

УДК 517.977

А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, Т. Хуанг, К. Янг

Экстремальные траектории в сублоренцевой задаче на группе Энгеля¹

Пусть \mathbb{E} является группой Энгеля и D — левоинвариантное распределение ранга 2 на \mathbb{E} с лоренцевой метрикой. Сублоренцева задача формулируется как задача максимизации сублоренцевой длины. В работе получена параметризация времениподобных и пространственноподобных нормальных экстремальных траекторий с помощью эллиптических функций Якоби. Далее, описана дискретная группа симметрий для случаев времениподобных и пространственноподобных траекторий, в обоих случаях для каждой симметрии вычислены неподвижные точки и соответствующие точки Максвелла. На основе этих вычислений вдоль каждой экстремальной траектории выведена оценка на время разреза (время потери глобальной оптимальности).

Библиография: 31 названий.

Ключевые слова: группа Энгеля, экстремальные траектории, сублоренцева метрика, эллиптические функции Якоби.

§ 1. Введение

Субриманова структура на многообразии M задается гладким распределением D на M и гладкой положительно определенной метрикой g на распределении. Тройка (M, D, g) называется *субримановым многообразием*, которое используется в различных областях, в том числе в теории управления, квантовой физике, субримановой геометрии, а также в обработке изображений и компьютерном зрении. Занимаясь обобщением субриманова многообразия, можно задаться вопросом: какие геометрические особенности будет иметь вышеупомянутая тройка, если изменить положительно определенную метрику на невырожденную знакопеременную форму? Естественно начать с сублоренцевой метрики индекса 1. В этом случае тройка (一年多образие, распределение и лоренцева метрика на распределении) называется *сублоренцевым многообразием* по аналогии с лоренцевым многообразием. Детали касательно *сублоренцевой геометрии* читатель может найти в работе [1]. Насколько известно, существует лишь несколько работ, посвященных этой теме (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6]). В статье [2] Д. Чанг, И. Маркина и А. Васильев изучили геодезические в пространстве анти-де Ситтера с сублоренцевой метрикой и с субримановой метрикой соответственно. В работе [4] Гроховски вычислил множество достижимости в пространстве \mathbb{R}^3 из точки сублоренцева многообразия Гейзенберга.

¹Разделы 2 и 3 статьи выполнены Т. Хуангом и К. Янгом, а разделы 4, 5 и 6 — А.А. Ардентовым и Ю.Л.Сачковым. Исследование А.А. Ардентова и Ю.Л.Сачкова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

В работе [6] показано, что группа Гейзенберга \mathbb{H} с лоренцевой метрикой на \mathbb{R}^3 определяет единственные гамильтоновы геодезические времениподобного и пространственноподобного типа.

Группа Энгеля, впервые упоминаемая Картаном в работе [7] 1901 года, является продолжением трехмерного контактного многообразия и многообразием Гурса. В работах [8, 9, 10] А. А. Ардентов и Ю. Л. Сачков вычислили субримановы кратчайшие на группе Энгеля. В данной статье изучается группа Энгеля, снабженная сублоренцевой метрикой. Данный пример сублоренцева многообразия интересен тем, что группа Энгеля является простейшим сублоренцевым многообразием с нетривиальными аномальными экстремальными траекториями, распределение группы Энгеля не является 2-порождающим, так как вектор роста этой задачи имеет длину 3.

Аномальные траектории не зависят от метрики, и для рассматриваемого в данной работе левоинвариантного распределения на группе Энгеля они были вычислены впервые в работе [8]; для полноты изложения параметризация аномальных траекторий приведена далее в формулах (3.1).

Левоинвариантная сублоренцева структура на группе Энгеля рассматривалась впервые в работе [11]. В этой работе описаны некоторые свойства горизонтальных кривых, а также получена параметризация непространственноподобных экстремальных траекторий.

Данная работа продолжает исследования, начатые в работе [11]. Получены следующие результаты. Гамильтонова система с сублоренцевым гамильтонианом записана в слое кокасательного расслоения в естественных координатах, соответствующих левоинвариантному реперу на группе Энгеля. Благодаря этому сопряженная подсистема гамильтоновой системы становится независимой и приобретает форму, подобную управлению маятника. Для сопряженной подсистемы вводятся выпрямляющие координаты, с помощью которых гамильтонова система для времениподобных и пространственноподобных экстремалей явно интегрируется в функциях Якоби. Полученная параметризация экспоненциального отображения достаточно компактна, что позволило провести его исследование.

Построена дискретная группа симметрий экспоненциального отображения и описаны неподвижные точки симметрий, которые задают соответствующие точки Максвелла. Отсюда получена верхняя оценка на время разреза (время потери максимальности) вдоль экстремальных траекторий.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 напоминает основные понятия сублоренцевой геометрии, а также определяет структуру группы Энгеля. В разделе 3 выписана гамильтонова система с сублоренцевым гамильтонианом. В разделе 4 найдена параметризация времениподобных нормальных траекторий и соответственно описано экспоненциальное отображение, задающее параметризацию всех времениподобных нормальных экстремальных траекторий, затем описаны симметрии экспоненциального отображения и исследованы соответствующие точки Максвелла, которые определяются неподвижными точками симметрий. В разделе 5 получено описание экспоненциального отображения, доставляющего параметризацию всех пространственноподобных нормальных экстремальных траекторий, затем изучаются симметрии экспо-

ненциального отображения и исследуются соответствующие точки Максвелла, которые определяются неподвижными точками этих симметрий. На основе этого исследования получена верхняя оценка для времени разреза.

§ 2. Начальные сведения

Сублоренцево многообразие определяется тройкой (M, D, g) , где M является гладким n -мерным многообразием, D — распределением на M , а g — гладкой лоренцевой метрикой на D . Для каждой точки $p \in M$, вектор $v \in D_p$ называют горизонтальным. Абсолютно непрерывная кривая $\gamma(t)$ называется горизонтальной, если её производная $\gamma'(t)$ почти всюду лежит в $D_{\gamma(t)}$.

Вектор $v \in D_p$ называют времениподобным, если $g(v, v) < 0$; пространственноподобным, если $g(v, v) > 0$ или $v = 0$; светоподобным, если $g(v, v) = 0$ и $v \neq 0$; и непространственноподобным, если $g(v, v) \leq 0$. Кривая называется времениподобной, если её касательный вектор времениподобен почти всюду; аналогично определяются пространственноподобные, светоподобные и непространственноподобные кривые.

Под ориентацией тройки (M, D, g) во времени понимается непрерывное времениподобное векторное поле на M . Далее подразумевается, что (M, D, g) ориентирована во времени. Пусть X является ориентацией во времени для (M, D, g) , тогда непространственноподобный вектор $v \in D_p$ называют направленным в будущее, если $g(v, X(p)) < 0$, и направленным в прошлое, если $g(v, X(p)) > 0$.

Всюду в этой статье будем использовать следующие сокращения:

- «б.н.» — «направленный в будущее»,
- «п.н.» — «направленный в прошлое»,
- «вп.» — «времениподобный»,
- «пп.» — «пространственноподобный»,
- «нпп.» — «непространственноподобный».

Введем пространство Ω горизонтальных нпп. кривых:

$$\Omega = \{\gamma : [0, T] \rightarrow M \mid g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \leq 0, \gamma'(t) \in D_{\gamma(t)} \text{ для почти всех } t \in [0, T]\}.$$

Сублоренцева длина горизонтальной нпп. кривой $\gamma(t)$ определяется следующим образом:

$$l(\gamma) = \int_0^T \|\gamma'(t)\| dt,$$

где $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{|g(\gamma'(t), \gamma'(t))|}$ вычислена с использованием лоренцевой метрики на горизонтальных подпространствах $D_{\gamma(t)}$. Длина используется для определения сублоренцева расстояния $d_U(q_1, q_2)$ относительно множества $U \subset M$ между двумя точками $q_1, q_2 \in U$:

$$d_U(q_1, q_2) = \begin{cases} \sup\{l(\gamma), \gamma \in \Omega_U(q_1, q_2)\}, & \text{если } \Omega_U(q_1, q_2) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Omega_U(q_1, q_2) = \emptyset, \end{cases}$$

где $\Omega_U(q_1, q_2)$ является множеством всех нпп. б.н. кривых, содержащихся в U и соединяющих q_1 с q_2 . В случае $U = M$ сублоренцево расстояние обозначается $d_M(q_1, q_2) = d(q_1, q_2)$.

$D \subset TM$ называется распределением полного ранга, если любой локальный базис $\{X_i\}_{1 \leq i \leq r}$ подпространства D вместе со всевозможными скобками Ли $[X_i, X_j], [X_i, [X_j, X_k]], \dots$ порождает касательное расслоение TM . Распределение полного ранга также называют вполне неголономным или распределением, удовлетворяющим условию Хёрмандера.

ТЕОРЕМА 1 (РАШЕВСКИЙ-ЧЖОУ). *Зафиксируем точку $q \in M$. Если распределение $D \subset TM$ полного ранга, то множество точек, которые можно соединить горизонтальной кривой с точкой q , является компонентой связности множества M , содержащей q .*

Из теоремы 1 следует, что если D является распределением полного ранга и M связно, то любые две точки из M можно соединить горизонтальной кривой.

В лоренцевой геометрии задача минимизации длины тривиальна, так как любые две точки можно соединить кусочной светоподобной траекторией нулевой длины. Однако, существуют вп. траектории с максимальной длиной, являющиеся вп. геодезическими [12]. Таким образом, естественно изучить сублоренцевы траектории максимальной длины.

Непространственноподобную кривую называют максимальной, если она реализует расстояние между своими конечными точками.

Пусть сублоренцева структура D, g имеет глобальный базис из векторных полей X_1, \dots, X_r на M таких, что для всех $q \in M$

$$\begin{aligned} D_q &= \text{span}(X_1(q), \dots, X_r(q)), \\ g(X_1, X_1) &= -1, \quad g(X_2, X_2) = \dots = g(X_r, X_r) = 1, \\ g(X_i, X_j) &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Тогда сублоренцев гамильтониан $H : T^*M \rightarrow M$ определяется следующим образом

$$H(q, \lambda) = -\frac{1}{2} \langle \lambda, X_1(q) \rangle^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^r \langle \lambda, X_i(q) \rangle^2, \quad (q, \lambda) \in T^*M. \quad (2.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Нормальной экстремальной траекторией в сублоренцевом многообразии (M, D, g) называется кривая $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow M$, допускающая лифт $\Gamma : [a, b] \rightarrow T^*M$, который является решением гамильтоновой системы с сублоренцевым гамильтонианом $H(q, \lambda)$. В этом случае говорят, что $\Gamma(t)$ является нормальным лифтом $\gamma(t)$.

Любая максимальная кривая является нормальной экстремальной траекторией или аномальной траекторией (см. [1; предложение 3.2]). Более того, любая достаточно короткая дуга б.н. вп. нормальной экстремальной траектории является единственной максимальной кривой между ее концами относительно некоторого открытого множества (см. [1; предложение 4.1]).

Теперь введем группу Энгеля \mathbb{E} с координатами $q = (x_1, x_2, y, z) \in \mathbb{R}^4$. Групповой закон обозначим через \odot и определим следующим образом:

$$(x_1, x_2, y, z) \odot (x'_1, x'_2, y', z') = \left(x_1 + x'_1, \quad x_2 + x'_2, \quad y + y' + \frac{x_1 x'_2 - x'_1 x_2}{2}, \right. \\ \left. z + z' + x_1 y' + \frac{x_2 x'_2 (x_2 + x'_2) + x_1 x'_2 (x_1 + x'_1)}{2} \right).$$

Векторное поле X на \mathbb{E} называют левоинвариантным, если оно удовлетворяет равенству $dL_q X(e) = X(q)$, где L_q обозначает левый сдвиг $p \rightarrow L_q(p) = q \odot p$, а e — единичный элемент группы \mathbb{E} . Из данного определения следует, что любое левоинвариантное векторное поле на \mathbb{E} является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами следующих векторных полей:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial y}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial y} + x_1 \frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Распределение $D = \text{span}\{X_1, X_2\}$ на \mathbb{E} удовлетворяет условию полного ранга, так как $X_3 = [X_1, X_2]$, $X_4 = [X_1, X_3]$. Группа Энгеля является нильпотентной группой Ли, так как $[X_1, X_4] = [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = 0$. Определим гладкую лоренцеву метрику g на D :

$$g(X_1, X_1) = -1, \quad g(X_2, X_2) = 1, \quad g(X_1, X_2) = 0. \quad (2.3)$$

Далее рассматривается левоинвариантная сублоренцева структура (D, g) на группе Энгеля \mathbb{E} .

Некоторые простые свойства сублоренцева пространства (\mathbb{E}, D, g) легко устанавливаются. Так, вдоль любой бн. нпп. горизонтальной кривой $q(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t), z(t))$ первая координата $x_1(t)$ строго монотонна, поэтому не существует замкнутых бн. нпп. горизонтальных кривых; это означает, что пространство (\mathbb{E}, D, g) хронологическое [13]. Тем более не существует замкнутых бн. вп. горизонтальных кривых, т.е. пространство (\mathbb{E}, D, g) каузальное [13].

§ 3. Сублоренцевы экстремальные траектории

В данном разделе начато исследование сублоренцевых нормальных экстремальных траекторий. В силу инвариантности относительно левых сдвигов на группе Энгеля можно предполагать, что начальная точка находится в начале координат, т.е. $x_1(0) = x_2(0) = y(0) = z(0) = 0$.

Выпишем гамильтонову систему с сублоренцевым гамильтонианом H . Для этого введем канонические координаты (ξ_1, \dots, ξ_4) на слоях кокасательного раслоения $T_q^*\mathbb{E}$, а также линейные на слоях $T_q^*\mathbb{E}$ гамильтонианы

$$h_i = \langle \xi, X_i \rangle, \quad i = 1, \dots, 4,$$

соответствующие базисным в касательном пространстве $T_q\mathbb{E}$ векторным полям X_1, X_2, X_3, X_4 :

$$h_1 = \xi_1 - \frac{x_2}{2} \xi_3, \quad h_2 = \xi_2 + \frac{x_1}{2} \xi_3 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \xi_4, \quad h_3 = \xi_3 + x_1 \xi_4, \quad h_4 = \xi_4.$$

В аномальном случае имеем $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, $h_4 \neq 0$. Аномальные траектории являются пространственноподобными и имеют вид

$$(x_1, x_2, y, z) = \left(0, \pm t, 0, \pm \frac{t^3}{6}\right). \quad (3.1)$$

В подразделе 5.1 будет показано, что аномальные траектории также являются нормальными.

Нормальная гамильтонова система в координатах $(x_1, x_2, y, z, h_1, h_2, h_3, h_4)$ с сублоренцевым гамильтонианом H записывается следующим образом:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \xi_1} = -(\xi_1 - \frac{x_2}{2}\xi_3) = -h_1, \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \xi_2} = \xi_2 + \frac{x_1}{2}\xi_3 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\xi_4 = h_2, \quad (3.3)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \xi_3} = h_1 \frac{x_2}{2} + h_2 \frac{x_1}{2} = \frac{1}{2}(x_1 h_2 + x_2 h_1), \quad (3.4)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial \xi_4} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}h_2, \quad (3.5)$$

$$\dot{h}_1 = \dot{\xi}_1 - \frac{\dot{x}_2}{2}\xi_3 = -h_2 h_3, \quad (3.6)$$

$$\dot{h}_2 = \dot{\xi}_2 + \frac{\dot{x}_2}{2}\xi_3 + \xi_4(x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2) = -h_1 h_3, \quad (3.7)$$

$$\dot{h}_3 = \dot{x}_1 \xi_4 = -h_1 h_4, \quad (3.8)$$

$$\dot{h}_4 = 0. \quad (3.9)$$

Заметим, что сублоренцевы экстремальные траектории являются времени-подобными, если $H < 0$; пространственноподобными, если $H > 0$; светоподобными, если $H = 0$.

Для случая светоподобных экстремальных траекторий имеем $H = (-h_1^2 + h_2^2)/2 = 0$, таким образом $h_2 = \pm h_1$. Тогда траектории удовлетворяют ОДУ:

$$\dot{q} = h_1(-X_1 \pm X_2).$$

Вдоль светоподобных экстремальных траекторий гамильтониан h_1 сохраняет знак, поэтому эти траектории являются перепараметризациями траекторий полей $-X_1 \pm X_2$:

$$x_1(t) = -t, \quad x_2(t) = \pm t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = \pm \frac{t^3}{3}, \quad (3.10)$$

и $X_1 \mp X_2$:

$$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = \mp t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = \mp \frac{t^3}{3}. \quad (3.11)$$

В следующих двух разделах исследуются вп. и пп. экстремальные траектории. Заметим, что обычно в лоренцевой и сублоренцевой геометрии максимальные кривые отыскиваются среди нпп. (т.е. времениподобных и светоподобных) кривых, а пп. кривые не рассматриваются. Однако если сублоренцева

структура (D, g) имеет ранг два (т.е. $\dim D_q = 2$), то $(D, -g)$ также является сублоренцевой структурой, и пп. кривые для структуры (D, g) являются вп. кривыми для структуры $(D, -g)$. Поэтому исследование пп. кривых для сублоренцевых структур ранга два естественно и необходимо.

§ 4. Времениподобные экстремальные траектории

В случае вп. траекторий $H = \frac{1}{2}(-h_1^2 + h_2^2) < 0$, ограничимся поверхностью уровня $\{H = -1/2\}$ и введем на этой поверхности координаты (θ, c, α) следующим образом:

$$h_1 = \pm \operatorname{ch} \theta, \quad h_2 = \operatorname{sh} \theta, \quad h_3 = c, \quad h_4 = \alpha.$$

Заметим, что мы имеем симметрию гамильтоновой системы (3.2)–(3.9):

$$\varepsilon^0: (h_1, h_2, h_3, h_4, x_1, x_2, y, z) \mapsto (-h_1, h_2, -h_3, h_4, -x_1, x_2, -y, z). \quad (4.1)$$

Поэтому далее без ограничения общности рассмотрим случай $h_1 = \operatorname{ch} \theta > 0$.

В координатах $(\theta, c, \alpha, x_1, x_2, y, z)$ на поверхности уровня $\{H = -1/2\}$ гамильтонова система (3.2)–(3.9) принимает форму:

$$\dot{x}_1 = -\operatorname{ch} \theta, \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_2 = \operatorname{sh} \theta, \quad (4.3)$$

$$\dot{y} = \frac{x_2 \operatorname{ch} \theta + x_1 \operatorname{sh} \theta}{2}, \quad (4.4)$$

$$\dot{z} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \operatorname{sh} \theta, \quad (4.5)$$

$$\dot{\theta} = -c, \quad (4.6)$$

$$\dot{c} = -\alpha \operatorname{ch} \theta, \quad (4.7)$$

$$\dot{\alpha} = 0. \quad (4.8)$$

Заметим, что подсистема для сопряженных переменных сводится к уравнениям

$$\ddot{\theta} = \alpha \operatorname{ch} \theta, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad (4.9)$$

фазовый портрет которых при $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$ изображен на Рис. 1.

Введем интеграл энергии:

$$E = \frac{h_3^2}{2} - h_2 h_4 = \frac{c^2}{2} - \alpha \operatorname{sh} \theta, \quad \dot{E} = h_3 \dot{h}_3 - h_4 \dot{h}_2 = 0.$$

Семейство вп. нормальных экстремальных траекторий параметризуется точками множества

$$\begin{aligned} C = T_{q_0}^* \mathbb{E} \cap \{H = -1/2, h_1 > 0\} &= \{(h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbb{R}^4 \mid h_1^2 - h_2^2 = 1, h_1 > 0\} \\ &= \{(\theta, c, \alpha) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

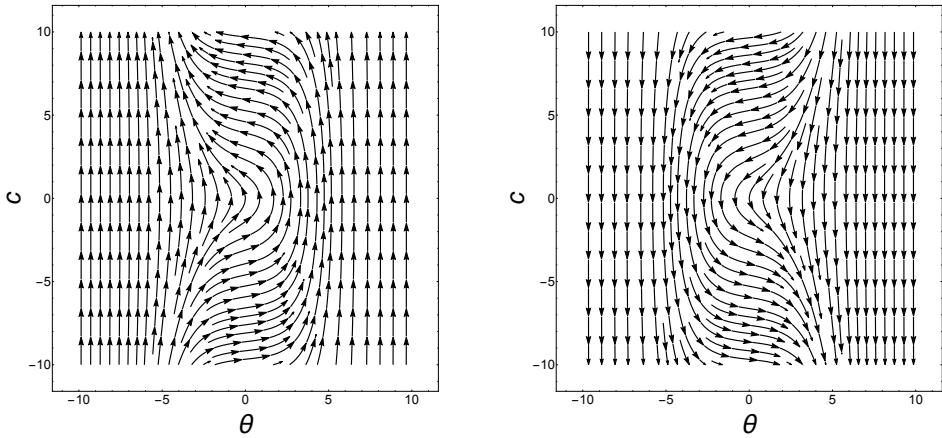


Рис. 1. Фазовый портрет вертикальной подсистемы (4.9) для множеств C^- и C^+ (времениподобный случай)

Множество C имеет следующее разбиение на подмножества:

$$\begin{aligned} C &= C_0^0 \cup C^0 \cup C^+ \cup C^-, \quad \lambda = (\theta, c, \alpha), \\ C_0^0 &= \{\lambda \in C \mid c = 0, \alpha = 0\}, \\ C^0 &= \{\lambda \in C \mid c \neq 0, \alpha = 0\}, \\ C^+ &= \{\lambda \in C \mid \alpha > 0\}, \\ C^- &= \{\lambda \in C \mid \alpha < 0\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим общий случай $\alpha \neq 0$. Траектории подсистемы (4.6)–(4.8) для C^+ и C^- симметричны (см. Рис. 1). Эта симметрия (см. раздел 4.2) имеет следующий вид:

$$\varepsilon^1: (\alpha, c, \theta, x_1, x_2, y, z) \mapsto (-\alpha, -c, -\theta, x_1, -x_2, -y, -z). \quad (4.10)$$

Таким образом, ввиду симметрии ε^1 достаточно проинтегрировать гамильтонову систему в случае C^+ . На множестве C^+ введем новые координаты (φ, E, α) , выпрямляющие вертикальную подсистему (4.6)–(4.8):

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{\sqrt{E^2 + \alpha^2}}{2}}, & k^2 &= \frac{1}{2} + \frac{E}{4\alpha e^2} \in (0, 1), \\ c &= -2\alpha \operatorname{sc}(\alpha\varphi) \operatorname{dn}(\alpha\varphi), & \varphi &\in \left(-\frac{K}{\alpha}, \frac{K}{\alpha}\right), \\ \operatorname{sh} \theta &= \frac{2\alpha^2 \left(1 - k^2(1 + \operatorname{cn}^4(\alpha\varphi))\right)}{\alpha \operatorname{cn}^2(\alpha\varphi)}, & \operatorname{ch} \theta &= \frac{2\alpha^2 \left(1 - k^2(1 - \operatorname{cn}^4(\alpha\varphi))\right)}{\alpha \operatorname{cn}^2(\alpha\varphi)}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{sn} \psi, \operatorname{cn} \psi, \operatorname{dn} \psi$ — эллиптические функции Якоби с эллиптическим модулем k ; $\operatorname{sc} \psi = \frac{\operatorname{sn} \psi}{\operatorname{cn} \psi}$; $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Непосредственное дифференцирование показывает, что в этих координатах подсистема для сопряженных переменных (4.6)–(4.8) принимает следующую форму:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{E} = 0, \quad \dot{\alpha} = 0,$$

поэтому ее решения имеют вид

$$\varphi(t) = \varphi_t = \varphi_0 + t, \quad E = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}.$$

4.1. Экспоненциальное отображение для вп. нормальных экстремалей. Обозначим параметры функций Якоби

$$\psi_0 = \alpha\varphi_0, \quad \psi_t = \alpha\varphi_t \in (-K, K)$$

для описания экспоненциального отображения в общем случае $\alpha \neq 0$:

$$x_1(t) = \frac{2\alpha}{|\alpha|} (\operatorname{sc} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0 - \operatorname{sc} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t), \quad (4.11)$$

$$x_2(t) = \frac{4\alpha \left(\alpha(1-k^2)t - (\operatorname{E}(\psi_t) - \operatorname{E}(\psi_0)) \right) - |\alpha|x_1(t)}{\alpha}, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & -\frac{2\alpha^2}{\alpha|\alpha|} \left(k^2 (\operatorname{cn}^2 \psi_t - \operatorname{cn}^2 \psi_0) + (1-k^2)(\operatorname{nc}^2 \psi_t - \operatorname{nc}^2 \psi_0) \right) \\ & + \frac{\alpha}{|\alpha|} \left(\operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_0 + \operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sc} \psi_t \right) x_2(t), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{(x_2(t))^3}{6} + \frac{4\alpha^3}{3\alpha^3} \left(2\alpha(k^2-1)t + (1-k^2) \left(\frac{\operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t}{\operatorname{cn}^3 \psi_t} - \frac{\operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sn} \psi_0}{\operatorname{cn}^3 \psi_0} \right) \right. \\ & + k^2 (\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sn} \psi_0) - \\ & \left. - 2(\operatorname{E}(\psi_t) - \operatorname{E}(\psi_0))(2k^2-1) \right) - \frac{2\alpha^2(2k^2-1)x_1(t)}{3\alpha|\alpha|} \\ & - \frac{2\alpha \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sn} \psi_0 \left(\frac{\alpha \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_0}{|\alpha|} x_2(t) - \frac{1}{2} x_1(t) x_2(t) - y(t) \right)}{\operatorname{cn} \psi_0 |\alpha|}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\operatorname{E}(\psi) = \int_0^\psi \operatorname{dn}^2 t dt$.

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) при $|\alpha| = 1$ и $\psi_0 = 0$ приведены слева на Рис. 2. Заметим, что, так как $\psi_t \in (-K, K)$, то имеется верхняя оценка на параметр времени

$$t < t_{\text{supr}}(\lambda) = \frac{\operatorname{K}(k) - \psi_0}{\alpha}. \quad (4.15)$$

Когда $t \rightarrow t_{\text{supr}}(\lambda)$, решения (4.11)–(4.14) взрываются, т.е. стремятся к бесконечности.

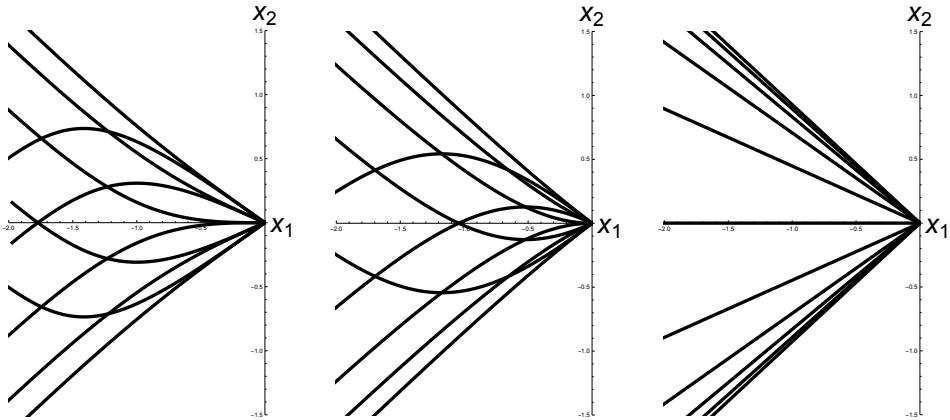


Рис. 2. Проекции экстремальных траекторий на плоскость (x_1, x_2) для C^\pm , C^0 и C_0^0 (времениподобный случай)

Для подмножества C^0 имеем

$$\alpha = 0, \quad E = \frac{c^2}{2} \implies c \equiv \text{const}, \quad \theta = \theta_0 - ct,$$

$$x_1(t) = \frac{\sinh(\theta_0 - ct) - \sinh \theta_0}{c}, \quad (4.16)$$

$$x_2(t) = \frac{\cosh \theta_0 - \cosh(\theta_0 - ct)}{c}, \quad (4.17)$$

$$y(t) = \frac{\sinh(ct) - ct}{2c^2}, \quad (4.18)$$

$$z(t) = \frac{4 \sinh^3\left(\frac{ct}{2}\right) \sinh\left(3\theta_0 - \frac{3ct}{2}\right) - 3(\sinh(ct) - ct) \sinh \theta_0}{6c^3}. \quad (4.19)$$

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) при $|c| = 1$ (гиперболы) приведены в середине Рис. 2.

Если $\lambda \in C_0^0$,

$$\alpha = c = E = 0, \quad \theta \equiv \text{const}, \quad \sinh \theta = s_0, \quad \cosh \theta = c_0,$$

$$x_1(t) = -c_0 t, \quad (4.20)$$

$$x_2(t) = s_0 t, \quad (4.21)$$

$$y(t) \equiv 0, \quad (4.22)$$

$$z(t) = \frac{(2s_0^2 + 1)s_0}{6} t^3. \quad (4.23)$$

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) являются прямыми линиями (см. справа на Рис. 2). При $\lambda \in C^0 \cup C_0^0$ верхней оценки на параметр времени нет: $t_{\text{supr}}(\lambda) = +\infty$.

Таким образом получена параметризация экспоненциального отображения

$$\text{Exp} : N \rightarrow \mathbb{E} = \mathbb{R}^4, \quad \text{Exp}(\lambda, t) = q(t),$$

$$N = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \in (0, t_{\text{supr}}(\lambda))\},$$

в случае времениподобных траекторий. Оно переводит пару (λ, t) в точку соответствующей экстремальной траектории $q(t)$.

Далее исследуем дискретные симметрии экспоненциального отображения и найдем оценку времени разреза на экстремалах.

4.2. Дискретные симметрии экспоненциального отображения(вп.).

Подсистема (4.6)–(4.8) для сопряженных переменных нормальной гамильтоновой системы имеет симметрии, сохраняющие поле направлений этой системы. Мы уже описали одну из них (4.10).

Определим действие симметрий ε^i на множестве траекторий вертикальной подсистемы с сохранением направления времени. Обозначим гладкую кривую

$$\gamma = \left\{ (\theta(t), c(t), \alpha) \mid t \in [0, T] \right\} \subset C.$$

Зададим действие симметрий на эти кривые (см. Рис. 3):

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 : \gamma &\mapsto \gamma_1 = \left\{ (\theta^1(t), c^1(t), \alpha^1) \mid t \in [0, T] \right\} = \left\{ (-\theta(t), -c(t), -\alpha) \right\}, \\ \varepsilon^2 : \gamma &\mapsto \gamma_2 = \left\{ (\theta^2(t), c^2(t), \alpha^2) \mid t \in [0, T] \right\} = \left\{ (\theta(T-t), -c(T-t), \alpha) \right\}, \\ \varepsilon^3 : \gamma &\mapsto \gamma_3 = \left\{ (\theta^3(t), c^3(t), \alpha^3) \mid t \in [0, T] \right\} = \left\{ (-\theta(T-t), c(T-t), -\alpha) \right\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что если γ является решением вертикальной подсистемы (4.6)–(4.8), $\gamma_i, i = 1, 2, 3$, также является решением.

Теперь рассмотрим группу симметрий

$$G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 = \varepsilon^1 \circ \varepsilon^2\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Симметрия ε^1 сохраняет направление времени на траекториях, а ε^2 и ε^3 обращают его.

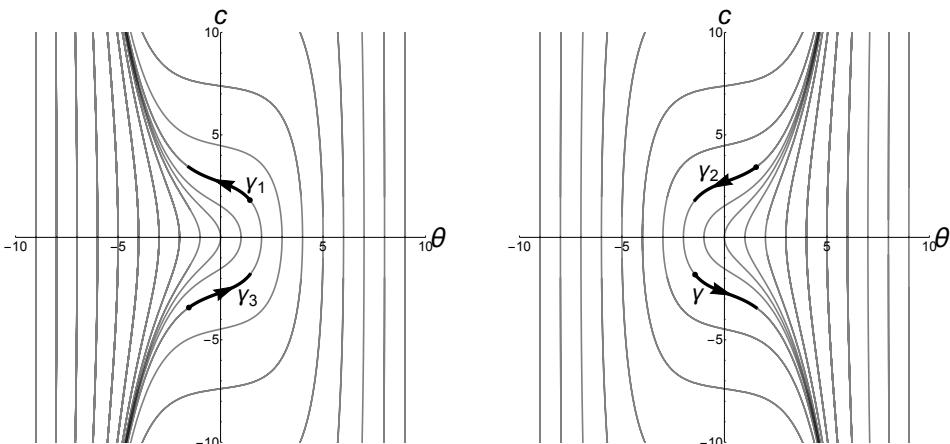


Рис. 3. Действие симметрий на траектории вертикальной подсистемы при $\alpha = -1, 1$ (случай времениподобных траекторий)

Продолжим действие симметрий с вертикальной подсистемы на решения гамильтоновой системы (4.2)–(4.8)

$$\dot{\theta}(t) = -c(t), \quad \dot{c}(t) = -\alpha \operatorname{ch} \theta(t), \quad \dot{\alpha} = 0, \quad (4.24)$$

$$\dot{q}(t) = -\operatorname{ch} \theta(t) X_1(q(t)) + \operatorname{sh} \theta(t) X_2(q(t)), \quad (4.25)$$

следующим образом:

$$\varepsilon^i : \left\{ (\theta(t), c(t), \alpha, q(t)) \mid t \in [0, T] \right\} \mapsto \left\{ (\theta^i(t), c^i(t), \alpha^i, q^i(t)) \mid t \in [0, T] \right\}, \quad (4.26)$$

где $q(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t), z(t))$, $t \in [0, T]$, есть экстремальная траектория, а

$$q^i(t) = (x_1^i(t), x_2^i(t), y^i(t), z^i(t)), \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2, 3,$$

суть её образы под действием симметрий ε^i .

ЛЕММА 4.1. *Симметрии ε^i преобразуют траектории на плоскости (x_1, x_2) следующим образом:*

$$\begin{aligned} x_1^1(t) &= x_1(t), & x_2^1(t) &= -x_2(t), \\ x_1^2(t) &= x_1(T) - x_1(T-t), & x_2^2(t) &= x_2(T) - x_2(T-t), \\ x_1^3(t) &= x_1(T) - x_1(T-t), & x_2^3(t) &= x_2(T-t) - x_2(T). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверяется непосредственно интегрированием.

Например, для ε^2 получаем

$$\begin{aligned} x_1^2(t) &= \int_0^t (-\operatorname{ch} \theta(T-s)) ds = \int_{T-t}^T (-\operatorname{ch} \theta(r)) dr = x_1(T) - x_1(T-t), \\ x_2^2(t) &= \int_0^t \operatorname{sh} \theta(T-s) ds = \int_{T-t}^T \operatorname{sh} \theta(r) dr = x_2(T) - x_2(T-t). \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.2. *Симметрии ε^i преобразуют концы экстремальной траектории $q = (x_1, x_2, y, z)$ в концы экстремальной траектории $q^i = (x_1^i, x_2^i, y^i, z^i)$ следующим образом:*

$$\begin{aligned} x_1^1(T) &= x_1(T), & x_2^1(T) &= -x_2(T), & y^1(T) &= -y(T), & z^1(T) &= -z(T), \\ x_1^2(T) &= x_1(T), & x_2^2(T) &= x_2(T), & y^2(T) &= -y(T), & z^2(T) &= z(T) - x_1(T)y(T), \\ x_1^3(T) &= x_1(T), & x_2^3(T) &= -x_2(T), & y^3(T) &= y(T), & z^3(T) &= x_1(T)y(T) - z(T). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.1 получаем выражения для $x_1^i(T)$ и $x_2^i(T)$. Выражения для остальных координат получаются интегрированием.

Определим действие ε^i в прообразе экспоненциального отображения N как сужение действия на начальную точку траектории вертикальной подсистемы:

$$\varepsilon^i : C \rightarrow C, \quad \varepsilon^i(\theta, c, \alpha) = (\theta^i, c^i, \alpha^i), \quad (4.27)$$

$$(\theta^1, c^1, \alpha^1) = (-\theta, -c, -\alpha), \quad (4.28)$$

$$(\theta^2, c^2, \alpha^2) = (\theta, -c, \alpha), \quad (4.29)$$

$$(\theta^3, c^3, \alpha^3) = (-\theta, c, -\alpha), \quad (4.30)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1(\lambda, t) &= (\varepsilon^1(\lambda), t), \\ \varepsilon^i(\lambda, t) &= (\varepsilon^i \circ e^{t\vec{H}_v}(\lambda), t), \quad i = 2, 3,\end{aligned}$$

где $\vec{H}_v = -c \frac{\partial}{\partial \theta} - \alpha \operatorname{ch} \theta \frac{\partial}{\partial c} \in \operatorname{Vec}(C)$ есть вертикальная часть гамильтонова векторного поля.

Определим действие ε^i в образе экспоненциального отображения \mathbb{E} как сужение действия на концы экстремалей (см. лемму 4.2):

$$\varepsilon^i : M \rightarrow \mathbb{E}, \quad \varepsilon^i(q) = \varepsilon^i(x_1, x_2, y, z) = q^i = (x_1^i, x_2^i, y^i, z^i), \quad (4.31)$$

$$(x_1^1, x_2^1, y^1, z^1) = (x_1, -x_2, -y, -z), \quad (4.32)$$

$$(x_1^2, x_2^2, y^2, z^2) = (x_1, x_2, -y, z - x_1 y), \quad (4.33)$$

$$(x_1^3, x_2^3, y^3, z^3) = (x_1, -x_2, y, x_1 y - z). \quad (4.34)$$

Так как действие ε^i в прообразе N и образе \mathbb{E} экспоненциального отображения порождается действием симметрий (4.26) на траектории гамильтоновой системы (4.24)–(4.25), справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Симметрии $\varepsilon^i, i = 1, 2, 3$, являются симметриями экспоненциального отображения, т.е.*

$$(\varepsilon^i \circ \operatorname{Exp})(\theta, c, \alpha, t) = (\operatorname{Exp} \circ \varepsilon^i)(\theta, c, \alpha, t), \quad (\theta, c, \alpha, t) \in N.$$

4.3. Точки Максвелла времениподобных нормальных экстремалей. Точка $q(t)$ на экстремальной траектории называется точкой Максвелла, если существует другая экстремальная траектория $\tilde{q}(s) \not\equiv q(s)$, для которой $\tilde{q}(t) = q(t), t > 0$. Известно, что после точки Максвелла траектория не может быть оптимальна. В этом разделе будут вычислены точки Максвелла, соответствующие некоторым симметриям ε^i . На этой основе будут получены верхние оценки времени разреза вдоль экстремальных траекторий

$$t_{\text{cut}}(\lambda) = \sup\{t > 0 \mid \operatorname{Exp}(\lambda, s) \text{ максимальна при } s \in [0, t]\}.$$

Определим множества Максвелла в прообразе Exp , соответствующие симметриям ε^i :

$$\begin{aligned}\operatorname{MAX}^i &= \{(\lambda, t) \in N \mid \lambda^i \neq \lambda, \operatorname{Exp}(\lambda^i, t) = \operatorname{Exp}(\lambda, t)\}, \\ \lambda &= (\theta, c, \alpha), \quad (\lambda^i, t) = \varepsilon^i(\lambda, t).\end{aligned} \quad (4.35)$$

Из предложения 1 следует, что равенство $\operatorname{Exp}(\lambda^i, t) = \operatorname{Exp}(\lambda, t)$ эквивалентно $\varepsilon^i(q(t)) = q(t)$. Таким образом, получаем описание неподвижных точек симметрий ε^i в образе экспоненциального отображения.

ЛЕММА 4.3.

1. $\varepsilon^1(q) = q \iff x_2 = 0, y = 0, z = 0$.
2. $\varepsilon^2(q) = q \iff y = 0$.
3. $\varepsilon^3(q) = q \iff x_2 = 0, z = \frac{x_1 y}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определений (4.31)–(4.34) действия симметрий в \mathbb{E} .

Вычислим неподвижные точки симметрий в прообразе экспоненциального отображения, необходимые для описания множеств Максвелла. Для этого на множествах

$$N^\pm = \left\{ (\lambda, t) \in C^\pm \times \mathbb{R}_+ \mid t \in (0, t_{\text{supr}}(\lambda)) \right\}$$

введем следующие координаты:

$$\tau = \frac{\psi_t + \psi_0}{2}, \quad p = \frac{\psi_t - \psi_0}{2} = \frac{\alpha t}{2}. \quad (4.36)$$

Параметр τ соответствует средней точке траектории.

ЛЕММА 4.4.

1. $\lambda^1 = \lambda \iff \lambda \in C_0^0, \theta = 0$.
2. $\lambda^2 = \lambda \iff \lambda \in C^\pm, \tau = 0$ или $\lambda \in C_0^0$.
3. $\lambda^3 = \lambda \iff \lambda \in C^0 \cup C_0^0, \theta + \frac{ct}{2} = 0$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определения действия симметрий в прообразе экспоненциального отображения (4.27)–(4.30).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\lambda, T) \in N$ и $q(T) = \text{Exp}(\lambda, T)$. Тогда

1. $(\lambda, T) \in \text{MAX}^1 \iff x_2(T) = y(T) = z(T) = 0$ и если $\lambda \in C_0^0$, то $\theta \neq 0$.
2. $(\lambda, T) \in \text{MAX}^2 \iff \lambda \in C^\pm, y(T) = 0, \tau \neq 0$ или $\lambda \in C^0, y(T) = 0$.
3. $(\lambda, T) \in \text{MAX}^3 \iff x_2 = 0, z = \frac{x_1 y}{2}$ и если $\lambda \in C^0 \cup C_0^0$, то $\theta \neq -\frac{ct}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определения множества Максвелла (4.35), лемм 4.3 и 4.4.

Уравнения $\varepsilon^i(q) = q$ определяют подмногообразия в \mathbb{R}^4 размерности от 1 до 3, экспоненциальное отображение переводит соответствующие множества Максвелла в эти подмногообразия:

$$\text{Exp}(\text{MAX}^i) \subset \{q \in M \mid \varepsilon^i(q) = q\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Далее детально опишем множество MAX^2 , так как оно определяет в M подмногообразие максимальной размерности 3, тогда как MAX^1 и MAX^3 определяют подмногообразия размерности 1 и 2. Используя новые координаты (4.36) в случае $\alpha \neq 0$ получаем

$$y = -\frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau f_y(p)}{\alpha |\alpha| \alpha^2 k^2 (\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{dn}^2 \tau \operatorname{sn}^2 p)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 \tau)},$$

$$f_y(p) = -16\alpha^4 k^4 \operatorname{cn}^3 p \operatorname{dn} p \operatorname{sn} p + (16\alpha^4 k^2 E(p) - \alpha^2 p)(\operatorname{dn}^2 p - k^2 \operatorname{cn}^2 p \operatorname{sn}^2 p).$$

Это дает нам описание множества Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{MAX}^2 \cap N^\pm &= \{\nu \in N^\pm \mid y(\nu) = 0, \tau \neq 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} \\ &= \{\nu \in N^\pm \mid f_y(p) = 0, p \in (0, K)\}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где $\nu = (\tau, p, E, \alpha)$.

Следующая очевидная лемма будет полезна для локализации корней функций.

ЛЕММА 4.5. Пусть гладкие функции $f(u), g(u)$ на интервале $(0, u_0) \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

$$f(u) \not\equiv 0, \quad g(u) > 0, \quad \left(\frac{f(u)}{g(u)} \right)' \geqslant 0, \quad (4.38)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{g(u)} = 0. \quad (4.39)$$

Тогда $f(u) > 0$ для $u \in (0, u_0)$.

Если функции f и g удовлетворяют условиям (4.38), (4.39), то будем называть g функцией сравнения для f на интервале $(0, u_0)$.

ЛЕММА 4.6. Функция $f_y(p) > 0$ при $p \in (0, K(k))$, $k \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $g(p) = k^2(1 - k^2(1 - \operatorname{cn}^4 p))$ является функцией сравнения для $f_y(p)$ при $p \in (0, K)$.

Неравенство $f_y(p) \not\equiv 0$ следует из разложения $f_y(p) = \frac{4}{3}\alpha^2 k^2 p^3 + o(p^3)$. Заметим, что $g(p) > 0$ при $p \in (0, K)$. Наконец получаем равенства

$$\left(\frac{f_y(p)}{g(p)} \right)' = \frac{4\alpha^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{cn}^2 p \operatorname{dn} p}{1 - k^2(1 - \operatorname{cn}^4 p)} > 0, \quad \frac{f_y(p)}{g(p)} = \frac{4}{3}\alpha^2 p^3 + o(p^3).$$

Поэтому $g(p)$ является функцией сравнения для $f_y(p)$; таким образом, из леммы 4.5 следует, что $f_y(p) > 0$ при $p \in (0, K)$.

ТЕОРЕМА 3. $\operatorname{MAX}^2 \cap N^\pm = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует непосредственно из описания множества Максвелла (4.37) и леммы 4.6.

Доказано, что экстремальная траектория общего положения с $\lambda \in C^\pm$ не имеет времен Максвелла $t_{\operatorname{MAX}}(\lambda) \in (0, t_{\operatorname{supr}}(\lambda))$, соответствующих симметрии ε^2 . Откуда предполагаем, что экстремальная траектория $q(t) = \operatorname{Exp}(\lambda, t)$ для $\lambda \in C^\pm$ максимальна при $t \in (0, t_{\operatorname{supr}}(\lambda))$.

§ 5. Пространственноподобные экстремальные траектории

В случае пп. траекторий $H = \frac{1}{2}(-h_1^2 + h_2^2) > 0$, ограничимся поверхностью уровня $H = 1/2$ и введем на этой поверхности новые координаты:

$$h_1 = \operatorname{sh} \theta, \quad h_2 = \pm \operatorname{ch} \theta, \quad h_3 = c, \quad h_4 = \alpha.$$

Заметим, что имеется следующая симметрия гамильтоновой системы:

$$\varepsilon^0 : (h_1, h_2, h_3, h_4, x_1, x_2, y, z) \mapsto (h_1, -h_2, -h_3, -h_4, x_1, -x_2, -y, -z).$$

Поэтому далее без ограничения общности будем полагать, что $h_2 = \operatorname{ch} \theta > 0$.

В координатах $(\theta, c, \alpha, x_1, x_2, y, z)$ на поверхности уровня $\{H = 1/2\}$ гамильтонова система (4.2)–(4.8) имеет следующий вид для пространственноподобных

траекторий:

$$\dot{x}_1 = -\operatorname{sh} \theta, \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2 = \operatorname{ch} \theta, \quad (5.2)$$

$$\dot{y} = \frac{x_2 \operatorname{sh} \theta + x_1 \operatorname{ch} \theta}{2}, \quad (5.3)$$

$$\dot{z} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \operatorname{ch} \theta, \quad (5.4)$$

$$\dot{\theta} = -c, \quad (5.5)$$

$$\dot{c} = -\alpha \operatorname{sh} \theta, \quad (5.6)$$

$$\dot{\alpha} = 0. \quad (5.7)$$

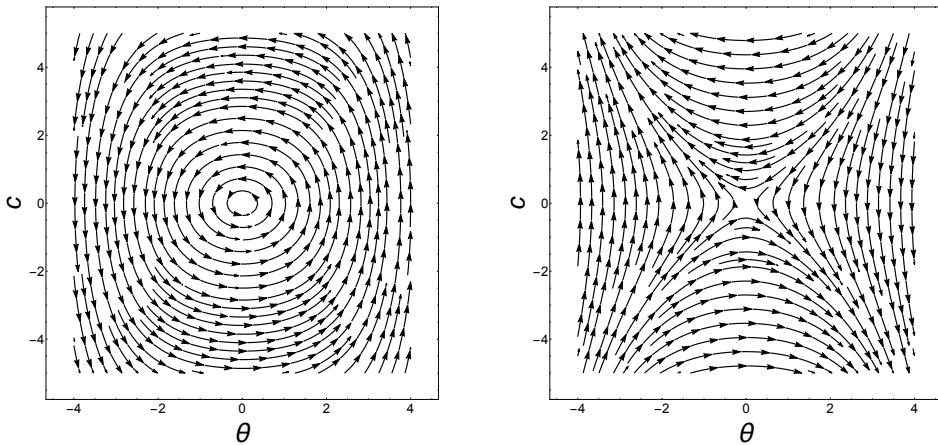


Рис. 4. Фазовый портрет вертикальной подсистемы при $\alpha = -1, 1$
(случай пространственноподобных траекторий)

Вертикальная подсистема (5.5)–(5.7) имеет интеграл энергии:

$$E = \frac{h_3^2}{2} - h_2 h_4 = \frac{c^2}{2} - \alpha \operatorname{ch} \theta.$$

Семейство п. нормальных экстремальных траекторий параметризуется точками множества

$$\begin{aligned} C &= T_{q_0}^* \mathbb{E} \cap \{H = 1/2, h_2 > 0\} = \{(h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbb{R}^4 \mid h_2^2 - h_1^2 = 1, h_2 > 0\} \\ &= \{(\theta, c, \alpha) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Множество C имеет следующее разбиение на подмножества:

$$\begin{aligned} C &= \bigcup_{i=1}^7 C_i, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \lambda = (\theta, c, \alpha), \\ C_1 &= \{\lambda \in C \mid \alpha < 0, E > -\alpha\}, \\ C_2 &= \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E < -\alpha\}, \\ C_3 &= \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E > -\alpha\}, \\ C_4 &= \{\lambda \in C \mid \alpha > 0, E = -\alpha, c \neq 0, \theta \neq 0\}, \\ C_5 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = -\alpha, c = 0, \theta = 0\}, \\ C_6 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = 0, E > 0, c \neq 0\}, \\ C_7 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = 0, E = 0, c = 0\}. \end{aligned}$$

Для параметризации экстремальных траекторий на множестве $\bigcup_{i=1}^3 C_i$ введем координаты (φ, E, α) следующим образом.

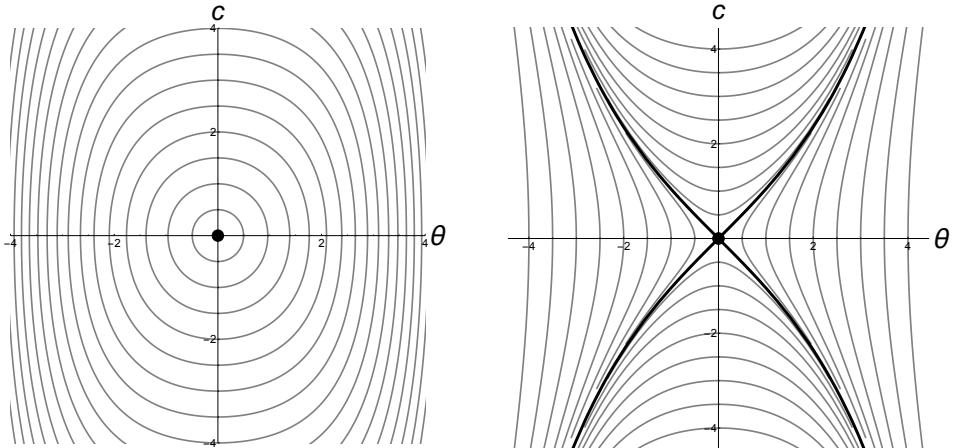


Рис. 5. Траектории вертикальной подсистемы при $\alpha = -1, 1$ (случай пространственноподобных траекторий)

В области C_1 :

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{E + \alpha}{E - \alpha}} \in (0, 1), & \varepsilon &= \sqrt{\frac{E - \alpha}{2}}, \\ c &= \sqrt{2(E + \alpha)} \operatorname{sn}(\varepsilon\varphi), & \varphi &\in \mathbb{R}, \\ \operatorname{sh} \theta &= \frac{\sqrt{E - \alpha} \sqrt{E + \alpha} \operatorname{cn}(\varepsilon\varphi) \operatorname{dn}(\varepsilon\varphi)}{\alpha}, & \operatorname{ch} \theta &= 1 - \frac{(E + \alpha) \operatorname{cn}^2(\varepsilon\varphi)}{\alpha}. \end{aligned}$$

В области C_2 :

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha - E}} \in (0, 1), & \mathfrak{a} &= \sqrt{\frac{\alpha - E}{2}}, \\ c &= \operatorname{sgn} \theta \frac{\sqrt{2(-\alpha - E)} \operatorname{sn}(\mathfrak{a}\varphi)}{\operatorname{cn}(\mathfrak{a}\varphi)}, & \varphi &\in \left(-\frac{K}{\mathfrak{a}}, \frac{K}{\mathfrak{a}} \right), \\ \operatorname{sh} \theta &= \operatorname{sgn} \theta \frac{\sqrt{-\alpha - E} \sqrt{\alpha - E} \operatorname{dn}(\mathfrak{a}\varphi)}{\alpha \operatorname{cn}^2(\mathfrak{a}\varphi)}, & \operatorname{ch} \theta &= 1 - \frac{\alpha + E}{\alpha \operatorname{cn}(\mathfrak{a}\varphi)}. \end{aligned}$$

В области C_3 :

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{E - \alpha}{E + \alpha}} \quad k_2 = k^2 \in (-\infty, 1), & \mathfrak{a} &= \sqrt{\frac{E + \alpha}{2}}, \\ c &= \operatorname{sgn} c \frac{2\mathfrak{a} \operatorname{dn}(\mathfrak{a}\varphi)}{\operatorname{cn}(\mathfrak{a}\varphi)}, & \varphi &\in \left(-\frac{K}{\mathfrak{a}}, \frac{K}{\mathfrak{a}} \right), \\ \operatorname{sh} \theta &= \operatorname{sgn} c \frac{2 \operatorname{sn}(\mathfrak{a}\varphi)}{\operatorname{cn}^2(\mathfrak{a}\varphi)}, & \operatorname{ch} \theta &= \frac{1 + \operatorname{sn}^2(\mathfrak{a}\varphi)}{\operatorname{cn}^2(\mathfrak{a}\varphi)}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $k^2 < 0$, то $k = i \frac{\tilde{k}}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2}}$, $\tilde{k} = \sqrt{\frac{-k^2}{1 - k^2}} \in (0, 1)$. Используя формулы из работы [14] имеем

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \sqrt{\frac{\alpha - E}{2\alpha}}, \quad \sqrt{1 - \tilde{k}^2} = \sqrt{\frac{\alpha + E}{2\alpha}}; & \operatorname{dn}(\mathfrak{a}\varphi, k) &= \frac{1}{\operatorname{dn}(\sqrt{\alpha}\varphi, \tilde{k})}, \\ \operatorname{sn}(\mathfrak{a}\varphi, k) &= \frac{\sqrt{1 - \tilde{k}^2} \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha}\varphi, \tilde{k})}{\operatorname{dn}(\sqrt{\alpha}\varphi, \tilde{k})}, & \operatorname{cn}(\mathfrak{a}\varphi, k) &= \frac{\operatorname{cn}(\sqrt{\alpha}\varphi, \tilde{k})}{\operatorname{dn}(\sqrt{\alpha}\varphi, \tilde{k})}. \end{aligned}$$

В области C_4 :

$$\begin{aligned} c &= \operatorname{sgn} \theta \frac{4\alpha e^{\mathfrak{a}\varphi}}{\alpha e^{2\mathfrak{a}\varphi} - 1}, & \mathfrak{a} &= \sqrt{\alpha}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad \alpha e^{2\mathfrak{a}\varphi} \neq 1, \\ \operatorname{sh} \theta &= \operatorname{sgn} \theta \frac{4\mathfrak{a} e^{\mathfrak{a}\varphi} (\alpha e^{2\mathfrak{a}\varphi} + 1)}{(\alpha e^{2\mathfrak{a}\varphi} - 1)^2}, & \cos \theta &= \frac{\alpha e^{2\mathfrak{a}\varphi} (\alpha e^{2\mathfrak{a}\varphi} + 6) + 1}{\alpha e^{2\mathfrak{a}\varphi} - 1}. \end{aligned}$$

Непосредственное дифференцирование показывает, что подсистема для сопряженных переменных (5.5)–(5.7) в координатах (φ, E, α) принимает следующую форму:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{E} = 0, \quad \dot{\alpha} = 0,$$

поэтому ее решения имеют вид

$$\varphi(t) = \varphi_t = \varphi_0 + t, \quad E = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}.$$

5.1. Экспоненциальное отображение для пп. нормальных экстремалей. Обозначим $\psi_0 = \mathfrak{a}\varphi_0, \psi_t = \mathfrak{a}\varphi_t$. Из определения переменных c и θ получаем следующую параметризацию экстремальных траекторий.

Если $\lambda \in C_1$, то

$$x_1(t) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha+E}}{\alpha} \left(\operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi_0 \right), \quad (5.8)$$

$$x_2(t) = -\frac{2\alpha}{\alpha} \left(E(\psi_t) - E(\psi_0) \right) - t, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{\sqrt{\alpha+E}}{\sqrt{2}\alpha^2} \left(2\alpha \left(\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0 \right. \right. \\ & \left. \left. + (E(\psi_t) - E(\psi_0)) (\operatorname{sn} \psi_t + \operatorname{sn} \psi_0) \right) + \alpha (\operatorname{sn} \psi_t + \operatorname{sn} \psi_0) t \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{(x_2(t))^3}{6} + \frac{1}{3\alpha^3} \left(2\alpha \left(- (E + 3(\alpha+E) \operatorname{sn}^2 \psi_0) (E(\psi_t) - E(\psi_0)) + (\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. + E) (\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t (\operatorname{sn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi_0) - 2(\operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0) \operatorname{sn} \psi_0) \right) \right. \\ & \left. + \alpha (\alpha - E - 3(\alpha+E) \operatorname{sn}^2 \psi_0) t \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) при $|\alpha| = 1$ и $\psi_0 = 0$ изображены слева на Рис. 6. В этом случае отсутствует верхняя граница на время:

$$t_{\text{supr}}(\lambda) = +\infty.$$

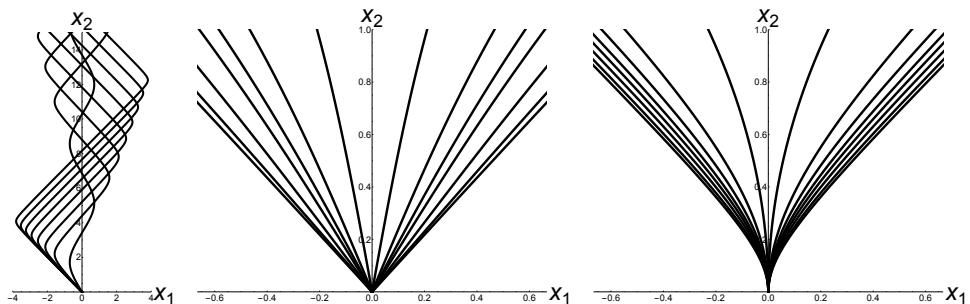


Рис. 6. Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) при $\lambda \in C_1$, $\lambda \in C_2$ и $\lambda \in C_3$ (пространственноподобный случай)

Если $\lambda \in C_2$, то

$$x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\alpha - E} \operatorname{sgn} \theta}{\alpha} \left(\operatorname{sc} \psi_t - \operatorname{sc} \psi_0 \right), \quad (5.12)$$

$$x_2(t) = -\frac{2\alpha(E(\psi_t) - E(\psi_0) + \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_0 - \operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sc} \psi_t) + Et}{\alpha}, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & -\frac{\sqrt{-\alpha - E} \operatorname{sgn} \theta}{\sqrt{2}\alpha^2} \left(2\alpha \left((\operatorname{sc} \psi_0 + \operatorname{sc} \psi_t)(E(\psi_t) - E(\psi_0)) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{dn} \psi_0)(1 - \operatorname{sc} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_t) \right) + E(\operatorname{sc} \psi_0 + \operatorname{sc} \psi_t)t \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{2\alpha}{3\alpha^3 \alpha \operatorname{cn}^3 \psi_t \operatorname{cn}^3 \psi_0} \left(\left(\alpha (\operatorname{cn}^2 \psi_t \operatorname{dn} \psi_0 (1 - 3\operatorname{cn}^2 \psi_0) + 3\operatorname{cn}^2 \psi_0 \operatorname{dn} \psi_t) \right. \right. \\ & + (\operatorname{cn}^2 \psi_t \operatorname{dn} \psi_0 (1 - 4\operatorname{cn}^2 \psi_0) + 3\operatorname{cn}^2 \psi_0 \operatorname{dn} \psi_t)E \left. \right) \operatorname{sn} \psi_0 \operatorname{cn} \psi_t \\ & - \operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sn} \psi_t \left(\alpha \operatorname{cn}^2 \psi_0 + 3\alpha \operatorname{sn}^2 \psi_0 \operatorname{cn}^2 \psi_t + (3\operatorname{cn}^2 \psi_t \right. \\ & \left. + \operatorname{cn}^2 \psi_0 (1 - 4\operatorname{cn}^2 \psi_t))E \right) \left. \right) + \frac{(\alpha + E)(\operatorname{cn}^2 \psi_0(\alpha - 4E) + 3E)}{3\alpha^3 \operatorname{cn}^2 \psi_0} t \\ & + \frac{(x_2(t))^3}{6} + \frac{2\alpha(3(\alpha + E)\operatorname{sn}^2 \psi_0 - E\operatorname{cn}^2 \psi_0)}{3\alpha^3 \operatorname{cn}^2 \psi_0} (E(\psi_t) - E(\psi_0)). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) при $|\alpha| = 1$ и $\psi_0 = 0$ показаны в центре Рис. 6. Заметим, что, так как $\psi_t \in (-K, K)$, то имеется верхняя граница на параметр времени:

$$t < t_{\text{supr}}(\lambda) = \frac{K(k) - \psi_0}{\alpha}. \quad (5.16)$$

Если $\lambda \in C_3$, то

$$x_1(t) = \frac{2 \operatorname{sgn} c (\operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_0)}{\alpha \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_0 (1 - k_2)}, \quad (5.17)$$

$$x_2(t) = \frac{2}{\alpha(1 - k_2)} \left(\operatorname{dn} \psi_t \operatorname{sc} \psi_t - \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sc} \psi_0 - E(\psi_t) + E(\psi_0) \right) + t, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{\operatorname{sgn} c}{\alpha(1 - k_2)} \left(\frac{2}{\alpha(1 - k_2)} \left((\operatorname{dc} \psi_t + \operatorname{dc} \psi_0)(E(\psi_t) - E(\psi_0)) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\operatorname{dc} \psi_0 \operatorname{dc} \psi_t + k_2)(\operatorname{sn} \psi_0 - \operatorname{sn} \psi_t) \right) - (\operatorname{dc} \psi_0 + \operatorname{dc} \psi_t)t \right), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{2(E(\psi_t) - E(\psi_0))(6 - 6k_2 + \operatorname{cn}^2 \psi_0(1 + 7k_2))}{3\alpha^3 \operatorname{cn}^2 \psi_0(-1 + k_2)^3} + \frac{2(3\operatorname{dn}^2 \psi_0 + \operatorname{cn}^2 \psi_0)}{3\alpha^2 \operatorname{cn}^2 \psi_0(-1 + k_2)^2} t \\ & + \frac{(x_2(t))^3}{6} + \frac{2}{3\alpha^3 \operatorname{cn}^3 \psi_t \operatorname{cn}^3 \psi_0(-1 + k_2)^3} \left(2\operatorname{cn}^3 \psi_0 \operatorname{sn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t (k_2 - 1) \right. \\ & - \operatorname{cn} \psi_0 \operatorname{cn}^2 \psi_t \operatorname{sn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t (6 - 6k_2 + \operatorname{cn}^2 \psi_0(1 + 7k_2)) \\ & + \operatorname{sn} \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{cn}^3 \psi_t (2 + \operatorname{cn}^2 \psi_0 - 2k_2 + 7k_2 \operatorname{cn}^2 \psi_0) \\ & \left. - 6\operatorname{cn}^2 \psi_0 \operatorname{dn} \psi_0 \operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t (k_2 - 1) \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) при $|\alpha| = 1$ и $\psi_0 = 0$ изображены справа на Рис. 6. Заметим, что, так как $\psi_t \in (-K, K)$ имеется верхняя граница для параметра времени: $t_{\text{supr}}(\lambda) = \frac{K(k) - \psi_0}{\alpha}$.

Если $\lambda \in C_4$, то

$$x_1(t) = 4 \operatorname{sgn} \theta \left(\frac{e^{\psi_t}}{-1 + \alpha e^{2\psi_t}} - \frac{e^{\psi_0}}{-1 + \alpha e^{2\psi_0}} \right), \quad (5.21)$$

$$x_2(t) = \frac{4}{\alpha} \left(\frac{1}{-1 + \alpha e^{2\psi_t}} - \frac{1}{-1 + \alpha e^{2\psi_0}} \right) + t, \quad (5.22)$$

$$y(t) = -\operatorname{sgn} \theta \frac{2e^{\psi_0}(-1 + \alpha e^{\psi_t + \psi_0})(2 + \alpha t + e^{\psi_t - \psi_0}(\alpha t - 2))}{\alpha(-1 + \alpha e^{2\psi_0})(-1 + \alpha e^{2\psi_t})}, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{x_2^3(t)}{6} + \frac{4}{3} \left(\frac{6e^{2\psi_0}t}{(-1 + \alpha e^{2\psi_0})^2} + \frac{-1 - 9\alpha e^{2\psi_0}(-2 + \alpha e^{2\psi_0})}{\alpha \alpha (-1 + \alpha e^{2\psi_0})^3} \right. \\ & + \frac{12(1 + \alpha e^{2\psi_0}(-1 + 2e^{\psi_t - \psi_0}))}{\alpha \alpha (-1 + \alpha e^{2\psi_0})(-1 + \alpha e^{2\psi_t})^2} - \frac{8}{\alpha \alpha (-1 + \alpha e^{2\psi_t})^3} \\ & \left. - \frac{3(1 + \alpha e^{2\psi_0}(6 + 4e^{\psi_t - \psi_0} - \alpha e^{2\psi_0}(-1 + 4e^{\psi_t - \psi_0})))}{\alpha \alpha (-1 + \alpha e^{2\psi_0})^2(-1 + \alpha e^{2\psi_t})} \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) при $|\alpha| = 1$ изображены слева (при $\psi_0 < 0$) и в центре (при $\psi_0 > 0$) на Рис. 7.

Заметим, что имеется условие $\alpha e^{2\sqrt{\alpha}\varphi_t} \neq 1$. Обозначим $t_0 = -\frac{\ln \alpha}{2\sqrt{\alpha} - \varphi_0}$.

Если $t_0 < 0$, то $t_{\text{supr}}(\lambda) = +\infty$ (верхняя граница на параметр времени отсутствует, см. слева на Рис. 7). Если $t_0 > 0$, то $t_{\text{supr}}(\lambda) = t_0$ (траектория уходит в бесконечность за конечное время, см. в центре на Рис. 7).

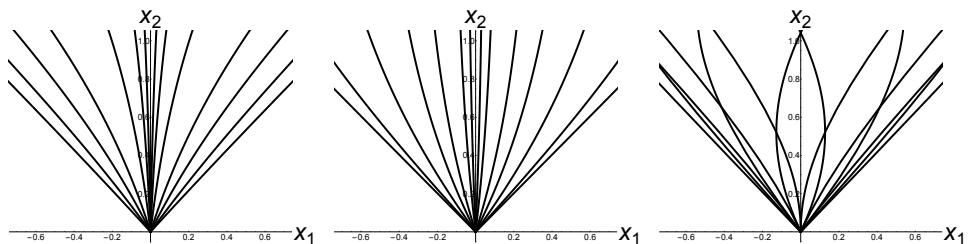


Рис. 7. Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) при $\lambda \in C_4$ (2 типа) и $\lambda \in C_6$ (пространственноподобный случай)

В остальных случаях гамильтонова система легко интегрируется.

Если $\lambda \in C_5$, то

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) = t, \quad y \equiv 0, \quad z = \frac{t^3}{6}. \quad (5.25)$$

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) являются прямыми линиями. В этом случае отсутствует верхнее ограничение на параметр времени:

$$t_{\text{supr}} = +\infty.$$

Если $\lambda \in C_6$, то

$$\alpha = 0, \quad c \equiv \text{const} \neq 0, \quad \theta = \theta_0 - ct, \\ x_1(t) = \frac{\text{ch}(ct - \theta_0) - \text{ch} \theta_0}{c}, \quad (5.26)$$

$$x_2(t) = \frac{\text{sh}(ct - \theta_0) + \text{sh} \theta_0}{c}, \quad (5.27)$$

$$y(t) = \frac{ct - \text{sh}(ct)}{2c^2}, \quad (5.28)$$

$$z(t) = \frac{4 \text{ch} \left(\frac{3ct}{2} - 3\theta_0 \right) \text{sh}^3 \frac{ct}{2} - 3 \text{ch} \theta_0 (ct - \text{sh}(ct))}{6c^3}. \quad (5.29)$$

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) при $|\alpha| = 1$ и $\psi_0 = 0$ (гиперболы) изображены справа на Рис. 7. При этом отсутствует верхняя граница на параметр времени: $t_{\text{supr}} = +\infty$.

Если $\lambda \in C_7$, то

$$\alpha = 0, \quad c \equiv 0, \quad \theta \equiv \text{const}, \quad \text{sh} \theta = s_0, \quad \text{ch} \theta = c_0,$$

$$x_1(t) = -s_0 t, \quad (5.30)$$

$$x_2(t) = c_0 t, \quad (5.31)$$

$$y(t) \equiv 0, \quad (5.32)$$

$$z(t) = \frac{c_0(1 + 2s_0^2)}{6} t \quad (5.33)$$

Проекции экстремалей на плоскость (x_1, x_2) суть прямые линии. В этом случае также отсутствует верхняя граница на параметр времени: $t_{\text{supr}} = +\infty$.

Таким образом получено описание экспоненциального отображения

$$\text{Exp} : N \rightarrow \mathbb{E} = \mathbb{R}^4, \quad \text{Exp}(\lambda, t) = q(t),$$

$$N = \{(\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mid t \in (0, t_{\text{supr}}(\lambda))\},$$

в пространственноподобном случае.

Далее изучим дискретные симметрии экспоненциального отображения и на этой основе получим оценки на время разреза вдоль экстремалей.

5.2. Дискретные симметрии экспоненциального отображения(пп.).
Подсистема для сопряженных переменных (5.5)-(5.7) нормальной гамильтоновой системы имеет симметрии, сохраняющие поле направлений этой системы.

Опишем действие симметрий ε^i на множество траекторий вертикальной подсистемы с сохранением направления времени. Обозначим гладкую кривую

$$\gamma = \left\{ (\theta(t), c(t), \alpha) \mid t \in [0, T] \right\} \subset C.$$

Определим действие симметрий на эту кривую (см. Рис. 8):

$$\varepsilon^1 : \gamma \mapsto \gamma_1 = \left\{ (\theta^1(t), c^1(t), \alpha^1) \mid t \in [0, T] \right\} = \left\{ (\theta(T-t), -c(T-t), \alpha) \right\},$$

$$\varepsilon^2 : \gamma \mapsto \gamma_2 = \left\{ (\theta^2(t), c^2(t), \alpha^2) \mid t \in [0, T] \right\} = \left\{ (-\theta(T-t), c(T-t), \alpha) \right\},$$

$$\varepsilon^3 : \gamma \mapsto \gamma_3 = \left\{ (\theta^3(t), c^3(t), \alpha^3) \mid t \in [0, T] \right\} = \left\{ (-\theta(t), -c(t), \alpha) \right\}.$$

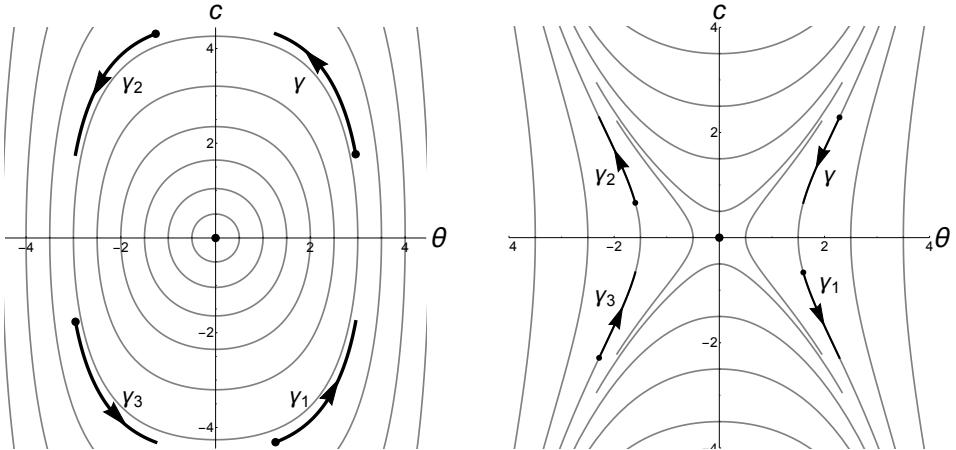


Рис. 8. Действие симметрий на траектории вертикальной подсистемы при $\alpha = -1, 1$ (пространственноподобный случай)

Очевидно, что, если γ является решением вертикальной подсистемы (5.5)-(5.7), $\gamma_i, i = 1, 2, 3$, также является решением.

Рассмотрим группу симметрий $G = \{\text{Id}, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 = \varepsilon^1 \circ \varepsilon^2\} \cong \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$. Симметрия ε^3 сохраняет направление времени, а ε^1 и ε^2 обращают его.

Аналогично случаю времениподобных экстремалей (см. предыдущий раздел), действие группы G можно продолжить на прообраз N и образ \mathbb{E} экспоненциального отображения так, чтобы $\varepsilon^i, i = 1, 2, 3$, стали симметриями этого отображения.

А именно, определим сначала действие ε^i на множестве C :

$$\varepsilon^i : C \rightarrow C, \quad \varepsilon^i(\theta, c, \alpha) = (\theta^i, c^i, \alpha^i), \quad (5.34)$$

$$(\theta^1, c^1, \alpha^1) = (\theta, -c, -\alpha), \quad (5.35)$$

$$(\theta^2, c^2, \alpha^2) = (-\theta, c, \alpha), \quad (5.36)$$

$$(\theta^3, c^3, \alpha^3) = (-\theta, -c, -\alpha), \quad (5.37)$$

а затем в прообразе экспоненциального отображения N :

$$\begin{aligned} \varepsilon^i(\lambda, t) &= (\varepsilon^i \circ e^{t\vec{H}_v}(\lambda), t), \quad i = 1, 2, \\ \varepsilon^3(\lambda, t) &= (\varepsilon^3(\lambda), t), \end{aligned}$$

где $\vec{H}_v = -c \frac{\partial}{\partial \theta} - \alpha \operatorname{sh} \theta \frac{\partial}{\partial c} \in \operatorname{Vec}(C)$ есть вертикальная часть гамильтонова векторного поля.

Далее, определим действие ε^i в образе \mathbb{E} экспоненциального отображения Exp следующим образом:

$$\varepsilon^i : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \quad \varepsilon^i(q) = \varepsilon^i(x_1, x_2, y, z) = q^i = (x_1^i, x_2^i, y^i, z^i), \quad (5.38)$$

$$(x_1^1, x_2^1, y^1, z^1) = (x_1, x_2, -y, z - x_1 y), \quad (5.39)$$

$$(x_1^2, x_2^2, y^2, z^2) = (-x_1, x_2, y, z - x_1 y), \quad (5.40)$$

$$(x_1^3, x_2^3, y^3, z^3) = (-x_1, x_2, -y, z). \quad (5.41)$$

После этого следующее утверждение доказывается так же, как предложение 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Симметрии $\varepsilon^i, i = 1, 2, 3$, являются симметриями экспоненциального отображения, т.е.*

$$(\varepsilon^i \circ \text{Exp})(\theta, c, \alpha, t) = (\text{Exp} \circ \varepsilon^i)(\theta, c, \alpha, t), \quad (\theta, c, \alpha, t) \in N.$$

5.3. Точки Максвелла пп. нормальных экстремалей. В этом разделе мы вычислим точки Максвелла, соответствующие симметриям ε^i . Далее на основе этих результатов получим оценки для времени разреза вдоль экстремалей.

Определим множества Максвелла в прообразе Exp , соответствующие симметриям ε^i :

$$\begin{aligned} \text{MAX}^i &= \{(\lambda, t) \in N \mid \lambda^i \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t)\}, \\ \lambda &= (\theta, c, \alpha), \quad (\lambda^i, t) = \varepsilon^i(\lambda, t). \end{aligned}$$

Из предложения 2 следует, что равенство $\text{Exp}(\lambda^i, t) = \text{Exp}(\lambda, t)$ равносильно $\varepsilon^i(q(t)) = q(t)$. Отсюда получаем описание неподвижных точек симметрий ε^i в прообразе Exp .

ЛЕММА 5.1.

1. $\varepsilon^1(q) = q \iff y = 0$.
2. $\varepsilon^2(q) = q \iff x_1 = 0$.
3. $\varepsilon^3(q) = q \iff x_1^2 + y^2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Следует из определения действия симметрий (5.38)–(5.41) в \mathbb{E} .

Вычислим неподвижные точки симметрий в прообразе экспоненциального отображения. В множестве $\cup_{i=1}^3 N_i$, $N_i = \{(\lambda, t) \in C_i \times \mathbb{R}_+ \mid t \in (0, t_{\text{supr}}(\lambda))\}$ введем следующие координаты:

$$\tau = \frac{\psi_t + \psi_0}{2}, \quad p = \frac{\psi_t - \psi_0}{2} = \frac{\alpha t}{2}. \quad (5.42)$$

Параметр τ соответствует средней точке траектории.

ЛЕММА 5.2.

1. $\lambda^1 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{sn} \tau = 0, & \text{если } \lambda \in C_1 \cup C_2, \\ \text{невозможно, если } \lambda \in C_3 \cup C_4 \cup C_6, \\ c = 0, & \text{если } \lambda \in C_5 \cup C_7. \end{cases}$
2. $\lambda^2 = \lambda \iff \begin{cases} \operatorname{cn} \tau = 0, & \text{если } \lambda \in C_1, \\ \text{невозможно, если } \lambda \in C_2 \cup C_4, \\ \operatorname{sn} \tau = 0, & \text{если } \lambda \in C_3, \\ \theta = 0, & \text{если } \lambda \in \bigcup_{i=5}^7 C_i. \end{cases}$
3. $\lambda^3 = \lambda \iff \begin{cases} \text{невозможно, если } \lambda \in (\bigcup_{i=1}^4 C_i) \cup C_6, \\ \theta = c = 0, & \text{если } \lambda \in C_5 \cup C_7. \end{cases}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определения действия симметрий в прообразе экспоненциального отображения (5.34)–(5.37) и определения координаты τ (5.42).

Уравнения $\varepsilon^i(q) = q$ определяют в \mathbb{R}^4 подмногообразия размерности 2 и 3:

$$\text{Exp}(\text{MAX}^i) \subset \{q \in \mathbb{R}^4 \mid \varepsilon^i(q) = q\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Далее опишем детально множества $\text{MAX}^1, \text{MAX}^2$, так как они определяют в \mathbb{E} подмногообразия максимальной размерности 3, MAX^3 определяет подмногообразие размерности 2. Изучим корни уравнений $x_1 = 0, y = 0$. Используя координаты (5.42) в случае $\lambda \in C_1$ получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\sqrt{2(\alpha + E)} \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau \operatorname{sn} p}{\alpha(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 \tau)}, \\ y &= \frac{2\sqrt{2(\alpha + E)} \operatorname{sn} \tau f_1(p)}{\alpha^2 \operatorname{ae}(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2 \tau)}, \\ f_1(p) &= \alpha p \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p + \operatorname{ae}^2(2 \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p \operatorname{E}(p) - (1 + k^2) \operatorname{sn} p + 2k^2 \operatorname{sn}^3 p). \end{aligned}$$

Отсюда получаем описание множеств Максвелла в N_1 :

$$\begin{aligned} \text{MAX}^1 \cap N_1 &= \{\nu \in N_1 \mid y = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0\} = \{\nu \in N_1 \mid f_1(p) = 0\}, \\ \text{MAX}^2 \cap N_1 &= \{\nu \in N_1 \mid x_1 = 0, \operatorname{cn} \tau \neq 0\} = \{\nu \in N_1 \mid \operatorname{sn} p = 0\}, \end{aligned}$$

где $\nu = (\tau, p, E, \alpha)$.

Через $p_1^i, i \in \mathbb{N}$, обозначим положительные корни уравнения $f_1(p) = 0$, так что $p_1^1 < p_1^2 < \dots < p_1^i < \dots$. Имеем $t_{\text{MAX}^1}(\lambda) = p_1^1$, $t_{\text{MAX}^2}(\lambda) = 2K$.

Существует гипотеза, подтвержденная численными вычислениями, что выполнено $t_{\text{MAX}^2}(\lambda) < t_{\text{MAX}^1}(\lambda)$ при $\lambda \in C_1$. Это означает, что каждая экстремаль из C_1 сначала пересекает множество MAX^2 .

Если $\lambda \in C_2$, то

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2 \operatorname{sgn} \theta \sqrt{2} \sqrt{-\alpha - E} \operatorname{dn} \tau \operatorname{cn} p \operatorname{sn} p}{\alpha(\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 p \operatorname{dn}^2 \tau)}, \\ y &= \frac{2 \operatorname{sgn} \theta \sqrt{2} \sqrt{-\alpha - E} \operatorname{cn} \tau \operatorname{sn} \tau f_2(p)}{\alpha^2 \operatorname{ae}(\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 p \operatorname{dn}^2 \tau)}, \\ f_2(p) &= -\operatorname{E}(p) \operatorname{dn} p - \operatorname{ae}^2(2 \operatorname{dn} p \operatorname{E}(p) - k^2 \operatorname{cn} p \operatorname{sn} p). \end{aligned} \tag{5.43}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \text{MAX}^1 \cap N_2 &= \{\nu \in N_2 \mid y = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} \\ &\subset \{\nu \in N_2 \mid f_2(p) = 0, p \in (0, K)\}, \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\text{MAX}^2 \cap N_2 = \{\nu \in N_2 \mid x_1 = 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} = \emptyset, \tag{5.45}$$

где $\nu = (\tau, p, E, \alpha)$.

ЛЕММА 5.3. *Функция $f_2(p) > 0$ при $p \in (0, K(k))$, $k \in (0, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $g(p) = \operatorname{dn} p$ является функцией сравнения для $f_2(p)$ при $p \in (0, K)$.

Неравенство $f_2(p) \not\equiv 0$ следует из разложения $f_2(p) = \frac{1}{3}\alpha k^2 p^3 + o(p^3)$. Заметим, что $g(p) > 0$ при $p \in (0, K)$. Наконец получаем равенства

$$\left(\frac{f_2(p)}{g(p)}\right)' = \frac{\alpha^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{cn}^2 p}{\alpha^2 \operatorname{dn}^2 p}, \quad \frac{f_2(p)}{g(p)} = \frac{1}{3}\alpha k^2 p^3 + o(p^3).$$

Таким образом, $g(p)$ является функцией сравнения для $f_2(p)$; отсюда из леммы 4.5 следует, что $f_2(p) > 0$ при $p \in (0, K)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\operatorname{MAX}^1 \cap N_2 = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует непосредственно из леммы 5.3 и (5.44).

Если $\lambda \in C_3$, то

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4 \operatorname{sgn} c \operatorname{sn} p \operatorname{sn} \tau}{\alpha(\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{dn}^2 \tau \operatorname{sn}^2 p)}, \\ y &= -\frac{4 \operatorname{sgn} c \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau f_3(p)}{\alpha^2(1 - k_2)^2(\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{dn}^2 \tau \operatorname{sn}^2 p)}, \\ f_3(p) &= \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p ((1 - k_2)p - 2E(p)) + (1 + k_2) \operatorname{sn} p - 2k_2 \operatorname{sn}^3 p. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{MAX}^1 \cap N_3 &= \{\nu \in N_3 \mid y = 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} \\ &= \{\nu \in N_3 \mid f_3(p) = 0, p \in (0, K)\}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\operatorname{MAX}^2 \cap N_3 = \{\nu \in N_3 \mid x_1 = 0, \operatorname{sn} \tau \neq 0, \tau \in (-K, K), p \in (0, K)\} = \emptyset,$$

где $\nu = (\tau, p, E, \alpha)$.

ЛЕММА 5.4. *Функция $f_3(p) > 0$ при $p \in (0, K)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $g(p) = \operatorname{cn} p \operatorname{dn} p$ является функцией сравнения для $f_3(p)$ при $p \in (0, K)$.

Неравенство $f_3(p) \not\equiv 0$ следует из разложения $f_3(p) = \frac{\alpha^2}{3\alpha^4} p^3 + o(p^3)$. Заметим, что $g(p) > 0$ при $p \in (0, K)$. Наконец получаем равенства

$$\left(\frac{f_3(p)}{g(p)}\right)' = \frac{(1 - k_2)^2 \operatorname{sn}^2 p}{\operatorname{cn}^2 p \operatorname{dn}^2 p}, \quad \frac{f_3(p)}{g(p)} = \frac{\alpha^2}{3\alpha^4} p^3 + o(p^3).$$

Таким образом $g(p)$ является функцией сравнения для $f_3(p)$; отсюда из леммы 4.5 следует, что $f_3(p) > 0$ при $p \in (0, K)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что, если $k^2 = k_2 < 0$, то лемма 5.4 также верна. Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\alpha + E} \operatorname{sgn} c \operatorname{dn} \tau \operatorname{sn} \tau \operatorname{dn} p \operatorname{sn} p}{\alpha(\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{dn}^2 \tau \operatorname{sn}^2 p)}, \\ y &= \frac{2\sqrt{2} \operatorname{cn} \tau \sqrt{\alpha + E} \operatorname{sgn} c f_4(p)}{\alpha \alpha (\operatorname{cn}^2 \tau - \operatorname{dn}^2 \tau \operatorname{sn}^2 p)}, \quad \alpha = \sqrt{\alpha}, \\ f_4(p) &= 2 \operatorname{cn} p E(p) - p \operatorname{cn} p - \operatorname{dn} p \operatorname{sn} p, \quad k = \sqrt{\frac{\alpha - E}{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что $g(p) = \operatorname{cn} p$ является функцией сравнения для $f_4(p)$ при $p \in (0, K)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. $\operatorname{MAX}^1 \cap N_3 = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует непосредственно из леммы 5.4 и (5.47).

Найдена следующая верхняя оценка времени разреза вдоль экстремальной траектории общего положения при условии $\lambda \in \bigcup_{i=1}^3 C_i$:

ТЕОРЕМА 4.

$$\text{Если } \lambda \in C_1, \quad \text{то} \quad t_{\text{cut}}(\lambda) \leq 2K(k). \quad (5.48)$$

$$\text{Если } \lambda \in C_2 \cup C_3, \quad \text{то} \quad t_{\text{cut}}(\lambda) \leq \frac{K(k) - \psi_0}{\alpha}. \quad (5.49)$$

Мы предполагаем, что эта оценка точна.

§ 6. Заключение

В данной статье рассмотрены экстремали на группе Энгеля с сублоренцевой метрикой. Для этой задачи получены следующие результаты:

- вычислена параметризация времениподобных и пространственноподобных нормальных экстремальных траекторий, которая задает экспоненциальное отображение;
- описаны симметрии экспоненциального отображения и соответствующие точки Максвелла для времениподобных и пространственноподобных нормальных экстремальных траекторий;
- получена верхняя оценка времени разреза вдоль экстремальных траекторий.

Для группы Энгеля, впервые в сублоренцевой геометрии, показана возможность ухода экстремальных траекторий на бесконечность за конечное время.

Также впервые в сублоренцевой геометрии продемонстрирована эффективность метода симметрий для получения верхних оценок времени разреза. Для нахождения точного значения этого времени потребуется более детальное изучение экспоненциального отображения. Эффективность метода симметрий, который впервые был применен к задаче Эйлера об эластиках [15], а затем развит для решения нескольких субримановых задач (см., например, [8, 16, 17]), подтверждает родство классов задач — аффинных по управлению с квадратичным функционалом, субримановых и сублоренцевых задач. Заметим, что в субримановой и сублоренцевой задачах на группе Энгеля общими являются не только аномальные траектории, но и все траектории, проецирующиеся на плоскость первых двух координат в прямые линии (включая светоподобные траектории).

Список литературы

- [1] M. Grochowski, “Geodesics in the sub-Lorentzian geometry”, *Bull. Polish. Acad. Sci., 50:2* (2002), 162–178.

- [2] D. C. Chang, I. Markina and A. Vasiliev, “Sub-Lorentzian geometry on anti-De Sitter space”, *J. Math. Pures Appl.*, **90**:1 (2008), 82–110.
- [3] M. Grochowski, “Normal forms of germs of Contact sub-Lorentzian structures on \mathbb{R}^3 . Differentiability of the sub-Lorentzian distance function”, *J. Dynam. Control Sys.*, **9**:4 (2003), 531–547.
- [4] M. Grochowski, “Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on \mathbb{R}^3 , an estimate for the distance function”, *J. Dynam. Control Sys.*, **12**:2 (2006), 145–160.
- [5] M. Grochowski, “On the Heisenberg sub-Lorentzian Metric on R^3 ”, *Geometric Singularity Theory*, **65** (2004), 57–65.
- [6] A. Korolko and I. Markina, “Non-holonomic Lorentzian geometry on some \mathbb{H} -type groups”, *J. Geom. Anal.*, **19** (2009), 864–889.
- [7] E. Cartan, “Sur quelques quadratures dont l’élément différentiel contient des fonctions arbitraires”, *Bull. Soc. Math. France*, **29** (1901), 118–130.
- [8] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, “Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля”, *Матем. сб.*, **202**:11 (2011), 31–54.
- [9] A. Ardentov, Yu. Sachkov, “Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group”, *J. Mathematical Sciences*, **195**:3 (2013), 369–390.
- [10] A. Ardentov, Yu. Sachkov, “Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **21**:4 (2015), 958–988.
- [11] Q. Cai, T. Huang, Yu. L. Sachkov, X. Yang, “Geodesics in the Engel group with a sub-Lorentzian metric”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **22**:3 (2016), 465–484.
- [12] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Pure and Applied Mathematics, **103**, Academic Press, New York, 1983.
- [13] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, **202**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.
- [14] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1948.
- [15] Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata in Euler’s elastic problem”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **14**:2 (2008), 169–234.
- [16] Ю. Л. Сачков, “Симметрии и страты Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости”, *Матем. сб.*, **201**:7 (2010), 99–120.
- [17] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, “Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM: COCV*, **16**:2 (2010), 380–399.

А. А. Ардентов (A. A. Ardentov)

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН

E-mail: aaa@pereslavl.ru

Поступила в редакцию

???.???.????

Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН

E-mail: yusachkov@gmail.com

Т. Хуанг (T. Huang)

Научно-технический университет Чжэцзян

E-mail: htiren@ustc.edu.cn

К. Янг (X. Yang)

Университет науки и технологии Нанкина

E-mail: yangxp@njust.edu.cn