

# Субфинслерова задача на группе Картана <sup>\*</sup>

А.А. Ардентов<sup>†</sup> Э. Ле Донне<sup>‡</sup> Ю.Л. Сачков<sup>§</sup>

25 декабря 2018 г.

## Аннотация

В этой статье изучается задача субфинслеровой геометрии на свободной нильпотентной группе ранга 2 глубины 3. Такая группа также называется группой Картана, она имеет естественную структуру группы Карно, на которой вводится метрика с помощью  $\ell_\infty$  нормы на её первом слое. Используются методы теории оптимального управления. С помощью принципа максимума Понтрягина охарактеризованы экстремальные кривые. Описаны аномальные и особые дуги, построен релейный поток.

## 1 Введение

Субфинслерова геометрия является естественным обобщением финслеровой геометрии, субримановой геометрии и, как следствие, римановой геометрии. Субфинслеровы структуры возникают в геометрической теории групп, в теории изометрически однородных геодезических пространств и различных приложениях в теории управления; см. [11, 5], [3, 4, 10] и [2] соответственно.

Особо важно то, что группы Ли, снабженные субфинслеровой структурой, возникают в геометрической теории групп как асимптотические конусы нильпотентных конечно порожденных групп. А именно, в работе [11] Пансу установил, что асимптотические конусы нильпотентных дискретных групп с конечным числом образующих, снабженные словарной метрикой, суть группы Карно, снабженные левоинвариантной субфинслеровой метрикой. Заметим, что такие метрики возникают из структур, отличных от субримановых, так как нормы описываются выпуклыми оболочками конечного числа точек. В этой связи  $\ell_1$  норма является классическим примером. Заметим, что для групп ранга 2 эта норма отличается от  $\ell_\infty$  просто заменой переменных.

Настоящая статья направлена на понимание геометрии  $\ell_\infty$  субфинслеровых пространств. Некоторые естественные задачи связаны с регулярностью сфер и геодезических. Например, задача, можно ли любую пару точек соединить кусочно-гладкой кривой минимальной длины, является нерешенной. Если это так, то неизвестно, ограничено ли равномерно число таких кусков. Все эти фундаментальные вопросы возникают непосредственно из асимптотического изучения нильпотентных конечно порожденных групп. Существуют также гипотезы об асимптотических разложениях для роста объема шаров больших радиусов, которые связаны со спрямляемостью сфер и с вышеупомянутой регулярностью геодезических для асимптотического конуса, см. [5].

Задачу поиска кратчайших кривых в субфинслеровых группах Ли можно переформулировать как задачу быстродействия для системы, линейной по управлению. Формальное введение можно найти в работе [1]. В частности, существование оптимальных по быстродействию траекторий — классическое следствие теоремы Филиппова. Однако не существует общих результатов по регулярности, кроме недавней работы [9].

Цель настоящей статьи — рассмотреть конкретную группу и охарактеризовать в ней экстремальные кривые.

Изучается единственная  $\ell_\infty$  субфинслерова задача на свободной нильпотентной группе ранга 2 глубины 3. Такую группу также называют группой Картана, она имеет естественную структуру группы Карно. В

\*Разделы 1–3 настоящей статьи написаны Э. Ле Донне, разделы 4–7 написаны А.А. Ардентовым и Ю.Л. Сачковым. Работа А.А. Ардентова и Ю.Л. Сачкова поддержана Российским научным фондом, грант 17-11-01387 и выполнена в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна РАН. Э. Ле Донне частично поддержан Академией Финляндии (грант 288501 ‘Geometry of subRiemannian groups’) и Европейским исследовательским советом (грант ERC 713998 GeoMeG ‘Geometry of Metric Groups’).

<sup>†</sup>Институт программных систем, Переславль-Залесский, Россия, aaa@pereslavl.ru

<sup>‡</sup>Департамент математики и статистики, Р.О. Box 35, FI-40014, Университет Йювяскюля, Финляндия, ledonne@msri.org

<sup>§</sup>Институт программных систем, Переславль-Залесский, Россия, yusachkov@gmail.com

координатах её распределение можно выразить с помощью линейной оболочки двух векторных полей  $X_1, X_2$ . В данной работе рассматривается  $\ell_\infty$  норма относительно  $X_1, X_2$ .

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 ставится задача и отмечается существование кратчайших. В разделе 3 к задаче применяется принцип максимума Понтрягина. В разделе 4 описываются оптимальные аномальные траектории. Далее, в разделе 5 определяются различные типы нормальных экстремальных дуг: релейные, особые и смешанные.

В разделе 6 описываются особые дуги; оказывается, что все особые траектории оптимальны. Кроме того, описывается множество достижимости особых траекторий за фиксированное время (это множество совпадает с частью субфинслеровой сферы, заполненной особыми траекториями). Получено явное описание этого множества и доказано, что оно полуалгебраично.

В разделе 7 изучаются релейные траектории. Описывается фазовый портрет гамильтоновой системы, соответствующей релейным траекториям, и строится релейный поток, который порождает эти траектории.

Наконец, в разделе 8 обсуждаются вопросы для дальнейшего исследования.

Заметим, что нильпотентность группы заметно упрощает задачу. Например, в нашем случае релейные траектории имеют кусочно полиномиальные координаты.

Обратим внимание, что существует мало других работ, рассматривающих вопросы субфинслеровой геометрии. Помимо упомянутых ранее, в работах [6, 8] авторы изучают субфинслерову геометрию в трехмерном случае и на многообразиях энгелева типа, как-то геодезические и жесткие кривые. Однако в этих работах присутствует классическое в финслеровой геометрии предположение: норма предполагается гладкой вне нулевого сечения и строго выпуклой. Настоящая статья рассматривает случай, в котором эти предположения не справедливы. Также известна другая работа [7], в которой авторы изучают субфинслерову геометрию, связанную с решениями эволюционных уравнений, заданных с помощью дифференциальных операторов первого порядка, предоставляя еще одну область, где субфинслерова геометрия естественно появляется.

## 2 Постановка задачи. Существование решений

Рассмотрим 5-мерную нильпотентную алгебру Ли  $L = \text{span}(X_1, \dots, X_5)$  с ненулевыми скобками

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5, \quad (2.1)$$

таблица умножения (2.1) изображена на Рис. 1. Алгебра Ли  $L$  является свободной нильпотентной алгеброй

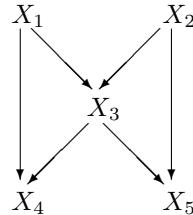


Рис. 1: Алгебра Картана

Ли глубины 3 и с двумя порождающими, она называется алгеброй Картана. Далее, пусть  $M$  есть односвязная группа Ли с алгеброй Ли  $L$ ;  $M$  называется группой Картана. Воспользуемся следующей моделью:

$$M = \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5,$$

с алгеброй Ли  $L$ , заданной левоинвариантными векторными полями на  $\mathbb{R}^5$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial v} + y \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_5 &= \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

Правило умножения в группе Картана  $M$  для этой модели приведено в работе [12]. Левоинвариантная  $\ell_\infty$  субфинслерова задача на группе Картана ставится следующим образом:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in M, \quad u \in U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\|_\infty \leq 1\}, \quad (2.2)$$

$$\|u\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|),$$

$$q(0) = q_0 = \text{Id} = (0, \dots, 0), \quad q(T) = q_1, \quad (2.3)$$

$$T \rightarrow \min. \quad (2.4)$$

**Замечание.** Задача (2.2)–(2.4) геометрически формулируется как следующая задача в плоскости  $\mathbb{R}_{xy}^2$ .

Пусть заданы точка  $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , число  $S \in \mathbb{R}$  и точка  $c \in \mathbb{R}^2$ . Точка  $(x_1, y_1)$  соединена с началом координат кривой  $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$ . Нужно найти кривую  $\gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [0, T]\}$  со скоростью  $\|(\dot{x}(t), \dot{y}(t))\|_\infty \leq 1$ , которая соединяет начало координат с точкой  $(x_1, y_1)$ , ограничивает вместе с кривой  $\gamma_0$  область с ориентированной площадью  $S$  и с центром масс в точке  $c$ , для которой время движения  $T$  минимально.

Теорема Рашевского-Чжоу [13] обеспечивает полную управляемость системы (2.2), а из теоремы Филиппова [13] следует существование оптимальных управлений в задаче быстродействия (2.2)–(2.4).

### 3 Принцип максимума Понтрягина

К задаче (2.2)–(2.4) применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП).

Обозначим точки кокасательного расслоения многообразия  $M$  через  $\lambda \in T^*M$ . Введем линейные на слоях гамильтонианы  $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , и гамильтониан ПМП

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \lambda, u_1 X_1 + u_2 X_2 \rangle + \nu = u_1 h_1(\lambda) + u_2 h_2(\lambda) + \nu, \quad \lambda \in T^*M, \quad u \in U, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через  $\vec{h}_i \in \text{Vec}(T^*M)$  гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтоновой функции  $h_i$ .

**Теорема 1** (ПМП [14, 13]). *Если управление  $u(t)$  и соответствующая траектория  $q(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , являются оптимальными в задаче (2.2)–(2.4), то существуют такие кривые  $\lambda \in \text{Lip}([0, T], T^*M)$ ,  $\lambda_t \in T_{q(t)}^*M$ , и число  $\nu \leq 0$ , что выполнены следующие условия:*

$$\dot{\lambda}_t = u_1(t) \vec{h}_1(\lambda_t) + u_2(t) \vec{h}_2(\lambda_t), \quad (3.1)$$

$$u_1(t) h_1(\lambda_t) + u_2(t) h_2(\lambda_t) = \max_{v \in U} (v_1 h_1(\lambda_t) + v_2 h_2(\lambda_t)) = H(\lambda_t), \quad (3.2)$$

$$H(\lambda) := (|h_1| + |h_2|)(\lambda), \quad (3.3)$$

$$\lambda_t \neq 0, \quad (3.3)$$

$$h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = H(\lambda_t) + \nu \equiv 0. \quad (3.4)$$

Различают следующие два случая:

(A)  $\nu = 0 \Leftrightarrow$  экстремаль  $\lambda_t$  является аномальной  $\Leftrightarrow H(\lambda_t) \equiv 0$ ,

(N)  $\nu < 0 \Leftrightarrow$  экстремаль  $\lambda_t$  является нормальной  $\Leftrightarrow H(\lambda_t) \equiv \text{const} > 0$ .

Гамильтонова система ПМП (3.1) в координатах  $(h_1, \dots, h_5; q)$  записывается следующим образом:

$$\dot{h}_1 = -u_2 h_3, \quad (3.5)$$

$$\dot{h}_2 = u_1 h_3, \quad (3.6)$$

$$\dot{h}_3 = u_1 h_4 + u_2 h_5, \quad (3.7)$$

$$\dot{h}_4 = \dot{h}_5 = 0, \quad (3.8)$$

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2. \quad (3.9)$$

**Лемма 1.** Коалгебра Ли  $L^* = T_{\text{Id}}^* M$  имеет функции Казимира  $h_4, h_5$ ,  $E = \frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4$ .

*Доказательство.*  $\{h_4, h_i\} = \{h_5, h_i\} = \{E, h_i\} = 0$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .  $\square$

Таким образом, гамильтонова система (3.5)–(3.9) в дополнение к  $h_4$  и  $h_5$  также имеет интеграл  $E$ .

**Лемма 2.** Если существует  $i \in \{1, 2\}$ , для которого  $u_i(t) \equiv 1$  либо  $u_i(t) \equiv -1$ , то управление  $u(t)$  оптимально.

*Доказательство.* Если  $u_1(t) \equiv 1$  (соотв.  $-1$ ), то координата  $x(t)$  меняется с максимально (соответственно минимально) возможной скоростью. Аналогично для  $u_2(t)$  и  $y(t)$ .  $\square$

Обозначим через  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$  множество достижимости системы (2.2) за время  $T > 0$  вдоль траекторий, выходящих из точки  $q_0$  с управлением  $u_i(t) \equiv 1$  либо  $u_i(t) \equiv -1$  при  $i \in \{1, 2\}$ .

**Определение 1.** Управление  $u(t)$  и соответствующую траекторию  $q(t)$  назовём геометрически оптимальными, если существует  $i \in \{1, 2\}$ , для которого  $u_i(t) \equiv 1$  либо  $u_i(t) \equiv -1$ , а конец траектории  $q(T)$  приходит на границу множества  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$ , т.е.  $q(T) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$ .

Для описания множества  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$  применяется ПМП в геометрической постановке [13], который имеет следующую формулировку для задачи Коши (2.2)–(2.3) с условием  $u_2(t) \equiv 1$ , схожую с формулировкой теоремы 1.

**Теорема 2** (Геометрическая формулировка ПМП[13]). Если управление  $u(t)$  с условием  $u_2(t) \equiv 1$  и соответствующая траектория  $q(t), t \in [0, T]$ , являются геометрически оптимальными в задаче (2.2)–(2.3), то существует такая линициева кривая в кокасательном расслоении  $\lambda_t \in T_{q(t)}^* M$ , что выполнены условия (3.1), (3.3), а также условие максимума

$$u_1(t)h_1(\lambda_t) + h_2(\lambda_t) = \max_{\bar{u}_1 \in [-1, 1]} (\bar{u}_1 h_1(\lambda_t) + h_2(\lambda_t)) = H(\lambda_t). \quad (3.10)$$

**Следствие 1.** Гамильтонова система для геометрической формулировки ПМП в координатах  $(h_1, \dots, h_5; q)$  совпадает с системой (3.5)–(3.9) при условии  $u_2 \equiv 1$ .

**Лемма 3.** Если управление  $u(t), t \in [0, T]$  оптимально, то  $\|u(t)\|_\infty \equiv 1$  при п.б.  $t \in [0, T]$ .

*Доказательство.* Если  $\|u(t)\|_\infty < 1$  на подмножестве положительной меры отрезка  $[0, T]$ , то траектория  $q(t)$ ,  $t \in [0, T]$  может быть перепараметризована и пройдена за меньшее время, чем  $T$ .  $\square$

## 4 Аномальные траектории

Пусть  $\nu = 0$ .

**Теорема 3.** Оптимальные аномальные управлениа имеют вид

$$u(t) \equiv \text{const}, \quad \|u(t)\|_\infty \equiv 1, \quad (4.1)$$

и все такие управления оптимальны.

Эти управлениа определяют оптимальный синтез на аномальном многообразии распределения  $\text{span}(X_1, X_2)$ :

$$A = \{e^{(u_1 X_1 + u_2 X_2)}(\text{Id}) \mid u_i \in \mathbb{R}\} = \{q \in M \mid z = 0, v = y(x^2 + y^2)/6, w = -x(x^2 + y^2)/6\}.$$

Аномальные траектории образуют однопараметрические подгруппы в  $M$ , касательные к распределению  $\text{span}(X_1, X_2)$ . Проекции аномальных траекторий на плоскость  $(x, y)$  суть прямые линии.

*Доказательство.* В аномальном случае имеем  $\nu = -H(\lambda_t) \equiv 0$ . Из условия максимума (3.2) ПМП следует, что вдоль аномальной экстремали  $h_1(\lambda_t) = h_2(\lambda_t) \equiv 0$ . Для оптимальной экстремали выполнено  $(u_1^2 + u_2^2)(t) \neq 0$ , значит уравнения (3.5), (3.6) приводят к тождеству  $h_3(\lambda_t) \equiv 0$ , откуда из уравнения (3.7) получаем  $u_1(t)h_4(\lambda_t) + u_2(t)h_5(\lambda_t) \equiv 0$ .

Суммируя вышесказанное, оптимальные аномальные экстремали удовлетворяют условиям:  $h_1(\lambda_t) = h_2(\lambda_t) = h_3(\lambda_t) \equiv 0$ ,  $\dot{h}_4(\lambda_t) = \dot{h}_5(\lambda_t) \equiv 0$ ,  $u(t) \perp (h_4, h_5)(\lambda_t)$ . Если аномальное управление  $u(t)$  непостоянно, то оно не является оптимальным. Из леммы 3 следует, что  $\|u(t)\|_\infty \equiv 1$ .

Оптимальность всех управлений (4.1) следует из леммы 2.

Оптимальные аномальные траектории суть однопараметрические подгруппы группы Картана, касательные к распределению  $\text{span}(X_1, X_2)$ , их параметризация выглядит следующим образом:

$$x = u_1 t, \quad y = u_2 t, \quad z = 0, \quad v = u_2 \frac{u_1^2 + u_2^2}{6} t^3, \quad w = -u_1 \frac{u_1^2 + u_2^2}{6} t^3.$$

□

## 5 Типы нормальных экстремальных дуг

Теперь рассмотрим нормальные экстремали, т.е. предположим, что  $-\nu = H(\lambda_t) > 0$ .

Назовём нормальную экстремальную дугу  $\lambda_t, t \in I = (\alpha, \beta) \subset [0, T]$ :

- релейной дугой, если

$$\text{card}\{t \in I \mid h_1 h_2(\lambda_t) = 0\} < \infty,$$

- особой дугой, если одно из условий выполнено:

$$\begin{aligned} h_1(\lambda_t) &\equiv 0, \quad t \in I \quad (h_1\text{-особая дуга}), \quad \text{или} \\ h_2(\lambda_t) &\equiv 0, \quad t \in I \quad (h_2\text{-особая дуга}), \end{aligned}$$

- смешанной дугой, если она состоит из конечного числа релейных и особых дуг.

Заметим, что априори этот список возможных типов нормальных дуг не полон: например, возможен феномен Фулера. Но апостериори мы докажем, что этот список в действительности полон.

**Замечание.** Если  $h_i(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)} \neq 0$ , то  $u_i(t)|_{(\alpha, \beta)} \equiv s_i := \text{sgn } h_i(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)}$ . Таким образом, релейное управление кусочно постоянно со значениями в вершинах  $(\pm 1, \pm 1)$  квадрата  $U$ .

## 6 Особые дуги

### 6.1 Описание особых дуг

**Теорема 4.** Любая  $h_1$ -особая нормальная дуга удовлетворяет одному из следующих условий:

- $h_1 = h_3 = h_4 = h_5 \equiv 0$ ,  $h_2 \equiv \text{const} \neq 0$ ,  
 $|u_1(t)| \leq 1$ ,  $u_2 \equiv s_2 \in \{\pm 1\}$ ,
- $h_1 = h_3 \equiv 0$ ,  $|\frac{h_5}{h_4}| \leq 1$ ,  $h_4 \neq 0$ ,  $h_2 \equiv \text{const} \neq 0$ ,  
 $u_1(t) \equiv u_1^a = -s_2 \frac{h_5}{h_4}$ ,  $u_2(t) \equiv s_2 \in \{\pm 1\}$ .

*Доказательство.* По определению, вдоль  $h_1$ -особой дуги имеем:

$$h_1(\lambda_t) \equiv 0, \quad H(\lambda_t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad h_2(\lambda_t) \neq 0, \quad t \in I = (\alpha, \beta) \subset [0, T].$$

Из условия максимума ПМП  $u_2(t)|_I \equiv s_2 \in \{\pm 1\}$ . Из гамильтоновой системы ПМП,  $h_3(\lambda_t) = -\frac{\dot{h}_1(\lambda_t)}{u_2(t)} \equiv 0$ , таким образом,  $h_2(\lambda_t) \equiv \text{const} \neq 0$ . Более того,  $u_1(t)h_4 + s_2h_5 = \dot{h}_3(\lambda_t) \equiv 0$ .

(a) Если  $h_4 = 0$ , то  $h_5 = 0$  и получаем утверждение (a) этой теоремы.

(b) Если  $h_4 \neq 0$ , то  $u_1(t) = u_1^a = -s_2 \frac{h_5}{h_4}$ , что соответствует аномальному управлению, отсюда следует утверждение (b) этой теоремы. □

Аналогичное утверждение выполнено для  $h_2$ -особых дуг.

**Теорема 5.** *Любая  $h_2$ -особая нормальная дуга удовлетворяет одному из следующих условий:*

- (a)  $h_2 = h_3 = h_4 = h_5 \equiv 0, h_1 \equiv \text{const} \neq 0,$   
 $u_1 \equiv s_1 \in \{\pm 1\}, |u_2(t)| \leq 1,$
- (b)  $h_2 = h_3 \equiv 0, h_1 \equiv \text{const} \neq 0, h_5 \neq 0, |\frac{h_4}{h_5}| \leq 1,$   
 $u_1 \equiv s_1 \in \{\pm 1\}, u_2 \equiv u_2^a = -s_1 \frac{h_4}{h_5}.$

**Следствие 2.** *Все особые траектории оптимальны.*

*Доказательство.* Следует из леммы 2. □

**Замечание.** *Особые траектории типа (b) являются одновременно нормальными и аномальными.*

## 6.2 Множество достижимости вдоль особых траекторий

В данном подразделе описывается множество достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$  для системы (2.2) вдоль особых траекторий.

Заметим, что все четыре случая  $u_1 \equiv 1, u_1 \equiv -1, u_2 \equiv 1, u_2 \equiv -1$  симметричны, поэтому достаточно изучить лишь один из них.

Рассмотрим случай  $u_2 \equiv 1$ . Из следствия 1 получаем следующую вертикальную подсистему гамильтоновой системы:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_3, \\ \dot{h}_2 = u_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = u_1 h_4 + h_5, \\ \dot{h}_4 = \dot{h}_5 = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Если  $h_4 = 0$ , то  $h_1(t) = -\frac{h_5}{2}t^2 - h_3(0)t + h_1(0)$ . Из условия максимума (3.10) следует, что соответствующее управление  $u_1$  кусочно постоянно и имеет не более двух переключений в множестве  $\{-1, 1\}$ .

Далее рассмотрим случай  $h_4 \neq 0$ . Используя симметрию растяжения по параметру  $|h_4|$ , перейдем к новым координатам:

$$h_i = \frac{h_i}{|h_4|}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Вертикальная подсистема принимает вид

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_3, \\ \dot{h}_2 = u_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = h_4 u_1 + h_5, \\ \dot{h}_5 = 0, \quad h_4 = \pm 1. \end{cases} \quad (6.2)$$

Если  $h_1 = 0, t \in (t_0, t_1), t_0 < t_1$ , то из (6.2) следует  $h_3 = 0$ , а значит  $u_1 = -\frac{h_5}{h_4} = u_1^a$  при  $t \in (t_0, t_1), t_0 < t_1$ . В результате имеем следующий случай:

$$h_1 = h_3 = 0, \quad h_4 = \pm 1, \quad h_5 \in [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad u_1 = -\frac{h_5}{h_4}. \quad (6.3)$$

Из условия максимума (3.10) при  $h_1 \neq 0, t \in (t_0, t_1), t_0 < t_1$  имеем  $u_1 = \text{sgn } h_1$ , при этом  $h_2 = H - |h_1|$ , поэтому уравнение для  $h_2$  можно исключить из вертикальной подсистемы. Откуда получаем

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_3, \\ \dot{h}_3 = h_4 \text{sgn } h_1 + h_5, \\ \dot{h}_5 = 0, \quad h_4 = \pm 1. \end{cases} \quad (6.4)$$

Используя симметрию  $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_4, \mathfrak{h}_5) \mapsto (-\mathfrak{h}_1, -\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_4, -\mathfrak{h}_5)$ , достаточно рассмотреть подслучаи  $\mathfrak{h}_4 = \pm 1$  с условием  $\mathfrak{h}_5 \geq 0$ . Имеется естественное разбиение для множества сопряженных векторов:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^\pm &= \{\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_4, \mathfrak{h}_5) \in \mathbb{R}^4 \mid (\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_3) \in \mathbb{R}^2, \mathfrak{h}_4 = \pm 1, \mathfrak{h}_5 \geq 0\} = \mathfrak{C}_0^\pm \cup \mathfrak{C}_{01}^\pm \cup \mathfrak{C}_1^\pm \cup \mathfrak{C}_{1\infty}^\pm, \\ \mathfrak{C}_0^\pm &= \{\mathfrak{h} \in \mathfrak{C}^\pm \mid \mathfrak{h}_5 = 0\}, \quad \mathfrak{C}_{01}^\pm = \{\mathfrak{h} \in \mathfrak{C}^\pm \mid \mathfrak{h}_5 \in (0, 1)\}, \\ \mathfrak{C}_1^\pm &= \{\mathfrak{h} \in \mathfrak{C}^\pm \mid \mathfrak{h}_5 = 1\}, \quad \mathfrak{C}_{1\infty}^\pm = \{\mathfrak{h} \in \mathfrak{C}^\pm \mid \mathfrak{h}_5 \in (1, +\infty)\}.\end{aligned}$$

Каждое подмножество изучается с помощью фазового портрета системы (6.4) на плоскости  $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_3)$ . Вдоль всех траекторий вертикальной подсистемы (6.4) отслеживается знак  $\mathfrak{h}_1$ , который определяет искомое управление  $u_1$ . Подсистема (6.4) имеет очевидный первый интеграл  $\frac{1}{2}\mathfrak{h}_3^2 + \mathfrak{h}_5\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_4|\mathfrak{h}_1| = E + h_4H$ .

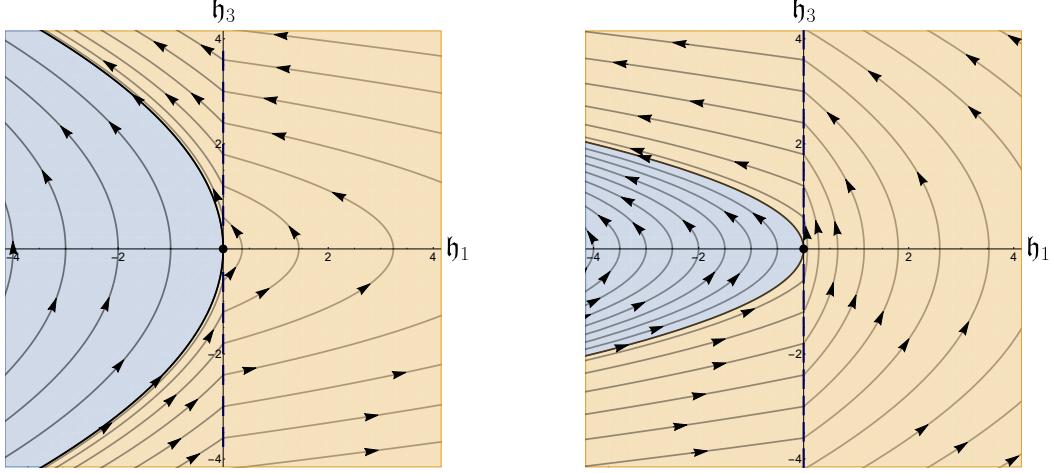


Рис. 2: Фазовый портрет вертикальной подсистемы (6.4) при  $\mathfrak{h}_5 = 3/2$ ; (слева)  $\mathfrak{h}_4 = -1$ , (справа)  $\mathfrak{h}_4 = 1$ .

На Рис. 2 изображены фазовые портреты для  $\mathfrak{h}_5 = 3/2$  при  $\mathfrak{h}_4 = -1, 1$  соответственно. В обоих случаях  $\mathfrak{h}_4 = -1, 1$  фазовые кривые задаются параболами с направленными влево ветвями. Варьирование параметра  $\mathfrak{h}_5$  в пределах множества  $\mathfrak{C}_{1\infty}^\pm$  не меняет направление ветвей парабол. Заметим, что при  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{C}_{1\infty}^\pm$  невозможен переход на управление (6.3), так как управление  $u_1 = \mp\mathfrak{h}_5 \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  не допустимо. Следовательно, соответствующие управлению кусочно постоянны и имеют не более двух переключений во множестве  $\{-1, 1\}$ .

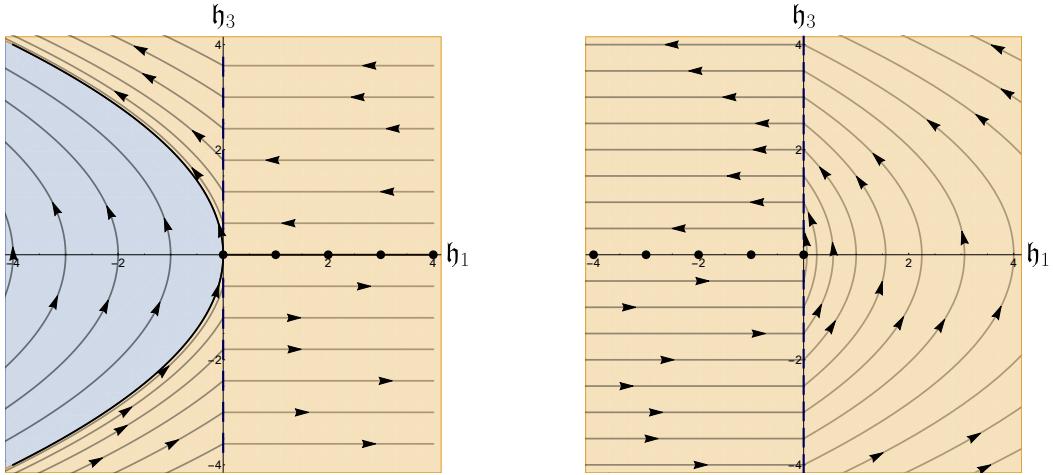


Рис. 3: Фазовые портреты вертикальной подсистемы (6.4) при  $\mathfrak{h}_5 = 1$ ; (слева)  $\mathfrak{h}_4 = -1$ , (справа)  $\mathfrak{h}_4 = 1$ .

На Рис. 3 изображены фазовые портреты с условием  $\mathfrak{h}_5 = 1$ . При  $\mathfrak{h}_4 = -1$  существует парабола, проходящая через начало координат (см. Рис. 3 слева), что позволяет переключаться в этой точке на управление (6.3); эта парабола соответствует кусочно-постоянному управлению  $u_1$ , которое имеет не более двух переключений во множестве  $\{-1, 1\}$ . Для остальных траекторий из множества  $\mathfrak{C}_1^-$  управление также кусочно-постоянно, но

имеет не более одного переключения во множестве  $\{-1, 1\}$ . В подслучае  $\mathfrak{h}_4 = 1$  начало координат стационарно, поэтому переключение на управление (6.3) не происходит вдоль траекторий из множества  $\mathfrak{C}_1^+$ . Здесь управление  $u_1$  также кусочно-постоянно и имеет не более двух переключений во множестве  $\{-1, 1\}$ .

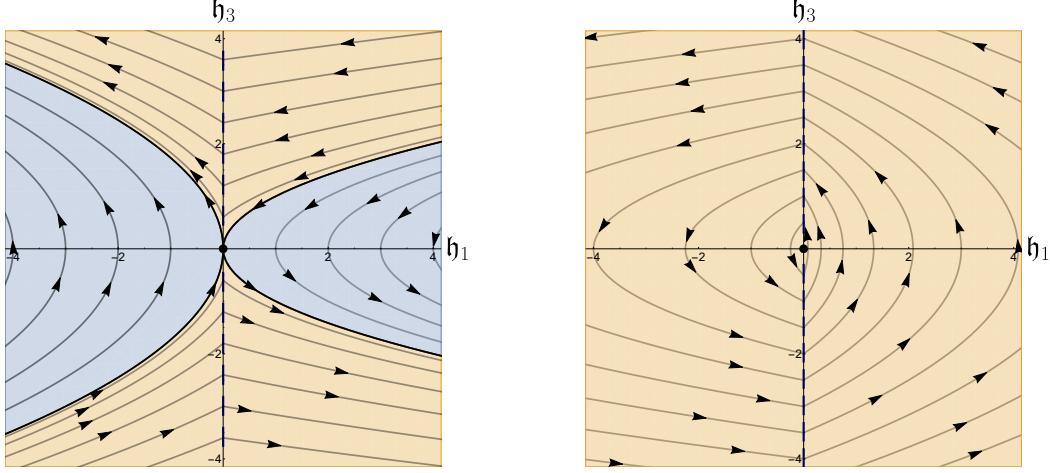


Рис. 4: Фазовые портреты вертикальной подсистемы (6.4) при  $\mathfrak{h}_5 = 1/2$ ; (слева)  $\mathfrak{h}_4 = -1$ , (справа)  $\mathfrak{h}_4 = 1$ .

На Рис. 4 изображены фазовые портреты с условием  $\mathfrak{h}_5 = 1/2$ . В обоих случаях  $\mathfrak{h}_4 = -1, 1$  фазовые кривые задаются параболами с противоположно направленными ветвями в полуплоскостях. При варьировании параметра  $\mathfrak{h}_5$  в пределах множества  $\mathfrak{C}_{01}^\pm$  направление ветвей не меняется. При  $\mathfrak{h}_4 = -1$  существуют две параболы (в правой и левой полуплоскостях), проходящие через начало координат, где можно переключаться на управление (6.3), этот случай предоставляет кусочно-постоянное управление  $u_1$  со значениями  $\pm 1, \mathfrak{h}_5, \pm 1$ . Для остальных траекторий из множества  $\mathfrak{C}_{01}^-$  управление  $u_1$  кусочно-постоянно и имеет не более одного переключения в множестве  $\{-1, 1\}$ . При  $\mathfrak{h}_4 = 1$  начало координат стационарно, поэтому переключение на управление (6.3) здесь не возможно, случай  $\mathfrak{C}_{01}^+$  допускает неограниченное число переключений во множестве  $\{-1, 1\}$ .

Случай  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{C}_0^\pm$  является предельным для  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{C}_{01}^\pm$  и не требует отдельного рассмотрения, в нем правые и левые полуплоскости заполняются симметричными параболами.

Итак, доказана следующая теорема об экстремальных управлениях в особом случае.

**Теорема 6.**  $h_1$ -особые траектории с  $u_2 \equiv 1$ , концы которых образуют множество, содержащее границу  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$ , имеют один из двух типов кусочно-постоянного управления  $u_1$ :

1. со значениями  $\pm 1, \mathfrak{h}_5, \pm 1$  либо  $\pm 1, \mathfrak{h}_5, \mp 1$  и без ограничений на временные промежутки, где  $\mathfrak{h}_5 \in [-1, 1]$ ;
2. со значениями  $\pm 1, \mp 1, \pm 1, \mp 1, \dots$ , и такими временными промежутками  $T_b, T_1, T_2, T_1, \dots, T_i, T_e$ , что  $0 < T_b \leq T_2$ ,  $0 < T_1$ ,  $0 \leq T_e \leq T_{3-i}$ , где  $i = 1, 2$ .

Теперь найдём оценку сверху на число переключений второго типа, это позволит сократить геометрически неоптимальные управление.

**Теорема 7.** Пусть  $u_1$  есть кусочно-постоянное управление со значениями  $1, -1, 1, -1$  и такими временными промежутками  $T_b, T_1, T_2, T_e$ , что  $0 < T_b \leq T_2$ ,  $0 < T_1$ ,  $0 \leq T_e \leq T_1$ . Если  $T_e > \frac{T_2 - T_b}{T_2 + T_b} T_1$ , то управление  $u_1$  геометрически не оптимально.

**Доказательство.** Легко проверить, что у соответствующей траектории  $q$  координата  $z$  обнуляется, когда  $T_e = \frac{T_2 - T_b}{T_2 + T_b} T_1$ . Более того, существует симметричная траектория, соответствующая кусочно-постоянному управлению со значениями  $-1, 1, -1, 1$  и временными периодами  $T_e, T_2, T_1, T_b$ , которая приходит в ту же точку с нулевой координатой  $z$ .

Докажем теорему от противного.

Пусть  $T_b < T_2$ . Предположим, что при  $T_e > \frac{T_2 - T_b}{T_2 + T_b} T_1$  управление  $u_1$  геометрически оптимально. Тогда геометрически оптимально и симметричное управление со значениями  $-1, 1, -1, 1, -1$  и временными промежутками  $\frac{T_2 - T_b}{T_2 + T_b} T_1, T_2, T_1, T_b, T_e - \frac{T_2 - T_b}{T_2 + T_b} T_1$ . Так как  $T_b \neq T_2$ , получаем противоречие — найденное симметричное

управление не принадлежит ни одному из типов экстремальных управлений (см. Теорему 6), а значит, не может быть геометрически оптимальным.

Пусть  $T_b = T_2$ . Предположим, что существует такое  $T_e > 0$ , что управление  $u_1$  геометрически оптимально. Тогда управление с временами  $\frac{T_1 - T_e/2}{T_1 + T_e/2}T_2, T_1, T_2, T_e$  также геометрически оптимально, так как оно содержится в исходном. Но как было доказано выше для  $\frac{T_1 - T_e/2}{T_1 + T_e/2}T_2 < T_2$ , должно выполняться следующее условие:

$$T_e < \frac{T_2 - \frac{T_1 - T_e/2}{T_1 + T_e/2}T_2}{T_2 + \frac{T_1 - T_e}{T_1 + T_e}T_2}T_1 = \frac{T_1 + T_e/2 - (T_1 - T_e/2)}{T_1 + T_e/2 + (T_1 - T_e/2)}T_1 = \frac{T_e}{2}.$$

Это противоречие доказывает утверждение теоремы.  $\square$

**Замечание.** Численное исследование показывает, что время  $T_e = \frac{T_2 - T_b}{T_2 + T_b}T_1$  является временем разреза, т.е. при  $T_e \leq \frac{T_2 - T_b}{T_2 + T_b}T_1$  соответствующие управления оптимальны. Более того, первый тип управления, представленный в теореме 6, всегда геометрически оптимален.

**Теорема 8.**  $h_1$ -особые траектории с  $u_2 \equiv 1$ , концы которых образуют границу множества достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$ , имеют один из двух типов кусочно-постоянного управления  $u_1$ :

1. со значениями  $\pm 1, \mathfrak{h}_5, \pm 1$  либо  $\pm 1, \mathfrak{h}_5, \mp 1$  и без ограничений на временные промежутки, где  $\mathfrak{h}_5 \in [-1, 1]$  (не более 2 переключений);
2. со значениями  $\pm 1, \mp 1, \pm 1, \mp 1$  и такими временными промежутками  $T_b, T_1, T_2, T_e$ , что  $0 < T_b < T_2$ ,  $0 < T_e \leq \frac{T_2 - T_b}{T_2 + T_b}T_1$  (3 переключения).

*Доказательство.* Следует из Теоремы 6.7.  $\square$

**Предложение 1.** Для любой точки  $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$  существует такое кусочно-постоянное особое управление  $\bar{u}$  с не более чем 4 переключениями, что соответствующая траектория  $\bar{q}(t) = q_{\bar{u}}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , приходит в точку  $q_1 = \bar{q}(T)$ .

*Доказательство.* Докажем теорему для случая  $q_1 = (x_1, T, z_1, v_1, w_1)$ , другие случаи доказываются по аналогии. Если  $q_1 \in \partial\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$ , то по теореме 8 существует кусочно-постоянное особое управление  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , имеющее не более 3 переключений и приводящее в точку  $q_1$ .

В противном случае рассмотрим постоянное управление  $u^0 \equiv (0, 1)$  и соответствующую особую траекторию  $q^0(s) = q_{u^0}(t)$ ,  $s \in [0, T]$ . По непрерывности существует такое время  $s^0$ , что  $q_1 \in \partial\mathcal{A}_{q^0(s^0)}^{\text{sing}}(T - s^0)$ . Из теоремы 8 следует существование кусочно-постоянного особого управления  $\bar{u}_1(t)$ ,  $t \in [s^0, T]$  максимум с 3 переключениями, которое соединяет точку  $q^0(s^0)$  с  $q_1$ . Определим  $\bar{u}_1(t) = 0$ ,  $t \in [0, s^0]$ , таким образом, построено управление  $\bar{u}_1$ , имеющее максимум 4 переключения и соединяющее точки  $q_0 = \bar{q}(0)$ ,  $q_1 = \bar{q}(T)$  особой траекторией  $\bar{q}(t) = q_{\bar{u}_1}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .  $\square$

Управления из теоремы 8 позволяют построить множество достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$  для некоторого конечного времени  $T$  в гиперплоскости  $(x_1, z_1, w_1, v_1)$  при  $y_1 = T$ . Пусть  $T = 1$ , тогда существует очевидное ограничение для первой координаты  $|x_1| \leq 1$ . С использованием симметрии, порожденной сменой знака управления  $u_1$ , достаточно рассмотреть случай

$$0 \leq x_1 \leq 1. \quad (6.5)$$

Заметим, что решение для  $x_1 = 1$  единственно и задано траекторией с  $u_1 \equiv 1$ , приходящей в точку

$$q_1^1 = (1, 1, 0, -1/3, 1/3).$$

Для получения функций, задающих ограничения на координаты  $z_1, w_1, v_1$ , проинтегрирована система (2.2) с управлением, приведенным в Теореме 8. Парабола

$$z_{\max}(x_1) = \frac{1 - x_1^2}{4}, \quad (6.6)$$

задаёт следующее ограничение:

$$|z_1| \leq z_{\max}(x_1). \quad (6.7)$$

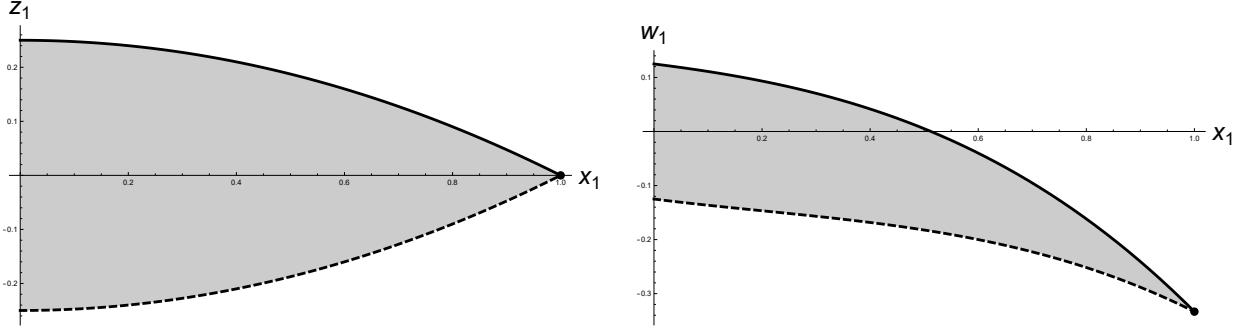


Рис. 5: Проекции множества достижимости на полуплоскости  $(x_1, z_1)$  и  $(x_1, w_1)$  при  $T = y = 1$ .

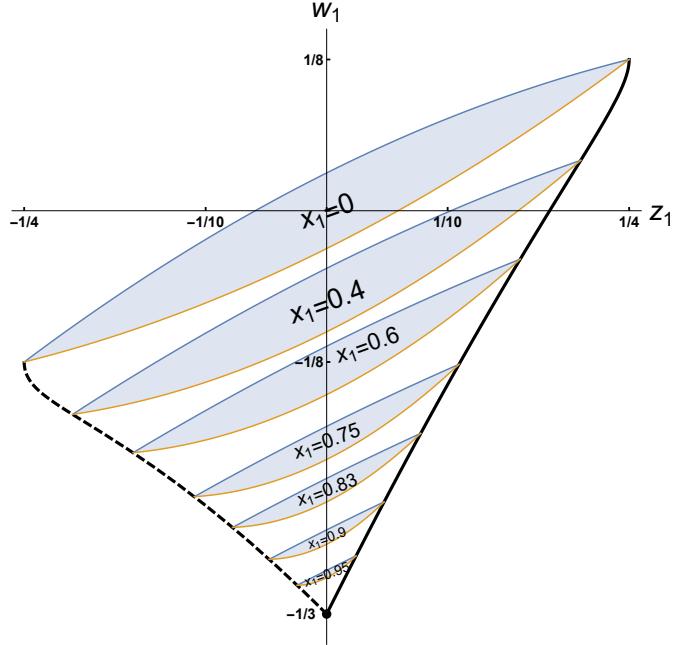


Рис. 6: Проекции на плоскость  $(z_1, w_1)$  сечений множества достижимости с фиксированными значениями  $x_1 \in [0, 1]$  при  $T = y = 1$ .

На Рис. 5 слева показана проекция сечения множества достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(1) \cap \{y = 1\}$  на правую полуплоскость  $(x_1, z_1)$ . Заметим, что в точки  $z_1 = \pm z_{\max}(x_1)$  приводят кусочно-постоянное управление  $u_1$  со значениями  $\pm 1, \mp 1$ . Те же решения образуют границу проекции множества достижимости на плоскость  $(x_1, w_1)$ , см. Рис. 5 справа.

Парabolы (при фиксированных значениях  $x_1 \in (-1, 1)$ )

$$w_{\max}(x_1, z_1) = \frac{1}{96} (3 - 15x_1 - 3x_1^2 - 17x_1^3) + \frac{z_1}{2} - \frac{z_1^2}{2(1 + x_1)} \quad (6.8)$$

определяют очередное ограничение

$$-w_{\max}(-x_1, -z_1) \leq w_1 \leq w_{\max}(x_1, z_1). \quad (6.9)$$

На Рис. 6 показаны проекции на плоскость  $(z_1, w_1)$  сечений множества достижимости с фиксированными значениями  $x_1 \in [0, 1]$ . Решения для точек с условиями  $w_1 = w_{\max}(x_1, z_1)$ ,  $w_1 = -w_{\max}(-x_1, -z_1)$  единственны и определяются кусочно-постоянным управлением  $u_1$  с двумя переключениями во множестве  $\{-1, 1\}$ .

Последнее ограничение, задающее множество достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(1)$ :

$$v_{\min}(x_1, z_1, w_1) \leq v_1 \leq v_{\max}(x_1, z_1, w_1) \quad (6.10)$$

определяется с помощью следующих функций:

$$\begin{aligned}
w_{mm}(x_1, z_1) &= \frac{1}{6} \left( -x_1(1+x_1^2) + (3 + \operatorname{sgn} z_1)z_1 - \frac{4z_1^2}{1+x_1} \right), \\
v_{\max}(x_1, z_1, w_1) &= \frac{1}{12} (1+3x_1^2 - 6(1-x_1)z_1) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{48} \sqrt{9(1-x_1^2+4z_1)^3 + 8(12w_1+3x_1+x_1^3-6(1-x_1)z_1)^2}, \\
v_{\min+}(x_1, z_1, w_1) &= \frac{1}{12} (3+12w_1+3x_1^2+2x_1^3-6(1-x_1)z_1) \\
&\quad - \frac{1}{12}(1-x_1)\sqrt{(1-x_1)(1+24w_1+3x_1+4x_1^3)-12(1-x_1)z_1-12z_1^2}, \\
v_{\min-}(x_1, z_1, w_1) &= \frac{1}{12} \left( 1+3x_1^2+6z_1+6x_1z_1 + \left( (1-12w_1-2x_1-x_1^2-2x_1^3+2(1+x_1)z_1)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4(1-x_1^2-4z_1)((1+x_1)(6w_1+x_1+x_1^3)-4(1+x_1)z_1+4z_1^2) \right)^{1/2} \right), \\
v_{\min}(x_1, z_1, w_1) &= \begin{cases} v_{\min+}(-x_1, -z_1, -w_1) & \text{if } w_1 \geq w_{mm}(x_1, z_1); \\ v_{\min+}(x_1, z_1, w_1) & \text{if } w_1 \leq -w_{mm}(-x_1, -z_1); \\ v_{\min-}(x_1 \operatorname{sgn} z_1, |z_1|, w_1 \operatorname{sgn} z_1) & \text{if } -w_{mm}(-x_1, -z_1) \leq w_1 \leq w_{mm}(x_1, z_1). \end{cases}
\end{aligned}$$

Заметим, что функции  $w_{\max}(x_1, z_1)$  и  $w_{mm}(x_1, z_1)$  корректно определены вблизи точки  $x_1 = -1$ , так как  $\lim_{x_1 \rightarrow -1+0} \frac{z_1^2}{1+x_1} \rightarrow 0$ .

**Следствие 3.** Множество достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T) = \{(x_1, y_1, z_1, v_1, w_1)\}$  имеет следующее описание:

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_1y_1| \leq T, \\ |z_1| \leq T^2 z_{\max}(x_1y_1), \\ \left\{ \begin{array}{l} |y_1| = T, \\ -T^3 w_{\max}(-x_1, -z_1) \leq w_1 \leq T^3 w_{\max}(x_1, z_1), \\ T^3 v_{\min}(x_1, z_1, w_1) \leq y_1 v_1 \leq T^3 v_{\max}(x_1, z_1, w_1); \end{array} \right. \\ |x_1| = T, \\ \left\{ \begin{array}{l} -T^3 w_{\max}(y_1, -z_1) \leq v_1 \leq T^3 w_{\max}(-y_1, z_1), \\ -T^3 v_{\max}(y_1, -z_1, -v_1) \leq x_1 w_1 \leq -T^3 v_{\min}(y_1, -z_1, -v_1). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.11)$$

*Доказательство.* Следует из полученных ограничений (6.5), (6.7), (6.9), (6.10) для случая  $y = 1, x \geq 0$ , симметрии растяжения

$$(x, y, z, v, w, t) \mapsto (Tx, Ty, T^2z, T^3v, T^3w, Tt) \quad (6.12)$$

и следующих дискретных симметрий:

$$(x, y, z, v, w) \mapsto (-x, y, -z, v, -w), \quad (6.13)$$

$$(x, y, z, v, w) \mapsto (x, -y, -z, -v, w), \quad (6.14)$$

$$(x, y, z, v, w) \mapsto (y, x, -z, -w, -v). \quad (6.15)$$

□

**Следствие 4.** Множество достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$  полуалгебраично.

*Доказательство.* Рассмотрим сечение  $y_1 = 1$  множества  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(1)$ . Как было показано выше, оно описывается неравенствами (6.5), (6.7), (6.9), (6.10).

Легко увидеть, что неравенства (6.5), (6.7), (6.9) эквивалентны полиномиальным. Более того, можно избавиться и от функции квадратного корня в (6.10), применяя следующие эквивалентности:

$$\sqrt{f(q)} \leq g(q) \iff \begin{cases} f(q) \geq 0, \\ g(q) \geq 0, \\ f(q) \leq g^2(q). \end{cases} \quad \sqrt{f(q)} \geq g(q) \iff \begin{cases} g(q) < 0, \\ f(q) \geq 0; \\ g(q) \geq 0, \\ f(q) \geq g^2(q). \end{cases}$$

Таким образом, сечение  $y = 1$  множества  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(1)$  полуалгебраично, из действия симметрий (6.13)–(6.15) следует полуалгебраичность всего множества достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(1)$ . Используя растяжения (6.12), также получаем полуалгебраичность множества достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$  за любое время  $T > 0$ .  $\square$

**Замечание.** Так как особые траектории оптимальны, то множество достижимости  $\mathcal{A}_{q_0}^{\text{sing}}(T)$  есть в точности часть субфинслеровой сферы радиуса  $T$ , заполненная концами особых траекторий.

## 7 Релейный поток

В данном разделе рассматриваются экстремали, удовлетворяющие условию  $\text{card}\{t \in [0, T] \mid h_1 h_2(\lambda_t) \neq 0\} < \infty$ . Этот анализ очевидно применим к релейным дугам  $\lambda_t, t \in (\alpha, \beta) \subset [0, T]$ .

Если  $h_1 h_2(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)} \neq 0$ , то  $u(t)|_{(\alpha, \beta)} = (s_1, s_2)$ ,  $s_i = \text{sgn } h_i(\lambda_t)|_{(\alpha, \beta)}$ . Таким образом, релейные экстремали в точках, где  $h_1 h_2(\lambda_t) \neq 0$ , удовлетворяют следующей релейной гамильтоновой системе с функцией Гамильтона  $H = |h_1| + |h_2|$ :

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -s_2 h_3, \\ \dot{h}_2 = s_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = s_1 h_4 + s_2 h_5, \\ \dot{h}_4 = \dot{h}_5 = 0, \\ \dot{q} = s_1 X_1 + s_2 X_2. \end{cases} \quad (7.1)$$

Решения этой системы кусочно-полиномиальны:

- $h_3, x, y$  кусочно-линейны,
- $h_1, h_2, z$  кусочно-квадратичны,
- $v, w$  кусочно-полиномиальны третьей степени.

**Замечание.** Отображение  $(\lambda, q) \mapsto (k\lambda, q)$ ,  $k > 0$ , сохраняет экстремальные траектории, поэтому далее рассматривается лишь случай

$$H(\lambda) \equiv 1.$$

Квадрат

$$\{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |h_1| + |h_2| = 1\} \quad (7.2)$$

параметризуется угловой координатой  $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ :

$$h_1 = \text{sgn}(\cos \theta) \cos^2 \theta, \quad h_2 = \text{sgn}(\sin \theta) \sin^2 \theta.$$

С использованием координаты  $\theta$  вертикальная часть гамильтоновой системы (7.1) сводится к следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{h_3}{|\sin 2\theta|}, & \theta \neq \frac{\pi n}{2}, \\ \dot{h}_3 = s_1 h_4 + s_2 h_5, & s_1 = \text{sgn} \cos \theta, \quad s_2 = \text{sgn} \sin \theta. \end{cases} \quad (7.3)$$

Доказано следующее утверждение.

**Предложение 2.** Релейные экстремальные дуги удовлетворяют ОДУ (7.3).

Функция  $\theta(t)$  непрерывна вдоль релейных дуг, а также гладка при  $\theta \neq \frac{\pi n}{2}$ .

## 7.1 Дискретные симметрии гамильтоновой системы

Рассмотрим следующие отображения коалгебры Ли  $L^* \cong \mathbb{R}_{h_1 \dots h_5}^5$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &: (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \mapsto (h_2, h_1, -h_3, -h_5, -h_4), \\ \varepsilon^2 &: (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \mapsto (-h_2, -h_1, -h_3, h_5, h_4), \\ \varepsilon^3 &: (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \mapsto (h_1, -h_2, -h_3, -h_4, h_5), \\ \varepsilon^4 &: (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \mapsto (-h_1, h_2, -h_3, h_4, -h_5), \\ \varepsilon^5 &: (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \mapsto (-h_2, h_1, h_3, -h_5, h_4), \\ \varepsilon^6 &: (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \mapsto (h_2, -h_1, h_3, h_5, -h_4), \\ \varepsilon^7 &: (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \mapsto (-h_1, -h_2, h_3, -h_4, -h_5).\end{aligned}$$

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

**Предложение 3.** *Отображения  $\varepsilon^i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , порождают группу  $G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7\}$  с таблицей умножения 1. Эти отображения суть симметрии системы (7.3), т.е. переводят её решения в решения.*

Таблица 1: Правило произведения в группе  $G$ : строка  $i$ , столбец  $j$  содержит  $\varepsilon^i \circ \varepsilon^j$

	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^7$
$\varepsilon^1$	$\text{Id}$	$\varepsilon^7$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2$
$\varepsilon^2$	$\varepsilon^7$	$\text{Id}$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^1$
$\varepsilon^3$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^6$	$\text{Id}$	$\varepsilon^7$	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^4$
$\varepsilon^4$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^5$	$\varepsilon^7$	$\text{Id}$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^3$
$\varepsilon^5$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^7$	$\text{Id}$	$\varepsilon^6$
$\varepsilon^6$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$	$\text{Id}$	$\varepsilon^7$	$\varepsilon^5$
$\varepsilon^7$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^4$	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^6$	$\varepsilon^5$	$\text{Id}$

$G$  есть группа симметрий квадрата  $\{H = |h_1| + |h_2| = 1\} : \varepsilon^1, \varepsilon^2$  суть отражения в серединном перпендикуляре к сторонам;  $\varepsilon^3, \varepsilon^4$  суть отражения в диагоналях;  $\varepsilon^5, \varepsilon^6, \varepsilon^7$  определяют соответственно повороты на  $\pi/2, -\pi/2, \pi$ .

Любую точку плоскости  $(h_4, h_5)$  можно преобразовать в точку угла  $\Omega = \{(h_4, h_5) \in \mathbb{R}^2 \mid h_4 \geq h_5 \geq 0\}$ . Угол  $\Omega$  является фундаментальной областью действия группы  $G$  в плоскости  $(h_4, h_5)$ . Таким образом, при исследовании системы (7.3) можно ограничиться случаем  $(h_4, h_5) \in \Omega$ . Этот случай естественно разбивается на следующие подслучаи:

- 1)  $h_4 > h_5 > 0$ ,
- 2)  $h_4 > h_5 = 0$ ,
- 3)  $h_4 = h_5 > 0$ ,
- 4)  $h_4 = h_5 = 0$ .

**Замечание.** Легко проверить, что Казимир  $E$  сохраняется группой симметрий  $G$ :  $E \circ \varepsilon^i = E$ ,  $i = 1, \dots, 7$ .

## 7.2 Фазовый портрет системы (7.3)

Рассмотрим систему (7.3) как осциллятор с полной энергией

$$E = \frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4 = \frac{h_3^2}{2} + U(\theta)$$

и потенциальной энергией

$$U(\theta) = h_1 h_5 - h_2 h_4 = s_1 \cos^2 \theta h_5 - s_2 \sin^2 \theta h_4.$$

Функция  $U(\theta)$  является  $C^1$ -гладкой при  $\theta = \frac{\pi n}{2}$  и аналитичной в остальных точках.

### 7.2.1 Случай 1): $h_4 > h_5 > 0$

График потенциальной энергии  $U(\theta)$  приведен на Рис. 7.

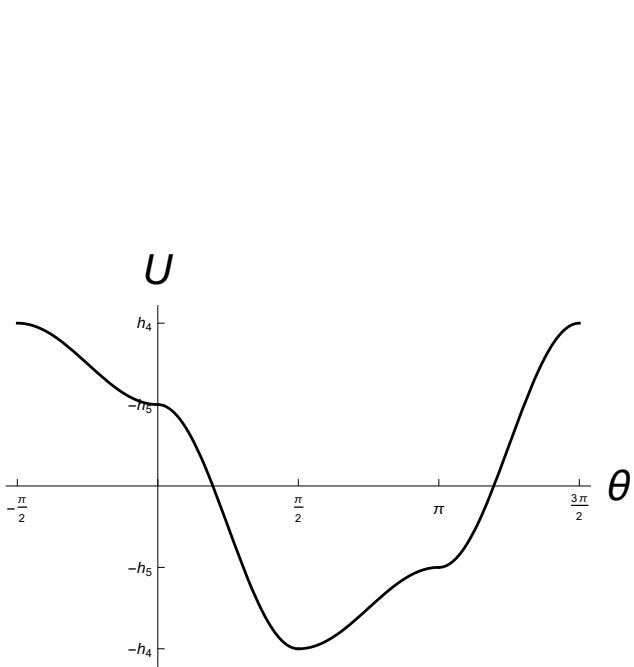


Рис. 7: График  $U(\theta)$  в случае 1)

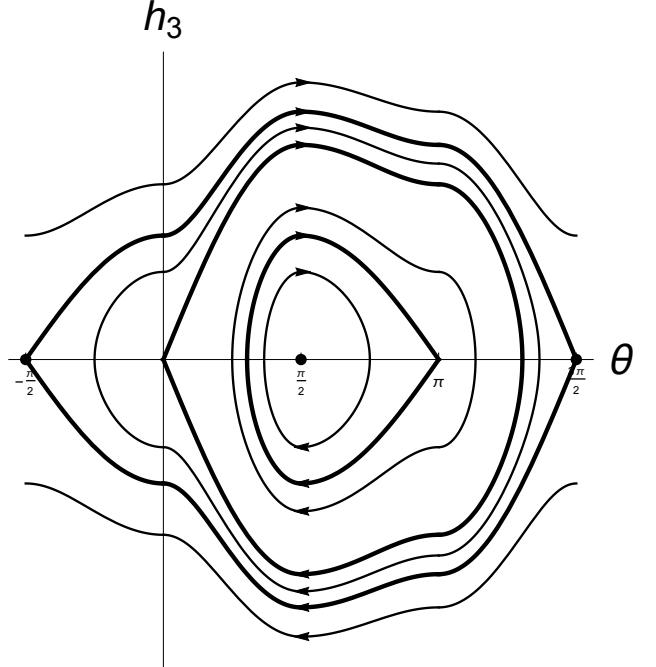


Рис. 8: Фазовый портрет системы (7.3) в случае 1)

Затем изобразим фазовый портрет системы (7.3) в виде набора кривых  $h_3 = \pm\sqrt{2(E - U(\theta))}$ , см. Рис. 8. Критические линии уровня энергии  $E$ :

$$C_1 = E^{-1}(-h_4),$$

$$C_5 = E^{-1}(h_5),$$

$$C_3 = E^{-1}(-h_5),$$

$$C_7 = E^{-1}(h_4).$$

Области регулярных значений энергии  $E$ :

$$C_2 = E^{-1}(-h_4, -h_5),$$

$$C_4 = E^{-1}(-h_5, h_5),$$

$$C_6 = E^{-1}(h_5, h_4),$$

$$C_8 = E^{-1}(h_4, +\infty).$$

Таким образом, получаем разбиение сечения цилиндра  $C = L^* \cap \{H = 1\}$ :

$$\{\lambda \in C \mid h_4 > h_5 > 0\} = \cup_{i=1}^8 C_i.$$

Все линии уровня энергии  $E$  аналитичны при  $\theta \neq \frac{\pi n}{2}$  и  $C^1$ -гладки при  $\theta = \frac{\pi n}{2}, h_3 \neq 0$ . Критические линии уровня имеют углы при  $\theta = \frac{\pi n}{2} \neq \frac{\pi}{2}, h_3 = 0$ . Линия уровня  $C_1$  — одна точка  $(\theta, h_3) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ .

**Замечание.** Пусть  $h_4 > h_5 > 0$  и  $\lambda \in C \setminus C_7$ . Тогда для любого  $T > 0$  существует единственная релейная экстремаль  $\lambda_t$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $\lambda_0 = \lambda$ , и соответственно единственная экстремальная траектория  $q(t) = \pi(\lambda_t)$ , которую обозначим как  $\text{Exp}(\lambda, t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Теперь пусть  $h_4 > h_5 > 0$  и  $\lambda \in C_7$ . Тогда для любого  $T > 0$  существует конечное число релейных экстремалей  $\{\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^N\}$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $\lambda_0^i = \lambda$ , и соответственно конечное число релейных экстремальных траекторий  $\{q^1(t), \dots, q^N(t)\} = \{\pi(\lambda_t^1), \dots, \pi(\lambda_t^N)\} =: \text{Exp}(\lambda, t)$ . То есть при  $h_4 > h_5 > 0$  и  $\lambda \in C_7$  экстремальная дуга  $\lambda_t$ ,  $t \in (T - \varepsilon, T]$  в точке  $(\theta, h_3) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$  разделяется на экстремальные дуги:  $\lambda_t^+$  — для которой  $h_3(\lambda_t^+) > 0$  при  $t \in (\tau, T + \varepsilon)$ , и  $\lambda_t^-$  — для которой  $h_3(\lambda_t^-) < 0$  при  $t \in (\tau, T + \varepsilon)$ .

Резюмируя, в случае 1):  $h_4 > h_5 > 0$  можно определить экспоненциальное отображение для релейных траекторий:  $C \times \mathbb{R}_+ \ni (\lambda, t) \mapsto \text{Exp}(\lambda, t) \subset M$ , однозначное при  $\lambda \in C \setminus C_7$  и многозначное при  $\lambda \in C_7$ .

### 7.2.2 Случай 2): $h_4 > h_5 = 0$

График потенциальной энергии  $U(\theta)$  и соответствующий фазовый портрет системы (7.3) соответственно приводятся на Рис. 9 и на Рис. 10.

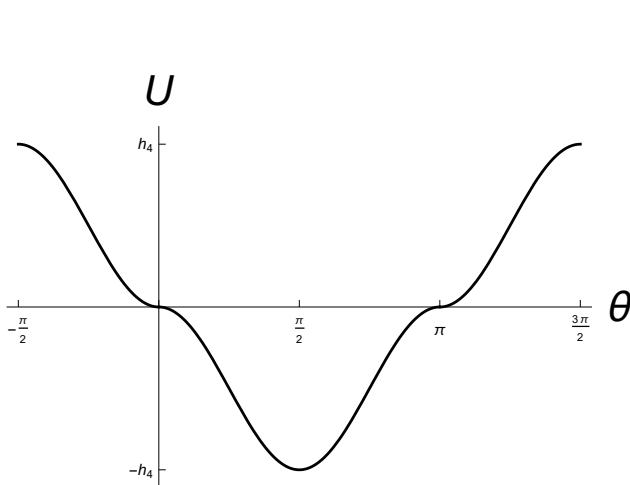


Рис. 9: График  $U(\theta)$  в случае 2)

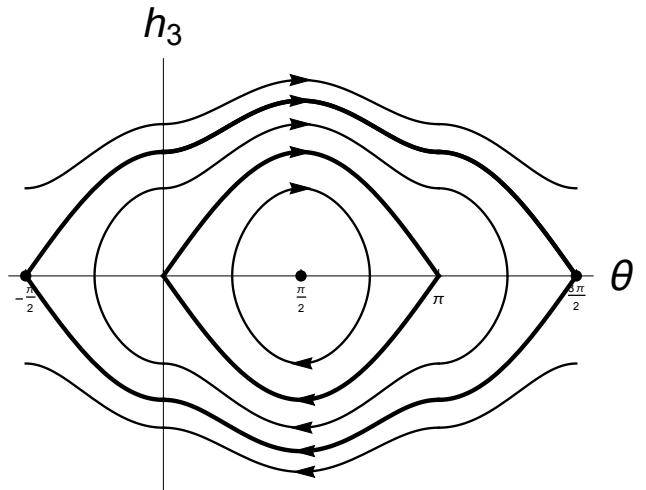


Рис. 10: Фазовый портрет системы (7.3) в случае 2)

Фазовый портрет содержит критические линии уровня энергии  $E$ :

$$C_1 = E^{-1}(-h_4), \quad C_3 = E^{-1}(0), \quad C_5 = E^{-1}(h_4),$$

и области регулярных значений  $E$ :

$$C_2 = E^{-1}(-h_4, 0), \quad C_4 = E^{-1}(0, h_4), \quad C_6 = E^{-1}(h_4, +\infty).$$

Таким образом, имеем разбиение:

$$\{\lambda \in C \mid h_4 > h_5 = 0\} = \cup_{i=1}^6 C_i.$$

**Замечание.** Аналогично случаю 1), определим однозначное экспоненциальное отображение при  $h_4 > h_5 = 0$ ,  $E \neq h_4$  и многозначное экспоненциальное отображение при  $h_4 > h_5 = 0$ ,  $E = h_4$ .

### 7.2.3 Случай 3): $h_4 = h_5 > 0$

График  $U(\theta)$  и фазовый портрет (7.3) приводятся на Рис. 11 и на Рис. 12 соответственно.

Фазовый портрет содержит критические линии уровня энергии  $E$ :

$$C_1 = E^{-1}(-h_4), \quad C_3 = E^{-1}(h_4),$$

и области регулярных значений  $E$ :

$$C_2 = E^{-1}(-h_4, 0), \quad C_4 = E^{-1}(h_4, +\infty).$$

Таким образом, имеем разбиение:

$$\{\lambda \in C \mid h_4 = h_5 > 0\} = \cup_{i=1}^4 C_i.$$

**Замечание.** Аналогично случаю 1), однозначное экспоненциальное отображение определяется при  $h_4 = h_5 > 0$ .

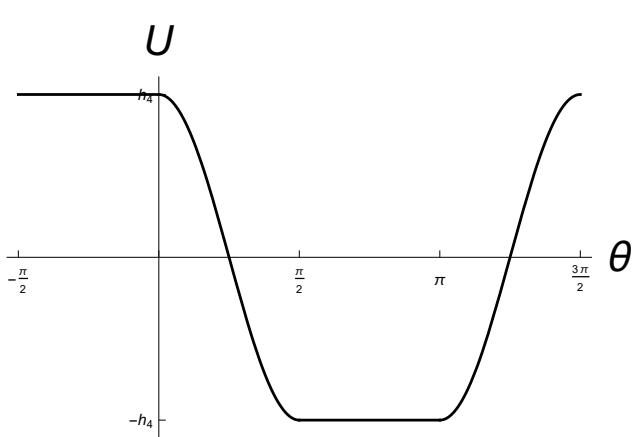


Рис. 11: График  $U(\theta)$  в случае 3)

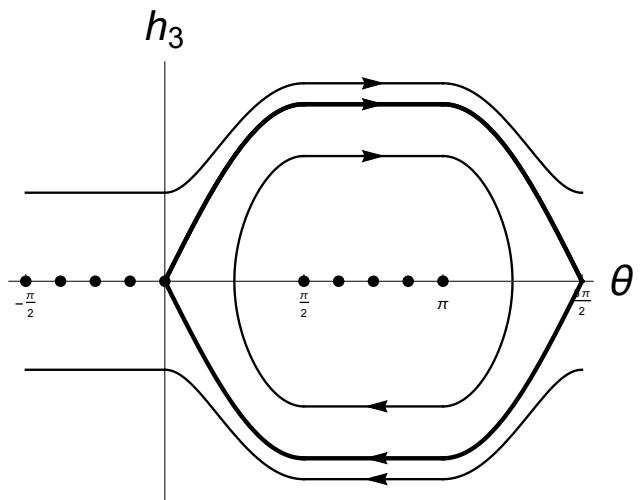


Рис. 12: Фазовый портрет системы (7.3) в случае 3)

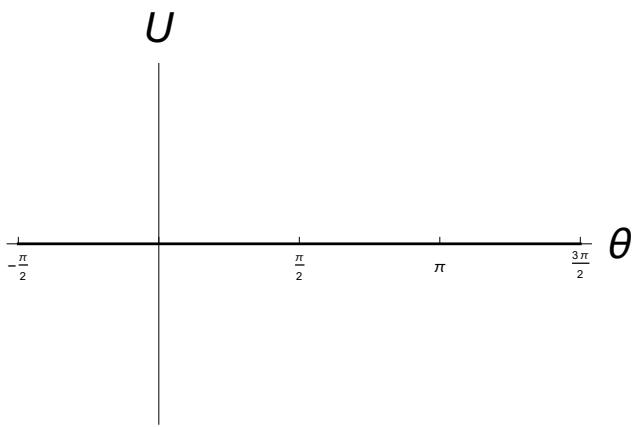


Рис. 13: График  $U(\theta)$  в случае 4)

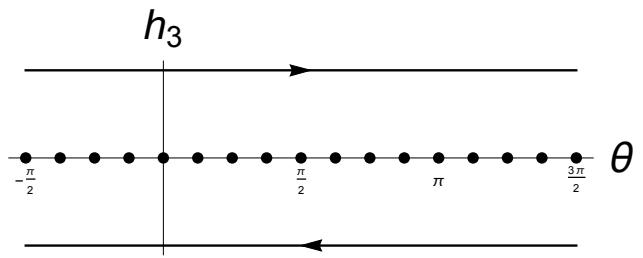


Рис. 14: Фазовый портрет системы (7.3) в случае 4)

#### 7.2.4 Случай 4): $h_4 = h_5 = 0$

В последнем случае 4) имеем  $U(\theta) \equiv 0$ , см. Рис. 13, фазовый портрет (7.3) изображен на Рис. 14.

Критические линии уровня  $C_1 = E^{-1}(0)$  состоят из неподвижных точек, а область регулярных значений энергии есть  $C_2 = E^{-1}(0, +\infty)$ . Имеем

$$\{\lambda \in C \mid h_4 = h_5 = 0\} = C_1 \cup C_2.$$

**Замечание.** Пусть  $\lambda \in C$ ,  $h_4 = h_5 = 0$ . Тогда для любого  $T > 0$  существует однозначно определенное решение  $\lambda_t$  системы (7.3) при  $\lambda_0 = \lambda$ , и соответственно существует однозначно определенная траектория  $q(t) = \pi(\lambda_t) = \text{Exp}(\lambda, t)$ .

### 7.3 Время разреза вдоль релейных траекторий

Подводя итог замечаний в конце предыдущих четырех пунктов, получаем следующее утверждение.

**Предложение 4.** Пусть  $\lambda \in C = L^* \cap \{H = 1\}$ , и пусть  $h_4 \geq h_5 \geq 0$ . Если  $E \neq h_4 > h_5$  либо  $h_4 = h_5$ , то для любого  $t > 0$  существует единственное решение  $\lambda_t$  системы (7.3) при  $\lambda_0 = \lambda$  и соответственно единственная релейная траектория  $q(t) = \pi(\lambda_t) =: \text{Exp}(\lambda, t)$ . Если  $E = h_4 > h_5$ , то для любого  $T > 0$  существует конечное число решений  $\{\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^N\}, t \in [0, T]$ , системы (7.3), где  $\lambda_0^1 = \dots = \lambda_0^N = \lambda$ , и соответственно конечное число релейных траекторий  $\{q^1(t), \dots, q^N(t)\} = \{\pi(\lambda_t^1), \dots, \pi(\lambda_t^N)\} =: \text{Exp}(\lambda, t)$ .

Итак, для релейных траекторий существует определенное экспоненциальное отображение, многозначное в общем случае. Затем, по аналогии с субриemannовой геометрией можно определить время разреза вдоль релейных траекторий:

$$t_{\text{cut}} := \sup\{T > 0 \mid \text{по крайней мере одна траектория } \text{Exp}(\lambda, t) \text{ оптимальна при } t \in [0, T]\}.$$

По лемме 2 малые релейные дуги оптимальны, т.е.,  $t_{\text{cut}}(\lambda) > 0$  для любого  $\lambda \in C$ .

## 8 Заключение

В данной работе начато изучение  $\ell_\infty$  субфинслеровой задачи на группе Картана. Остается много нерешенных вопросов, например:

- оптимальность релейных и смешанных траекторий,
- равномерная оценка числа гладких кусков минималей, соединяющих точки в группе Картана,
- регулярность субфинслерова расстояния и сферы.

Мы планируем рассмотреть эти вопросы в последующих статьях.

## Благодарности

Авторы благодарят проф. А.А. Аграчева и проф. Л.В. Локуциевского за плодотворные обсуждения по субфинслеровой геометрии.

## Список литературы

- [1] Davide Barilari, Ugo Boscain, Enrico Le Donne, and Mario Sigalotti, *Sub-Finsler structures from the time-optimal control viewpoint for some nilpotent distributions*, J. Dyn. Control Syst. **23** (2017), no. 3, 547–575. MR 3657277
- [2] Ugo Boscain, Thomas Chambrion, and Grégoire Charlot, *Nonisotropic 3-level quantum systems: complete solutions for minimum time and minimum energy*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **5** (2005), no. 4, 957–990 (electronic).
- [3] Берестовский В.Н., *Однородные многообразия с внутренней метрикой. II*, Сибирский математический журнал, **30** (1989), no. 2, 14–28, 225.

- [4] Берестовский В.Н., *О структуре однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой*, Сибирский математический журнал, **30** (1989), no. 1, 23–34.
- [5] Emmanuel Breuillard and Enrico Le Donne, *On the rate of convergence to the asymptotic cone for nilpotent groups and subFinsler geometry*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **110** (2013), no. 48, 19220–19226.
- [6] Jeanne N. Clelland and Christopher G. Moseley, *Sub-Finsler geometry in dimension three*, Differential Geom. Appl. **24** (2006), no. 6, 628–651.
- [7] Michael G. Cowling and Alessio Martini, *Sub-Finsler geometry and finite propagation speed*, Trends in harmonic analysis, Springer INdAM Ser., vol. 3, Springer, Milan, 2013, pp. 147–205.
- [8] Jeanne N. Clelland, Christopher G. Moseley, and George R. Wilkens, *Geometry of sub-Finsler Engel manifolds*, Asian J. Math. **11** (2007), no. 4, 699–726.
- [9] Eero Hakavuori and Enrico Le Donne, *Blowups and blowdowns of geodesics in carnot groups*, Preprint, submitted, arXiv:1806.09375 (2018).
- [10] Enrico Le Donne, *A metric characterization of Carnot groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 2, 845–849.
- [11] Pierre Pansu, *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. (2) **129** (1989), no. 1, 1–60.
- [12] Сачков Ю.Л., Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Диони, *Мат. Сборник*, 194 (2003), 9: 63–90.
- [13] А.А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, 2005.
- [14] Л.С. Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Наука, 1961.
- [15] Davide Barilari, Ugo Boscain, Enrico Le Donne, Mario Sigalotti, Sub-Finsler Structures from the Time-Optimal Control Viewpoint for some Nilpotent Distributions, *J. Dyn. Control Syst.* (2017) 23: 547.