

Субфинслерова задача на группе Картана*

Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.

25 июня 2018 г.

Аннотация

Левоинвариантная l_∞ субфинслерова задача на группе Картана рассматривается как задача быстрогодействия. Описаны аномальные и особые нормальные траектории, доказана их оптимальность. Построен релейный фазовый поток, получены оценки числа переключений на релейных и смешанных траекториях.

Введение

Субфинслерова геометрия является естественным обобщением субримановой (а потому и римановой) геометрии. Пусть M — гладкое многообразие, Δ — векторное распределение на M , тогда субриманова структура задается скалярным произведением в Δ , а субфинслерова структура — нормой в Δ .

Заметный интерес к субфинслеровой геометрии возник в последние годы в связи с её применениями в геометрической теории групп [1], изометрически однородных пространствах [2], теории управления [3]. Важными вопросами субфинслеровой (как и субримановой) геометрии являются описание кратчайших и сфер, при этом естественными простейшими случаями являются левоинвариантные структуры на нильпотентных группах Ли. Левоинвариантная субфинслерова задача на группе Гейзенберга была исследована в работе [4]. Нильпотентные l_∞ субфинслеровы структуры в случаях Мартине и Грушина были изучены в работе [5]. Данная работа продолжает эту линию исследований и посвящена левоинвариантной l_∞ субфинслеровой задаче в простейшем 5-мерном свободном нильпотентном случае — на группе Картана.

1 Постановка задачи. Существование решений

Алгебра Картана — это 5-мерная нильпотентная алгебра Ли $L = \text{span}(X_1, \dots, X_5)$ с таблицей умножения $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_2, X_3] = X_5$, $\text{ad } X_4 = \text{ad } X_5 = 0$. Связная односвязная группа Ли M с алгеброй ли L называется группой Картана.

Левоинвариантная l_∞ субфинслерова задача на группе Картана ставится следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2, & q \in M, & \quad u \in U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\|_\infty \leq 1\}, \\ \|u\|_\infty &= \max(|u_1|, |u_2|), \\ q(0) &= q_0 = \text{Id}, & q(T) &= q_1, \\ T &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

Существование оптимальных управлений следует из теорем Рашевского–Чжоу и Филиппова [6].

2 Принцип максимума Понтрягина

Введем гамильтонианы $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$, $\lambda \in T^*M$, $i = 1, \dots, 5$, и соответствующие им гамильтоновы векторные поля $\vec{h}_i \in \text{Vec}(T^*M)$.

Теорема 1 (ПМП, [7, 6]). *Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $q(t)$, $t \in [0, T]$, оптимальны, то существуют кривая $\lambda_t \in T_{q(t)}^*M$ и число $\nu \leq 0$, для которых выполнены условия:*

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_t &= u_1(t)\vec{h}_1(\lambda_t) + u_2(t)\vec{h}_2(\lambda_t), \\ u_1(t)h_1(\lambda_t) + u_2(t)h_2(\lambda_t) &= H(\lambda_t) = (|h_1| + |h_2|)(\lambda_t), \\ \lambda_t &\neq 0, \\ H(\lambda_t) + \nu &\equiv 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Гамильтонова система ПМП (1) имеет 4 интеграла — функции Казимира на коалгебре Ли L^* : h_4 , h_5 , $E = h_3^2/2 + h_1h_5 - h_2h_4$ и гамильтониан H .

3 Анормальные траектории

Пусть $\nu = 0$.

Теорема 2. *Оптимальные анормальные траектории имеют вид*

$$u(t) \equiv \text{const}, \quad \|u(t)\|_\infty \equiv 1,$$

и все такие управления оптимальны.

Анормальные траектории суть однопараметрические подгруппы в M , касающиеся распределения $\text{span}(X_1, X_2)$; они задают оптимальный синтез на анормальном многообразии $A = \{e^{u_1X_1 + u_2X_2}(\text{Id}) \mid u_i \in \mathbb{R}\}$.

4 Виды нормальных экстремальных дуг

Пусть $-\nu = H(\lambda_t) > 0$. Экстремальная дуга λ_t , $t \in I = (\alpha, \beta) \subset [0, T]$, называется:

- релейной дугой, если $\text{card}\{t \in I \mid h_1h_2(\lambda_t) = 0\} < \infty$,
- особой дугой, если выполняется одно из двух условий: $h_1(\lambda_t) \equiv 0$ (h_1 — особая дуга) или $h_2(\lambda_t) \equiv 0$ (h_2 — особая дуга),
- смешанной дугой, если она состоит из конечного числа релейных и особых дуг.

Замечание. *Если $h_i(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)} \neq 0$, то $u_i(t)|_{(\alpha, \beta)} \equiv s_i := \text{sgn } h_i(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)}$.*

5 Особые дуги

Теорема 3. Любая h_1 -особая дуга удовлетворяет одному из следующих условий:

- a) $h_1 = h_3 = h_4 = h_5 \equiv 0$, $h_2 \equiv \text{const} \neq 0$, $\forall |u_1(t)| \leq 1$, $u_2 \equiv s_2 \in \{\pm 1\}$,
 b) $h_1 = h_3 \equiv 0$, $|h_5/h_4| \leq 0$, $h_4 \neq 0$, $h_2 \equiv \text{const} \neq 0$, $u_1(t) \equiv -s_2 h_5/h_4$, $u_2(t) \equiv s_2 \in \{\pm 1\}$.

Аналогичное описание имеет место для h_2 -особых дуг.

Следствие 1. Все особые траектории оптимальны.

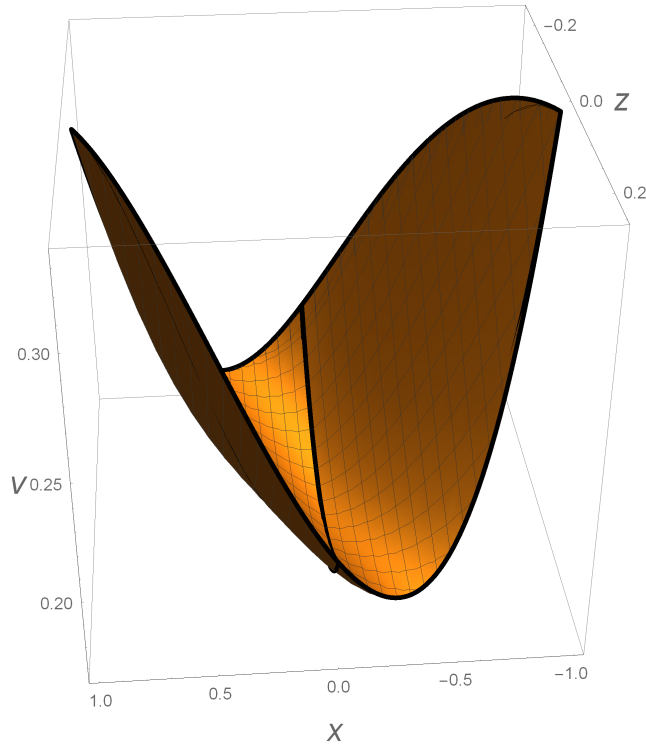


Рис. 1: Проекция множества достижимости вдоль особых траекторий на гиперплоскость (x, z, v)

Для описания множества достижимости вдоль особых траекторий применяется принцип максимума Понтрягина в геометрической постановке [6]. Исследование фазовых портретов вертикальной подсистемы нормальной гамильтоновой системы позволяет сформулировать следующую теорему об управлении для особых траекторий, приходящих на границу множества достижимости.

Теорема 4. h_1 -особые траектории с $u_2 \equiv 1$, концы которых формируют множество, содержащее границу множества достижимости, имеют один из двух типов:

- a) управление u_1 кусочно-постоянное с двумя переключениями и соответствующими значениями $\pm 1, 0, \pm 1$, либо $\pm 1, 0, \mp 1$ без ограничений на временные промежутки. В пространстве M концы соответствующих траекторий приходят в точки с минимальным значением координаты w при фиксированных значениях остальных координат;

b) управление u_1 кусочно-постоянное со значениями $\pm 1, \mp 1, \pm 1, \mp 1, \dots$, соответствующими временными промежутками $T_0, T_1, T_2, T_1, T_2, \dots, T_i, T_3$ при этом $T_3 \leq T_{3-i}$ и $T_0 \leq T_2$, где $i = 1, 2$. В пространстве M концы соответствующих траекторий приходят в точки с максимальным значением координаты w при фиксированных значениях остальных координат.

Замечание. Второй тип h_1 -особых траекторий при $2T_1 < T_2$ имеет не более трех переключений.

Проекция множества достижимости вдоль h_1 -особых траекторий с $u_2 \equiv 1$ на пространство (x, z, v) приведена на Рис. 1.

6 Релейный поток

Если $h_1 h_2(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)} \neq 0$, то $u(t)|_{(\alpha, \beta)} \equiv (s_1, s_2)$, поэтому релейные экстремали удовлетворяют следующей гамильтоновой системе с гамильтонианом $H = |h_1| + |h_2|$:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -s_2 h_3, \\ \dot{h}_2 = s_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = s_1 h_4 + s_2 h_5, \\ \dot{h}_4 = \dot{h}_5 = 0, \\ \dot{q} = s_1 X_1 + s_2 X_2. \end{cases} \quad (2)$$

Учитывая симметрию $(\lambda, q) \mapsto (k, \lambda, q)$, $k > 0$, будем считать далее, что $H(\lambda_t) \equiv 1$.

Введем на квадрате $\{(h_1, h_2) | H(\lambda) = 1\}$ угловую координату $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$h_1 = \operatorname{sgn}(\cos \theta) \cos^2 \theta, \quad h_2 = \operatorname{sgn}(\sin \theta) \sin^2 \theta.$$

Тогда вертикальная часть системы (2) принимает форму:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{h_3}{|\sin 2\theta|}, & \theta \neq \frac{\pi n}{2}, \\ \dot{h}_3 = s_1 h_4 + s_2 h_5, & s_1 = \operatorname{sgn} \cos \theta, \quad s_2 = \operatorname{sgn} \sin \theta. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) сохраняется группой симметрий квадрата $\{(h_1, h_2) | H = 1\}$. Факторизуя по действию этой группы, можно свести рассмотрение системы (3) к фундаментальной области этой группы $\{(h_4, h_5) \in \mathbb{R}^2 | h_4 \geq h_5 \geq 0\}$.

На основе исследования фазового портрета системы (3) строится релейный поток.

Предложение 1. Пусть $\lambda \in L^* \cap \{H = 1\}$ и $h_4 \geq h_5 \geq 0$.

Если $E \neq h_4 > 0$ или $h_4 = h_5 = 0$, то для любого $t > 0$ существует единственное решение λ_t системы (3), удовлетворяющее начальному условию $\lambda_0 = \lambda$, и соответственно единственная релейная траектория $q(t) = \pi(\lambda_t) =: \operatorname{Exp}(\lambda, t)$.

Если $E = h_4 > 0$, то для любого $T > 0$ существует конечное число решений $\{\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^N\}$, $t \in [0, T]$, системы (3) с начальным условием $\lambda_0^1 = \dots = \lambda_0^N = \lambda$, и соответственно конечное число релейных траекторий $\{q^1(t), \dots, q^N(t)\} = \{\pi(\lambda_t^1), \dots, \pi(\lambda_t^N)\} =: \operatorname{Exp}(\lambda, t)$.

Определим время разреза вдоль релейных траекторий:

$$t_{\text{cut}}(\lambda) := \sup\{T > 0 \mid \text{ хотя бы одна из траекторий } \operatorname{Exp}(\lambda, t) \text{ оптимальна при } t \in [0, T]\}.$$

7 Оптимальность релейных траекторий

7.1 Релейные траектории с малой энергией E

Теорема 5. Если релейная экстремаль $\lambda_t, t \in [0, +\infty)$, удовлетворяет неравенству

$$\min(-|h_4|, -|h_5|) < E \leq \max(-|h_4|, -|h_5|),$$

то она оптимальна, т.е. $t_{\text{cut}}(\lambda_0) = +\infty$.

7.2 Релейные траектории с большой энергией E

С помощью необходимых условий оптимальности [8, 5] доказана следующая оценка:

Теорема 6. Если $E > \max(-|h_4|, -|h_5|)$, то оптимальные релейные траектории имеют не более 11 переключений. В частности, в этом случае $t_{\text{cut}}(\lambda) < +\infty$.

8 Общий вид нормальных экстремалей

Предложение 2. Для любой нормальной экстремали $\lambda_t, t \in [0, T]$, существуют моменты времени $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$, для которых выполняются условия:

- $h_1 h_2(\lambda_{t_i}) = 0, i = 1, \dots, n,$
- $\forall i = 1, \dots, n-1 \quad h_1 h_2(\lambda_t)|_{(t_i, t_{i+1})} \neq 0 \quad \text{или}$
 $h_1(\lambda_t)|_{[t_i, t_{i+1}]} \equiv 0, \quad h_2(\lambda_t)|_{(t_i, t_{i+1})} \neq 0 \quad \text{или}$
 $h_2(\lambda_t)|_{[t_i, t_{i+1}]} \equiv 0, \quad h_1(\lambda_t)|_{(t_i, t_{i+1})} \neq 0.$

9 Смешанные экстремальные дуги

Предложение 3. Пусть $h_4 \geq h_5 \geq 0$. Особые экстремальные дуги могут примыкать к релейным дугам только в точках, удовлетворяющих следующим условиям:

- $\theta = 3\pi/2, h_3 = 0, 0 < h_5 \leq h_4,$
- $\theta = 0, h_3 = 0, 0 < h_5 = h_4.$

С помощью необходимого условия оптимальности [8, 5] доказана следующая оценка:

Теорема 7. Оптимальные смешанные управления имеют не более 13 переключений.

10 Заключение

В данной работе описана структура экстремальных траекторий в левоинвариантной l_∞ субфинслеровой задаче на группе Картана и получены оценки числа переключений на оптимальных траекториях. Ряд важных вопросов по этой задаче остается открытым:

- точное описание времени разреза и множества разреза,
- структура и регулярность субфинслеровой сферы.

Этим вопросам будут посвящены дальнейшие работы.

Авторы выражают благодарность Энрико Ле Донне за обсуждения задачи.

Список литературы

- [1] Pierre Pansu, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un, *Ann. of Math. (2)* 129 (1989), no. 1, 1–60.
- [2] В.Н. Берестовский, Однородные пространства с внутренней метрикой. II, *Сиб. мат. журнал* 30 (1989), no. 2, 14–28, 225.
- [3] Ugo Boscain, Thomas Chambrion, and Grégoire Charlot, Nonisotropic 3-level quantum systems: complete solutions for minimum time and minimum energy, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 5 (2005), no. 4, 957–990 (electronic).
- [4] H. Busemann, The isoperimetric problem in the Minkowski plane. *AJM* 69 (1947), 863–871.
- [5] Davide Barilari, Ugo Boscain, Enrico Le Donne, Mario Sigalotti, Sub-Finsler Structures from the Time-Optimal Control Viewpoint for some Nilpotent Distributions, *J. Dyn. Control Syst.* (2017) 23: 547.
- [6] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М.: Физматлит, 2005.
- [7] Л.С. Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкредидзе, Е.Ф.Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Наука, 1961.
- [8] A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze, Symplectic geometry for optimal control, Nonlinear controllability and optimal control, *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.*, vol. 133, Dekker, New York, 1990, pp. 263– 277.