

УДК 517.977

Л. В. Локуциевский, Ю. Л. Сачков

Неинтегрируемость по Лиувиллю субримановых задач на свободных группах Карно глубины 4

Одним из основных подходов к изучению субримановых задач является теорема о нильпотентной аппроксимации Митчелла, которая сводит изучение окрестности регулярной точки к изучению левоинвариантной субримановой задачи на соответствующей группе Карно. Обычно детальное исследование субримановых кратчайших базируется на явном интегрировании гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина. В данной работе мы приводим явные формулы для субримановых геодезических на одной группе Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$ и доказываем неинтегрируемость по Лиувиллю левоинвариантных субримановых задач на свободных группах Карно глубины 4 и больше.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: субриманова геометрия, интегрируемость по Лиувиллю, группы Карно, вектор роста, расщепление сепаратрис, метод Мельникова-Пуанкаре

§ 1. Введение

Исследование, проведенное в данной работе базируется на тщательном анализе левоинвариантной субримановой задачи на свободной группе Карно \mathfrak{G} глубины 4 с двумя образующими. Ее вектор роста есть $(2, 3, 5, 8)$. Субримановы кратчайшие должны удовлетворять принципу максимума Понтрягина и делятся на нормальные (случай $\lambda_0 = 1$) и аномальные (случай $\lambda_0 = 0$). В этой статье исследуется лишь нормальные геодезические. Про аномальный случай скажем лишь, что в этой задаче есть (гладкие) строго аномальные геодезические. Подробный анализ аномальных геодезических на группе \mathfrak{G} и их явные формулы можно найти в [1, 2].

Хорошо известно, что в левоинвариантных субримановых задачах на группах Ли в принципе максимума Понтрягина можно выделить «вертикальную подсистему», отвечающую левоинвариантным координатам h_i в слое кокасательного расслоения. Правая часть этой подсистемы зависит только от координат h_i и не зависит от координат на самой группе.

На языке алгебр Ли, этот факт есть в точности следующее утверждение: гамильтониан принципа максимума Понтрягина является левоинвариантным, а вертикальная подсистема есть в точности поток этого гамильтониана

Исследование Л.В. Локуциевского выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 14-50-00005) в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук. Исследование Ю.Л. Сачкова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К.Айламазяна Российской академии наук. Разделы 4, 5, 6 и 8 статьи выполнены Л.В. Локуциевским, разделы 2, 3, 7 и 11 статьи выполнены Ю.Л. Сачковым.

в коаглебре Ли относительно канонической пуассоновой структуры — скобки Ли-Пуассона.

В применении к свободной группе Карно \mathfrak{G} глубины 4 с двумя образующими получаем следующее. Пусть \mathfrak{g} и \mathfrak{g}^* — ее алгебра и коалгебра Ли, соответственно. Через h_1, \dots, h_8 обозначим базис в \mathfrak{g} , согласованный с градуировкой:

$$\begin{aligned} \{h_1, h_2\} &= h_3; & \{h_1, h_3\} &= h_4; & \{h_2, h_3\} &= h_5; \\ \{h_1, h_4\} &= h_6; & \{h_2, h_5\} &= h_8; & \{h_1, h_5\} &= \{h_2, h_4\} = h_7. \end{aligned}$$

Базису h_1, \dots, h_8 соответствуют левоинвариантные векторные поля X_1, \dots, X_8 на группе \mathfrak{G} , скобки которых устроены так же, как скобки h_1, \dots, h_8 :

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3; & [X_1, X_3] &= X_4; & [X_2, X_3] &= X_5; \\ [X_1, X_4] &= X_6; & [X_2, X_5] &= X_8; & [X_1, X_5] &= [X_2, X_4] = X_7. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Таблица умножения схематично изображена на рисунке 1.

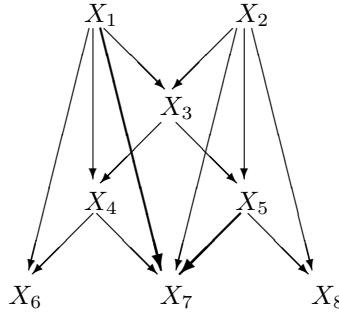


Рис. 1: Алгебра Ли с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$.

Реализация группы Ли \mathfrak{G} как пространства \mathbb{R}^8 , с полиномиальными векторными полями X_1, \dots, X_8 , может быть получена каноническим образом с помощью метода предложенного в [3] (часть III, §14). Удобная с точки зрения имеющихся симметрий (но неканоническая) полиномиальная реализация \mathfrak{G} , приведена в работе [4].

Субриманова задача на группе \mathfrak{G} имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (u_1^2 + u_2^2) dt &\rightarrow \min, & (u_1, u_2) &\in \mathbb{R}^2, \\ \dot{x} &= u_1 X_1 + u_2 X_2; & x(0) &= x_0; & x(1) &= x_1; \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $x(t)$ — (липшицева) кривая в \mathfrak{G} , соединяющая заданные точки $x_0, x_1 \in \mathfrak{G}$.

Отметим, что задача (1.2) может быть сформулирована в следующей геометрической форме. Рассмотрим две точки на плоскости $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$, соединенные гладкой кривой $\gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$. Зафиксируем произвольный набор констант $S \in \mathbb{R}$, $c = (c_x, c_y) \in \mathbb{R}^2$, $M = (M_{xx}, M_{xy}, M_{yy}) \in \mathbb{R}^3$. Задача заключается в том, чтобы соединить точки a_0 и a_1 кратчайшей гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы область $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченная $\gamma_0 \cup \gamma$ удовлетворяла следующим условиям:

1. Площадь области D равнялась S .

2. Центром масс области D была точка c .
3. Моменты второго порядка области D равнялись M .

Есть много важных причин, мотивирующих изучение задачи (1.2):

- Эта задача является нильпотентной аппроксимацией общих субримановых задач с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ [5, 6, 7].
- Эта задача является естественным продолжением следующих основных задач субримановой геометрии: нильпотентная субриманова задача на группе Гейзенберга (известная также, как задача Диодоны, вектор роста $(2,3)$) [8, 9] и нильпотентной субримановой задачи на группе Картина (известная также, как обобщенная задача Диодоны, вектор роста $(2,3,5)$) [10, 11, 12, 13, 14].
- Эта задача включается в естественную бесконечную серию субримановых задач на свободных нильпотентных группах Ли ранга 2 (с двумя образующими в алгебре Ли) и глубиной $s \in \mathbb{N}$, и, более общо, в естественную двумерную решетку субримановых задач на свободных нильпотентных группах Ли глубины $s \in \mathbb{N}$ и ранга $r \in \mathbb{N}$.
- Эта задача является простейшей субримановой задачей глубины 4 на свободных группах Карно, и, следовательно, исследование субримановых задач на свободных группах Карно глубины ≥ 4 следует начинать именно с задачи (1.2).

Нормальный гамильтониан в задаче (1.2) принципа максимума Понтрягина [15] имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) + h_1 u_1 + h_2 u_2; \quad H = \max_u \mathcal{H} = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2) \geq 0.$$

Нетрудно показать (см. параграф 2), что скобка Ли-Пуассона на \mathfrak{g}^* имеет ранг 4 на открытом всюду плотном множестве и, следовательно, у нее есть 4 независимых казимира h_6, h_7, h_8 и C (последний казимир есть полином (2.3) от h_3, \dots, h_8). Таким образом, симплектические слои (орбиты коприсоединенного представления [16]) могут быть 0-, 2- и 4-мерны, причем 4-мерные слои заполняют открытое всюду плотное подмножество в \mathfrak{g}^* , а 0- и 2-мерные заполняют (алгебраическое) подмногообразие коразмерности 2.

Основной результат данной статьи о неинтегрируемости геодезического потока на группе Карно \mathfrak{G} с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ можно сформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА 1. *Если некоторая функция $K(h_1, \dots, h_8)$ является (действительным) мероморфным¹ первым интегралом гамильтоновой системы на \mathfrak{g}^* с гамильтонианом H , то найдется такая (мероморфная) функция $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$, что на открытом всюду плотном подмножестве \mathfrak{g}^* выполнено*

$$K(h_1, \dots, h_8) = f(H, C, h_6, h_7, h_8).$$

Другими словами, любой мероморфный первый интеграл функционально зависит с казимирами h_6, h_7, h_8, C и гамильтонианом H .

¹Т.е. представимым в достаточно малой окрестности любой точки в виде отношения аналитических функций

Утверждение теоремы 1 равносильно тому, что у (нормальной) гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для левоинвариантной субримановой задачи (1.2) на свободной группе Карно $\tilde{\mathfrak{G}}$ глубины 4 с двумя образующими нет дополнительных левоинвариантных первых интегралов, отличных от H, C, h_6, h_7, h_8 и функций от них.

Теорема 1 является следствием следующей теоремы о неинтегрируемости геодезического потока на симплектических листах \mathfrak{g}^* . Как обычно, гамильтонова система с n степенями свободы² называется интегрируемой по Лиувиллю, если она имеет n функционально независимых (мероморфных) первых интегралов в инволюции [17].

ТЕОРЕМА 2. *Симплектическое слоение³ коалгебры Ли \mathfrak{g}^* содержит 4-параметрическое семейство 4-мерных симплектических слоев, на каждом из которых гамильтонова система с гамильтонианом H является неинтегрируемой по Лиувиллю. Обединение слоев этого семейства имеет непустую внутренность.*

Теорема 2 доказана в параграфе 9.

Неинтегрируемые слои, в том числе, присутствуют в любой левоинвариантной субримановой задаче на свободной группе Карно глубины не меньше 4.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — свободная нильпотентная группа Карно глубины не меньше 4 с k образующими, а $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ — ее коалгебра Ли. Тогда в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ найдется $(2k)$ -параметрическое семейство 4-мерных симплектических слоев, на каждом из которых поток нормального гамильтониана в соответствующей субримановой задаче является неинтегрируемым по Лиувиллю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что любой идеал I в алгебре Ли порождает линейное пуассоново (относительно скобки Ли-Пуассона) подмногообразие J в коалгебре Ли по следующему правилу $J = \{\psi : \langle \psi, I \rangle = 0\}$, и наоборот. Выберем в алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ такой идеал I , что отвечающее ему линейное пуассоново подмногообразие J совпало бы с коалгеброй Ли группы Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$: $J \cong \mathfrak{g}^*$.

Для этого представим свободную нильпотентную коалгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ как прямую сумму однородных компонент:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i \geq 1} \tilde{\mathfrak{g}}_i, \quad \text{Lie}(\tilde{\mathfrak{g}}_1) = \tilde{\mathfrak{g}}, \quad \dim \tilde{\mathfrak{g}}_1 = k, \quad \tilde{\mathfrak{g}}_{i+1} = [\tilde{\mathfrak{g}}_i, \tilde{\mathfrak{g}}_1].$$

Выберем в $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ два любых ортогональных вектора \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 единичной длины (относительно скалярного произведения на $\tilde{\mathfrak{g}}_1$, заданного СР структурой). Тогда существуют (однозначно определенные) подпространства $\tilde{\mathfrak{g}}'_i \subset \tilde{\mathfrak{g}}_i$, $i = 1, \dots, 4$,

²Т.е. на симплектической многообразии размерности $2n$.

³Симплектическое слоение коалгебры Ли состоит в точности из орбит коприсоединенного представления [16].

для которых имеют место разложения

$$\tilde{\mathfrak{g}}_1 = \text{span}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}'_1,$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_2 = \mathbb{R}\tilde{X}_3 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}'_2, \quad \tilde{X}_3 = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2],$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_3 = \text{span}(\tilde{X}_4, \tilde{X}_5) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}'_3, \quad \tilde{X}_4 = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_3], \quad \tilde{X}_5 = [\tilde{X}_2, \tilde{X}_3],$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_4 = \text{span}(\tilde{X}_6, \tilde{X}_7, \tilde{X}_8) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}'_4, \quad \tilde{X}_6 = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_4], \quad \tilde{X}_7 = [\tilde{X}_2, \tilde{X}_4] = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_5], \quad \tilde{X}_8 = [\tilde{X}_2, \tilde{X}_5].$$

При этом $\tilde{\mathfrak{g}}'_1 \perp \text{span}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$, $\tilde{\mathfrak{g}}'_2 = [\tilde{X}_1, \tilde{\mathfrak{g}}'_1] \oplus [X_2, \tilde{\mathfrak{g}}'_1] \oplus [\tilde{\mathfrak{g}}'_1, \tilde{\mathfrak{g}}'_1]$ и аналогично $\tilde{\mathfrak{g}}'_3$ и $\tilde{\mathfrak{g}}'_4$. Рассмотрим идеал

$$I = \bigoplus_{i=1}^4 \tilde{\mathfrak{g}}'_i \oplus \bigoplus_{i>4} \tilde{\mathfrak{g}}_i \subset \tilde{\mathfrak{g}},$$

который порождает в коалгебре $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ пуассоново подмногообразие $J = \{\psi \in \tilde{\mathfrak{g}}^* : \langle \psi, I \rangle = 0\}$, изоморфное исходной коалгебре \mathfrak{g}^* с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$. Более того, ограничение нормального СР гамильтониана с $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ на J совпадает с нормальным гамильтонианом в СР задаче на свободной группе Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$, поскольку нормальный гамильтониан есть квадрат длины проекции вектора на $\tilde{\mathfrak{g}}_1$.

Таким образом, для каждой двумерной плоскости $\text{span}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \subset \tilde{\mathfrak{g}}_1$ мы получаем 4-параметрическое семейство 4-мерных симплектических слоев, на каждом из которых гамильтонова система с нормальным гамильтонианом H не интегрируема по Лиувиллю. Все такие плоскости образуют грассманнian $\text{Gr}_2(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$ и $\dim \text{Gr}_2(\tilde{\mathfrak{g}}_1) = 2 \dim \tilde{\mathfrak{g}}_1 - 4 = 2k - 4$.

Таким образом, практически не остается никаких надежд на возможность явного интегрирования уравнений геодезических в левоинвариантных субримановых задачах на свободных группах Карно глубины 4 и больше.

На рисунке 2 представлены известные на данный момент результаты (включая настоящую работу) об интегрируемости по Лиувиллю нормальной гамильтоновой системы для субримановых задач на свободных группах Карно глубины s и ранга r :

$s = 1$: Евклидова геометрия. Геодезический поток интегрируется в линейных функциях.

$s = 2$: Свободные, плоские субримановы задачи глубины 2. Геодезический поток интегрируется в тригонометрических функциях:

$r = 2$: Случай группы Гейзенберга. Вектор роста $(2, 3)$ [8, 9].

$r \geq 3$: Обобщенный случай Гейзенберга. Вектор роста $\left(r, \frac{r(r+1)}{2}\right)$ [18, 8, 19],

$s = 3$: Свободные, плоские субримановы задачи глубины 3:

$r = 2$: Случай Картана. Вектор роста $(2, 3, 5)$. Геодезический поток интегрируется в эллиптических функциях Якоби [10, 11].

$r \geq 3$: Обобщенный случай Картана. Вектор роста $\left(r, \frac{r(r+1)}{2}, \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}\right)$.

Здесь вопрос об интегрируемости геодезического потока до сих пор открыт.

$s \geq 4$: Свободные плоские субримановы задачи глубины 4 и больше. Вертикальные подсистемы принципа максимума Понтрягина являются неинтегрируемыми по Лиувиллю на орбитах коприсоединенного представления (данная работа).

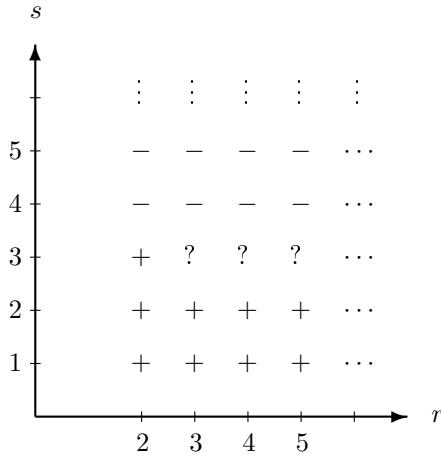


Рис. 2: Интегрируемость по Лиувиллю плоских субримановых структур на свободных группах Карно глубины s и ранга r .

Несмотря на результат о неинтегрируемости геодезического потока на свободных группах Карно глубины не меньше 4, известны примеры несвободных групп Карно сколь угодно большой глубины, в которых геодезический поток интегрируется не только по Лиувиллю, но и в явном виде через гиперэллиптические функции (например для левоинвариантных распределений Гурса, см. [20]). В данной работе мы приводим явные формулы для геодезического потока на некоторой выделенной группе Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$ (см. пар. 10). Хотя данная статья посвящена, в основном, феномену неинтегрируемости, мы считаем, что эти формулы представляют интерес, так как открывают возможность точного изучения нетривиальной субримановой структуры на группе Карно глубины 4.

Данная работа имеет следующую структуру. В параграфе 2 подробно исследовано симплектическое слоение коаглебры Ли \mathfrak{g}^* и найдены казимиры. Далее в параграфе 3 исследована гамильтонова система для нормального гамильтониана H на слоях общего положения. С помощью симметрий задачи эта система приведена к наиболее простой форме (3.3). Система (3.3) содержит ключевой параметр $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (число μ является инвариантом симплектического слоя). Оказывается, что при $\mu = 1$ система (3.3) интегрируема по Лиувиллю (дополнительный первый интеграл F найден в параграфе 4). Бифуркации совместной поверхности уровня гамильтониана H и первого интеграла F описаны в параграфе 5 (там же приведена бифуркационная диаграмма на рис. 3). В параграфе 6 проведен базовый топологический анализ структуры решений системы (3.3) при $\mu = 1$ в зависимости от типа совместной поверхности уровня H и F . Оказывается, что если совместная поверхность уровня H и F имеет особенность (т.е. если она отлична от дизъюнктного объединения гладких

торов), то система (3.3) интегрируется в тригонометрических функциях (см. пар. 8). Более того при некоторых значениях H и F совместная поверхность уровня имеет особенность типа «восьмерки» — она представляет собой объединение некоторой специальной периодической траектории гиперболического типа (найдена в параграфе 7) и ее двумерных сепаратрисных многообразий (найдены в пар. 8). Напомним, что данная картина интегрируемости системы (3.3) имеет место при значении параметра $\mu = 1$. В параграфе 9 с помощью метода Мельникова-Пуанкаре и теоремы Зиглина доказано, что при значениях μ , достаточно близких к 1 (но не равных 1), система (3.3) не имеет мероморфных первых интегралов, отличных от константы. В заключительном параграфе 10 мы приводим явные формулы для интегрирования системы (3.3) (при $\mu = 1$) через эллиптические функции на неособых совместных поверхностях уровня H и F .

Приведенные в данной работе результаты докладывались авторами в 2015 году на проходившей в Новосибирске международной конференции «Метрические структуры и управляемые системы» [21].

§ 2. Симплектическое слоение

В координатах h_1, \dots, h_8 на коалгабре Ли \mathfrak{g}^* гамильтонова система с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3; \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3; \\ \dot{h}_3 = h_1 h_4 + h_2 h_5; \\ \dot{h}_4 = h_1 h_6 + h_2 h_7; \\ \dot{h}_5 = h_1 h_7 + h_2 h_8; \\ \dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Эта система сохраняется следующими (непрерывными) симметриями:

1. Вращение группы $SO(2)$ с сохранением скобки Ли-Пуассона, гамильтониана H и, следовательно, системы (2.1). А именно, если $A_\varphi \in SO(2)$, то

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &\mapsto A_\varphi \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}; \quad h_3 \mapsto h_3; \quad \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} \mapsto A_\varphi \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} &\mapsto A_\varphi \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix} A_\varphi^T. \end{aligned}$$

2. Стандартное растяжение: $h_k \mapsto \lambda h_k$ для $\lambda \neq 0$ — увеличивает скобку Ли-Пуассона в λ раз, а гамильтониан H в λ^2 раз. Следовательно, при замене времени $t \mapsto \frac{1}{\lambda}t$ сохраняет систему (2.1).
3. Неравностепенная гомотетия: $h_{1,2} \mapsto \lambda^3 h_{1,2}$, $h_3 \mapsto \lambda^2 h_3$, $h_{4,5} \mapsto \lambda h_{4,5}$, $h_{6,7,8} \mapsto h_{6,7,8}$ — увеличивает скобку Ли-Пуассона в λ^4 раз, а гамильтониан H в λ^6 раз. Следовательно, при замене времени $t \mapsto \frac{1}{\lambda^2}t$ сохраняет систему (2.1).

Мы начнем изучение системы (2.1) с точного описания симплектического слоения коалгебры Ли \mathfrak{g}^* . Бивектор скобки Ли-Пуассона имеет следующий вид:

$$(\{h_i, h_j\})_{i,j=1}^8 = \begin{pmatrix} 0 & h_3 & h_4 & h_6 & h_7 & 0 & 0 & 0 \\ -h_3 & 0 & h_5 & h_7 & h_8 & 0 & 0 & 0 \\ -h_4 & -h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_6 & -h_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_7 & -h_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бивектор $(\{h_i, h_j\})_{i,j}$ является кососимметрической формой ранга не больше 5. Таким образом, ранг матрицы $(\{h_i, h_j\})_{ij}$ может быть 0, 2 или 4. Более того, по теореме Кириллова (см. [22]) коалгебра Ли \mathfrak{g}^* расслаивается на симплектические слои соответствующей размерности (гладкие вложенные подмногообразия, они же орбиты коприсоединенного представления группы Карно \mathfrak{G}).

Ранг 0 возможен только в случае $h_3 = h_4 = \dots = h_8 = 0$ – это плоскость (h_1, h_2) , состоящая из 0-мерных симплектических многообразий.

Ранг 2 означает, что матрица

$$\begin{pmatrix} h_4 & h_6 & h_7 \\ h_5 & h_7 & h_8 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

имеет ранг не больше 1 (иначе ранг матрицы $(\{h_i, h_j\})_{i,j}$ не меньше 4). Более того, не трудно видеть что этого достаточно. Таким образом, нульмерные и двумерные симплектические слои заполняют алгебраическое подмногообразие $\{h_4h_7 - h_5h_6 = h_6h_8 - h_7^2 = h_4h_8 - h_5h_7 = 0\}$ коразмерности 2.

Обозначим через P следующую матрицу:

$$P = \begin{pmatrix} h_6 & h_7 \\ h_7 & h_8 \end{pmatrix}.$$

Двумерные симплектические слои бывают двух типов:

2.а. Если $P = 0$ мы получаем коалгебру Ли свободной группы Карно с вектором роста $(2, 3, 5)$, содержащую, в том числе, 2-мерные симплектические листы коалгебры Ли группы Гейзенберга при $h_4 = h_5 = 0$ и $h_3 \neq 0$. Казимирами являются h_4, h_5 и $\frac{1}{2}h_3^2 - h_2h_4 + h_1h_5$. Подробный анализ субринановой структуры на этой группе можно найти в [11, 12, 13, 14].

2.б. Если $\det P = h_6h_8 - h_7^2 = 0$, но $P \neq 0$ и $(h_4, h_5)^T \in \text{Im } P$, тогда с учетом действия группы $SO(2)$ можно считать $h_6 \neq 0$, а $h_5 = h_7 = h_8 = 0$. Мы получаем двумерные симплектические листы коалгебры Ли группы Карно с вектором роста $(2, 3, 4, 5)$, то есть это случай Гурса. Казимиры: $h_6, \frac{1}{2}h_4^2 - h_3h_6$ и $h_6^2h_2 - h_6h_3h_4 + \frac{1}{3}h_4^3$.

И наконец возможны 4-мерные листы, если ранг матрицы (2.2) равен 2. Тут возможны следующие принципиальные варианты:

4.a. Если $\det P = h_6h_8 - h_7^2 = 0$, но $P \neq 0$ и $(h_4, h_5)^T \notin \text{Im}P$, то по соображениям вращения $SO(2)$ можно считать, что $h_7 = h_8 = 0$, $h_5 \neq 0$ и $h_6 \neq 0$. Получается коалгебра Ли группы Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$. Казимиры: h_5 и h_6 .

4.b. Если $\det P = h_6h_8 - h_7^2 \neq 0$, то это случай общего положения: такие симплектические листы заполняют открытое всюду плотное множество в \mathfrak{g}^* . Казимиры: h_6 , h_7 , h_8 и

$$C = h_3(h_6h_8 - h_7^2) - \frac{1}{2}h_8h_4^2 - \frac{1}{2}h_6h_5^2 + h_7h_4h_5. \quad (2.3)$$

Удобнее этот Казимир можно записать следующим образом:

$$k = \frac{C}{\det P} = h_3 - \frac{1}{2}(h_4 \ h_5)P^{-1} \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Непрерывные симметрии 1–3 действуют на этот Казимир следующим образом:

$$1 : k \mapsto k, \quad 2 : k \mapsto \lambda k, \quad 3 : k \mapsto \lambda^2 k.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Симплектические слои из случая 4.b заполняют открытое всюду плотное множество, а симплектические слои всех остальных случаев лежат на его границе $h_6h_8 - h_7^2 = 0$ и, следовательно, могут быть получены как предельные. Например, если $P \rightarrow 0$, то в пределе получается случай 2.a.

Если симплектический слой двумерен, то любая система легко интегрируется: траектории совпадают с пересечениями поверхностей уровня всех казимиров и изоэнергетических поверхностей $H = \text{const}$.

Изучение 4-мерных симплектических слоев, таким образом, напрямую зависит от того, обнулился ли определитель матрицы P . Основной случай – это $\det P \neq 0$, так как он реализуется на открытом всюду плотном подмножестве \mathfrak{g}^* . Случай $\det P = 0$ реализуется на (алгебраическом) подмногообразии коразмерности 1. Основная часть статьи посвящена подробному изучению общего случая $\det P \neq 0$, тем не менее скажем несколько слов и о вырожденном случае.

В случае $\det P = 0$ гамильтонова система (2.1) приводится за счет симметрий 1,2 и 3 к симплектическому слою $\{h_5 = h_6 = 1, h_7 = h_8 = 0\}$, на котором принимает вид

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2h_3; \\ \dot{h}_2 = h_1h_3; \\ \dot{h}_3 = h_1h_4 + h_2; \\ \dot{h}_4 = h_1; \end{cases} \quad (2.5)$$

У этой системы нет дополнительных полиномиальных первых интегралов степени меньше 15 (только 1, H, H^2, \dots), что легко проверяется на любой компьютерной системе символьной алгебры.

Данный факт, а так же результаты численных экспериментов дают нам смелость высказать следующую гипотезу:

ГИПОТЕЗА 1. Система (2.5) неинтегрируема по Лиувиллю.

Для системы (2.5) легко выписать канонические координаты Дарбу. Действительно, на слое $\{h_5 = h_6 = 1, h_7 = h_8 = 0\}$ симплектическая форма имеет вид

$$\omega = -dh_1 \wedge dh_4 - dh_2 \wedge dh_3 + h_4 dh_2 \wedge dh_4 - h_3 dh_3 \wedge dh_4,$$

поэтому следующие координаты являются каноническими:

$$p_1 = h_1; \quad q_1 = h_4; \quad p_2 = h_2 - h_3 h_4 + \frac{1}{3} h_4^3; \quad q_2 = h_3 - \frac{1}{2} h_4^2;$$

$$h_1 = p_1; \quad h_2 = p_2 + q_1 q_2 + \frac{1}{6} q_1^3; \quad h_3 = q_2 + \frac{1}{2} q_1^2; \quad h_4 = q_1,$$

а гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}\left(p_2 + q_1 q_2 + \frac{1}{6}q_1^3\right)^2.$$

§ 3. Случай симплектических слоев общего положения

В этом параграфе мы начнем разбор случая общего положения $\det P \neq 0$. Определим число μ как отношение собственных значений матрицы P . Число μ – инвариант гамильтоновой системы H на симплектическом слое: оно не меняется при 1,2 и 3 симметриях и определено с точностью до замены⁴ $\mu \mapsto \frac{1}{\mu}$.

ЛЕММА 3.1. *Поток субриманова гамильтониана H на (четырехмерном) симплектическом слое \mathfrak{g}^* с $\det P \neq 0$ и отношением собственных значений P равным μ эквивалентен (с точностью до замены времени $t \mapsto \lambda t$, $\lambda \neq 0$) потоку H на некотором симплектическом слое с $h_6 = 1$, $h_7 = 0$ и $h_8 = \mu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, как с помощью 1 и 2 симметрий редуцировать число параметров симплектического слоя. За счет действия группы $SO(2)$ можно привести произвольный симплектический лист с $P \neq 0$ к симплектическому листу с $h_7 = 0$ (теорема о приведении квадратичной формы к главным осям). На новом симплектическом листе $\det P = h_6 h_8 \neq 0$. За счет второй симметрии новый симплектический слой приводится к симплектическому слою с $h_6 = 1$. Последний симплектический слой является искомым. Действительно, на последнем построенном слое автоматически $h_7 = 0$, а поскольку отношение собственных значений матрицы P не изменяется при 1,2 и 3 симметриях, то $h_8 = \mu$. Осталось лишь заметить, что при использовании первой симметрии скорость движения по траекториям сохраняется, а при использовании второй симметрии, скорость движения вдоль траекторий изменится в $\lambda = \sqrt{\mu/\det P} > 0$ раз.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что указанная в лемме 3.1 эквивалентность явно строится с помощью 1 и 2 симметрий. Мы не использовали третью симметрию. Воспользовавшись ею, можно избавится еще от одной константы и считать $k = 0, \pm 1$ или $H = \frac{1}{2}$ (но не одновременно). Однако, мы предпочли не использовать третью симметрию, так как с ее помощью удобно проверять порядки инвариантов, которые будут появляться в дальнейшем.

⁴Если $P \neq 0$, но $\det P = 0$, удобно считать $\mu = 0$. Гамильтонова система H в этом случае приводится к виду (2.5).

Введем удобные координаты в симплектическом слое с $h_6 = 1$, $h_7 = 0$ и $h_8 = \mu \neq 0$. Используем казимир:

$$h_3 = k + \frac{1}{2} \left(h_4^2 + \frac{1}{\mu} h_5^2 \right), \quad \text{где } k = \frac{C}{\det P},$$

тогда

$$\begin{cases} \dot{h}_4 = h_1; & \dot{h}_1 = -\left(k + \frac{1}{2} \left(h_4^2 + \frac{1}{\mu} h_5^2 \right) \right) h_2; \\ \dot{h}_5 = \mu h_2; & \dot{h}_2 = \left(k + \frac{1}{2} \left(h_4^2 + \frac{1}{\mu} h_5^2 \right) \right) h_1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Таким образом, поскольку $H = \text{const}$, обозначая стандартно

$$h_1 = \sqrt{2H} \cos \theta \quad \text{и} \quad h_2 = \sqrt{2H} \sin \theta, \quad (3.2)$$

получаем, что в координатах H , h_4 , h_5 и θ на симплектическом слое, гамильтонова система имеет вид $\dot{H} = 0$ и

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\theta} = k + \frac{1}{2} \left(h_4^2 + \frac{1}{\mu} h_5^2 \right), \\ \dot{h}_4 = \sqrt{2H} \cos \theta, \\ \dot{h}_5 = \mu \sqrt{2H} \sin \theta. \end{cases}} \quad (3.3)$$

Изоэнергетическая поверхность $H = \text{const} > 0$ диффеоморфна открытому полноторию $\mathbb{R}_{h_4, h_5}^2 \times S_\theta^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что если $k = 0$, то, используя третью симметрию, можно привести произвольную поверхность уровня H к поверхности $H = \frac{1}{2}$. То есть при $k = 0$ потоки H на всех изоэнергетических поверхностях $H = \text{const} > 0$ эквивалентны. Если же $k \neq 0$, то за счет третьей симметрии можно считать, что $k = \pm 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Случай $k = -1$ сводится к случаю $k = 1$ (и наоборот) с помощью комплексно-аналитической замены

$$k \mapsto -k; \quad h_4 \mapsto -ih_4; \quad h_5 \mapsto -ih_5; \quad t \mapsto -t; \quad \sqrt{2H} \mapsto i\sqrt{2H}.$$

Поэтому наличие аналитического первого интеграла системы (3.3) для некоторого k автоматически влечет наличие аналитического первого интеграла для $-k$.

Хорошо известно, что эластики Эйлера [23] являются кривыми на плоскости, кривизна которых есть аффинная функция координат. Решениями системы (3.3) являются кривые, кривизна которых есть квадратичная функция координат (если сделать замену $h_5 \mapsto \frac{1}{\mu}h_5$). Более того, любая такая кривая

$$\begin{cases} \dot{\phi} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f; \\ \dot{x} = \cos \varphi; \\ \dot{y} = \sin \varphi; \end{cases}$$

с невырожденной квадратичной формой может быть приведена к виду (3.3) подходящим выбором начала координат и направлений осей. Если собственные

значения квадратичной формы совпадают, то система обладает дополнительной группой симметрий $SO(2)$ и потому по теореме Нетер является интегрируемой по Лиувиллю (подробнее см. лемму 4.1). Впервые этот факт заметили Готье и Бойзо в своей работе [24].

§ 4. Интегрируемые симплектические слои

Как было сказано выше, гамильтонова система (3.3) оказывается интегрируемой по Лиувиллю на симплектических слоях с $\mu = 1$ и любым k . В этом параграфе найден недостающий первый интеграл гамильтоновой системы левоинвариантной субримановой задачи на группе Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$.

При $\mu = 1$ систему

$$\begin{cases} \dot{h}_4 = h_1; & \dot{h}_1 = -\left(k + \frac{1}{2}(h_4^2 + h_5^2)\right)h_2; \\ \dot{h}_5 = h_2; & \dot{h}_2 = \left(k + \frac{1}{2}(h_4^2 + h_5^2)\right)h_1 \end{cases}$$

можно интерпретировать как уравнения движения заряженной частицы в горизонтальной плоскости под действием вертикального магнитного поля. В этом случае (h_4, h_5) – координаты частицы, (h_1, h_2) – ее скорость, а $k + \frac{1}{2}(h_4^2 + h_5^2)$ – напряженность магнитного поля.

ЛЕММА 4.1. *Система (3.3) является интегрируемой по Лиувиллю при $\mu = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\mu = 1$ собственные значения матрицы P совпадают, и потому она является диагональной. Другими словами, в этом случае $h_7 = 0$ автоматически, даже без редукции по действию $SO(2)$. Поэтому при $\mu = 1$ группа $SO(2)$ является группой симметрий системы (3.3) и дополнительный первый интеграл может быть вычислен по теореме Нетер.

Итак, найдем дополнительный первый интеграл системы (3.3) в случае $\mu = 1$. Достаточно элегантно дополнительный первый интеграл можно найти в терминах производных функции θ , так они инвариантны относительно действия группы $SO(2)$. Полученные формулы оказываются очень удобными для дальнейшего изучения системы (как для явного интегрирования, так и для топологического анализа).

Итак, дифференцируя θ в силу системы (3.3), получаем

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \sqrt{2H}(h_4 \cos \theta + h_5 \sin \theta); \\ \ddot{\theta} = 2H + \sqrt{2H}\dot{\theta}(h_5 \cos \theta - h_4 \sin \theta); \\ \ddot{\theta} = \sqrt{2H}\dot{\theta}(h_5 \cos \theta - h_4 \sin \theta) - \sqrt{2H}\dot{\theta}^2(h_4 \cos \theta + h_5 \sin \theta). \end{cases} \quad (4.1)$$

Теперь подставим первое и второе уравнение системы (4.1) в третье. Получаем

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{\ddot{\theta} - 2H}{\dot{\theta}} - \dot{\theta}^2\right)\ddot{\theta},$$

откуда, поделив на $\dot{\theta}$ находим дополнительный первый интеграл:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\ddot{\theta} - 2H}{\dot{\theta}} = \frac{1}{2}h_3^2 - h_2h_4 + h_1h_5 = \\ &= \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} \left(h_4^2 + h_5^2 \right) \right)^2 + \sqrt{2H}(h_5 \cos \theta - h_4 \sin \theta). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Удивительным образом Казимир в группе Карно (2,3,5) [11] превратился в первый интеграл потока субримановых геодезических на группе Карно (2,3,5,6). Согласно действию третьей симметрии имеем: $F \mapsto \lambda^4 F$, $k \mapsto \lambda^2 k$, а $H \mapsto \lambda^6 H$. Отметим, что на четырехмерном симплектическом листе (h_1, h_2, h_4, h_5) совместная поверхность уровня H и F ограничена и, следовательно, компактна. Поэтому если на ней нет особенностей, то она представляет собой объединение конечного числа двумерных торов.

Из теоретических соображений (теорема Лиувилля-Арнольда) система должна интегрироваться в квадратурах. Проведем ее явное интегрирование следующим образом:

$$2\ddot{\theta} = -\dot{\theta}^3 + 2F\dot{\theta} + 4H.$$

Если $\ddot{\theta} \not\equiv 0$ (случай $\ddot{\theta} \equiv 0$ разобран в параграфе 7), домножим слева и справа на $\ddot{\theta}$, получатся полные дифференциалы, следовательно

$$\ddot{\theta}^2 = -\frac{1}{4}\dot{\theta}^4 + F\dot{\theta}^2 + 4H\dot{\theta} + c_1.$$

Здесь c_1 – первый интеграл⁵, т.е. $\{H, c_1\} = 0$. Поэтому есть два варианта: либо (i) $\{F, c_1\} \neq 0$, тогда система суперинтегрируема и все пространство расслаивается на окружности вместо торов; либо (ii) $\{F, c_1\} = 0$, что возможно только если c_1 есть функция H и F , так как гамильтонова система имеет всего две степени свободы. Прямое вычисление дает

$$c_1 = -4Hk - F^2.$$

Согласно действию третьей группы симметрий, $c_1 \mapsto \lambda^8 c_1$. Итак получается уравнение

$$4\ddot{\theta}^2 = -(\dot{\theta}^2 - 2F)^2 + 16H(\dot{\theta} - k). \quad (4.3)$$

Обозначим многочлен по $\dot{\theta}$ в правой части равенства (4.3) через $[g(\dot{\theta})]$. Уравнение (4.3) можно решить явно через эллиптические функции, если у полинома $g(\dot{\theta})$ нет кратных корней (см. пар. 10), и через элементарные функции, если у полинома $g(\dot{\theta})$ есть кратный корень (см. пар. 8). Подробное исследование структуры корней $g(\dot{\theta})$ проведено в параграфе 5.

Переменные h_4 и h_5 из системы (3.3) при $\mu = 1$ можно явно выразить через θ , $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$, независимо от структуры корней полинома $g(\dot{\theta})$. Итак, из (4.1) получаем

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2H}} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \frac{\ddot{\theta} - 2H}{\dot{\theta}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2H}} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ F - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

⁵Точнее, если выразить $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ через h_4 , h_5 и θ в силу системы (3.3), тогда c_1 будет первым интегралом системы в классическом смысле.

Откуда немедленно находим, что

$$\begin{cases} h_4 = \frac{1}{\sqrt{2H}} \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \left(F - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) \sin \theta \right); \\ h_5 = \frac{1}{\sqrt{2H}} \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \left(F - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) \cos \theta \right). \end{cases} \quad (4.5)$$

Отметим, что для h_4 , h_5 и θ мы имеем ровно 3 константы интегрирования. Первая константа – это F , а еще две возникнут при интегрировании (4.3).

§ 5. Структура корней полинома g

Оказывается, что структуру решений системы (3.3) в интегрируемом случае $\mu = 1$ удобно описывать в терминах структуры корней многочлена g . Например, сразу видно, что ключевую роль при решении (4.3) играет структура промежутков неотрицательности g . Поскольку ветви g направлены вниз, то полином g положителен либо на интервале либо па паре непересекающихся интервалов.

Опишем структуру корней многочлена $g(\gamma)$ в зависимости от значений H , F и k . Нетрудно видеть, что сумма корней g равна 0. Для многочлена g из общей теории корней многочленов 4-ой степени (см. [25]), следует, что их структура определяется следующим параметрами:

$$\begin{aligned} \Delta &= -2^{16} H^2 (8F^3 + 27H^2 + 36FHk - 4F^2k^2 - 16Hk^3); \\ P_0 &= -2^5 F; \quad Q = 128 H; \quad \Delta_0 = 2^6 (F^2 + 3Hk); \quad D = 2^{10} Hk. \end{aligned}$$

Таким образом, считая, что $H > 0$, получаем

- (1) Если $\Delta < 0$, то полином g имеет ровно 2 различных действительных корня, и два комплексно сопряженных корня.
- (2) Если $\Delta > 0$, тогда необходимым условием действительности корней является $P_0 < 0$ и $D < 0$, (т.е. $F > 0$ и $k < 0$). В этом случае полином g имеет 4 различных действительных корня.
- (3) Если $\Delta = 0$, то возможны следующие случаи.
 - (3.i) Если $P_0 < 0$ и $D < 0$ и $\Delta_0 \neq 0$ (т.е. $F > 0$, $k < 0$, и $F^2 + 3Hk \neq 0$), то в этом случае есть один действительный двукратный корень и еще два действительных простых корня.
 - (3.ii) Если $\Delta_0 = 0$ и $D \neq 0$, (т.е. $F^2 + 3Hk = 0$ и $k \neq 0$), то автоматически $k < 0$. Воспользовавшись разложением

$$\begin{aligned} 8F^3 + 27H^2 + 36FHk - 4F^2k^2 - 16Hk^3 &= \\ &= \frac{8}{3} (3F - 2k^2) (F^2 + 3Hk) + \frac{1}{3} (2Fk + 9H)^2, \end{aligned}$$

получаем, что такая ситуация возможна если и только если

$$F = \frac{2}{3} k^2; \quad H = -\frac{4}{27} k^3; \quad k < 0.$$

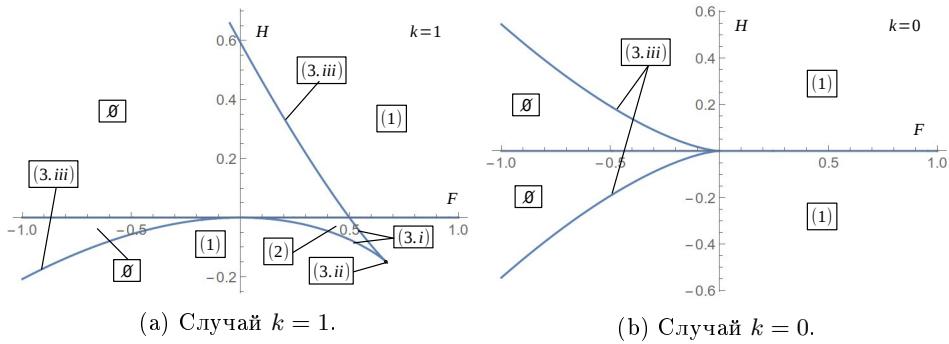


Рис. 3: Бифуркационные диаграммы нулей полинома $g(\dot{\theta})$.

В этом случае есть трехкратный действительный корень и еще один действительный простой.

- (3.iii) Если $D > 0$ или $\{P_0 > 0 \text{ и } |D| + |Q| \neq 0\}$, то, поскольку $Q > 0$, то получаем, что $F < 0$ или $k > 0$. В этом случае есть только один действительный двукратный корень (и пара комплексно сопряженных корней).

Формально необходимо еще рассмотреть случай, когда $D = 0$. Но тогда необходимо $k = 0$, а значит $8F^3 + 27H^2 = 0$, и, следовательно, $F < 0$. Поэтому случай $D = 0$ включается в случай (iii). Осталось показать, что случаи (i), (ii) и (iii) попарно не пересекаются и исчерпывают все возможности. То, что они попарно не пересекаются, тривиально. Покажем, что дополнение к случаю (iii) есть ($F > 0$ и $k < 0$). Действительно, из условия $\Delta = 0$ следует, что если $k = 0$, то $F < 0$, а если $F = 0$, то $k > 0$. Осталось заметить, что объединение случаев (i) и (ii) как раз есть ($F > 0$ и $k < 0$).

Бифуркационные диаграммы нулей для полинома $g(\gamma)$ при $k = 0$ и $k = 1$ изображены на рис. 3. Символом \emptyset обозначен случай отсутствия действительных корней (при этом поверхности уровней H и F не пересекаются в соответствующем симплектическом листе). Бифуркационная диаграмма для случая $k = -1$ получается из случая $k = 1$ отражением $H \mapsto -H$ (см. замечание 4). Отметим еще, что в этих диаграммах на прямой $H = 0$ полином $g(\gamma)$ имеет две пары совпадающих действительных корней, если $F > 0$ и две пары совпадающих мнимых корней, если $F < 0$. Начало координат $F = H = 0$ отвечает случаю $g(\gamma) = -\gamma^4$. Напомним, что случаи $H = 0$ и $H < 0$ не реализуются в исходной гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина.

Случаи (1), (2), и (3.i), (3.ii) и (3.iii) как раз описывают структуру двумерной совместной поверхности уровня гамильтониана H и первого интеграла F на симплектическом листе (h_1, h_2, h_4, h_5) в зависимости от параметра k . Обозначим эту поверхность через S . Подробный топологический анализ структуры решений на S проведен в параграфах 6 и 7. Из него, в том числе следует, что в случае (1) S является гладким тором, в случае (2) S является парой непересекающихся гладких торов, а в случае (3) поверхность S имеет особенность. А именно: в (3.i) для S есть два варианта: (а) если кратный корень $g(\gamma)$ не лежит между простыми корнями $g(\gamma)$, то S есть не пересекающиеся гладкие

тор и окружность (реализуется на участке кривой бифуркационной диаграммы 3а ведущей из точки (3.ii) в точку $k = -1$, $H = 0$ и $F = \frac{1}{2}$); (b) если кратный корень лежит между простыми корнями, то S есть два тора, склеенных по окружности (реализуется на участке кривой бифуркационной диаграммы 3а ведущей из точки (3.ii) в начало координат). В случае (3.ii) S есть негладкий тор с особенностями вдоль гладкой окружности (реализуется при $k = -1$, $H = \frac{2}{3}$ и $F = -\frac{4}{27}$). А в случае (3.iii) S есть просто гладкая окружность.

Поверхность S нетрудно построить. Действительно, она инвариантна относительно действия $SO(2)$, то есть относительно поворота вектора (h_4, h_5) на произвольный угол φ и одновременного сдвига $\theta \mapsto \theta + \varphi$. Поэтому достаточно исследовать пересечение S с плоскостью $\theta = 0$. Основные случаи отображены на рисунках 4.

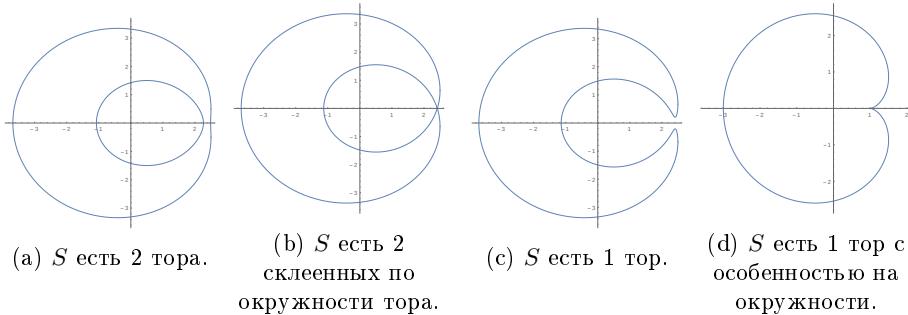


Рис. 4: Сечение совместной поверхности уровня F и H плоскостью $\theta = 0$.

Количество точек минимума и максимума полинома $g(\gamma)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} 2F^3 - 27H^2 > 0 &\Leftrightarrow 2 \text{ максимума и } 1 \text{ минимум;} \\ 2F^3 - 27H^2 < 0 &\Leftrightarrow 1 \text{ максимум;} \\ 2F^3 - 27H^2 = 0 &\Leftrightarrow 1 \text{ максимум и } 1 \text{ точка перегиба.} \end{aligned}$$

Отметим, что параметр k входит лишь в свободный член многочлена $g(\gamma)$. Поэтому меняя k от $-\infty$ до $+\infty$ мы будем получать поочередно различные комбинации взаимного расположения корней и максимумов/минимумов полинома g в зависимости от знака $2F^3 - 27H^2$.

Согласно общей теории, уравнение (4.3) может быть проинтегрировано через эллиптические интегралы (см. пар. 10). Ниже будут получены явные формулы для решений, обобщающие классические эластики Эйлера. Действительно, в предельном случае лежит объединение двумерных симплектических слоев, отвечающих свободной группе Карно с вектором роста $(2, 3, 5)$, в которой геодезические являются эластиками Эйлера (см. [11]).

Ввиду вышесказанного мы будем называть геодезические для случая $\mu = 1$ **пьяными эластиками**.

§ 6. Топологический анализ решений

В этом параграфе будет проведен топологический анализ поведения решений системы (3.3) с $\mu = 1$ в зависимости от структуры корней полинома $g(\gamma)$ из (4.3). Очевидно, что если $\dot{\theta} \not\equiv 0$ (случай $\dot{\theta} \equiv 0$ разобран в пар. 7), то необходимым условием разрешимости (4.3) является положительность $g(\gamma)$ на некотором промежутке.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\gamma_0 < \gamma_1$ – два таких последовательных действительных корня $g(\gamma)$, что $g(\gamma) > 0$ при $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_1)$ и для решения $(\theta(t), h_4(t), h_5(t))$ системы (4.3) выполняется $\dot{\theta}(0) \in (\gamma_0, \gamma_1)$.*

(a) Предположим, что оба корня γ_0 и γ_1 являются простыми. Тогда $\dot{\theta}(t) \in [\gamma_0; \gamma_1]$ для всех t , а функция $\dot{\theta}(t)$ является периодической с некоторым периодом $2\tau_0 > 0$. Более того $\dot{\theta}$ достигает своих экстремальных значений γ_0 и γ_1 поочередно и монотонна между ними. Время движения от минимума до максимума или обратно занимает время τ_0 и эти движения симметричны. Аналогичные утверждения верны для $h_4^2 + h_5^2 = 2(\dot{\theta} - k)$.

Само решение $(\theta(t), h_4(t), h_5(t))$ является **квазипериодическим** с периодом $2\tau_0$ (см. рис. 8). То есть найдется такой угол θ_0 , что

$$\begin{cases} \theta(t + 2\tau_0) &= \theta(t) + 2\theta_0 \bmod 2\pi; \\ \begin{pmatrix} h_4(t + 2\tau_0) \\ h_5(t + 2\tau_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta_0 & -\sin 2\theta_0 \\ \sin 2\theta_0 & \cos 2\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_4(t) \\ h_5(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Числа τ_0 и θ_0 могут быть найдены по формулам:

$$\tau_0 = 2 \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{d\gamma}{\sqrt{g(\gamma)}}, \quad \theta_0 = 2 \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{g(\gamma)}}.$$

(b) Предположим теперь, что один из корней γ_j , $j = 0, 1$ является кратным (скажем, γ_0 для определенности). Тогда $\dot{\theta}(t) \in (\gamma_0, \gamma_1]$ при всех t . Причем $\dot{\theta} = \gamma_1$ лишь в один момент времени t_1 , и $\dot{\theta}$ монотонно стремится к γ_0 при $t_1 < t \rightarrow +\infty$ и $t_1 > t \rightarrow -\infty$. Функция $\dot{\theta}$ симметрична относительно t_1 .

Если γ_0 – двукратный корень, то стремление $\dot{\theta}$ к γ_0 идет с экспоненциальной скоростью по t с показателем $\sqrt{g''(\gamma_0)/2\sqrt{2}}$, а если γ_0 – трехкратный корень, то стремление идет со скоростью ct^{-2} , где $c = 96/g'''(\gamma_0)$. Аналогичные утверждения верны для $h_4^2 + h_5^2 = 2(\dot{\theta} - k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем пункт (a) теоремы о простых корнях. Для этого покажем, что решение $\gamma(t) = \dot{\theta}(t)$ уравнения (4.3) является периодическим с периодом $2\tau_0$. Действительно, из уравнения (4.3) видно, что $\gamma(t)$ может сменить направление монотонности только в тех точках, где $g(\gamma) = 0$, то есть в корнях. Пусть $\gamma(t_0) = a$ и $\gamma(t_1) = b$ и на промежутке $[t_0, t_1]$ функция γ монотонна. Тогда из уравнения (4.3) получаем:

$$2 \int_a^b \frac{d\gamma}{\sqrt{g(\gamma)}} = \pm(t_1 - t_0), \tag{6.1}$$

где знак в правой части равенства выбирается в зависимости от того, возрастает или убывает функция γ на $[t_0, t_1]$

В окрестности корней γ_j , $j = 0, 1$, полином g ведет себя как линейная функция $g(\gamma) \sim g'(\gamma_j)(\gamma - \gamma_j)$, так как γ_j не являются кратными корнями: $g'(\gamma_j) \neq 0$. Поэтому интеграл в (6.1) ограничен при любых $a, b \in [\gamma_0, \gamma_1]$. Другими словами решение $\gamma(t)$ за конечное время доходит от одного из корней γ_j до другого. Следовательно, после достижения одного из корней γ_j решение $\gamma(t)$ меняет монотонность на противоположную и идет к другому корню. После этого меняется знак в правой части (6.1) и процесс повторяется. Таким образом, $\gamma(t)$ есть периодическая функция с периодом $2\tau_0$, где

$$\tau_0 = 2 \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{d\gamma}{\sqrt{g(\gamma)}}$$

Более того, функция $\gamma(t)$ монотонна между экстремумами γ_0 и γ_1 и чередует их. Также автоматически доказаны остальные свойства $\dot{\theta} = \gamma$, заявленные в условии леммы.

Из (3.3) получаем, $h_4^2 + h_5^2 = 2(\gamma - k)$, поэтому функция $h_4^2 + h_5^2$ также периодична и обладает всеми свойствами, аналогичными свойствам γ .

Для функции $\theta(t)$ в силу периодичности $\dot{\theta}$ получаем, что

$$\theta(t + 2\tau_0) = \theta(t) + \int_0^{2\tau_0} \gamma(\tau) d\tau$$

Поскольку на промежутке возрастания γ выполняется $\sqrt{g(\gamma)} dt = 2d\gamma$, получаем, что $\theta(t + 2\tau_0) = \theta(t) + 2\theta_0$, где

$$\theta_0 = 2 \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{g(\gamma)}}.$$

Покажем теперь квазипериодичность кривой $(h_4(t), h_5(t))$. Для этого рассмотрим скалярное и векторное произведения векторов (h_4, h_5) и $(\cos \theta, \sin \theta)$. Согласно (4.4), оба произведения являются функциями $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ и потому периодичны с периодом $2\tau_0$. Поскольку вектор $(\cos \theta, \sin \theta)$ через период повернется на угол $2\theta_0$, тоже сделает вектор (h_4, h_5) .

Теперь докажем пункт (б) теоремы о кратном корне. Если γ_0 – двукратный корень, то $g(\gamma) \sim \frac{1}{2}g''(\gamma_0)(\gamma - \gamma_0)^2$ в окрестности γ_0 . Аналогично верно для трехкратного корня: $g(\gamma) \sim \frac{1}{6}g'''(\gamma_0)(\gamma - \gamma_0)^3$. Воспользуемся (4.3). Поскольку интеграл $\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{2d\gamma}{\sqrt{g(\gamma)}}$ расходится в γ_0 и сходится в γ_1 , получаем, что $\dot{\theta}(t)$ попадает в γ_1 лишь в один момент времени t_1 . При $t \in (-\infty; t_1]$ функция $\dot{\theta}(t)$ монотонно растет от γ_0 до γ_1 , а при $t \in [t_1; +\infty)$ функция $\dot{\theta}(t)$ монотонно убывает от γ_1 до γ_0 . Скорость стремления $\dot{\theta}$ к γ_0 при $t \rightarrow \pm\infty$ определяется типом особенности интеграла $\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{2d\gamma}{\sqrt{g(\gamma)}}$ в γ_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае последовательных простых корней, если угол θ_0 соизмерим с π , $\theta_0 = \pi q/p$, $p, q \in \mathbb{Z}$, то решение $(\theta(t), h_4(t), h_5(t))$ является периодическим с периодом $2\tau_0 p$, имеет p «лепестков»⁶ и делает $q - p$ оборотов вокруг начала координат за период (см. рис. 7 и 9).

⁶«Лепестком» мы называем точку максимального удаления кривой $(h_4(t), h_5(t))$ от начала координат.

ПРИМЕР 1. Вычислим θ_0 и τ_0 для самого простого случая $k = F = 0$. Уравнение $g(\gamma) = 0$ в этом случае имеет два простых корня $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_1 = 2\sqrt[3]{2H}$. Поэтому

$$\theta_0 = 2 \int_0^{2\sqrt[3]{2H}} \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{-\gamma^4 + 16H\gamma}} = 2 \int_0^2 \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{-\gamma^4 + 8\gamma}} = \frac{2\pi}{3};$$

$$\tau_0 = 2 \int_0^{2\sqrt[3]{2H}} \frac{d\gamma}{\sqrt{-\gamma^4 + 16H\gamma}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{H}} \int_0^2 \frac{d\gamma}{\sqrt{-\gamma^4 + 8\gamma}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{7}{6})}{\sqrt[3]{H}\Gamma(\frac{2}{3})}.$$

Поэтому любая траектория при $k = 0$ на уровне $F = 0$ является периодической с периодом $6\tau_0$.

Угол $2\theta_0$ можно вычислить как угол поворота вектора $(h_4(t), h_5(t))$ вокруг начала координат за период, если только $2F \neq k^2$. Действительно, единственное возможное препятствие – это обращение в 0 длины вектора (h_4, h_5) , то есть $0 = h_4^2 + h_5^2 = 2(\dot{\theta} - k)$. Но $g(k) = -(k^2 - 2F)^2 \leq 0$. Поэтому равенство $\dot{\theta} = k$ возможно только в случае, если k есть один из корней γ_0 или γ_1 и $2F = k^2$.

Итак, если $2F \neq k^2$, то

$$2\theta_0 = \int_0^{2\tau_0} \frac{h_4 \dot{h}_5 - h_5 \dot{h}_4}{h_4^2 + h_5^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\tau_0} \frac{\sqrt{2H}(h_4 \sin \theta - h_5 \cos \theta)}{\dot{\theta} - k} dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\tau_0} \frac{\dot{\theta}^2 - 2F}{\dot{\theta} - k} dt.$$

Добавляя и вычитая k^2 в числителе подынтегральной дроби получаем

$$8\theta_0 = \int_0^{2\tau_0} (\dot{\theta} + k) dt + (k^2 - 2F) \int_0^{2\tau_0} \frac{1}{\dot{\theta} - k} dt.$$

Отсюда немедленно находим

$$\theta_0 = \frac{1}{3}k\tau_0 + \frac{2}{3}(k^2 - 2F) \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{d\gamma}{(\gamma - k)\sqrt{g(\gamma)}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В случае (а) последовательных простых корней у решения $(h_4(t), h_5(t), \theta(t))$ есть симметрия относительно точек максимума функции $h_4^2 + h_5^2$, а именно: если при $t = 0$ квадрат расстояния до начала координат $h_4^2 + h_5^2$ принимает максимальное значение $2(\gamma_1 - k) > 0$, то при любом t вектора $(h_4(t), h_5(t))$ и $(h_4(-t), h_5(-t))$ симметричны относительно прямой $\lambda(h_4(0), h_5(0))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а углы $\theta(t)$ и $\theta(-t)$ симметричны на окружности относительно точек $\pm\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{h_5(0)}{h_4(0)}$. Угол между векторами $(h_4(0), h_5(0))$ и $(h_4(\tau_0), h_5(\tau_0))$ (последовательными максимумом и минимумом $h_4^2 + h_5^2$) составляет θ_0 .

§ 7. Специальные периодические решения

Как уже было сказано, случай $\ddot{\theta} \equiv 0$ не учтен в уравнении (4.3). Поэтому в этой секции будут найдены специальные периодические решения системы (3.3) в интегрируемом случае $\mu = 1$, на которых $\dot{\theta} = \text{const}$. Эти решения, а также их

сепаратрисные поверхности, понадобятся нам для доказательства неинтегрируемости системы (3.3) при $\mu \neq 1$.

Итак, предположим, что на некотором решении системы (3.3) при $\mu = 1$ выполнено $\dot{\theta} = \gamma_0$. Третья группа симметрий действует так: $\gamma_0 \mapsto \lambda^2 \gamma_0$.

ЛЕММА 7.1. *Пусть $\gamma_0 \neq 0$. У системы (3.3) с $\mu = 1$ существует траектория с $\dot{\theta} = \gamma_0$ тогда и только тогда, когда число γ_0 является кратным корнем полинома g из (4.3). В этом случае траектория является периодической и имеет вид (с точностью до сдвига по времени)*

$$\theta = \gamma_0 t; \quad h_4 = \frac{\sqrt{2H}}{\gamma_0} \sin \gamma_0 t; \quad h_5 = -\frac{\sqrt{2H}}{\gamma_0} \cos \gamma_0 t. \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система (3.3) с $\mu = 1$ имеет траекторию с $\dot{\theta} = \gamma_0 \neq 0$. В силу автономности можно считать, что $\theta = \gamma_0 t$. Поэтому из системы (3.3) получаем

$$h_4 = \frac{\sqrt{2H}}{\gamma_0} \sin \gamma_0 t + h_{40}; \quad h_5 = -\frac{\sqrt{2H}}{\gamma_0} \cos \gamma_0 t + h_{50}.$$

Однако из первого уравнения системы (3.3) следует, что $h_4^2 + h_5^2 = \text{const}$. Поэтому $h_{40} = h_{50} = 0$ и мы вывели (7.1).

Займемся теперь связью с кратными корнями полинома g . Из первого уравнения системы (3.3) получаем

$$k + \frac{H}{\gamma_0^2} = \gamma_0 \iff \boxed{\gamma_0^3 - k\gamma_0^2 - H = 0.} \quad (7.2)$$

Каждое решение этого уравнения дает периодическую траекторию с $\dot{\theta} = \gamma_0$.

Покажем теперь, что уравнение (7.2) на γ_0 равносильно тому, что γ_0 есть кратный корень полинома g , то есть $g(\gamma_0) = g'(\gamma_0) = 0$.

Пусть сначала $\dot{\theta} = \gamma_0$. Тогда $\ddot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ и первый интеграл F немедленно находится из (4.2):

$$F = \frac{1}{2}\gamma_0^2 - \frac{2H}{\gamma_0} \iff \boxed{\gamma_0^3 - 2F\gamma_0 - 4H = 0.} \quad (7.3)$$

Это уравнение есть в точности уравнение $g'(\gamma_0) = 0$ на экстремумы полинома $g(\gamma)$ из (4.3). Осталось заметить $g(\gamma_0) = 0$, так как

$$\begin{aligned} g(\gamma_0) &= -(\gamma_0^2 - 2F)^2 + 16H(\gamma_0 - k) = \\ &= -\left(\frac{4H}{\gamma_0}\right)^2 + 16H(\gamma_0 - k) = \frac{16H}{\gamma_0^2}(\gamma_0^3 - k\gamma_0^2 - H) = 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Обратно. Пусть $g(\gamma_0) = g'(\gamma_0) = 0$. Покажем, что выполняется уравнение (7.2). Действительно из $g'(\gamma_0) = 0$ немедленно следует (7.3) и $\gamma_0 \neq 0$ (т.к. $H > 0$). Поэтому из $g(\gamma_0) = 0$ немедленно следует (7.4), а, значит и (7.2).

Таким образом, для решений (7.3) возможны три варианта:



1. Один действительный простой корень, если $2F^3 - 27H^2 < 0$.
2. Три действительных простых корня, если $2F^3 - 27H^2 > 0$.
3. Действительный кратный корень и простой корень, если $2F^3 - 27H^2 = 0$.

Данное описание в точности совпадает с описанием минимумов и максимумов полинома $g(\gamma)$ из (4.3). Поэтому можно себе его представлять так. Поскольку при изменении k меняется лишь свободный член полинома $g(\gamma)$, то для каждого нуля полинома $g'(\gamma)$ найдется равно одно значение k при котором значение $g(\gamma)$ в этой точке будет в точности 0. Это значение k и даст специальную периодическую траекторию.

Поведение траекторий системы (3.3) в окрестности найденной специальной периодической траектории (7.1) в линейном приближении определяется собственными значениями дифференциала отображения последования Пуанкаре. Произведение собственных значений должно равняться ± 1 , так как система гамильтонова и сохраняет форму площади. Таким образом возможны следующие варианты:

- Оба собственных значения по модулю равны 1, отличны от ± 1 и комплексно сопряжены. В этом случае периодическая траектория (7.1) называется *эллиптической*.
- Оба собственных значения вещественны, одно из них по модулю строго больше 1, а другое – строго меньше. В этом случае периодическая траектория (7.1) называется *гиперболической*.
- Собственные значения равны ± 1 . Этот случай называется *вырожденным*.

ЛЕММА 7.2. *Периодическая траектория, отвечающая максимуму полинома $g(\gamma)$ является эллиптической, отвечающая минимуму – гиперболической, а трехкратному корню – вырожденной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим показатели Ляпунова системы (3.3) вдоль специальной периодической траектории (7.1). Уравнение в вариациях является линейной неавтономной системой:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2H}}{\gamma_0} \sin \gamma_0 t & -\frac{\sqrt{2H}}{\gamma_0} \cos \gamma_0 t \\ -\sqrt{2H} \sin \gamma_0 t & 0 & 0 \\ \sqrt{2H} \cos \gamma_0 t & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

После замены переменных $z_1 = y_1 \cos \gamma_0 t + y_2 \sin \gamma_0 t$, $z_2 = -y_1 \sin \gamma_0 t + y_2 \cos \gamma_0 t$, система становится автономной:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2H}}{\gamma_0} \\ 0 & 0 & \gamma_0 \\ \sqrt{2H} & -\gamma_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы в правой части имеет вид:

$$\chi(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \frac{2H}{\gamma_0} + \gamma_0^2).$$

Отбрасывая нулевой корень, отвечающий касательному вектору к периодической траектории $\dot{\theta} = \gamma_0$, получаем:

$$\begin{array}{lll} \frac{2H}{\gamma_0} + \gamma_0^2 > 0 & \Rightarrow & \text{траектория эллиптическая,} \\ \frac{2H}{\gamma_0} + \gamma_0^2 < 0 & \Rightarrow & \text{траектория гиперболическая,} \\ \frac{2H}{\gamma_0} + \gamma_0^2 = 0 & \Rightarrow & \text{траектория вырожденная.} \end{array}$$

Покажем теперь, что эти случаи в точности описывают тип кратного корня γ_0 полинома g . Действительно, учитывая (7.3), получаем

$$g''(\gamma_0) = -12\gamma_0^2 + 8F = -8\left(\frac{2H}{\gamma_0} + \gamma_0^2\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Гиперболическая периодическая траектория (7.1) может возникнуть только при $k < 0$ (см. бифуркационную диаграмму на рис. 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если траектория (7.1) является гиперболической, то $\frac{2H}{\gamma_0} + \gamma_0^2 < 0$, а, значит, $\gamma_0 < 0$. Домножив (7.2) на $\frac{2}{\gamma_0}$ и сложив с уже имеющимся неравенством, получим $3\gamma_0^2 - 2k\gamma_0 < 0$, а значит $k\gamma_0 > 0$ и, следовательно, $k < 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что гиперболическая траектория соответствует кратному корню, лежащему между простыми корнями, а эллиптическая — кратному корню не лежащему между простыми корнями (если они есть).

§ 8. Явные формулы в случае кратного корня

В этом параграфе мы приведем подробные явные формулы для пьяных эластик в случае когда многочлен g имеет кратный корень γ_0 . В этом случае уравнение (4.3) можно проинтегрировать в элементарных функциях. Если многочлен g не имеет кратных корней, то систему можно проинтегрировать в эллиптических функциях, что сделано в параграфе 10. Итак, многочлен g имеет кратный корень, и следовательно либо не имеет больше действительных корней (этот случай тривиален), либо в силу того, что сумма всех 4x корней равна 0, на оставшиеся два действительных корня накладывает одно линейное соотношение, разрешая которое можно считать, что оставшиеся корни записываются в виде $-\gamma_0 \pm 2\gamma_1$. Итак, уравнение (4.3) принимает вид

$$4\ddot{\theta}^2 = -(\dot{\theta} - \gamma_0)^2(\dot{\theta} + \gamma_0 - 2\gamma_1)(\dot{\theta} + \gamma_0 + 2\gamma_1). \quad (8.1)$$

В этом случае $H = -\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1^2$, $F = \frac{1}{2}\gamma_0^2 + \gamma_1^2$ и $k = \frac{\gamma_0^2 + \frac{1}{2}\gamma_1^2}{\gamma_0}$. Это накладывает следующее ограничение на H , F и k (условия (3.i) и (3.ii) из параграфа 5):

$$\boxed{8F^3 + 27H^2 + 36FHk - 4F^2k^2 - 16Hk^3 = 0; \\ F > 0; \quad k < 0.}$$

Действительно, поскольку $H > 0$, то $\gamma_0 < 0$, а, значит, $k < 0$ и $F > 0$. Трехкратный корень возникает в случае $F^2 + 3Hk = 0$. Если обозначить $a = -\frac{\gamma_1}{\gamma_0} > 0$, то трекратный корень возникает при $a = 1$.

Будем считать, что $\gamma_0 = -1$ за счет масштабирующей группы симметрий (симметрия 3 из параграфа 2). Тогда

$$H = \frac{1}{2}a^2 > 0; \quad F = \frac{1}{2} + a^2 > 0; \quad k = -1 - \frac{1}{2}a^2 < 0;$$

а уравнение (8.1) преобразуется к виду

$$\ddot{\theta}^2 = a^2(\dot{\theta} + 1)^2 \left(1 - \left(\frac{\dot{\theta} - 1}{2a} \right)^2 \right). \quad (8.2)$$

Сделаем замену $\frac{\dot{\theta}-1}{2a} = -\sin w$, позволяющую выделить полные квадраты. Отметим, что переменная w определена по модулю 2π . Итак,

$$\dot{\theta} = 1 - 2a \sin w. \quad (8.3)$$

Подставляя в (8.2) и приводя подобные члены, получаем

$$\cos^2 w \dot{w}^2 = \cos^2 w (1 - a \sin w)^2.$$

Если $\cos w = 0$ то $\dot{\theta} = 1 \pm 2a$. Поэтому по теореме 3 равенство $\cos w = 0$ может возникать лишь в изолированные моменты времени. Поэтому $\dot{w} = \pm(1 - a \sin w)$. По тем же леммам знак \pm можно убрать: смена знака на противоположный означает смену направления движения $\dot{\theta}$ и потому уничтожается сдвигом времени. Итак,

$$\boxed{dw = (1 - a \sin w)dt \iff a \sin w dt = d(t - w).} \quad (8.4)$$

Это уравнение нетрудно проинтегрировать, однако ответ зависит от случаев $a < 1$, $a = 1$ и $a > 1$. Формулы получаются громоздкие, поэтому сделаем это в самую последнюю очередь. Все дальнейшие вычисления можно проделать и без явного интегрирования уравнения (8.4). Итак, из (8.3) получаем:

$$d\theta = dt - 2a \sin w dt = dt - 2d(t - w) = d(-t + 2w).$$

Учитывая действие группы $SO(2)$, можно считать, что начальный угол определен с точностью до добавления константы. Поэтому

$$\boxed{\theta = -t + 2w.}$$

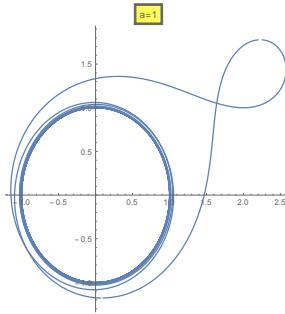


Рис. 6: Икающая эластика (случай $a = 1$) в плоскости (h_4, h_5) .

Найдем теперь h_4 и h_5 . Для этого воспользуемся (4.5). Учитывая $\ddot{\theta} = -2a \cos w\dot{w} = -2a \cos w(1 - a \sin w)$, получаем

$$\begin{cases} \theta = -t + 2w; \\ h_4 = a \sin t - 2 \cos(w - t); \\ h_5 = a \cos t - 2 \sin(w - t). \end{cases} \quad (8.5)$$

Таким образом, в случае наличия кратного корня у полинома g возможны следующие виды пьяных эластик, отвечающие различным решениям уравнения (8.4):

1. **Икающая эластика** (см. рис. 6). Если $a = 1$, то γ_0 является трехкратным корнем полинома g . Находим:

$$w_0 = 2 \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{2}{t} \right).$$

В этом случае можно воспользоваться упрощением

$$w_0 = 2 \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{2}{t} \right) = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg}(t - 1) \pmod{2\pi}$$

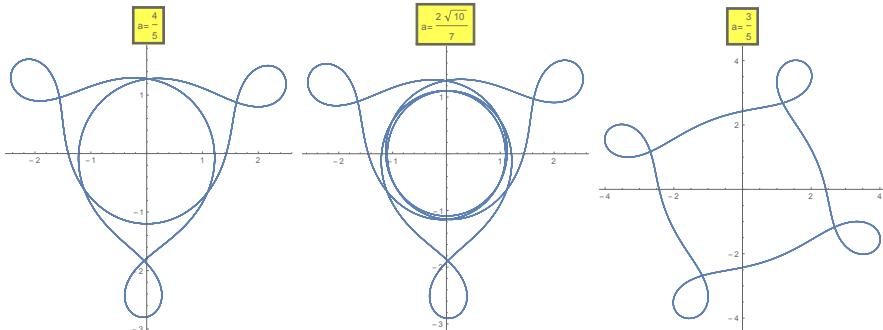


Рис. 7: Танцующая эластика (случай $a < 1$) в плоскости (h_4, h_5) , периодические решения.

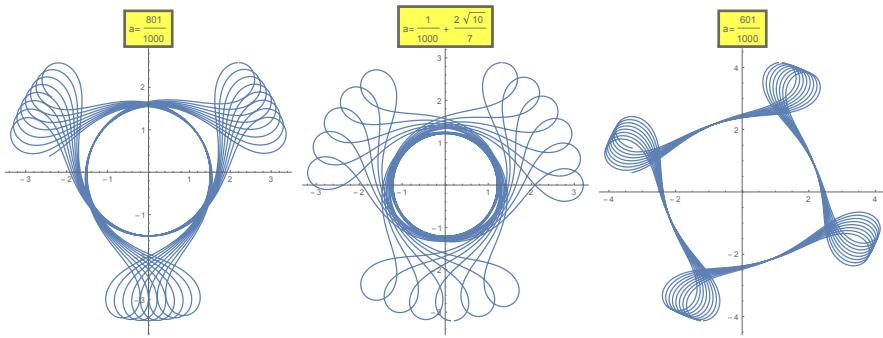


Рис. 8: Танцующая эластика (случай $a < 1$) в плоскости (h_4, h_5) ,
квазипериодические решения.

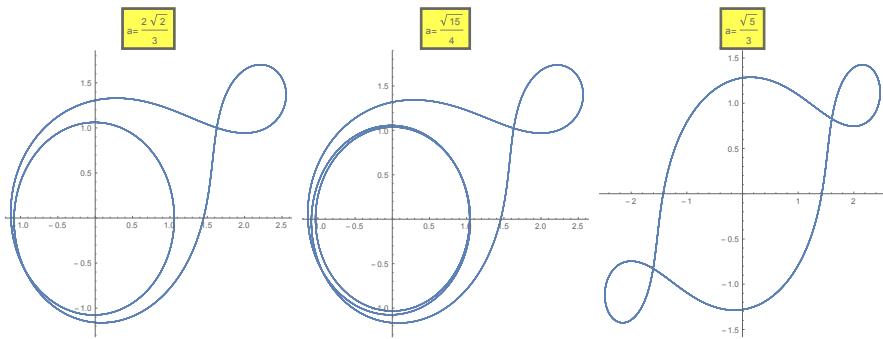


Рис. 9: Танцующая эластика (случай $a < 1$) в плоскости (h_4, h_5) , еще
периодические решения с 1 и 2 лепестками.

2. Танцующие эластики (см. рис. 7, 8 и 9). Если $0 < a < 1$, то γ_0 является двукратным корнем полинома g , не лежащим между простыми корнями. В этом случае решение можно записать в одной из двух эквивалентных форм (с точностью до сдвига по времени $t \rightarrow t + \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$):

$$\begin{cases} w_1 = 2 \operatorname{arctg} \left(a + \sqrt{1-a^2} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} t \right); \\ \tilde{w}_1 = 2 \operatorname{arctg} \left(a - \sqrt{1-a^2} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} t \right). \end{cases}$$

3. Засыпающие эластики (см. рис. 10 и 11). Если $a > 1$, то γ_0 является двукратным корнем полинома g , лежащим между простыми корнями. В этом случае существует два различных (сепаратрисных) решения (отвечающих двум интервалам положительности g):

$$w_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(a - \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2} t \right); \quad (8.6)$$

$$w_3 = 2 \operatorname{arctg} \left(a - \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{th} \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2} t \right). \quad (8.7)$$

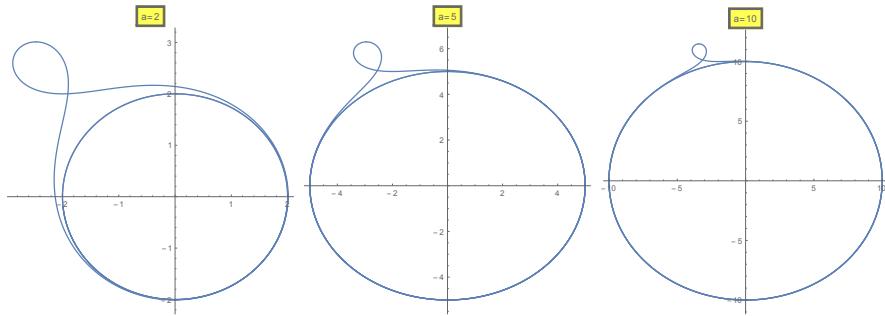


Рис. 10: Случай $a > 1$, где $w = w_2$ выражается через cth (внешняя сепаратриса).

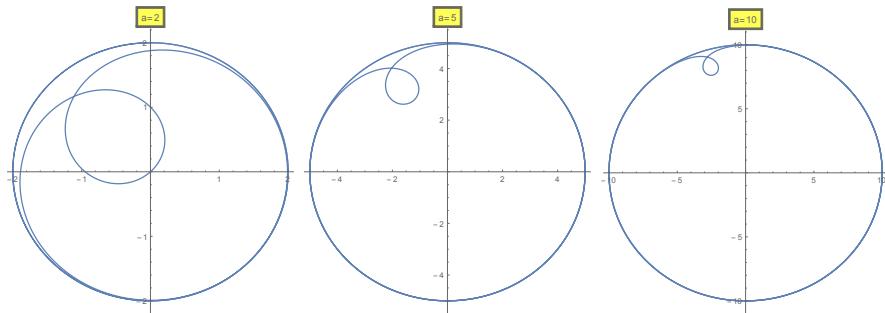


Рис. 11: Случай $a > 1$, где $w = w_3$ выражается через th (внутренняя сепаратриса).

Сразу получаем, что в этих случаях:

$$\begin{cases} a - \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2} t \in (-\infty; a - \sqrt{a^2 - 1}) \cup (a + \sqrt{a^2 - 1}; +\infty); \\ a - \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{th} \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2} t \in (a - \sqrt{a^2 - 1}; a + \sqrt{a^2 - 1}). \end{cases}$$

Теперь опишем простейшие свойства полученных решений. Ключевым является следующее замечание: движение вектора (h_4, h_5) в плоскости можно разложить на композицию двух вращений:

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \cos w \\ \sin w \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Таким образом, первое вращение – это равномерное вращение в отрицательном направлении вокруг начала координат, а второе – неравномерное вращение вокруг точки $(0, a)$.

Опишем некоторые простейшие свойства этого движения.

ЛЕММА 8.1. Точка (h_4, h_5) лежит между двумя окружностями с центром в начале координат и радиусов $a + 2$ и $|2 - a|$. Причем решение попадает на внешнюю окружность, если $w = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t$, а на внутреннюю, если $w = \frac{\pi}{2} + 2\pi t$, $t \in \mathbb{Z}$. Более того

$$h_4^2 + h_5^2 = a^2 + 4(1 - a \sin w).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $h_4^2 + h_5^2 = 2(\dot{\theta} - k)$. Подставляя $k = -1 - \frac{1}{2}a^2$ и $\dot{\theta} = 1 - 2a \sin w$, получаем формулу, заявленную в условии леммы. Таким образом, точка (h_4, h_5) попадает на внешнюю окружность радиуса $2 + a$, если $\sin w = -1$, а на внутреннюю окружность радиуса $|2 - a|$, если $\sin w = 1$.

На самом деле для решений w_2 и w_3 предыдущую лемму можно усилить

ЛЕММА 8.2. Для случая $w = w_2$ точка (h_4, h_5) лежит между двумя окружностями с центром в начале координат и радиусов $2 + a$ и a . Для случая $w = w_3$ точка (h_4, h_5) лежит между двумя окружностями с центром в начале координат и радиусов a и $|2 - a|$. Причем в обоих случаях точка (h_4, h_5) стремится к окружности радиуса a при $t \rightarrow \pm\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для w_2 и w_3 выражения внутри \arctg лежат соответственно вне и внутри промежутка $(a - \sqrt{a^2 - 1}; a + \sqrt{a^2 - 1})$ и приближаются к его границам при $t \rightarrow \pm\infty$. Поскольку точка -1 лежит вне этого промежутка, а точка 1 внутри, остается заметить, что по лемме 8.1 при $t \rightarrow \pm\infty$ имеем

$$h_4^2 + h_5^2 \rightarrow a^2 + 4 - 4a \sin(2 \arctg(a \pm \sqrt{a^2 - 1})) = a^2.$$

Таким образом, в каждом из случаев w_2 и w_3 есть ровно 1 «лепесток» – касание окружности радиуса $2 + a$ или $|2 - a|$ соответственно. При $a \rightarrow \infty$ отношение размера этого лепестка к размеру окружности радиуса a стремится к 0 – лепесток затухает.

В случае w_0 решение тоже имеет ровно 1 лепесток на окружности радиуса 3 и стремится к окружности радиуса 1.

Случай w_1 принципиально другой: решение является либо квазипериодическим (см. пункт (а) теоремы 3) либо периодическим (см. замечание 5).

ЛЕММА 8.3. Если $a > 1$, то кратный корень полинома $g(\gamma)$ лежит между простыми корнями. В этом случае найденные решения w_2 и w_3 являются сепаратрисными решениями для гиперболической периодической траектории (7.1), отвечающей этому кратному корню (см. леммы 7.1 и 7.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, специальное периодическое решение (7.1) выражается через a следующим образом:

$$\theta = -t; \quad h_4 = a \sin t; \quad h_5 = a \cos t.$$

Заметим, что $w_{2,3} \rightarrow 2 \arctg(a \mp \sqrt{a^2 - 1})$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Поэтому $\sin w \rightarrow \frac{1}{a}$ и $\dot{\theta} \rightarrow -1$ по (8.3). Также $\ddot{\theta} \rightarrow 0$ в силу (7.2). Осталось в (4.5) подставить $H = \frac{1}{2}a^2$, $F = \frac{1}{2} + a^2$, $F - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \rightarrow a^2$ и $\dot{\theta} \rightarrow 0$. Получим $h_4 \rightarrow -a \sin \theta$ и $h_5 \rightarrow a \cos \theta$, что и требовалось. Поскольку $\theta = -t + 2w$, то запаздывание при движении t от $-\infty$ до $+\infty$ составляет $4\sqrt{a^2 - 1}$.

§ 9. Доказательство неинтегрируемости

В этом параграфе мы докажем сформулированную во введении основную теорему 2 о неинтегрируемости по Лиувиллю геодезического потока на свободной группе Карно \mathfrak{G} с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$. Доказательство основано на оценке расщепления сепаратрис с помощью метода Мельникова-Пуанкаре [26]. А именно, мы покажем, что на симплектических слоях с μ близкими к 1, найдется гиперболическая периодическая траектория, устойчивые и неустойчивые сепаратрисные листы которой трансверсально пересекаются по гомоклинической траектории. Точнее: при μ близких к 1 для системы (3.3) отображение последования Пуанкаре плоскости $(h_4, h_5, \theta = 0)$ на себя в окрестности гиперболической периодической траектории имеет одномерные устойчивые и неустойчивые листы, которые трансверсально пересекаются по гомоклинической точке.

Итак, в этом параграфе мы будем работать с системой (3.3) в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^2 \times S^1 = \{(h_4, h_5, \theta)\}$ и смотреть, что происходит с характером ее решений при изменении параметра μ в окрестности 1.

Воспользуемся еще оставшейся в запасе 3 группой симметрий (см. пар. 2). С ее помощью можно привести параметр k к одному из 3х значений $k = 0, \pm 1$. Эти значения соответствуют 3 различным типам симплектических листов \mathfrak{g}^* . Нас будет интересовать случай $k = -1$, так как при $\mu = 1$ у гамильтоновой системы (3.3) есть однопараметрическое семейство гиперболических периодических траекторий на изоэнергетических поверхностях $H \in (0; \frac{4}{27})$ (см. бифуркационную диаграмму на рис. 3).

ЛЕММА 9.1. *Зафиксируем произвольный отрезок $[a; b] \subset (0; \frac{4}{27})$. Тогда найдется такое число $\varepsilon > 0$, что при $0 < |1 - \mu| < \varepsilon$, $k = -1$ и $H \in [a; b]$ система (3.3) не имеет мероморфного⁷ первого интеграла $K(h_4, h_5, \theta)$, отличного от константы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано в параграфе 7 в леммах 7.1 и 7.2, если $k < 0$ (или равносильно $a > 1$) система (3.3) имеет при $\mu = 1$ гиперболическую периодическую траекторию Υ (отвечающую кратному корню полинома $g(\gamma)$, лежащему между простыми корнями). Сепаратрисные решения системы (3.3) (при $\mu = 1$) для этой периодической траектории выражаются по формулам (8.5) с $w = w_2$ (8.6) или $w = w_3$ (8.7). В этих формулах $k = -1 - \frac{1}{2}a^2$, а не -1 как в условии леммы, однако, это не имеет значения ввиду наличия 3 симметрии. В терминах отображения последования Пуанкаре плоскости $\theta = 0$ на себя, мы имеем неподвижную гиперболическую точку со склеенными сепаратрисами.

Зафиксируем любое $H \in [a; b]$ и $k = -1$ в системе (3.3) и будем менять параметр μ . При малом изменении параметра μ в окрестности $\mu = 1$ гиперболическая периодическая траектория Υ не разрушается и переходит в гиперболическую периодическую траекторию Υ_μ . У траектории Υ_μ сохраняются устойчивые и неустойчивые сепаратрисные многообразия. Однако, при $\mu \neq 1$ эти многообразия могут не совпадать. Воспользуемся методом Мельникова-Пуанкаре

⁷Как всегда функция называется мероморфной, если в достаточно малой окрестности любой точки она представима в виде отношения аналитических функций

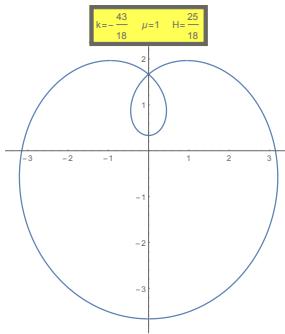


Рис. 12: Неподвижная гиперболическая траектория отображения последовательности Пуанкаре плоскости $\theta = 0$ на себя при $\mu = 1$ и ее сепаратрисы.

для того, чтобы показать, что сепаратрисы расщепляются при изменении параметра μ в окрестности $\mu = 1$. Другими словами, покажем, что при μ близких к 1 устойчивые и неустойчивые сепаратрисные многообразия пересекаются под ненулевым углом. Это в итоге приведет к доказательству отсутствия непостоянных мероморфных первых интегралов у системы (3.3) при любых μ , достаточно близких к 1.

Итак, построим координаты на сепаратрисных поверхностях системы (3.3) при $\mu = 1$ и $k < 0$. Для этого зафиксируем одно из сепаратрисных решений (см. лемму 8.3), а остальные получим из него (как было сказано в параграфе 8 остальные сепаратрисные решения на той же совместной поверхности уровня H и F получаются при помощи поворотов). Пусть $(\hat{\theta}(t), \hat{h}_4(t), \hat{h}_5(t))$ обозначает сепаратрисное решение, определенное формулами (8.5) при $w = w_2$ (8.6) (случай $w = w_3$ (8.7) абсолютно аналогичен). Отметим, что решение $(\hat{\theta}(t), \hat{h}_4(t), \hat{h}_5(t))$ стремится к периодической траектории и при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$ по лемме 8.3. Итак, если исключить из сепаратрисной поверхности $F = \frac{1}{2} + a^2$ периодическую траекторию, то мы получим несвязное объединение двух гладких поверхностей (случаи $w = w_2$ и $w = w_3$), каждая из которых диффеоморфна цилиндру. Обозначим через Γ ту из них, на которой лежит выбранное решение (для случая $w = w_2$ – это внешняя сепаратрисная поверхность, а для случая $w = w_3$ – внутренняя, см. рис. 12). Тогда Γ задается параметрически через t и φ формулами

$$\Gamma = \left\{ (\hat{\theta}(t) + \varphi, \hat{h}_4(t) \cos \varphi - \hat{h}_5(t) \sin \varphi, \hat{h}_4(t) \sin \varphi + \hat{h}_5(t) \cos \varphi) \mid t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

При небольшом изменении μ периодическая траектория не уничтожается и сохраняет гиперболический тип. Однако устойчивые и неустойчивые многообразия, вообще говоря, уже не обязаны совпадать. Обозначим их через $\Gamma_\mu^{s,u}$. При значениях μ близких к 1 в окрестности периодической траектории поверхности $\Gamma_\mu^{s,u}$ близки к Γ . Как обычно индекс s обозначает устойчивый лист, а u – неустойчивый (stable/unstable). Каждый из этих листов соткан из решений системы (3.3) при соответствующем μ , т.е.

$$\Gamma_\mu^{s,u} = \left\{ (\theta^{s,u}(t, \varphi, \mu), h_4^{s,u}(t, \varphi, \mu), h_5^{s,u}(t, \varphi, \mu)), t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

Функции $(\theta^{s,u}(t, \varphi, \mu), h_4^{s,u}(t, \varphi, \mu), h_5^{s,u}(t, \varphi, \mu))$ обладают двумя важными свойствами (см. [26]):

- При фиксированных μ и φ они (как функции времени) являются решением системы (3.3).
- При фиксированных t и φ и при $\mu \rightarrow 1$, имеем

$$\begin{aligned} & (\theta^{s,u}(t, \varphi, \mu), h_4^{s,u}(t, \varphi, \mu), h_5^{s,u}(t, \varphi, \mu)) \rightarrow \\ & \rightarrow (\hat{\theta}(t) + \varphi, \hat{h}_4(t) \cos \varphi - \hat{h}_5(t) \sin \varphi, \hat{h}_4(t) \sin \varphi + \hat{h}_5(t) \cos \varphi), \end{aligned}$$

то есть при $\mu \rightarrow 1$ сепаратрисные листы $\Gamma_\mu^{s,u}$ стремятся (поточечно) к Γ .

Рассмотрим две точки $A_\mu^{s,u}(t, \varphi)$ на $\Gamma_\mu^{s,u}$ (с одинаковыми параметрами (t, φ, μ)). Вычислим первый порядок по $(\mu - 1)$ разности $F(A_\mu^u(t, \varphi)) - F(A_\mu^s(t, \varphi))$, где F есть первый интеграл системы (3.3) при $\mu = 1$ и задается формулой (4.2). Производная по времени от F в силу системы (3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F &= \sqrt{2H}(\mu - 1) \left(k + \frac{1}{2}(h_4^2 + h_5^2) \right) h_5 \sin \theta - \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{2H} \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) h_5^2 (h_4 \cos \theta + h_5 \sin \theta) + 2H(\mu - 1) \cos \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Заметим, что в каждое из трех слагаемых в правой части входит множитель, тождественно обнуляющийся при $\mu = 1$. Так и должно быть. Действительно, при $\mu = 1$ функция F является первым интегралом, т.е. $\frac{d}{dt} F|_{\mu=1} \equiv 0$.

Итак, производная по μ от функции $\frac{d}{dt} F$ при $\mu = 1$ не зависит от производных функций $\theta^{s,u}(t, \varphi, \mu)$, $h_4^{s,u}(t, \varphi, \mu)$ и $h_5^{s,u}(t, \varphi, \mu)$ по μ . Это ключевое свойство для метода Мельникова-Пуанкаре, так как найти в явном виде производные по μ от этих функций не представляется возможным. Итак, меняя дифференцирования местами, получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=1} F = \sqrt{2H} \left(k + \frac{1}{2}(h_4^2 + h_5^2) \right) h_5 \sin \theta + \frac{1}{2} \sqrt{2H} h_5^2 (h_4 \cos \theta + h_5 \sin \theta) + 2H \cos \theta \sin \theta,$$

Обозначим правую часть через $MP(\theta, h_4, h_5)$ (в честь названия метода).

Очевидно, что при $t \rightarrow \pm\infty$ любое сепаратрисное решение стремится к периодическому с экспоненциальной скоростью. Но в точках периодической траектории при $\mu = 1$ выполняется $dF = 0$, так как поверхность уровня функции F имеет особенность. Поэтому (хотя в этом можно убедиться и прямой подстановкой)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=1} F(A_\mu^s(t, \varphi)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=1} F(A_\mu^u(t, \varphi)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Таким образом, в точках $A_\mu^{s,u}(t_0, \varphi)$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=1} F(A_\mu^s) &= - \int_{t_0}^{+\infty} \text{MP}(\widehat{\theta}(t) + \varphi, \widehat{h}_4(t) \cos \varphi - \widehat{h}_5(t) \sin \varphi, \widehat{h}_4(t) \sin \varphi + \widehat{h}_5(t) \cos \varphi) dt, \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=1} F(A_\mu^u) &= \int_{-\infty}^{t_0} \text{MP}(\widehat{\theta}(t) + \varphi, \widehat{h}_4(t) \cos \varphi - \widehat{h}_5(t) \sin \varphi, \widehat{h}_4(t) \sin \varphi + \widehat{h}_5(t) \cos \varphi) dt.\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=1} (F(A_\mu^u(t_0, \varphi)) - F(A_\mu^s(t_0, \varphi))) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{MP}(\widehat{\theta}(t) + \varphi, \widehat{h}_4(t) \cos \varphi - \widehat{h}_5(t) \sin \varphi, \widehat{h}_4(t) \sin \varphi + \widehat{h}_5(t) \cos \varphi) dt\end{aligned}$$

Последний интеграл (как и следовало ожидать) уже от t_0 не зависит.

Прямая выкладка дает, что

$$\text{MP}(\theta + \varphi, h_4 \cos \varphi - h_5 \sin \varphi, h_4 \sin \varphi + h_5 \cos \varphi) = A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C,$$

где

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}(h_5^2 - h_4^2)) + h_4 \dot{h}_5; \\ B & = & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\theta} h_4 h_5) - \frac{1}{2} (\dot{h}_5^2 - \dot{h}_4^2); \\ C & = & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2 + (1 + \frac{1}{2} a^2) \theta). \end{array} \right.$$

Здесь все производные $\frac{d}{dt}$ понимаются в смысле равенств (4.1). Таким образом, согласно методу Мельникова-Пуанкаре (см. [26]) имеем

- Из закона сохранения площадей следует, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} C(\widehat{\theta}(t), \widehat{h}_4(t), \widehat{h}_5(t)) dt$ должен обнуляться. Действительно, явный подсчет дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\widehat{\theta}(t), \widehat{h}_4(t), \widehat{h}_5(t)) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \widehat{\theta}^2(t) + (1 + \frac{1}{2} a^2) \frac{d}{dt} \widehat{\theta}(t) \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

так как на сепаратрисном решении $\frac{d}{dt} \widehat{\theta}(t) \rightarrow -1$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

- Если хотя бы одно из чисел

$$\mathcal{A}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\widehat{\theta}(t), \widehat{h}_4(t), \widehat{h}_5(t)) dt \quad \text{или} \quad \mathcal{B}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\widehat{\theta}(t), \widehat{h}_4(t), \widehat{h}_5(t)) dt \tag{9.1}$$

не обнулилось, то функция $\frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=1} (F(A_\mu^u(t_0, \varphi)) - F(A_\mu^s(t_0, \varphi)))$ имеет 4 простых нуля при $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Хорошо известно, что наличие простых 0 у функции Мельникова-Пуанкаре означает, что при μ достаточно близких к 1 сепаратрисы исходной гиперболической периодической траектории Υ_μ системы (3.3) пересекаются под ненулевым углом по гомоклинической траектории (см., например, [26], параграф 3.1). Отсюда следует, что при $k = -1$ и данном H найдется такое число $\varepsilon > 0$, что при $0 < |1 - \mu| < \varepsilon$ любой мероморфный первый интеграл системы (3.3) должен быть постоянным (см. [27]). Зависимость от H не существенна, так как для $H \in [a; b] \subset (0; \frac{4}{27})$ число $\varepsilon > 0$ может быть выбрано едино.

Покажем, что интегралы из (9.1) отличны от 0 на сепаратрисных решениях $w = w_2$ и $w = w_3$ при любых $a > 1$. Для этого вычислим явно интегралы (9.1). Функции A и B можно удобно выписать через вспомогательную функцию w :

$$A = (f(a, w) \cos 2t - g(a, w) \sin 2t)(1 - a \sin w)$$

и

$$B = (f(a, w) \sin 2t + g(a, w) \cos 2t)(1 - a \sin w),$$

где

$$\begin{aligned} f(a, w) &= 2a \cos 3w + 2a^2 \sin 2w + a \cos w - \frac{1}{2}a^3 \cos w; \\ g(a, w) &= -2a \sin 3w + 2a^2 \cos 2w - a \sin w + a^2. \end{aligned}$$

Отметим, что $\mathcal{A}(a) + i\mathcal{B}(a)$ записывается в виде

$$\mathcal{A}(a) + i\mathcal{B}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(a, w) + ig(a, w))(1 - a \sin w)e^{2it} dt, \quad (9.2)$$

поэтому достаточно вычислить интеграл (9.2), а функции $\mathcal{A}(a)$ и $\mathcal{B}(a)$ будут его действительной и мнимой частями.

Отметим, что в обоих случаях $w = w_2$ и $w = w_3$ функцию w можно представить в виде $w = 2 \operatorname{arctg} u$, где

$$u_2(a, t) = a - \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2} t; \quad \text{и} \quad u_3(a, t) = a - \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{th} \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2} t.$$

а обратные к ним функции есть

$$t_2(a, u) = \frac{2i}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(\operatorname{arctg} \frac{i(u - a)}{\sqrt{a^2 - 1}} + \frac{\pi}{2} + \pi n \right);$$

и

$$t_3(a, u) = \frac{2i}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(\operatorname{arctg} \frac{i(u - a)}{\sqrt{a^2 - 1}} + \pi n \right),$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку $u \rightarrow a \mp \sqrt{a^2 - 1}$ (с экспоненциальной скоростью) при $t \rightarrow \pm\infty$, то мы немедленно получаем, что $1 - a \sin w \rightarrow 0$ с экспоненциальной скоростью при $t \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, ввиду ограниченности функций f и g , написанный интеграл $\mathcal{A}(a) + i\mathcal{B}(a)$ сходится при любом $a > 1$.

Итак, подставляя $w = 2 \operatorname{arctg} u$ в (9.2), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a) + i\mathcal{B}(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a^2 + 6ia - 6) a + \frac{-a^4 - 3ia^3}{2(u+i)} + \frac{ia^4}{2(u+i)^2} + \right. \\ &+ \frac{-a^4 - 9ia^3 - 4a^2 - 28ia}{2(u-i)} + \frac{-ia^4 + 24a^3 + 28ia^2 + 48a}{2(u-i)^2} + \frac{8i(a^3 + 4ia^2 + 2a)}{(u-i)^3} - \\ &\quad \left. - \frac{16ia^2}{(u-i)^4} \right) e^{2it} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Q_a(u) e^{2it} dt. \quad (9.3) \end{aligned}$$

Причем выражение в скобках стремится к 0 с экспоненциальной скоростью при $t \rightarrow \pm\infty$. Вычислим теперь интеграл (9.3) при помощи вычетов. Для этого рассмотрим контур в виде прямоугольника на комплексной плоскости:

$$\Gamma_R = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \left([-R; R] \cup [R; R+iR] \cup [R+iR, -R+iR] \cup [-R+iR; -R] \right); \quad R > 0.$$

Очевидно, что интеграл по нижнему отрезку прямоугольника Γ_R от функции $Q_a(u)e^{2it}$ стремится при $R \rightarrow +\infty$ к $\mathcal{A}(a) + i\mathcal{B}(a)$ с экспоненциальной по R скоростью. Покажем, что интегралы по остальным ребрам Γ_R стремятся к 0 при подходящем выборе последовательности $R_n \rightarrow +\infty$.

Сначала займемся боковыми гранями. Оценки для них аналогичны, поэтому ограничимся правым ребром. Зададим его параметризацию: $t(\tau) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}}(R + i\tau)$, где $\tau \in [0; R]$. Функция e^{2it} ограничена. Покажем, что функция $u(t(\tau))$ экспоненциально близка к $a - \sqrt{a^2 - 1}$. Действительно,

$$\operatorname{cth}(R + i\tau) = \frac{1 + e^{-R+i\tau}}{1 - e^{-R+i\tau}} \quad \text{и} \quad \operatorname{th}(R + i\tau) = \frac{1 - e^{-R+i\tau}}{1 + e^{-R+i\tau}}.$$

Таким образом, независимо от $\tau \in \mathbb{R}$ обе функции u_2 и u_3 экспоненциально близки к $a - \sqrt{a^2 - 1}$. Следовательно, функция $1 - a \sin w$ экспоненциально блика к 0. Поэтому интеграл по правой боковой грани оценивается по модулю функцией cRe^{-R} , где константа $c > 0$ не зависит от R . Аналогично оценивается интеграл по левой грани прямоугольника Γ_R .

Займемся теперь верхней гранью прямоугольника Γ_R . В этом случае $t(\tau) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}}(iR + \tau)$, где $\tau \in [-R, R]$. Очевидно, что сомножитель e^{2it} экспоненциально (по R) близок к 0. Однако другой сомножитель $Q_a(u)$, вообще говоря, может уже не быть ограниченным. И это действительно будет так, если отрезок $\frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}}[-R + iR, R + iR]$ содержит какой-либо полюс функции $Q_a(u)$. Опишем эти полюсы. Полюсы могут возникнуть либо в точках, где функция cth (или th) имеет полюс, либо в точках, где $u = \pm i$.

Первые на самом деле отсутствуют, так как в окрестности этих точек функция $Q_a(u)$ ограничена и имеет предел $\frac{1}{2}(a^2 + 6ia - 6)a$. Следовательно, эти точки не являются полюсами, а являются устранимыми особенностями и их можно игнорировать. Вторые, действительно, являются полюсами. Их счетное количество и они могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned}\tau_2^\pm &= \frac{2i}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(-\operatorname{arctg} \frac{ia \pm 1}{\sqrt{a^2 - 1}} + \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \text{ если } u_2 = \pm i; \\ \tau_3^\pm &= \frac{2i}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(-\operatorname{arctg} \frac{ia \pm 1}{\sqrt{a^2 - 1}} + \pi n \right), \text{ если } u_3 = \pm i.\end{aligned}$$

Таким образом, полюса $\tau_{2,3}^\pm$ расположены на двух вертикальных прямых. Выберем $R = R_n = \pi n i$, для $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Поскольку обе функции th и cth периодичны с периодом πi , то на отрезках $t \in \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}}[-R_n + iR_n; R_n + iR_n]$ обе функции u_2 и u_3 принимают действительные значения. Следовательно, функция $Q_a(u)$ ограничена при всех $t \in \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}}[-R_n + iR_n; R_n + iR_n]$.

Итак, на верхней грани Γ_R при $R = R_n$ подынтегральное выражение $Q_a(u)e^{2it}$ стремится к 0 с экспоненциальной скоростью по R . Поэтому соответствующий интеграл оценивается через $cR e^{\frac{-4R}{\sqrt{a^2 - 1}}}$, для некоторой не зависящей от R константы $c > 0$.

Итак, интегралы по боковым и верхней граням контура Γ_{R_n} стремятся к 0 при $n \rightarrow \infty$. Интеграл же по всему контуру Γ_{R_n} вычисляется через сумму вычетов внутри Γ_{R_n} . Таким образом, для вычисления интеграла (9.3) остается вычислить вычеты в счетном количестве полюсов в верхней полуплоскости и просуммировать получившийся ряд. Для подсчета вычетов воспользуемся следующими очевидными фактами:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Предположим функция $g(z)$ является комплексно аналитической в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, а комплексно аналитическая функция $f(z)$ имеет в z_0 полюс (конечного порядка). Тогда⁸

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f(z)g(z)) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f(z) + g'(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} (z-z_0)f(z) + \frac{g''(z_0)}{2} \operatorname{Res}_{z_0} (z-z_0)^2 f(z) + \dots .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Предположим, что функция $\psi(z)$ является комплексно аналитической в окрестности $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\psi'(z_0) \neq 0$. Тогда если функция $f(w)$ имеет в точке $w_0 = \psi(z_0)$ полюс (конечного порядка), то

$$\operatorname{Res}_{w_0} f(w) = \operatorname{Res}_{z_0} f(\psi(z))\psi'(z).$$

Итак, вычеты функции $Q_a(u)e^{2it}$ в точках $\tau_{2,3}^\pm$ можно посчитать в координатах $u_{2,3}$ следующим образом. Для перехода от t к координате u необходимо зафиксировать ту ветвь отображения $t_{2,3}(a, u)$, для которой $\tau_{2,3}^\pm = t_{2,3}(a, \pm i)$. Итак,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\substack{\tau_{2,3}^\pm \\ \pm i}} Q_a(u_{2,3}(a, t))e^{2it} &= \operatorname{Res}_{\pm i} Q_a(u)e^{2it_{2,3}(a, u)} \frac{\partial}{\partial u} t_{2,3}(a, u) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Res}_{\pm i} Q_a(u)P_a(u) = \\ &= P_a(\pm i) \operatorname{Res}_{\pm i} Q_a(u) + P'_a(\pm i) \operatorname{Res}_{\pm i} (u \mp i)Q_a(u) + \frac{1}{2} P''_a(\pm i) \operatorname{Res}_{\pm i} (u \mp i)^2 Q_a(u) + \\ &\quad + \frac{1}{6} P'''_a(\pm i) \operatorname{Res}_{\pm i} (u \mp i)^3 Q_a(u) + \dots .\end{aligned}\tag{9.4}$$

⁸Написанная сумма является конечной

Легко убедиться из явного вида (9.3) функции $Q_a(u)$, что $\operatorname{Res}_{\pm i}(u \mp i)^n Q_a(u) = 0$ при $n \geq 4$. Вычеты функций $Q_a(u)(u \mp i)^n$, $n \leq 3$, находятся элементарно из формулы (9.3). Для точки $u = i$ имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_i Q_a(u) &= -16ia^2; & \operatorname{Res}_i(u - i)Q_a(u) &= 8ia(a^2 + 4ia + 2); \\ \operatorname{Res}_i(u - i)^2 Q_a(u) &= \frac{1}{2}a(-ia^3 + 24a^2 + 28ia + 48); \\ \operatorname{Res}_i(u - i)^3 Q_a(u) &= -\frac{1}{2}a(a^3 + 9ia^2 + 4a + 28i). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Для точки $u = -i$ имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{-i} Q_a(u) &= \frac{ia^4}{2}; & \operatorname{Res}_{-i}(u + i)Q_a(u) &= -\frac{1}{2}a^3(a + 3i); \\ \operatorname{Res}_{-i}(u + i)^2 Q_a(u) &= \operatorname{Res}_{-i}(u + i)^3 Q_a(u) = 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Осталось найти производные функции $P_a(u)$. Заметим, из (8.4) и равенства $w = 2 \operatorname{arctg} u$ следует, что $\frac{\partial}{\partial u} t_{2,3}(a, u) = \frac{2}{1-2au+u^2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} P_a(u) &= \frac{2}{1-2au+u^2} e^{2it}; & P'_a(u) &= \frac{4(2i+a-u)}{(1-2au+u^2)^2} e^{2it}; \\ P''_a(u) &= \frac{4(-6(a+2i)u+(2a+3i)^2+3u^2)}{(1-2au+u^2)^3} e^{2it}; \\ P'''_a(u) &= \frac{16(6a^3+a^2(-12u+22i)+9a(-3+u(u-4i))-3(u-i)^2(u-4i))}{(1-2au+u^2)^4} e^{2it}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Отметим, что одна аналитическая ветвь любой из двух функций $t_{2,3}(a, u)$ отличается от другой на постоянное слагаемое $\tau_0 = \frac{2\pi ni}{\sqrt{a^2-1}}$, где n – целое. Поэтому достаточно посчитать интересующие нас вычеты для какой-нибудь одной конкретной ветви, а вычеты для остальных ветвей получаются домножением на $e^{2i\tau_0} = e^{\frac{-4\pi n}{\sqrt{a^2-1}}}$.

Найдем вычеты в самых нижних точках $\tau_{2,3}^\pm$ из верхней полуплоскости. Вычеты в остальных точках получаются элементарно при помощи замечания 8. Итак, пусть $\hat{\tau}_2^+$ обозначает ту точку из набора τ_2^\pm , в которой мнимая часть является минимальной положительной из возможных. Аналогично обозначим $\hat{\tau}_2^-$, $\hat{\tau}_3^+$ и $\hat{\tau}_3^-$. Собирая воедино (9.4), (9.5), (9.6) и (9.7) получаем

$$\operatorname{Res}_{\hat{\tau}_2^+} Q_a(u_2(a, t))e^{2it} = -\frac{4}{3} \exp\left(\frac{4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1+ia}{\sqrt{a^2-1}}\right) - 2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\right); \quad \operatorname{Res}_{\hat{\tau}_2^-} Q_a(u_2(a, t))e^{2it} = 0;$$

$$\operatorname{Res}_{\hat{\tau}_3^+} Q_a(u_3(a, t))e^{2it} = -\frac{4}{3} \exp\left(\frac{4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1+ia}{\sqrt{a^2-1}}\right)}{\sqrt{a^2-1}}\right); \quad \operatorname{Res}_{\hat{\tau}_3^-} Q_a(u_3(a, t))e^{2it} = 0.$$

Таким образом, для подсчета интеграла (9.3) по теореме о вычетах остается, согласно замечанию 8, домножить полученные вычеты в точках $\hat{\tau}_{2,3}^\pm$ на сумму ряда геометрической прогрессии со знаменателем $e^{\frac{-4\pi}{\sqrt{a^2-1}}}$ и на $2\pi i$. Итак, если обозначить через $A_{2,3}(a)$ и $B_{2,3}(a)$ интегралы (9.1) на сепаратрисах $w = w_2$ и $w = w_3$, то получаем (см. рис. 13a и 13b)

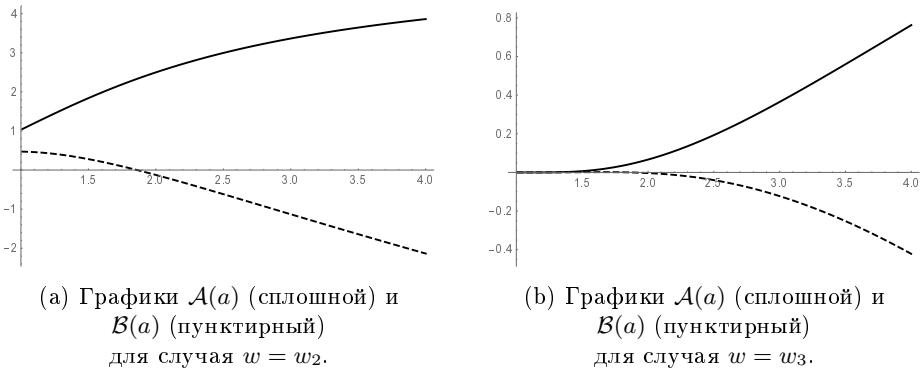


Рис. 13: Графики коэффициентов \mathcal{A} и \mathcal{B} в интеграле Мельникова-Пуанкаре (9.1).

$$\mathcal{A}_2(a) + i\mathcal{B}_2(a) = \frac{8\pi i}{3} \left(1 - e^{\frac{4\pi}{\sqrt{a^2-1}}}\right)^{-1} \exp\left(\frac{4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1+ia}{\sqrt{a^2-1}}\right) + 2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\right);$$

$$\mathcal{A}_3(a) + i\mathcal{B}_3(a) = \frac{8\pi i}{3} \left(1 - e^{\frac{4\pi}{\sqrt{a^2-1}}}\right)^{-1} \exp\left(\frac{4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1+ia}{\sqrt{a^2-1}}\right)}{\sqrt{a^2-1}}\right).$$

Из этих формул видно, что $\mathcal{A}_2(a) + i\mathcal{B}_2(a) \neq 0$ и $\mathcal{A}_3(a) + i\mathcal{B}_3(a) \neq 0$ при $a > 1$.
Легко убедиться, что

$$\lim_{a \rightarrow 1+0} (\mathcal{A}_2(a) + i\mathcal{B}_2(a)) = -\frac{8\pi i}{3} e^{2i-2} \quad \text{и} \quad \lim_{a \rightarrow 1+0} (\mathcal{A}_3(a) + i\mathcal{B}_3(a)) = 0.$$

Таким образом, доказано, что для всех $a > 1$, функция Мельникова-Пуанкаре имеет простые нули. Это гарантирует, что при значениях μ близких к 1 сепаратрисы имеют трансверсальное пересечение, что автоматически запрещает наличие не постоянных мероморфных первых интегралов.

Теорема 2 является прямым следствием леммы 3.1 и леммы 9.1. Докажем теперь теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Введем на коаглебре Ли $\mathfrak{g}^* = \{(h_1, \dots, h_8)\}$ новые координаты, точнее на некотором ее открытом всюду плотном подмножестве U :

$$U = \mathfrak{g}^* \cap \{h_1^2 + h_2^2 \neq 0\} \cap \{\det P = h_6 h_8 - h_7^2 \neq 0\} \cap \{(\operatorname{tr} P)^2 \neq 4 \det P\}.$$

Первое условие $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ исключает вырожденный случай $H = 0$. Второе условие невырожденности P означает, что мы ограничились 4-мерными симплектическими слоями общего положения (см. лемму 3.1). Третье условие запрещает собственным значениям P совпадать.

В качестве координат на U выберем: вместо (h_6, h_7, h_8) выберем (ψ, r, μ) , где ψ – угол, на который необходимо повернуть матрицу P , чтобы она стала диагональной, а большее собственное значение встало на верхний левый угол (определение ψ корректно, если собственные значения P различны). Угол ψ определен по модулю π :

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2h_7}{h_8 - h_6} + \frac{\pi\delta}{2} + \pi k; \quad \delta = 0, 1; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Число r – наибольшее собственное значение P , а μ – их отношение (большего к меньшему). По числам (ψ, r, μ) матрица P может быть восстановлена однозначно. Отметим, что параметры (ψ, r, μ) могут принимать любые значения из следующих множеств $\psi \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Вместо h_3 выберем k из (2.4). Координаты (h_1, h_2) заменим на (θ, H) , определенные формулами (3.2). Итак,

$$U = \{(h_4, h_5, \theta, H, k, \psi, r, \mu)\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}).$$

Покажем теперь, что если K – мероморфный первый интеграл гамильтоновой системы H на U , то $K = K(H, k, \psi, r, \mu)$. Отметим, что k, ψ, r и μ – казимиры.

Зафиксируем произвольный набор значений (H, k, ψ, r) , $k < 0$ и $H \in [-ak^3; -bk^3] \subset (0; -\frac{4}{27}k^3)$. По лемме 3.1 поток H на симплектическом слое (k, ψ, r, μ) эквивалентен потоку $H' \in [a; b] \subset (0; \frac{4}{27})$, $H' = -Hk^{-3}$, на слое $(k', \psi', r', \mu') = (-1, 0, 1, \mu)$ и принимает на этом слое вид системы (3.3) (с добавленным уравнением $\dot{H} = 0$). По лемме 9.1 для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем, что если $0 < |1 - \mu| < \varepsilon$, то интеграл K постоянен как функция (h_4, h_5, θ) . В силу мероморфности K немедленно получаем, что K не зависит от θ, h_4, h_5 уже для всех $\mu \neq 0, 1$ и $H > 0$. Таким образом, $K = K(H, k, \psi, r, \mu) = f(H, C, h_6, h_7, h_8)$, где $C = k \det P$, что и требовалось.

Рисунок 14 показывает хаотическое поведение орбиты отображения последования Пуанкаре плоскости $(h_4, h_5, \theta = 0)$ для системы (3.3). На рисунке 14 видны эллиптические острова, в которые не попадает траектория отображения последований Пуанкаре выбранной точки. Также явно отсутствие инвариантных торов.

В системе (3.3) при $\mu = 1$ существуют также и специальные периодические траектории эллиптического типа (см. лемму 7.2). Однако аналитическое исследование бифуркации периодической орбиты эллиптического типа обычно существенно сложнее исследования гиперболического случая. Известно лишь [28], что в близкой системе общего положения рождаются так называемые «эллиптические острова» перемежающиеся гиперболическими периодическими траекториями с соответствующей гетероклинической картиной. Мы провели численное исследование бифуркации специальной эллиптической периодической траектории (7.1) системы (3.3). Характерный пример мы приводим на рис. 15. На нем в плоскости $(h_4, h_5, \theta = 0)$ приведена бифуркация отображения последований Пуанкаре в окрестности эллиптической орбиты – видны две пары (эллиптическая и гиперболическая) траекторий периода 3, характерные острова вокруг эллиптической траектории и характерная гетероклиническая картина, порожденная сепаратрисами гиперболической траектории.

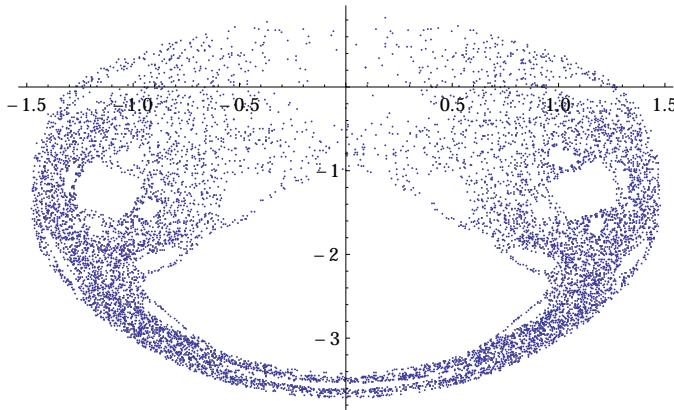


Рис. 14: Орбита отображение последования Пуанкаре плоскости ($h_4, h_4, \theta = 0$) на себя вдоль траекторий системы (3.3) с $\mu > 1$.

§ 10. Явные формулы геодезических на группе Карно с вектором роста (2, 3, 5, 6)

В этом параграфе мы приведем явные формулы через эллиптические интегралы для решения уравнения (4.3) и для горизонтальных переменных на одной выделенной группе Карно с вектором роста (2, 3, 5, 6).

Пусть a, b, c, d – различные корни полинома $g(\gamma)$ (случай кратных корней полностью разобран в параграфе 8). Очевидно $a + b + c + d = 0$. Положим $\gamma = \dot{\theta}$ и решим уравнение (4.3):

$$4\dot{\gamma}^2 = -(\gamma - a)(\gamma - b)(\gamma - c)(\gamma - d).$$

Мы предъявим явные формулы для случая, когда все корни a, b, c и d вещественны, $a > b > c > d$ и $\gamma \in [a, b]$. В остальных случаях формулы получаются аналогичные и мы их опустим. Решение этого уравнения находится явно через эллиптические интегралы (здесь и далее через \mathbb{F} , \mathbb{E} и Π обозначены эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода соответственно, см. [29]):

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(\varphi, \mathbf{k}) &= \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - \mathbf{k}^2 \sin^2 t}}, \\ \mathbb{E}(\varphi, \mathbf{k}) &= \int_0^\varphi \sqrt{1 - \mathbf{k}^2 \sin^2 t} dt, \\ \Pi(\varphi, n, \mathbf{k}) &= \int_0^\varphi \frac{dt}{(1 - n \sin^2 t) \sqrt{1 - \mathbf{k}^2 \sin^2 t}}.\end{aligned}$$

Обозначим

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(a - c)(\gamma - b)}{(a - b)(\gamma - c)}} \in (0, \pi/2) \quad \text{и} \quad \mathbf{k} = \sqrt{\frac{(c - d)(a - b)}{(b - d)(a - c)}} \in (0, 1).$$

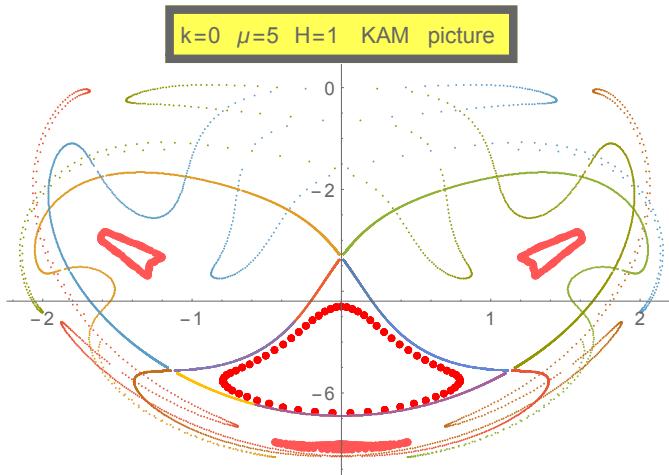


Рис. 15: Бифуркация точки периода 3.

Учитывая стандартные свойства эллиптических интегралов [29], получаем

$$t - t_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{(b-d)(a-c)}} \mathbb{F}(\varphi, k) \quad \Leftrightarrow \quad \sin \varphi = \pm \operatorname{sn} \left(\frac{\sqrt{(b-d)(a-c)}}{2}(t - t_0), k \right).$$

Поскольку система автономна, будем считать, что $t_0 = 0$. Поскольку $d\theta/d\gamma = \pm 2\gamma/\sqrt{g(\gamma)}$ находим

$$\theta - \theta_0 = \pm \left(ct - \frac{4(b-c)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \Pi \left(\varphi, \frac{a-c}{b-c}, k \right) \right).$$

Учитывая наличие вращательной группы симметрий $SO(2)$ можно считать, что $\theta_0 = 0$. Явные выражения для h_4 и h_5 через θ , $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$, представленные в (4.5), нам будет удобно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} h_4 = \sqrt{2(\dot{\theta} - k)} \cos(\theta + \psi), \\ h_5 = \sqrt{2(\dot{\theta} - k)} \sin(\theta + \psi), \end{cases}$$

где

$$\cos \psi = \frac{\ddot{\theta}}{2\sqrt{H(\dot{\theta} - k)}} \quad \text{и} \quad \sin \psi = \frac{F - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2}{2\sqrt{H(\dot{\theta} - k)}}.$$

Таким образом, мы привели полные формулы для вертикальных переменных h_1, \dots, h_8 в интегрируемом случае $h_6 = h_8$ и $h_7 = 0$. Эти формулы являются решениями вертикальной подсистемы в левоинвариантной субримановой задаче на несвободной группе Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$.

Также нам удалось найти явные формулы для всех горизонтальных переменных (кроме последней, которая, тем не менее интегрируется в квадратурах).

Для нахождения этих формул заметим, что в любой группе Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$ можно выбрать такие векторные поля X_1 и X_2 , порождающие субриманову структуру, что будут выполняться следующие коммутационные соотношения ($\mu \in \mathbb{R}$ – параметр):

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, & [X_1, X_3] &= X_4, & [X_2, X_3] &= X_5, \\ [X_1, X_4] &= X_6, & [X_2, X_5] &= \mu X_6, & [X_1, X_5] &= [X_2, X_4] = 0. \end{aligned}$$

Действительно, достаточно к любому ортонормированному реперу (X_1, X_2) применить нужное вращение из $SO(2)$ (аналогично параграфу 2). Коалгебра Ли этой группы есть в точности $\mathfrak{g}^* \cap \{h_8 = \mu h_6, h_7 = 0\}$. Таким образом группы Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$ образуют однопараметрическое семейство по параметру μ . При $\mu = 1$ у нас есть явные формулы для сопряженных переменных h_1, \dots, h_6 (в параграфе 9 мы показали, что на непустом открытом множестве параметров $\mu \neq 1$ система не интегрируема по Лиувиллю).

Как гладкое многообразие группа Карно с вектором роста $(2, 3, 5, 6)$ диффеоморфна \mathbb{R}^6 . Векторные поля X_1, \dots, X_6 могут быть заданы в следующем виде (для краткости $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_1 & = & \partial_1 - \frac{x_2}{2}\partial_3 - \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\partial_5 - \frac{\mu x_2^2}{6}\partial_6 \\ X_2 & = & \partial_2 + \frac{x_1}{2}\partial_3 + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\partial_4 + \frac{x_1}{6}\partial_6 \\ X_3 & = & \partial_3 + x_1\partial_4 + x_2\partial_5 + \frac{x_1^2+\mu x_2^2}{2}\partial_6 \\ X_4 & = & \partial_4 + x_1\partial_6 \\ X_5 & = & \partial_5 + \mu x_2\partial_6 \\ X_6 & = & \partial_6 \end{array} \right.$$

Управляемая система $\dot{x} = u_1 X_1 + u_2 X_2$ имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & u_1 \\ \dot{x}_2 & = & u_2 \\ \dot{x}_3 & = & \frac{1}{2}(x_1 u_2 - x_2 u_1) \\ \dot{x}_4 & = & \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)u_2 \\ \dot{x}_5 & = & -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)u_1 \\ \dot{x}_6 & = & \frac{1}{6}(x_1^3 u_2 - \mu x_2^3 u_1) \end{array} \right.$$

Вычислим (нормальные) геодезические при $\mu = 1$. Итак, в задаче $\frac{1}{2} \int (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min$ в нормальном случае $\lambda_0 = 1$ из принципа максимума Понтрягина немедленно получаем, что $u_1 = h_1$ и $u_2 = h_2$, где сопряженные переменные h_1, \dots, h_6 удовлетворяют системе (2.1) с $h_6 = h_8$ и $h_7 = 0$. Как было сказано, за счет масштабной группы симметрий можно считать, что $h_6 = 1$. Поэтому

$$x_1 = h_4 + x_1^0 \quad \text{и} \quad x_2 = h_5 + x_2^0.$$

Подставляя явные выражения h_4 и h_5 находим

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_3 & = & \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - F\right) + \frac{1}{2}(x_1^0 u_2 - x_2^0 u_1), \\ \dot{x}_4 & = & \sqrt{2H}(\dot{\theta} - k) \sin \theta + (x_1^0 h_4 + x_2^0 h_5) u_2 + \frac{1}{2}((x_1^0)^2 + (x_2^0)^2) u_2, \\ \dot{x}_5 & = & -\sqrt{2H}(\dot{\theta} - k) \cos \theta - (x_1^0 h_4 + x_2^0 h_5) u_1 - \frac{1}{2}((x_1^0)^2 + (x_2^0)^2) u_1. \end{array} \right.$$

Начнем с интеграла

$$J = \int \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - F \right) dt = \int \frac{\gamma^2 - 2F}{\sqrt{g(\gamma)}} d\gamma.$$

Последний интеграл легко берется стандартными методами через эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода (константу интегрирования отбрасываем):

$$J = -\sqrt{\frac{(a-\gamma)(\gamma-c)(\gamma-d)}{\gamma-b}} - \frac{1}{4}(a(b+c+d) + b(b+2(c+d)))t - \\ - \sqrt{(a-d)(b-c)} \mathbb{E}\left(\tilde{\varphi}, \tilde{k}\right) + \frac{(b-d)(a+b+c+d)}{\sqrt{(a-d)(b-c)}} \Pi\left(\frac{d-c}{b-c}; \tilde{\varphi}, \tilde{\mathbf{k}}\right),$$

где

$$\tilde{\varphi} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{(b-c)(\gamma-d)}{(c-d)(b-\gamma)}}\right), \quad \tilde{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(b-c)(d-a)}}.$$

С учетом $a+b+c+d=0$ получаем

$$J = -\sqrt{\frac{(a-\gamma)(\gamma-c)(\gamma-d)}{\gamma-b}} + \frac{1}{4}(a+b)^2 t - \sqrt{(a-d)(b-c)} \mathbb{E}(\tilde{\varphi}, \tilde{\mathbf{k}}).$$

Для переменной x_3 получаем

$$x_3 = J + \frac{1}{2}(x_1^0 h_5 - x_2^0 h_4) + x_3^0.$$

Для того, чтобы найти x_4 и x_5 сначала проинтегрируем выражения $\sqrt{2H}(\dot{\theta} - k)\sin\theta$ и $\sqrt{2H}(\dot{\theta} - k)\cos\theta$. Для этого воспользуемся тем, что $\dot{h}_4 = \sqrt{2H}\cos\theta$ и $h_5 = \sqrt{2H}\sin\theta$. Поэтому

$$\sqrt{2H}(\dot{\theta} - k)\sin\theta = \frac{d}{dt}(-\sqrt{2H}\cos\theta - kh_5);$$

$$\sqrt{2H}(\dot{\theta} - k)\cos\theta = \frac{d}{dt}(\sqrt{2H}\sin\theta - kh_4).$$

Таким образом для получения явных формул для x_4 и x_5 необходимо проинтегрировать выражения $h_4\dot{h}_4$, $h_5\dot{h}_5$, $h_4\dot{h}_5$ и $h_5\dot{h}_4$. Первые два выражения интегрируются тривиально. Вторые два можно проинтегрировать и помощью следующего триюка:

$$h_4\dot{h}_5 + h_5\dot{h}_4 = \frac{d}{dt}(h_4h_5)$$

$$h_4\dot{h}_5 - h_5\dot{h}_4 = \sqrt{2H}(h_4\sin\theta - h_5\cos\theta) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - F = \frac{d}{dt}J.$$

Во втором равенстве мы воспользовались (4.4). Итак,

$$h_4 \dot{h}_5 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h_4 h_5 + J); \quad h_5 \dot{h}_4 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h_4 h_5 - J).$$

Собирая воедино полученные формулы, с учетом $a + b + c + d = 0$ имеем:

$$x_4 = -\sqrt{2H} \cos \theta - kh_5 + \frac{1}{2} \left(x_1^0 J + x_1^0 h_4 h_5 + x_2^0 h_5^2 + ((x_1^0)^2 + (x_2^0)^2) h_5 \right) + x_4^0;$$

$$x_5 = -\sqrt{2H} \sin \theta + kh_4 + \frac{1}{2} \left(x_2^0 J - x_2^0 h_4 h_5 - x_1^0 h_4^2 - ((x_1^0)^2 + (x_2^0)^2) h_4 \right) + x_5^0.$$

§ 11. Заключение

Полученные в данной работе результаты о неинтегрируемости показывают проблематичность детального исследования свободных нильпотентных субримановых структур глубины не менее 4 известными на сегодняшний день методами. Возникает потребность в новых методах, позволяющих такое исследование для неинтегрируемых по Лиувиллю субримановых структур.

Авторы выражают благодарность академику РАН И.А. Тайманову, чл.-корр. РАН А.Е. Миронову и профессору А.В. Борисову за полезные, плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф. Вырожденные аномальные траектории в нильпотентной субримановой задаче с вектором роста (2,3,5,8) // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 362–374.
- [2] Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф. Невырожденные аномальные траектории в нильпотентной субримановой задаче с вектором роста (2,3,5,8) // в работе. 2016.
- [3] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians. Springer, 2007.
- [4] Gauthier J.-P., Sachkov Y. On the free Carnot (2,3,5,8) group // Program systems: theory and applications. 2015. Vol. 6, no. 2. P. 45–61.
- [5] Mitchell J. On Carnot-Carathéodory metrics // J. Differential Geom. 1985. Vol. 21. P. 35–45.
- [6] Bellaïche A. The tangent space in sub-Riemannian geometry // In: Sub-Riemannian geometry, A. Bellaïche and J.-J. Risler, Eds. 1996. P. 1–78.
- [7] Gromov M. The Carnot-Carathéodory spaces seen from within // Progress in Mathematics. 1996. Vol. 144. P. 85–324.
- [8] Brockett R. Control theory and singular Riemannian geometry // In: New Directions in Applied Mathematics, (P. Hilton and G. Young eds.). 1982. P. 11–27.
- [9] Vershik A., Gershkovich V. Nonholonomic Dynamical Systems. Geometry of distributions and variational problems // Encyclopedia of Math. Sci. 1994. Vol. 16 (Dynamical Systems 7). P. 35–45.
- [10] Brockett R., Dai L. Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability // In: Nonholonomic Motion Planning, Z. Li and J. Canny, Eds., 1993. P. 1–21.
- [11] Sachkov Y. L. Exponential mapping in generalized Dido's problem // Sbornik: Mathematics. 2003. Vol. 194, no. 9. P. 1331–1360.

- [12] Sachkov Y. L. Discrete symmetries in the generalized Dido problem // Sbornik: Mathematics. 2006. Vol. 197, no. 2. P. 235–257.
- [13] Sachkov Y. L. The Maxwell set in the generalized Dido problem // Sbornik: Mathematics. 2006. Vol. 197, no. 4. P. 595–621.
- [14] Sachkov Y. L. Complete description of the Maxwell strata in the generalized Dido problem // Sbornik: Mathematics. 2006. Vol. 197, no. 6. P. 901–950.
- [15] Agrachev A., Sachkov Y. L. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer-Verlag Berlin, 2004.
- [16] Kirillov A. A. Lectures on the orbit method. American Mathematical Society, 2004.
- [17] Fomenko A. T., Bolsinov A. V. Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification. Taylor and Francis, 2003.
- [18] Gaveau B. Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimatees sous elliptiques sur certains groupes nilpotents // Acta Math. 1977. Vol. 139. P. 94–153.
- [19] Myasnichenko O. Nilpotent $(n, n(n+1)/2)$ sub-Riemannian problem // J. Dynam. Control Systems. 2002. Vol. 8. P. 573–597.
- [20] Anzaldo-Meneses A., Monroy-Pérez F. Goursat distribution and sub-Riemannian structures // Journal of Mathematical Physics. 2003. Vol. 44, no. 12. P. 6101 – 6111.
- [21] Lokutsievskiy L., Sachkov Y. Non-integrability of geodesic flows in left invariant sub-riemannian problems of step 4 // International Conference Metric Stuctures and Control Systems. 2015. P. 26.
- [22] Кириллов А. Локальные алгебры Ли // УМН. 1976. Т. 31, № 4(190). С. 57–76.
- [23] Love A. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Fourth edition. New York: Dover, 1927.
- [24] Boizot N., Gauthier J.-P. On the motion planning of the ball with a trailer // Mathematical Control and Related Fields. 2013. Vol. 3, no. 3. P. 269 – 286.
- [25] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Наука, 2003.
- [26] Treschev D., Zubelevich O. Introduction to the Perturbation Theory of Hamiltonian Systems. Springer Monographs in Mathematics, 2010.
- [27] Зиглин С. Расщепление сепаратрис и несуществование первых интегралов в системах дифференциальных уравнений типа гамильтоновых с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51, № 5. С. 1088–1103.
- [28] Zehnder E. Homoclinic points near elliptic fixed points // Communications on pure and applied mathematics. 1973. Vol. 26. P. 131–182.
- [29] Whitteker E., Watson G. A course of modern analysis. Fourth edition. Cambridge: Cambridge university press, 1950.

Л. В. Локутьевский (L. V. Lokutsievskiy)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: lion.lokut@gmail.com

Поступила в редакцию
 2016

Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)
 Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
E-mail: yusachkov@gmail.com