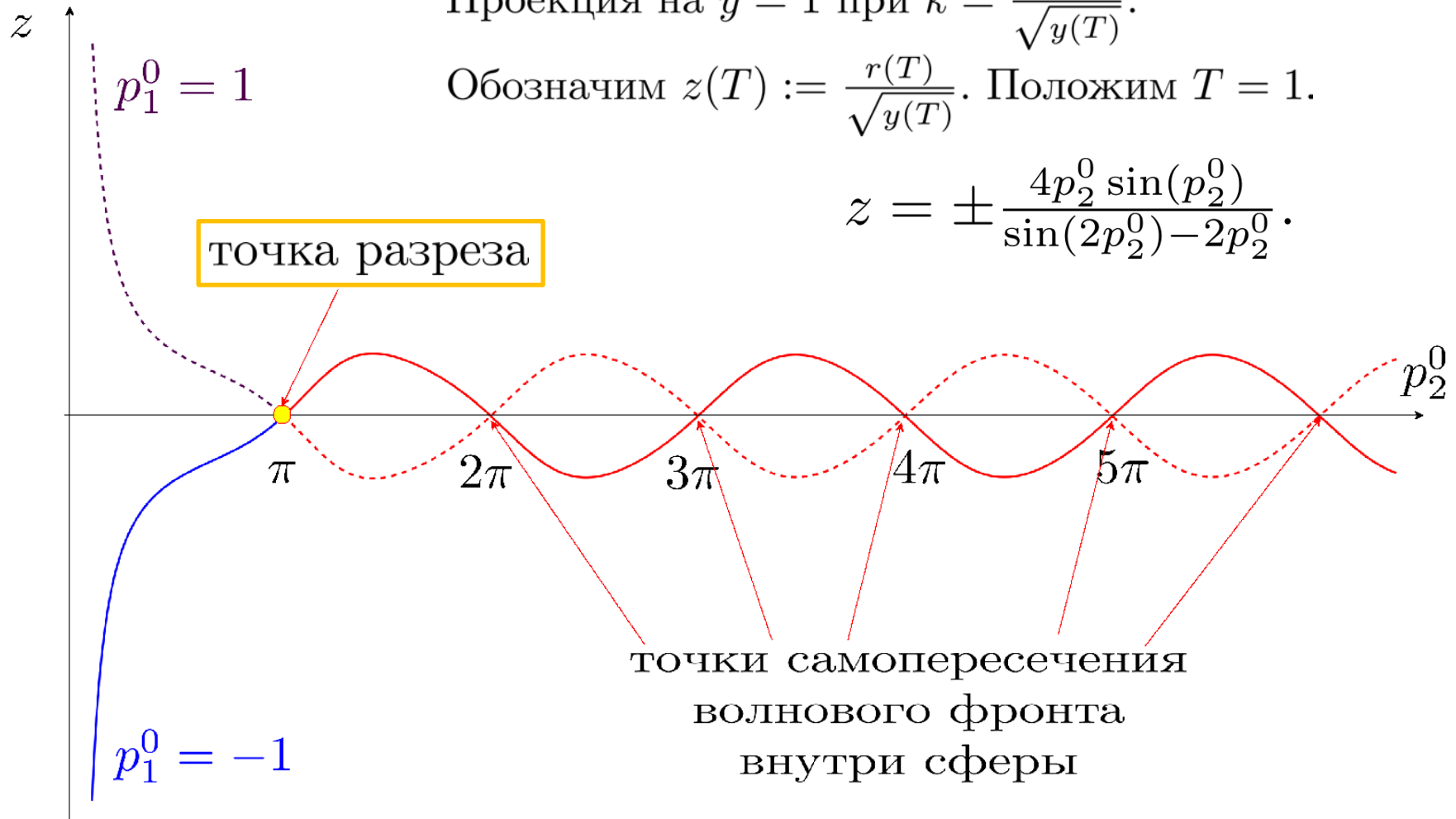
$$\begin{cases} \dot{r} = p_1, \\ \dot{y} = p_2 r^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p}_1 = -p_2^2 r, \\ \dot{p}_2 = 0, \end{cases} \quad H(r, y, p_1, p_2) = \frac{1}{2} (p_2^2 r^2 + p_1^2)$$

— гамильтониан

Проекция на $y = 1$ при $k = \frac{1}{\sqrt{y(T)}}$.

Обозначим $z(T) := \frac{r(T)}{\sqrt{y(T)}}$. Положим $T = 1$.

$$z = \pm \frac{4p_2^0 \sin(p_2^0)}{\sin(2p_2^0) - 2p_2^0}.$$



(3,6): случай О. Мясниченко

- $(x, y) \in \mathbb{G}_3 = \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3)$. Задано $(x^1, y^1) \in \mathbb{G}_3$ требуется найти $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{G}_3$

$$\dot{\gamma}(t) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + u_2(t)X_2(\gamma(t)) + u_3(t)X_3(\gamma(t)),$$

$$\gamma(0) = (0, 0), \quad q(T) = (x^1, y^1),$$

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t)} \, dt \rightarrow \min,$$

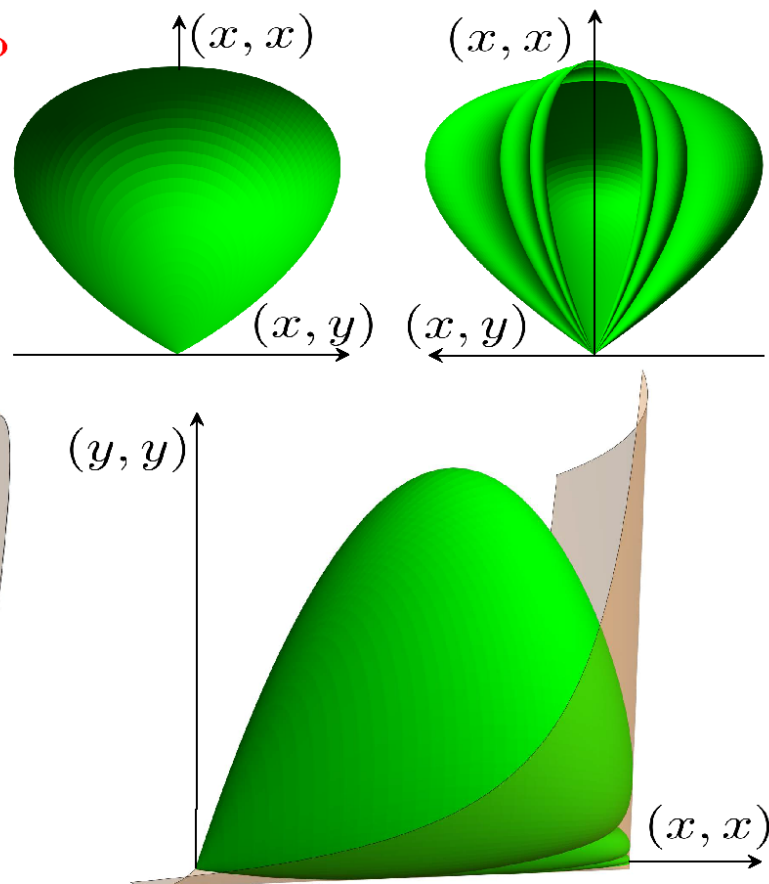
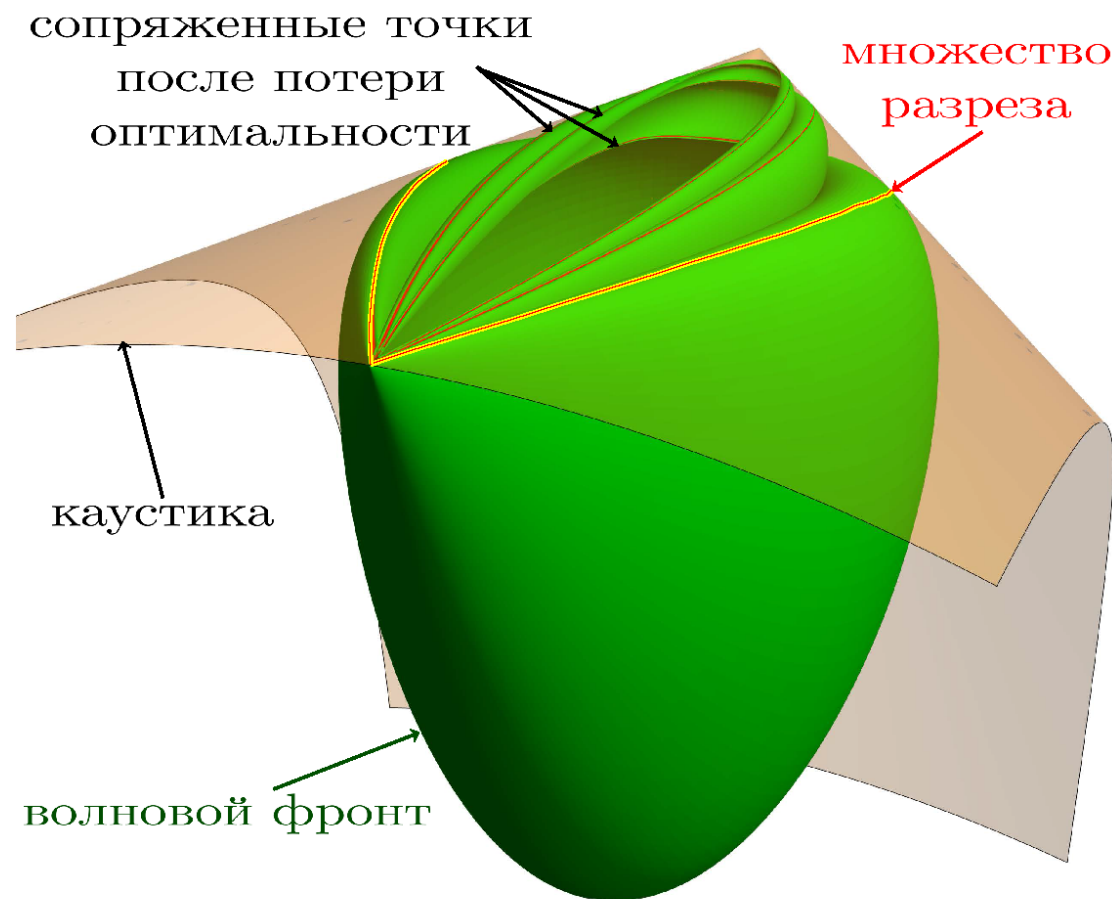
$$X_1 = \partial_{x_1} + x_3 \partial_{y_2} - x_2 \partial_{y_3}, \quad X_2 = \partial_{x_2} - x_3 \partial_{y_1} + x_1 \partial_{y_3}, \quad X_3 = \partial_{x_3} + x_2 \partial_{y_1} - x_1 \partial_{y_2}$$

- Гамильтонова система ПМП:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = h_1, \\ \dot{x}_2 = h_2, \\ \dot{x}_3 = h_3, \\ \dot{y}_1 = x_2 h_3 - x_3 h_2, \\ \dot{y}_2 = x_3 h_1 - x_1 h_3, \\ \dot{y}_3 = x_1 h_2 - x_2 h_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = h_2 h_4 + h_3 h_5, \\ \dot{h}_2 = -h_1 h_4 + h_3 h_6, \\ \dot{h}_3 = -h_1 h_5 - h_2 h_6, \\ \dot{h}_4 = 0, \\ \dot{h}_5 = 0, \\ \dot{h}_6 = 0. \end{cases}$$

$$\mathfrak{so}(3) \ni \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3,6): Волновой фронт и множество разреза



Случай (4,10): открытая задача

- $(x, y) \in \mathbb{G}_4 = \mathbb{R}^4 \times \mathfrak{so}(4)$. Заданы $(x^1, y^1) \in \mathbb{G}_4$ требуется найти $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{G}_4$

$$\dot{\gamma}(t) = u_1(t)X_1(\gamma(t)) + u_2(t)X_2(\gamma(t)) + u_3(t)X_3(\gamma(t)) + u_4(t)X_4(\gamma(t)),$$

$$\gamma(0) = (0, 0), \quad q(T) = (x^1, y^1),$$

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t) + u_4^2(t)} \, dt \rightarrow \min,$$

$$X_1 = \partial_{x_1} - x_2\partial_{y_1} - x_3\partial_{y_2} - x_4\partial_{y_3}, \quad X_2 = \partial_{x_2} + x_1\partial_{y_1} - x_3\partial_{y_4} - x_4\partial_{y_5},$$

$$X_3 = \partial_{x_3} + x_1\partial_{y_2} + x_2\partial_{y_4} - x_4\partial_{y_6}, \quad X_4 = \partial_{x_4} + x_1\partial_{y_3} + x_2\partial_{y_5} + x_3\partial_{y_6}.$$

- Гамильтонова система ПМП:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = h_1, & \dot{x}_2 = h_2, \\ \dot{x}_3 = h_3, & \dot{x}_4 = h_4, \\ \dot{y}_1 = x_1h_3 - x_3h_1, \\ \dot{y}_2 = x_4h_1 - x_1h_4, \\ \dot{y}_3 = x_1h_2 - x_2h_1, \\ \dot{y}_4 = x_4h_2 - x_2h_4, \\ \dot{y}_5 = x_3h_2 - x_2h_3, \\ \dot{y}_6 = x_3h_4 - x_4h_3, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = h_2h_7 + h_3h_5 - h_4h_6, \\ \dot{h}_2 = -h_1h_7 - h_3h_9 - h_4h_8, \\ \dot{h}_3 = -h_1h_5 + h_2h_9 - h_4h_{10}, \\ \dot{h}_4 = h_1h_6 + h_2h_8 - h_3h_{10}, \\ \dot{h}_5 = \dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = \dot{h}_9 = \dot{h}_{10} = 0. \end{cases}$$

Случай (4,10): редукция по симметриям

- Вертикальная часть гамильтоновой системы приводится к виду

$$\dot{h}_1 = -\lambda_1 h_2, \quad \dot{h}_2 = \lambda_1 h_1, \quad \dot{h}_3 = -\lambda_2 h_4, \quad \dot{h}_4 = \lambda_2 h_3,$$

где $\lambda_i \geq 0$ — модули собственных значений матрицы $\rho \in \mathfrak{so}(4)$.

- Используя параметризацию $t = l(\gamma(t)) \Leftrightarrow h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 = 1$,

$$\begin{cases} h_1 = a \cos \alpha_1, \\ h_2 = a \sin \alpha_1, \end{cases} \quad \begin{cases} h_3 = \sqrt{1 - a^2} \cos \alpha_2, \\ h_4 = \sqrt{1 - a^2} \sin \alpha_2, \end{cases} \quad \begin{aligned} a &\in [0, 1], \\ \alpha_i &\in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Обозначим $\mu_i := \frac{\lambda_i}{2}$, $\sin \psi := a$, $\cos \psi := \sqrt{1 - a^2}$, $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$
- Необходимое условие того, что $(x(1), y(1))$ является точкой разреза

$$\begin{cases} \sin \psi \frac{\sin \mu_1}{\mu_1} \cos(\alpha_1 + \mu_1) = \sin \hat{\psi} \frac{\sin \hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_1} \cos(\hat{\alpha}_1 + \hat{\mu}_1), \\ \sin \psi \frac{\sin \mu_1}{\mu_1} \sin(\alpha_1 + \mu_1) = \sin \hat{\psi} \frac{\sin \hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_1} \sin(\hat{\alpha}_1 + \hat{\mu}_1), \\ \sin^2(\psi) \frac{2\mu_1 - \sin(2\mu_1)}{2\mu_1^2} = \sin^2(\hat{\psi}) \frac{2\hat{\mu}_1 - \sin(2\hat{\mu}_1)}{2\hat{\mu}_1^2}, \\ \sin \psi \frac{\sin \mu_2}{\mu_2} \cos(\alpha_2 + \mu_2) = \sin \hat{\psi} \frac{\sin \hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_2} \cos(\hat{\alpha}_2 + \hat{\mu}_2), \\ \sin \psi \frac{\sin \mu_2}{\mu_2} \sin(\alpha_2 + \mu_2) = \sin \hat{\psi} \frac{\sin \hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_2} \sin(\hat{\alpha}_2 + \hat{\mu}_2), \\ \sin^2(\psi) \frac{2\mu_2 - \sin(2\mu_2)}{2\mu_2^2} = \sin^2(\hat{\psi}) \frac{2\hat{\mu}_2 - \sin(2\hat{\mu}_2)}{2\hat{\mu}_2^2}, \\ (\psi, \alpha_1, \mu_1, \alpha_2, \mu_2) \neq (\hat{\psi}, \hat{\alpha}_1, \hat{\mu}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\mu}_2), \\ \psi, \hat{\psi} \in [0, \frac{\pi}{2}], \mu_i, \hat{\mu}_i \in \mathbb{R}^+, \alpha_i, \hat{\alpha}_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заключение

- Рассмотрена задача о субримановых кратчайших на двухступенных свободных группах Карно $\mathbb{G}_n$;
- выписаны уравнения геодезических, исследованы непрерывные симметрии гамильтоновой системы ПМП;
- предложен метод редукции гамильтоновой системы по симметриям;
- приведена идея доказательства гипотезы Рицци–Серреса о множестве разреза для общего случая;
- случаи размерности $n = 2, 3, 4$ изучены детально;
- приведены изображения волновых фронтов, наглядно показывающие расположение точек разреза в размерностях $n = 2, 3$.
- В дальнейшем планируется продолжить исследование задачи в произвольной размерности и получить явные выражения для множества разреза.

Спасибо за внимание!