ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 473, № 5, с. 521–524

МАТЕМАТИКА

УДК 517. 977

СУБРИМАНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ГРУППЕ SO(3) В ЗАДАЧЕ ПОИСКА КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ НА СФЕРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ СЕТЧАТКИ

© 2017 г. А. П. Маштаков[1, *], Р. Дайтс (R. Duits)[2], Ю. Л. Сачков[1], Е. Беккерс (E. Bekkers)[2], И. Ю. Бесчастный[3]

Представлено академиком РАН Р. В. Гамкрелидзе 13.10.2016 г.

Поступило 28.11.2016 г.

Рассматривается задача поиска кривой γ на двумерной сфере, соединяющей заданные граничные точки и направления в них и минимизирующей функционал $\int_0^l \mathfrak{C}(\gamma(s))\sqrt{\xi^2 + k_g^2(s)}\,ds$. Длина l кривой γ свободна, $\xi > 0$ – фиксированный параметр, s обозначает длину дуги на сфере, k_g – геодезическую кривизну, а $\mathfrak{C} \geq \delta > 0$ – гладкую функцию "внешней стоимости". Показано, что решением являются сферические проекции субримановых кратчайших на группе Ли SO(3). Построено численное решение, проверенное путем сравнения с точным решением в случае $\mathfrak{C} = 1$. Задача имеет приложения в обработке изображений: найденные кривые используются для обнаружения местоположения кровеносных сосудов на сферических изображениях сетчатки. Функция "внешней стоимости" при этом определяется сферическим изображением.

DOI: 10.7868/S0869565217110020

Поиск выделяющихся кривых на изображении – широко известная задача компьютерного зрения. Многие методы основаны на идее поиска таких кривых как геодезических некоторой метрики, определённой на изображении [1]. При этом минимальная геодезическая (кратчайшая) есть кривая, минимизирующая функционал длины с весовым коэффициентом "внешней стоимости", получаемым из изображения. Типичная функция внешней стоимости имеет малые значения на участках изображения, где проходит выделяющаяся кривая, и большие значения вне этих участков.

Другая разновидность геодезических методов, вдохновлённых принципами работы первичной зрительной коры головного мозга человека, была предложена в [2, 3]. В этих работах в качестве модели восприятия контура выступают субримановы (СР) геодезические на группе Гейзенберга H(3) и группе евклидовых движений плоскости SE(2) соответственно. Позже эта модель была использована для восстановления изображений в [4].

Сочетание такой модели восприятия контура и геодезических методов, основанных на функции внешней стоимости, было предложено в [5], где поиск выделяющихся кривых осуществлялся с помощью адаптированных к данным СР геодезических на группе SE(2). Метод был использован для поиска кровеносных сосудов на плоских изображениях сетчатки и показал лучшие результаты при сравнении с известными методами.

В данной работе мы развиваем подход, описанный в [5], и предлагаем метод поиска выделяющихся кривых на сферических изображениях. Для этого рассматривается СР-структура на группе Ли SO(3), действующей транзитивно на двумерной сфере S^2. Предлагаемый метод применяется для поиска кровеносных сосудов на сферических изображениях сетчатки с пониженной дисторсией (ввиду сферической поверхности сетчатки).

Обозначим $S^2 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{n}\| = 1\}$. Рассматривается задача $\mathbf{P_{curve}}$ (см. рис. 1): по заданным

[1] Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской Акадеии наук, Веськово Переславского р-на Ярославской обл.
[2] Eindhoven University of Technology, The Netherlamds
[3] International School for Advanced Studies, Trieste, Italy
* E-mail: alexey.mashtakov@gmail.com

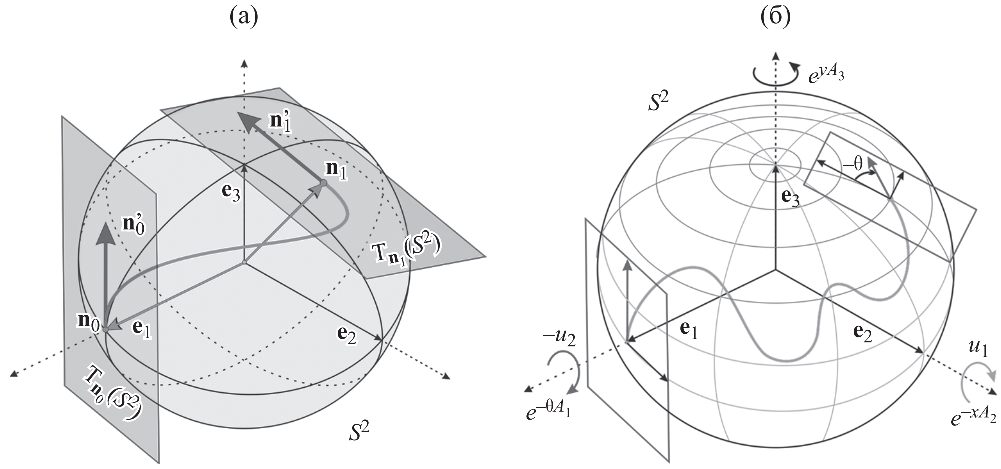

Рис. 1. Задачи $\mathbf{P_{curve}}$ на сфере S^2 (а) и $\mathbf{P_{mec}}$ на группе Ли SO(3) (б).

граничным точкам $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1 \in S^2$ и направлениям $\mathbf{n}_0' \in T_{\mathbf{n}_0}(S^2)$, $\mathbf{n}_1' \in T_{\mathbf{n}_1}(S^2)$, $\|\mathbf{n}_0'\| = \|\mathbf{n}_1'\| = 1$ найти гладкую кривую $\mathbf{n}(\cdot)\colon [0,l] \to S^2$, удовлетворяющую условиям

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{n}(l) = \mathbf{n}_1, \qquad \mathbf{n}'(0) = \mathbf{n}_0', \quad \mathbf{n}'(l) = \mathbf{n}_1,$$

и для фиксированного $\xi > 0$ минимизирующую функционал

$$\mathcal{L}(\mathbf{n}(\cdot)) := \int_0^l \mathfrak{C}(\mathbf{n}(s))\sqrt{\xi^2 + k_g^2(s)}\, ds,$$

где s – параметр длины дуги на сфере, $k_g(s)$ – геодезическая кривизна кривой $\mathbf{n}(\cdot)$ на S^2, вычисленная в момент s; общая длина l свободна и $\mathfrak{C}\colon S^2 \to [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$ – функция внешней стоимости.

Задача $\mathbf{P_{mec}}$ поиска СР кратчайших на группе SO(3) имеет вид

$$\dot{R} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \qquad R(0) = \mathrm{Id}, \quad R(T) = R_{\mathrm{fin}},$$
$$\mathcal{L}(R(\cdot)) := \int_0^T C(R(t))\sqrt{\xi^2 u_1^2(t) + u_2^2(t)}\, dt \to \min,$$

где $R \in \mathrm{SO}(3)$, X_i – базисные левоинвариантные векторные поля на SO(3), $\xi > 0$ – постоянная, и конечное время $T > 0$ свободно.

Внешняя стоимость C: $\mathrm{SO}(3) \to [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$, получается поднятием $\mathfrak{C}$ со сферы S^2 на группу SO(3), т.е. $C(R) = \mathfrak{C}(R\mathbf{e}_1)$.

Далее мы показываем, что сферическая проекция $\mathrm{SO}(3) \ni R \mapsto R\mathbf{e}_1 \in S^2$ некоторых решений задачи $\mathbf{P_{mec}}$ является решением задачи $\mathbf{P_{curve}}$. Более точно, это выполнено для кратчайших, сферические проекции которых не имеют точек возврата. Такие точки возникают, когда управление $u_1(t)$ меняет знак. До первой точки возврата кратчайшая $\mathbf{P_{mec}}$ может быть параметризована длиной дуги $s \in [0, s_{\max})$ на сфере S^2.

Т е о р е м а 1. *Пусть $R(t)$, $t \in [0, T]$, есть кратчайшая в $\mathbf{P_{mec}}$, параметризованная СР длиной дуги $C(R(t))\sqrt{\xi^2 u_1^2(t) + u_2^2(t)} = 1$, и пусть соответствующее оптимальное управление $(u_1(t),\ u_2(t))$ удовлетворяет неравенству $u_1(t) > 0$ для всех $t \in [0, T]$.*

Положим $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}_1 = R(T)\mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}_0' = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{n}_1' = R(T)\mathbf{e}_3$. Для таких граничных условий $\mathbf{P_{curve}}$ имеет решение $\mathbf{n}(s)$,

$$\mathbf{n}(s) = R(t(s))\mathbf{e}_1,\ 0 \le s \le l < s_{\max},$$
$$u_1(t) = \frac{ds}{dt}(t),$$
$$u_2(t) = k_g(s(t))\frac{ds}{dt}(t),$$
$$t(s) = \int_0^s \mathfrak{C}(\mathbf{n}(\sigma))\sqrt{\xi^2 + k_g^2(\sigma)}\, d\sigma, \quad T = t(l).$$

Мы исследуем аналитически задачу $\mathbf{P_{mec}}$ в случае $C = 1$. Обозначим через $R_{\mathbf{a},\phi}$ вращение вокруг оси $\mathbf{a} \in S^2$ на угол ϕ в положительном направлении, и параметризуем SO(3) тремя углами x, y, θ, так что $R(x, y, \theta) = R_{\mathbf{e}_3, y} R_{\mathbf{e}_2, -x} R_{\mathbf{e}_1, \theta}$. Применение принципа максимума Понтрягина [6] (необходимого условия оптимальности) позволяет получить явные формулы для СР геодезических. Геодезические, не имеющие точек возврата в сферической проекции, параметризуются длиной сферической дуги. Такие "безвозвратные" геодезические определяются следующей гамильтоновой системой:

вертикальная часть	горизонтальная часть
$h_1(s)=\xi^2\frac{ds}{dt}\geq 0,$	$x'(s)=\cos\theta(s),$
$h_2'(s)=h_3(s),$	$y'(s)=-\sec x(s)\sin\theta(s),$
$h_3'(s)=(\xi^2-1)h_2(s),$	$\theta'(s)=\sin\theta(s)\,\mathrm{tg}\,x(s)+\frac{\xi h_2(s)}{\sqrt{1-h_2^2(s)}},$

$$(1)$$

с граничными условиями

$$h_2(0)=h_2^0,\quad h_3(0)=h_3^0,\quad x(0)=0,\quad y(0)=0,\quad \theta(0)=0. \tag{2}$$

Формулы для "безвозвратных" геодезических получаются проще, чем для геодезических в общем случае. В отличие от общего случая, где возникают эллиптические функции Якоби, здесь остаётся только один эллиптический интеграл.

Т е о р е м а 2. *Решение гамильтоновой системы* (1), (2) *определено и единственно на интервале* $s\in[0,s_{\max}(h(0)))$, *где*

$$s_{\max}(h(0))= \begin{cases} \frac{\mathrm{sgn}(h_3^0)-h_2^0}{h_3^0} & \text{для } \chi=0,\quad h_3^0\neq 0,\\ \frac{1}{\chi}\ln\left(\frac{s_1\left(\sqrt{\kappa}+\chi\right)}{h_2^0\chi+h_3^0}\right) & \text{для } \chi\neq 0,\ \kappa\geq 0,\ h_2^0\chi+h_3^0\neq 0,\\ +\infty & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $\chi=\sqrt{\xi^2-1}$ (*главная ветвь корня*), $s_1=\mathrm{sgn}\left(\mathrm{Re}\left(h_2^0\chi+h_3^0\right)\right)$ *и* $\kappa=(h_3^0)^2+\left(1-(h_2^0)^2\right)\chi^2\in\mathbb{R}$.

Решение вертикальной части имеет вид

для $\chi\neq 0$:	*для* $\chi=0$:
$h_2(s)=h_2^0\,\mathrm{ch}\,s\chi+\frac{h_3^0}{\chi}\mathrm{sh}\,s\chi,$	$h_2(s)=h_2^0+h_3^0 s,$
$h_3(s)=h_3^0\,\mathrm{ch}\,s\chi+\chi h_2^0\,\mathrm{sh}\,s\chi,$	$h_3(s)=h_3^0,$
$h_1(s)=\xi\sqrt{1-h_2^2(s)},$	$h_1(s)=\sqrt{1-h_2^2(s)}.$

Решение горизонтальной части имеет вид

$$x(s)=\arg(\sqrt{R_{11}^2(s)+R_{21}^2(s)}+iR_{31}(s)),$$
$$y(s)=\arg(R_{11}(s)+iR_{21}(s)),$$
$$\theta(s)=\arg(R_{33}(s)+iR_{32}(s)),$$

где $$R(s)=\begin{pmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) & R_{13}(s)\\ R_{21}(s) & R_{22}(s) & R_{23}(s)\\ R_{31}(s) & R_{32}(s) & R_{33}(s)\end{pmatrix}= D_0^{\mathrm{T}}e^{\tilde{y}(s)A_3}e^{-x(s)A_2}e^{\tilde{\theta}(s)A_1},$$

$$D_0=\frac{1}{M}\begin{pmatrix} \mu & \frac{\xi h_2^0\sqrt{1-(h_2^0)^2}}{\mu} & -\frac{h_2^0h_3^0}{\mu}\\ 0 & \frac{Mh_3^0}{\mu} & \frac{\xi M\sqrt{1-(h_2^0)^2}}{\mu}\\ h_2^0 & -\xi\sqrt{1-(h_2^0)^2} & h_3^0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{x}(s)=\arg\left(\sqrt{M^2-h_2^2(s)}+ih_2(s)\right),$$

$$\tilde{y}(s)=\xi M^2\left(\int_0^s\frac{\sqrt{1-h_2^2(\sigma)}}{M^2-h_2^2(\sigma)}d\sigma\right),$$

$$\tilde{\theta}(s)=\arg\left(h_3(s)-i\xi\sqrt{1-h_2^2(s)}\right),$$

где

$$\mu=\sqrt{M^2-(h_2^0)^2},\ M=\sqrt{\xi^2(1-(h_2^0)^2)+(h_2^0)^2+(h_3^0)^2}.$$

Полученные формулы в случае $C=1$ были использованы для проверки метода решения задачи $\mathbf{P}_{\mathbf{mec}}$ в общем случае. Метод основан на решении системы с уравнением эйконала.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $W(R)$ *является вязким решением системы*

$$\sqrt{\frac{\left(X_1|_R(W)\right)^2}{\xi^2}+\left(X_2|_R(W)\right)^2}=C(R)\quad \text{для}\quad \mathrm{Id}\neq R\in \mathrm{SO}(3),\qquad W(\mathrm{Id})=0, \tag{3}$$

СР *кратчайшая* $R(t)=R_b(W(R_{\mathrm{fin}})-t)$, *соединяющая единицу группы* Id *с* R_{fin}, *находится интегрированием по* $t\in[0,W(R_{\mathrm{fin}})]$:

$$\dot{R}_b(t)=-u_1(t)X_1\big|_{R_b(t)}-u_2(t)X_2\big|_{R_b(t)},\quad R_b(0)=R_{\mathrm{fin}},$$

где $u_1(t)=\dfrac{X_1|_{R_b(t)}(W)}{(\xi C(R_b(t)))^2}$, $u_2(t)=\dfrac{X_2|_{R_b(t)}(W)}{(C(R_b(t)))^2}$.

Решая численно систему (3) с функцией C, построенной по сферическому изображению сетчатки, мы получаем эффективный метод поиска кровеносных сосудов. Сравнение с методом [5] для плоских изображений показывает, что SO(3)-кратчайшие более аккуратно следуют направлению сосудов. Более того, заметна ощутимая разница в измерении геодезической кривизны сосудов на сфере и кривизны их проекции на плоскость изображения. В заключение отметим, что кривизна сосудов используется как биомаркер [7] для диагностики многих систематических заболеваний, следовательно, предложенная модель СР геодезических на SO(3) является актуальным уточнением модели [5].

Работа выполнялась при финансовой поддержке государства в лице Минобрнауки России в рамках проекта RFMEFI60716X0153.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Peyré G., Péchaud M., Keriven R., Cohen L. D.* Geodesic Methods in Computer Vision and Graphics // Found. Trends. Comp. in Computer Graphics and Vision. 2010. V. 5. № 34. P. 197–397.
2. *Petitot J.* The Neurogeometry of Pinwheels as a Sub-Riemannian Contact Structure // J. Physiol. 2003. V. 97. P. 265–309.
3. *Citti G., Sarti A.* A Cortical Based Model of Perceptual Completion in the Roto-Translation Space // J. Math. Imaging Vis. 2006. V. 24. P. 307–326.
4. *Mashtakov A. P., Ardentov A. A., Sachkov Y. L.* Parallel Algorithm and Software for Image Inpainting via Sub-Riemannian Minimizers on the Group of Rototranslations // Numerical Math.: Theory, Methods and Appl. 2013. V. 6. № 1. P. 95–115.
5. *Bekkers E. J., Duits R., Mashtakov A., Sanguinetti G.R.* A PDE Approach to Data-Driven Sub-Riemannian Geodesics in SE(2) // SIAM J. Imaging Sci. 2015. V. 8. № 4. P. 2740–2770.
6. *Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.* Control Theory from the Geometric Viewpoint. B.: Springer-Verlag, 2004.
7. *Sasongko M. B., Wong T. Y., Nguyen T. T., Cheung C. Y., Shaw J. E., Wang J. J.* Retinal Vascular Tortuosity in Persons with Diabetes and Diabetic Retinopathy // Diabetologia. 2011. V. 54. P. 2409–2416.
8. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and Lens Spaces // SIAM J. Control and Optimization. 2008. V. 47. P. 1851–1878.
9. *Berestovskii V., Zubareva I.* Sub-Riemannian Distance in the Lie groups $SU(2)$ and $SO(3)$ // Sib. Adv. Math. 2016. V. 26. № 2. P. 77–89.
10. *Duits R., Boscain U., Rossi F., Sachkov Y. L.* Association Fields via Cuspless Sub-Riemannian Geodesics in SE(2) // JMIV. 2014. V. 49. № 2. P. 384–417.