УДК 517.538

И.Ю. Бесчастный, Ю. Л. Сачков

Геодезические в субримановой задаче на группе SO(3)

В этой статье мы изучаем геодезические левоинвариантных субримановых структур на группе SO(3). Приводится полное описание периодических геодезических и их простейшие свойства, некоторые необходимые условия минимальности, оценки на время разреза и на диаметр метрики.

Библиография: 31 название.

Ключевые слова: Субриманова геометрия, почти риманова геометрия, оптимальное управление, геодезические, время разреза.

Введение

Субримановым многообразием называется тройка (M, Δ, g), где M – гладкое многообразие, Δ – гладкое распределение на M, и g – гладкая риманова метрика на Δ. Субримановые структуры часто возникают в приложениях, например, в управлении квантовыми системами [1], робототехнике [2, 3, 4], обработке изображений [5] и во многих других областях [6].

В статье [7] была приведена полная классификация левоинвариантных структур на трехмерных группах Ли, которые представляют собой простейшие примеры субримановых многообразий. По этой причине они часто используются, как модели для проверки новых инструментов, и как источник новых идей для понимания более сложных субримановых структур.

Изучение минимальных кривых (кратчайших) является важной задачей субримановой геометрии, которая может быть довольно сложной даже в простейшем случае трехмерных левоинвариантных многообразий, где полное описание минимальных кривых известно только в нескольких случаях: в задаче на группе Гейзенберга [6, 8], в её сферическом и гиперболическом аналогах [9, 10, 11, 12], и в субримановой задаче на SE(2) [13, 2, 3, 4] и SH(2) [14].

В общем случае известно, что геодезический поток на трехмерных унимодулярных группах интегрируем по Лиувиллю [15, 16]. Также авторы статьи [17] смогли получить оценки на сопряженное время для этих групп. Но полное описание минимальных кривых до сих пор неизвестно.

Геодезические римановых и субримановых метрик на SO(3) во многом похожи. Причина заключается в том, что любая субриманова метрика на контактной структуре является пределом некоторого семейства римановых метрик (штрафных метрик, см. [6]). После некоторой замены координат риманова

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №14.B25.31.0029).

метрика g становится диагональной:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Субриманова структура получается предельным переходом $I_j \to +\infty$ для некоторого j. Задача поиска минимальных геодезических на $\mathrm{SO}(3)$ имеет приложения в оптимальном управлении квантовыми системами [18]. Нашей целью является описание различных свойств геодезического потока и, прежде всего, получение новых условий оптимальности для геодезических.

В семействе субримановых структур на $\mathrm{SO}(3)$ имеется одна наиболее симметричная структура, которой соответствует ограничение биинвариантной метрики на распределение. Этот случай был полностью изучен в статьях [9, 10, 11, 12]. Поэтому в этой статье мы рассматриваем строго левоинвариантные метрики. Мы приводим новые необходимые условия оптимальности, полное описание периодических геодезических и некоторые их свойства. Краткое описание периодических геодезических было ранее дано в [8].

Чтобы получить оценки на время разреза и диаметр метрики, мы рассматриваем близкую задачу поиска минимальных кривых на почти римановой сфере. Почти риманово многообразие – это n-мерное многообразие, на котором заданы n почти всюду линейно независимых ортонормированных векторных полей. Множество точек, где эти поля линейно зависимы, называется сингулярным множеством. Субриманову структуру на $\mathrm{SO}(3)$ можно спроектировать на однородное пространство S^2. В результате на двумерной сфере будет задана почти риманова структура.

Почти римановы структуры возникают, например, в задачах оптимального управления квантовыми системами. Геодезические на почти римановых структурах ранее исследовались в [1, 18, 19, 20]. В статьях [1, 18] авторы построили оптимальный синтез для пары конкретных граничных условий. В статьях [19] и [20] были получены более полные условия, которые мы используем в последнем параграфе для получения простых оценок на время, в течение которого геодезические на $\mathrm{SO}(3)$ оптимальны.

В тексте мы используем следующие обозначения:

- A_i – стандартный базис $\mathrm{so}(3) = T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{SO}(3)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- e_i – стандартный базис $\mathbb{R}^3$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

- i, j, k – базис пространства мнимых кватернионов $\mathbb{I}$.

Заглавной буквой мы обозначем элемент алгебры so(3), прописью — соответствующий кватернион, и прописной буквой со стрелкой — соответствующий вектор в $\mathbb{R}^3$:

$$\Omega \simeq \omega \simeq \vec{\omega}, \qquad \Omega \in \mathrm{so}(3), \qquad \omega \in \mathrm{I}, \qquad \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3.$$

Статья имеет следующую структуру. В параграфе 1 мы формулируем задачу. В параграфе 2 мы приводим параметризацию геодезических. Периодические геодезические изучаются в параграфе 3. Симметрии и необходимые условия оптимальности даны в параграфе 4. В параграфе 5 получены оценки на время разреза и диаметр метрики.

Для удобства читателя мы собрали все необходимые определения и свойства эллиптических функций и интегралов в Приложении B. Изоморфизм между пространством мнимых кватернионов I, $\mathbb{R}^3$ и so(3) задается формулой (A.3) в Приложении A, где приведена необходимая информация о кватернионах.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим левоинвариантное двумерное распределение Δ на группе SO(3). Распределение Δ можно задать как линейную оболочку двух левоинвариантных векторных полей RX_1, RX_2, где X_1, X_2 – пара элементов алгебры so(3) и $R \in \mathrm{SO}(3)$. В дальнейшем мы отождествляем левоинвариантные поля с соответствующими элементами алгебры Ли so(3). Если распределение является контактным, то $[X_1, X_2] \notin \Delta$. Метрику на Δ можно задать следующим образом:

$$g(X_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

Из классификации контактных левоинвариантных структур на трехмерных группах Ли [7] следует, что X_1 и X_2 могут быть выбраны следующим образом:

$$[X_2, X_1] = X_3, \qquad [X_1, X_3] = (\kappa + \chi)X_2, \qquad [X_2, X_3] = (\chi - \kappa)X_1, \tag{1.1}$$

где $\kappa \in \mathbb{R}$, $\chi \geqslant 0$ – два дифференциальных инварианта субримановых структур, которые удовлетворяют условию $\kappa - \chi \geqslant 0$ в случае SO(3). Равномерное растяжение полей $\{X_1, X_2\}$ пропорционально изменяет функцию расстояния и оба инварианта κ и χ. В статье [7] авторы использовали нормализацию $\kappa^2 + \chi^2 = 1$. Для вычислений в данной статье более удобно принять $\kappa + \chi = 1$ и использовать инвариант $a = \sqrt{2\chi} \in [0, 1)$. Все неизометричные субримановы структуры на SO(3) определяются этим инвариантом.

Следующие векторные поля удовлетворяют структурным уравнениям (1.1):

$$X_1 = A_2, \qquad X_2 = \sqrt{1 - a^2}A_1, \qquad X_3 = \sqrt{1 - a^2}A_3. \tag{1.2}$$

Липщицева кривая $R : [0, T] \to \mathrm{SO}(3)$ называется горизонтальной, если для почти всех $t \in [0, T]$ вектор скорости $\dot{R}(t)$ лежит в распределении $\Delta_{R(t)}$. Функционал длины определяется как в римановой геометрии:

$$l(R) = \int_0^T \sqrt{g(\dot{R}(t), \dot{R}(t))}dt.$$

Нашей целью является исследование кривых минимальной длины, которые соединяют две заданные точки $R_0, R_1 \in \mathrm{SO}(3)$. Поскольку задача является левоинвариантной, мы можем считать, что $R_0 = \mathrm{Id}$. Как и в римановой геометрии, минимумы функционала длины и функционала действия

$$\frac{1}{2}\int_0^T g(\dot{R}(t), \dot{R}(t))dt$$

совпадают. Следовательно, мы можем сформулировать задачу описания минимальных кривых, как следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{R} = R(u_1 X_1 + u_2 X_2), \qquad R \in \mathrm{SO}(3), \qquad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

$$R(0) = \mathrm{Id}, \qquad R(T) = R_1, \tag{1.4}$$

$$\int_0^T \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} dt \to \min, \qquad T \text{ фиксировано.} \tag{1.5}$$

Поскольку $\Delta_R + [\Delta, \Delta]_R = T_R \mathrm{SO}(3)$, согласно теореме Рашевского-Чжоу любые две точки могут быть соединены горизонтальной кривой. Более того, так как $\mathrm{SO}(3)$ является компактным многообразием, любые две точки могут быть соединены минимальной кривой [21].

Если $a = 0$, то соответствующая субриманова задача является изопериметрической задачей на сфере. Этот случай имеет дополнительную симметрию вращения, которая упрощает изучение геодезических. Минимальные траектории были полностью исследованы в [9], где было получено время разреза для каждой экстремальной траектории, и [10], где были получены явные выражения для субримановых сфер. Поэтому в дальнейшем мы полагаем $a \in (0, 1)$.

§ 2. Параметризация субримановых геодезических

Применим принцип максимума Понтрягина (ПМП), чтобы выписать явно уравнения для геодезических. Пусть $\mathfrak{g}^*$ – пространство, двойственное к алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(3)$. Рассмотрим гамильтониан принципа максимума

$$H_u(p) = \langle p, u_1 X_1 + u_2 X_2 \rangle + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2), \qquad p \in \mathfrak{g}^*,\ \nu \leqslant 0.$$

Теорема 1 Принцип максимума Понтрягина [23]. *Если пара $(u(t), R_t)$ оптимальна, $t \in [0, T]$, то существует липшицева кривая $p(t) \in \mathfrak{g}^*$ и число $\nu \leqslant 0$ такие, что для почти всех $t \in [0, T]$:*

1. $(p(t), \nu) \neq 0$,
2. $\begin{cases} \dot{R} = R\dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = \mathrm{ad}^* \dfrac{\partial H}{\partial p} p; \end{cases}$
3. $H_{u(t)}(p(t)) = \max_{v \in \mathbb{R}^2} H_v(p(t))$.

Здесь $\mathrm{ad}^*(\cdot)$, как обычно, обозначает двойственное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Поскольку в контактном случае все анормальные геодезические – это постоянные кривые [7], мы можем принять $\nu = -1$. Максимизированный гамильтониан имеет вид

$$H(p) = \max_{u \in \mathbb{R}^2} H_u(p) = \frac{\langle p, X_1 \rangle^2 + \langle p, X_2 \rangle^2}{2} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2},$$

а управление

$$u_1 = \langle p, X_1 \rangle = p_1, \qquad u_2 = \langle p, X_2 \rangle = p_2.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = p_1 X_1 + p_2 X_2.$$

Тогда

$$\operatorname{ad} \frac{\partial H}{\partial p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_2(1-a^2) \\ 0 & 0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 & \dot{p}_2 & \dot{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_2(1-a^2) \\ 0 & 0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix},$$

и мы получаем следующее выражение для гамильтоновой системы:

$$\dot{R} = R(p_1 X_1 + p_2 X_2), \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_3 p_2, \\ \dot{p}_2 &= -p_3 p_1, \\ \dot{p}_3 &= a^2 p_1 p_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Рассмотрим сперва вертикальную подсистему (2.2). Не ограничивая общности, мы можем считать, что кривые $R(t)$ параметризованы длиной дуги. В этом случае $H = \frac{1}{2}$, и мы можем представить p_1 и p_2 как

$$p_1 = \cos\psi, \qquad p_2 = -\sin\psi. \tag{2.3}$$

Вертикальная система (2.2) принимает вид уравнений маятника

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= p_3, \\ \dot{p}_3 &= -\frac{a^2}{2} \sin 2\psi, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\psi \in S = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Цилиндр $H = \frac{1}{2}$ разделен на инвариантные области, которые определяются значением полной энергии маятника $E = 2p_3^2 - a^2 \cos 2\psi$:

$$\begin{aligned} &C_1 = \{\lambda \in C : E \in (-a^2, a^2)\}, && \text{(область внутри сепаратрис)}, \\ &C_2 = \{\lambda \in C : E \in (a^2, +\infty)\}, && \text{(область вне сепаратрис)}, \\ &C_3 = \{\lambda \in C : E = a^2, p_3 \neq 0\}, && \text{(сепаратрисы)}, \\ &C_4 = \{\lambda \in C : E = -a^2\}, && \text{(устойчивое положение равновесия)}, \\ &C_5 = \{\lambda \in C : E = a^2, p_3 = 0\}, && \text{(неустойчивое положение равновесия)}. \end{aligned}$$

Решения уравнения маятника хорошо известны [24]. Если $\theta = t + \theta_0$, они имеют следующий вид:

- Координаты в C_1:

$$\begin{aligned} \sin\psi &= s_1 k \operatorname{sn}\left(a\theta, k^2\right), & s_1 &= \operatorname{sign}\left(\cos\psi\right), \\ \cos\psi &= s_1 \operatorname{dn}\left(a\theta, k^2\right), & k &\in (0,1), \\ p_3 &= ak \operatorname{cn}\left(a\theta, k^2\right), & \theta &\in [0, 4K(k^2)/a]. \end{aligned}$$

- Координаты в C_2:

$$\begin{aligned} \sin\psi &= s_2 \operatorname{sn}\left(\frac{a\theta}{k}, k^2\right), & s_2 &= \operatorname{sign}(c), \\ \cos\psi &= \operatorname{cn}\left(\frac{a\theta}{k}, k^2\right), & k &\in (0,1), \\ p_3 &= \frac{s_2 a}{k} \operatorname{dn}\left(\frac{a\theta}{k}, k^2\right), & \theta &\in [0, 4kK(k^2)/a]. \end{aligned}$$

- Координаты в C_3:

$$\begin{aligned} \sin\psi &= s_1 s_2 \operatorname{th} a\theta, \\ \cos\psi &= \frac{s_1}{\operatorname{ch} a\theta}, \\ p_3 &= \frac{s_2 a}{\operatorname{ch} a\theta}, \\ \theta &\in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

- Решение в C_4:

$$\begin{aligned} \psi &= \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ p_3 &= 0. \end{aligned}$$

- Решение в C_5:

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ p_3 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ – эллиптические функции Якоби.

Для интегрирования горизонтальной подсистемы можно использовать стандартную технику, применяемую в интегрировании уравнения свободного вращения твердого тела [25, 26]. Поскольку аналогичные формулы уже были получены в статьях [19, 20], мы не будем приводить полный вывод решения, который может быть легко восстановлен, следуя алгоритму в [27]. Запишем только конечный результат.

Матрицу $R(t) \in \mathrm{SO}(3)$ можно представить в виде

$$R_t = e^{-\phi_1(0)A_3} e^{-\phi_2(0)A_1} e^{\phi_3(t)A_3} e^{\phi_2(t)A_1} e^{\phi_1 A_3}. \tag{2.5}$$

Углы Эйлера ϕ_1, ϕ_2 связаны с вертикальными переменными соотношениями

$$\begin{aligned} \cos\phi_2 &= \frac{p_3}{\sqrt{M}}, \\ \sin\phi_2 &= \sqrt{\frac{M - p_3^2}{M}}, \\ \cos\phi_1 &= \frac{p_1\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{M - p_3^2}}, \\ \sin\phi_1 &= \frac{p_2}{\sqrt{M - p_3^2}}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $M = p_2^2 + p_1^2(1-a^2) + p_3^2$ – первый интеграл гамильтоновой системы (2.1)-(2.2).

Угол ϕ_3 удовлетворяет уравнению

$$\dot{\phi}_3 = \frac{\sqrt{M(1-a^2)}}{M - p_3^2} = \frac{\sqrt{M(1-a^2)}}{1 - a^2 p_1^2}. \tag{2.7}$$

Из данного уравнения сразу же видно, что $\phi_3(t)$ является монотонной функцией. В самом деле, мы знаем, что $p_1 = \cos\theta$, поэтому

$$0 < \sqrt{M(1-a^2)} \leqslant \dot{\phi}_3 \leqslant \sqrt{\frac{M}{1-a^2}}. \tag{2.8}$$

Его решением являются выражения вида

1. В C_1:

$$\begin{aligned} \phi_3 = \sqrt{\frac{1-a^2(1-k^2)}{a^2(1-a^2)}} &\left(\Pi\left(\frac{a^2k^2}{a^2-1}; \operatorname{am}(a\theta, k^2), k^2\right)\right. \\ &\left. - \Pi\left(\frac{a^2k^2}{a^2-1}; \operatorname{am}(a\theta_0, k^2), k^2\right)\right). \end{aligned}$$

2. В C_2:

$$\begin{aligned} \phi_3 = \sqrt{\frac{k^2 + a^2(1-k^2)}{a^2(1-a^2)}} &\left(\Pi\left(\frac{a^2}{a^2-1}; \operatorname{am}\left(\frac{a\theta}{k}, k^2\right), k^2\right)\right. \\ &\left. - \Pi\left(\frac{a^2}{a^2-1}; \operatorname{am}\left(\frac{a\theta_0}{k}, k^2\right), k^2\right)\right). \end{aligned}$$

3. В C_3:

$$\phi_3 = \sqrt{1-a^2}\,t + \left(\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{th} a\theta\right) - \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{th} a\theta_0\right)\right).$$

4. В C_4:

$$\phi_3 = t.$$

5. В C_5:

$$\phi_3 = \sqrt{1-a^2}\,t.$$

Здесь $\mathrm{am}(\varphi, k^2)$ – амплитуда Якоби, а $\Pi(n; \varphi, k^2)$ – эллиптический интеграл третьего рода. Заметим, что из последних двух выражений видно, что геодезические, которые соответствуют областям C_4 и C_5, являются вращениями вокруг горизонтальных базисных векторов e_1 и e_2.

Для исследования периодических геодезических нам понадобится параметризация субримановых геодезических на S^3, которая является двулистным накрытием SO(3). Рассмотрим семейство субримановых структур (S^3, Δ', g'), где

$$\Delta' = \mathrm{span}\{X_1', X_2'\}, \qquad X_1' = j/2, \qquad X_2' = \sqrt{1-a^2}i/2$$

и

$$g(X_l', X_m') = \delta_{lm}, \qquad l, m = 1, 2.$$

Так как X_1', X_2' удовлетворяют (1.1), субримановы многообразия (S^3, Δ', g') и $(\mathrm{SO}(3), \Delta, g)$ являются локально изометричными. Гамильтонова система принципа максимума для S^3 имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{q}{2}(p_1 j + p_2\sqrt{1-a^2}i), \\ \dot{p}_1 &= p_2 p_3, \\ \dot{p}_2 &= -p_1 p_3, \\ \dot{p}_3 &= a^2 p_1 p_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Горизонтальная система интегрируется аналогичным способом, и в результате мы получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{\phi_1(0)}{2}k\right)\exp\left(-\frac{\phi_2(0)}{2}i\right)\exp\left(\frac{\phi_3(t)}{2}k\right)\times \\ \times \exp\left(\frac{\phi_2(t)}{2}i\right)\exp\left(\frac{\phi_1(t)}{2}k\right), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\exp\left(\frac{\phi_2(t)}{2}i\right), \exp\left(\frac{\phi_1(t)}{2}k\right)$ – кватернионы, которые соответствуют вращениям $e^{\phi_2(t)A_1}, e^{\phi_1(t)A_3}$, а $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ и $\phi_3(t)$ в точности совпадают с аналогичными углами в (2.6), (2.7).

§ 3. Периодические геодезические на группе SO(3)

В этом разделе мы даем полное описание периодических геодезических на группе SO(3) и их простейшие топологические свойства.

Сперва мы докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Рассмотрим следующие функции:*

$$G_1(a,k) = \sqrt{\frac{1-a^2(1-k^2)}{a^2(1-a^2)}}\Pi\left(\frac{a^2k^2}{a^2-1}; k^2\right),$$

$$G_2(a,k) = \sqrt{\frac{k^2+a^2(1-k^2)}{a^2(1-a^2)}}\Pi\left(\frac{a^2}{a^2-1}; k^2\right).$$

где $\Pi(n; k)$ *– полный эллиптический интеграл третьего рода.*

Для любого наперед заданного $a \in (0, 1)$ *функции* $G_1(a, k)$ *и* $G_2(a, k)$ *являются положительными, гладкими и возрастающими на полуинтервале* $k \in [0, 1)$. *Их предельными значениями при* $k \to 0$ *и* $k \to 1 - 0$ *являются*

$$\lim_{k\to 0} G_1(a, k) = \frac{\pi}{2a}, \qquad \lim_{k\to 1-0} G_1(a, k) = +\infty;$$

$$\lim_{k\to 0} G_2(a, k) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{k\to 1-0} G_2(a, k) = +\infty.$$

Доказательство. Гладкость следует из того, что $G_i(a, k)$ суть произведения двух гладких функций при $k \in [0, 1)$. Продифференцируем $G_2(a, k)$ по переменной k с помощью формулы (B.10):

$$\frac{\partial}{\partial k} G_2(a, k) = \frac{kE(k^2)}{a^2(1 - k^2)\sqrt{\frac{1}{1-a^2} + \frac{k^2}{a^2}}}.$$

Это выражение неотрицательно и равно нулю только, если $k = 0$. Следовательно, $G_2(a, k)$ возрастает при $k \in [0, 1)$. При $k = 0$ имеем

$$G_2(a, 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $G_2(a, k)$ положительно.

Используя формулы (B.10) и (B.11), получим выражения для производной $G_1(a, k)$ по k:

$$\frac{\partial G_1}{\partial k} = \frac{E(k^2) - (1 - k^2)K(k^2)}{a^2k(1 - k^2)\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{1-a^2}}}. \tag{3.1}$$

Мы хотим показать, что $\partial G_1/\partial k \geqslant 0$, $k \in (0, 1)$. Сначала продифференцируем числитель этой дроби по k:

$$\frac{\partial}{\partial k}(E(k^2) - (1 - k^2)K(k^2)) = kK(k^2) > 0, \quad 0 < k < 1.$$

Поскольку знаменатель в (3.1) положителен и производная числителя положительна при любом $k \in (0, 1)$, достаточно показать, что предел $\partial G_1/\partial k$ при $k \to 0$ неотрицателен. Используя разложения в ряд (B.12) и (B.13) для $K(k^2)$ и $E(k^2)$, мы получим

$$\lim_{k\to 0} \frac{\partial G_1}{\partial k} = \lim_{k\to 0} \frac{\pi(k^2 + o(k^2))}{2a^2k(1 - k^2)\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{1-a^2}}} = 0.$$

Поэтому $G_1(a, k)$ возрастает на интервале $k \in [0, 1)$ для любого $a \in (0, 1)$.

Для $k = 0$ имеем

$$G_1(a, 0) = \frac{\pi}{2a}.$$

Следовательно, функция $G_1(a, k)$ положительна при $a \in (0, 1), k \in [0, 1)$.

Из определения эллиптического интеграла третьего рода следует, что для $a \in (0,1)$

$$G_1(a,k) \geqslant \frac{K(k^2)}{1-\frac{a^2}{a^2-1}}, \qquad G_2(a,k) \geqslant \frac{K(k^2)}{1-\frac{a^2}{a^2-1}},$$

и из (B.14) мы получаем, что $K(k^2) \to +\infty$, когда $k \to 1-0$. Следовательно, $G_1(a,k) \to +\infty$ и $G_2(a,k) \to +\infty$ при $k \to 1-0$.

Предложение 1. *Для семейства субримановых задач* (1.3)–(1.5) *для любого значения $a \in (0,1)$ существует бесконечное число периодических геодезических:*

Доказательство. Если геодезическая периодична, то ковектор p_t должен быть также периодичен с некоторым периодом T. В областях C_1 и C_2 период T равен $4K(k^2)/a$ и $4kK(k^2)/a$ соответственно. Следовательно, период замкнутой геодезической должен быть равен mT, $m \in \mathbb{N}$. Поэтому $e^{\phi_1(mT)A_3} = e^{\phi_1(0)A_3}$, $e^{\phi_2(mT)A_1} = e^{\phi_2(0)A_1}$, и из (2.5) мы получаем $e^{\phi_3(mT)A_3} = \mathrm{Id}$. Это эквивалентно равенству $\phi_3(mT) = 2\pi n$. Поскольку $\phi_3 > 0$, мы получаем $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим геодезические, для которых $p_t \in C_1$. Из формул сложения (B.6) и (B.7) следует

$$\phi_3(mT) = 2\pi n \iff \sqrt{\frac{1-a^2(1-k^2)}{a^2(1-a^2)}}\,\Pi\left(\frac{a^2k^2}{a^2-1};k^2\right) = \frac{\pi}{2}\frac{n}{m}.$$

Различным несократимым дробям $n/m \in \mathbb{Q}_+$ соответствуют различные периодические геодезические, и существование бесконечного числа замкнутых геодезических сводится к нахождению решений уравнения

$$G_1(a,k) = \frac{\pi}{2}\frac{n}{m}. \tag{3.2}$$

Согласно лемме 3.1, функция $G_1(a,k)$ непрерывна, положительна, и для любого $a \in (0,1)$ её образ является полуинтервалом $[\pi/(2a), +\infty)$. Следовательно, для любой неприводимой дроби $n/m \in \mathbb{Q}_+$, которая удовлетворяет условию

$$\frac{n}{m} > \frac{1}{a}, \tag{3.3}$$

существует единственное решение уравнения (3.2). Ясно, что количество дробей $n/m \in \mathbb{Q}_+$, удовлетворяющих этому условию, бесконечно. Следовательно, имеется бесконечное число периодических геодезических, которым соответствуют траектории из C_1.

Те же рассуждения приводят нас к тому, что существует бесконечное число периодических геодезических, которым соответствуют траектории $p_t \in C_2$. Условие (3.3) в этом случае заменяется на

$$\frac{n}{m} > 1, \tag{3.4}$$

а соответствующий начальный ковектор $p_0 \in C_2$ может быть определен из уравнения

$$G_2(a,k) = \frac{\pi}{2}\frac{n}{m}. \tag{3.5}$$

Кроме найденных периодических геодезических в C_1 и C_2, существуют периодические геодезические, которым соответствуют точки из C_4 и C_5. В этом случае траектории – это просто вращения вокруг e_1 и e_2. Это дает полное описание периодических геодезических. Действительно, для экстремальных траекторий из C_3 соответствующие траектории p_t не периодичны, а все периодические кривые из C_1 и C_2 полностью определены условиями (3.2) и (3.5).

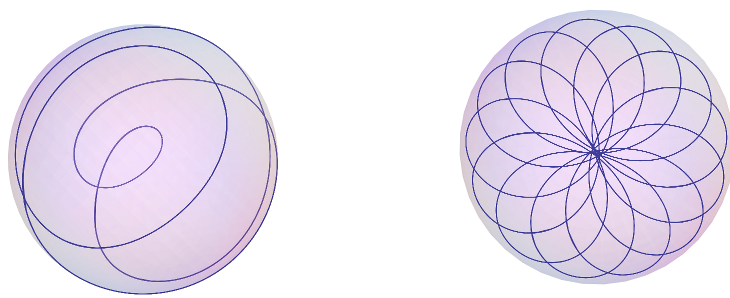

Рис. 1. Проекции периодических геодезических на S^2 с $p_t \in C_1$ и $p_t \in C_2$.

Так как $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, существуют только два гомотопических класса замкнутых путей на SO(3). Далее мы определяем, какие замкнутые геодезические являются нуль-гомотопными. Хорошо известно, что вращение на угол 2π нестягиваемо на SO(3), но вращение на 4π стягиваемо [28]. Поэтому естественно рассматривать гомотопические свойства периодических траекторий за один период.

Мы используем две классические теоремы о накрывающей гомотопии.

Теорема 2. [29] *Пусть $p : X \to B$ – накрывающее отображение и $x_0 \in X, b_0 \in B$ – такие точки, что $p(x_0) = b_0$. Для любого пути $\gamma : [0, 1] \to B$, который начинается в b_0, существует единственный накрывающий путь $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to X$, который начинается в x_0, такой, что $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$.*

Теорема 3. [29] *Пусть $p : X \to B$ – накрывающее отображение, где X – универсальная накрывающая пространства B. Замкнутый путь $\gamma : [0, 1] \to B$ гомотопен тождественному тогда и только тогда, когда соответствующий накрывающий путь в X замкнут.*

Далее мы доказываем следующее утверждение.

Предложение 2. *Рассмотрим периодическую геодезическую $R_t \in \mathrm{SO}(3)$, которая соответствует кривой в области C_1 или C_2, и которая задана своей дробью $n/m \in \mathbb{Q}_+$, удовлетворяющей (3.3) или (3.4). Тогда геодезическая R_t нуль-гомотопна тогда и только тогда, когда n четно. Все траектории из C_4 и C_5 нестягиваемы.*

Доказательство. Поднятые геодезические с $(SO(3), \Delta, g)$ являются в точности субримановыми геодезическими на (S^3, Δ', g'). Из теоремы 2 следует, что только геодезические на S^3 могут быть накрывающими путями геодезических на $\mathrm{SO}(3)$. Из теоремы 3 следует, что геодезическая на $\mathrm{SO}(3)$ стягиваема если и только если соответствующая геодезическая на S^3 замкнута.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $q(0) = 1$. Рассмотрим геодезические на $\mathrm{SO}(3)$, которым соответствуют ковекторы из C_1 и C_2. Для каждой геодезической внизу мы имеем $\phi_3(mT) = 2\pi n$. Поэтому

$$\exp\left(\frac{\phi_3(mT)}{2}k\right) = \cos\frac{\phi_3(mT)}{2} + k\sin\frac{\phi_3(mT)}{2} = \cos\pi n + k\sin\pi n = (-1)^n.$$

Поскольку $\phi_1(mT) = \phi_1(0)$ и $\phi_2(mT) = \phi_2(0)$, мы получаем из (2.10)

$$q(mT) = \exp\left(-\frac{\phi_1(0)}{2}k\right)\exp\left(-\frac{\phi_2(0)}{2}i\right)\exp\left(\frac{\phi_3(mT)}{2}k\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{\phi_2(mT)}{2}i\right)\exp\left(\frac{\phi_1(mT)}{2}k\right) = (-1)^n.$$

Следовательно, для четных n траектория наверху замкнута, а для нечетных – нет. Поэтому траектория внизу стягиваема только при четных n.

Так как траектории из C_4 и C_5 суть просто равномерные вращения вокруг векторов e_1 и e_2, то они не нуль-гомотопны.

Таким образом, мы получили описание всех периодических геодезических и их разбиение на гомотопические классы.

§ 4. Множества Максвелла и симметрии экспоненциального отображения

Точка $Q \in \mathrm{SO}(3)$ называется точкой Максвелла, если существуют две различные геодезические одинаковой длины, соединяющие Id с Q.

Хорошо известно, что в аналитических субримановых задачах после такой точки обе экстремальные траектории неоптимальны [2]. Чтобы получить описание множеств Максвелла задачи (1.3)-(1.5), мы сперва попробуем отыскать симметрии экспоненциального отображения. Естественно, что неподвижные точки этих симметрий будут точками Максвелла.

Напомним, что экспоненциальное отображение $\mathrm{Exp} : C \times \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SO}(3)$ сопоставляет ковектору $p \in C = \{p \in \mathfrak{g}^* : H(p) = 1/2\}$ и моменту времени t, точку на конце соответствующей геодезической. Пара отображений $\varepsilon : C \times \mathbb{R}_+ \to C \times \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon' : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ называется симметрией экспоненциального отображения, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
C \times \mathbb{R}_+ \arrow[r, "\mathrm{Exp}"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathrm{SO}(3) \arrow[d, "\varepsilon'"] \\
C \times \mathbb{R}_+ \arrow[r, "\mathrm{Exp}"] & \mathrm{SO}(3)
\end{tikzcd}$$

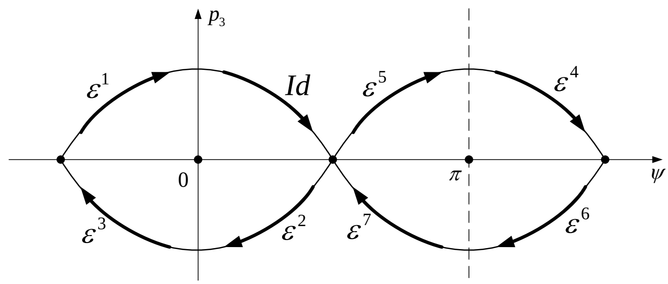

Рис. 2. Дискретные симметрии в прообразе экспоненциального отображения

Мы можем построить симметрии экспоненциального отображения с помощью симметрий гамильтоновой системы (2.1)-(2.2). Начнем с симметрий вертикальной системы (2.2):

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^1 : (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) \mapsto (p_1(t-s), -p_2(t-s), p_3(t-s)),\\
&\varepsilon^2 : (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) \mapsto (p_1(t-s), p_2(t-s), -p_3(t-s)),\\
&\varepsilon^3 : (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) \mapsto (p_1(s), -p_2(s), -p_3(s)),\\
&\varepsilon^4 : (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) \mapsto (-p_1(s), -p_2(s), p_3(s)),\\
&\varepsilon^5 : (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) \mapsto (-p_1(t-s), p_2(t-s), p_3(t-s)),\\
&\varepsilon^6 : (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) \mapsto (-p_1(t-s), -p_2(t-s), -p_3(t-s)),\\
&\varepsilon^7 : (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) \mapsto (-p_1(s), p_2(s), -p_3(s)).
\end{aligned}
$$

В фазовом пространстве маятника эти симметрии являются отражениями, как показано на рис. 2. Переменной ψ соответствует угол в плоскости (p_1, p_2) (см. (2.3)).

Матрица угловой скорости имеет вид

$$
\Omega_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1(s) \\ 0 & 0 & \sqrt{1-a^2}p_2(s) \\ -p_1(s) & -\sqrt{1-a^2}p_2(s) & 0 \end{pmatrix}.
$$

Под действием ε^i компоненты $\Omega_s = \Omega_s^1 A_1 + \Omega_s^2 A_2 + \Omega_s^3 A_3$ изменяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^1 : (\Omega_s^1, \Omega_s^2, 0) \mapsto (-\Omega_{t-s}^1, \Omega_{t-s}^2, 0),\\
&\varepsilon^2 : (\Omega_s^1, \Omega_s^2, 0) \mapsto (\Omega_{t-s}^1, \Omega_{t-s}^2, 0),\\
&\varepsilon^3 : (\Omega_s^1, \Omega_s^2, 0) \mapsto (-\Omega_s^1, \Omega_s^2, 0),\\
&\varepsilon^4 : (\Omega_s^1, \Omega_s^2, 0) \mapsto (-\Omega_s^1, -\Omega_s^2, 0),\\
&\varepsilon^5 : (\Omega_s^1, \Omega_s^2, 0) \mapsto (\Omega_{t-s}^1, -\Omega_{t-s}^2, 0),\\
&\varepsilon^6 : (\Omega_s^1, \Omega_s^2, 0) \mapsto (-\Omega_{t-s}^1, -\Omega_{t-s}^2, 0),\\
&\varepsilon^7 : (\Omega_s^1, \Omega_s^2, 0) \mapsto (\Omega_s^1, -\Omega_s^2, 0).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

С использованием матриц $I_i = e^{\pi A_i}$, действие этих симметрий может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 &: \Omega_s \mapsto -I_1 \Omega_{t-s} I_1,\\
\varepsilon^2 &: \Omega_s \mapsto -I_3 \Omega_{t-s} I_3,\\
\varepsilon^3 &: \Omega_s \mapsto I_2 \Omega_s I_2,\\
\varepsilon^4 &: \Omega_s \mapsto I_3 \Omega_s I_3,\\
\varepsilon^5 &: \Omega_s \mapsto -I_2 \Omega_{t-s} I_2,\\
\varepsilon^6 &: \Omega_s \mapsto -\Omega_{t-s},\\
\varepsilon^7 &: \Omega_s \mapsto I_1 \Omega_s I_1.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $I_i^2 = \mathrm{Id}$, легко убедиться в том, что следующие отображения являются симметриями горизонтальной подсистемы гамильтоновой системы принципа максимума:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 &: R_s \mapsto I_1 R_t^{-1} R_{t-s} I_1,\\
\varepsilon^2 &: R_s \mapsto I_3 R_t^{-1} R_{t-s} I_3,\\
\varepsilon^3 &: R_s \mapsto I_2 R_s I_2,\\
\varepsilon^4 &: R_s \mapsto I_3 R_s I_3,\\
\varepsilon^5 &: R_s \mapsto I_2 R_t^{-1} R_{t-s} I_2,\\
\varepsilon^6 &: R_s \mapsto R_t^{-1} R_{t-s},\\
\varepsilon^7 &: R_s \mapsto I_1 R_s I_1.
\end{aligned}$$

В итоге, действие ε^i в прообразе экспоненциального отображения задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 &: (t, p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \mapsto (t, p_1(t), -p_2(t), p_3(t)),\\
\varepsilon^2 &: (t, p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \mapsto (t, p_1(t), p_2(t), -p_3(t)),\\
\varepsilon^3 &: (t, p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \mapsto (t, p_1(0), -p_2(0), -p_3(0)),\\
\varepsilon^4 &: (t, p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \mapsto (t, -p_1(0), -p_2(0), p_3(0)),\\
\varepsilon^5 &: (t, p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \mapsto (t, -p_1(t), p_2(t), p_3(t)),\\
\varepsilon^6 &: (t, p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \mapsto (t, -p_1(t), -p_2(t), -p_3(t)),\\
\varepsilon^7 &: (t, p_1(0), p_2(0), p_3(0)) \mapsto (t, -p_1(0), p_2(0), -p_3(0)).
\end{aligned}$$

Действие ε^i в образе экспоненциального отображения задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 &: R \mapsto I_1 R^{-1} I_1,\\
\varepsilon^2 &: R \mapsto I_3 R^{-1} I_3,\\
\varepsilon^3 &: R \mapsto I_2 R I_2,\\
\varepsilon^4 &: R \mapsto I_3 R I_3,\\
\varepsilon^5 &: R \mapsto I_2 R^{-1} I_2,\\
\varepsilon^6 &: R \mapsto R^{-1},\\
\varepsilon^7 &: R \mapsto I_1 R I_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, ε^i задают симметрии экспоненциального отображения.

Заметим, что, если $\varepsilon^i(t,p_0)=(t,p_0)$, то соответствующая геодезическая отображается сама в себя. Следующее утверждение дает необходимые и достаточные условия, когда это происходит.

Предложение 3. *Пусть p_t – решения (2.2), θ_t – "угловой" параметр системы маятника (2.4) и пусть $a\in(0,1)$. Зададим функции $\tau(t,\theta_0)$ и $\xi(t,\theta_0)$ следующим образом:*

$$\begin{aligned}\tau+\xi&=a(t+\theta_0),\\ \tau-\xi&=a\theta_0.\end{aligned}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1.
$$\varepsilon^1(t,p_0)=(t,p_0)\iff\begin{cases}\operatorname{sn}\tau=0, & p_0\in C_1\cup C_2;\\ \tau=0, & p_0\in C_3;\end{cases}$$

2.
$$\varepsilon^2(t,p_0)=(t,p_0)\iff\begin{cases}\operatorname{cn}\tau=0, & p_0\in C_1;\\ \textit{невозможно при} & p_0\in C_2\cup C_3;\end{cases}$$

3.
$$\varepsilon^5(t,p_0)=(t,p_0)\iff\begin{cases}\operatorname{cn}\tau=0, & p_0\in C_2;\\ \textit{невозможно при} & p_0\in C_1\cup C_3;\end{cases}$$

4.
$$\varepsilon^i(t,p_0)=(t,p_0)\ \textit{невозможно при}\ i=3,4,6,7\ \textit{и}\ p_0\in C_1\cup C_2\cup C_3.$$

Доказательство. Из описания симметрий ясно, что $\varepsilon^i(t,p_0)=(t,p_0)$ не выполняется при $i=3,4,7$ для любых (t,p_0). Остальные утверждения доказываются одинаково, поэтому мы рассмотрим только второй случай. Итак,

$$\varepsilon^2(t,p_0)=(t,p_0)\iff\left\{\begin{array}{l}p_1(t)=p_1(0),\\ p_2(t)=p_2(0),\\ p_3(t)=-p_3(0).\end{array}\right.$$

Из параметризации экстремалей в C_1 мы получаем уравнения

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{dn}(\tau+\xi)=\operatorname{dn}(\tau-\xi),\\ \operatorname{sn}(\tau+\xi)=\operatorname{sn}(\tau-\xi),\\ \operatorname{cn}(\tau+\xi)=-\operatorname{cn}(\tau-\xi).\end{array}\right.$$

Используя формулы сложения для эллиптических функций Якоби легко показать, что решение этой системы удовлетворяет уравнению $\operatorname{cn}\tau=0$.

Если $p_t\in C_2$ или $p_t\in C_3$, тогда $\operatorname{sign}(p_3(t))=\operatorname{sign}(p_3(0))$ для всех $t\geqslant 0$. Поэтому ясно, что в этом случае $p_3(t)=-p_3(0)$ не имеет решений.

Далее мы докажем основной результат этого раздела.

Теорема 4. *Пусть $R_s\in\mathrm{SO}(3)$, $s\in[0,t]$ – геодезическая, а $q_s\in S^3$ – её поднятие на S^3. Тогда кривая R_s неоптимальна, если для некоторого времени $s_0\in(0,t)$ выполняется одно из следующих условий:*

1. $q^0_{s_0} = 0$;
2. $q^1_{s_0} = 0$ *и* $\operatorname{sn}\tau \neq 0$, *если* $p_0 \in C_1 \cup C_2$, *или* $\tau \neq 0$, *если* $p_0 \in C_3$;
3. $q^2_{s_0} = 0$ *и* $\operatorname{cn}\tau \neq 0$, *если* $p_0 \in C_1$;
4. $q^3_{s_0} = 0$ *и* $\operatorname{cn}\tau \neq 0$, *если* $p_0 \in C_2$.

Доказательство. В силу предложения 3 и определения точек Максвелла, мы должны показать только, что неподвижные точки симметрий ε^i в образе удовлетворяют уравнениям $q^i = 0$.

Для конечной точки геодезической R_s имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 &: R_t \mapsto I_1 R_t^{-1} I_1,\\
\varepsilon^2 &: R_t \mapsto I_3 R_t^{-1} I_3,\\
\varepsilon^3 &: R_t \mapsto I_2 R_t I_2,\\
\varepsilon^4 &: R_t \mapsto I_3 R_t I_3,\\
\varepsilon^5 &: R_t \mapsto I_2 R_t^{-1} I_2,\\
\varepsilon^6 &: R_t \mapsto R_t^{-1},\\
\varepsilon^7 &: R_t \mapsto I_1 R_t I_1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим сперва симметрии ε^i с $i = 1, 2, 5, 6$:

$$\begin{array}{l}
\varepsilon^1 : I_1 R_t^{-1} I_1 = R_t,\\
\varepsilon^2 : I_3 R_t^{-1} I_3 = R_t,\\
\varepsilon^5 : I_2 R_t^{-1} I_2 = R_t,\\
\varepsilon^6 : R_t^{-1} = R_t;
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{l}
\varepsilon^1 : (R_t I_1)^2 = \mathrm{Id},\\
\varepsilon^2 : (R_t I_3)^2 = \mathrm{Id},\\
\varepsilon^5 : (R_t I_2)^2 = \mathrm{Id},\\
\varepsilon^6 : (R_t)^2 = \mathrm{Id}\,.
\end{array}$$

Соответствующие кватернионные соотношения имеют вид

$$\begin{array}{l}
\varepsilon^1 : (q_t i)^2 = \pm 1,\\
\varepsilon^2 : (q_t k)^2 = \pm 1,\\
\varepsilon^5 : (q_t j)^2 = \pm 1,\\
\varepsilon^6 : (q_t)^2 = \pm 1,
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{l}
\varepsilon^1 : \left[\begin{array}{l} Re(q_t i) = 0,\\ q_t i = \pm 1; \end{array}\right.\\
\varepsilon^2 : \left[\begin{array}{l} Re(q_t k) = 0,\\ q_t k = \pm 1; \end{array}\right.\\
\varepsilon^5 : \left[\begin{array}{l} Re(q_t j) = 0,\\ q_t j = \pm 1; \end{array}\right.\\
\varepsilon^7 : \left[\begin{array}{l} Re(q_t) = 0,\\ q_t = \pm 1; \end{array}\right.
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{l}
\varepsilon^1 : \left[\begin{array}{l} q_t^1 = 0,\\ q_t = \pm i; \end{array}\right.\\
\varepsilon^2 : \left[\begin{array}{l} q_t^3 = 0,\\ q_t = \pm k; \end{array}\right.\\
\varepsilon^5 : \left[\begin{array}{l} q_t^2 = 0,\\ q_t = \pm j; \end{array}\right.\\
\varepsilon^7 : \left[\begin{array}{l} q_0^t = 0,\\ q_t = \pm 1. \end{array}\right.
\end{array}$$

Для остальных симметрий имеем

$$\begin{array}{l}
\varepsilon^3 : I_2 R_t I_2 = R_t,\\
\varepsilon^4 : I_3 R_t I_3 = R_t,\\
\varepsilon^7 : I_1 R_t I_1 = R_t;
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{l}
\varepsilon^3 : R_t I_2 = I_2 R_t,\\
\varepsilon^4 : R_t I_3 = I_3 R_t,\\
\varepsilon^7 : R_t I_1 = I_1 R_t.
\end{array}$$

Соответствующие кватернионные соотношения имеют вид

$$\begin{array}{lcl} \varepsilon^3 : q_t j = \pm j q_t, & & \varepsilon^3 : q_t^0 j + q_t^1 k - q_t^2 - q_t^3 i = \pm(q_t^0 j - q_t^1 k - q_t^2 + q_t^3 i), \\ \varepsilon^4 : q_t k = \pm k q_t, & \Rightarrow & \varepsilon^4 : q_t^0 k - q_t^1 j + q_t^2 i - q_t^3 = \pm(q_t^0 k + q_t^1 j - q_t^2 i - q_t^3), \quad \Rightarrow \\ \varepsilon^7 : q_t i = \pm i q_t, & & \varepsilon^7 : q_t^0 i - q_t^1 - q_t^2 k + q_t^3 j = \pm(q_t^0 i - q_t^1 + q_t^2 k - q_t^3 j); \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} \varepsilon^3 : \left[\begin{array}{l} q_t^1 k - q_t^3 i = 0, \\ q_t^0 j - q_t^2 = 0; \end{array} \right. \\ \varepsilon^4 : \left[\begin{array}{l} q_t^2 i - q_t^1 j = 0, \\ q_t^0 k - q_t^3 = 0; \end{array} \right. \\ \varepsilon^7 : \left[\begin{array}{l} q_t^3 j - q_t^2 k = 0, \\ q_t^0 i - q_t^1 = 0. \end{array} \right. \end{array}$$

Все уравнения, отличные от $q_t^i = 0$, включают их, как подсистему. Поэтому неподвижные точки симметрий ε^i удовлетворяют уравнениям $q^i = 0$.

В конце обсудим геометрический смысл действия симметрий ε^i в образе экспоненциального отображения. Заметим, что полученные симметрии образуют конечную группу $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$. Поэтому достаточно обсудить лишь геометрический смысл образующих этой группы, например, ε^3, ε^4 и ε^6.

Группа SO(3) может быть отождествлена с расслоением единичных векторов над S^2. Каждому элементу SO(3) мы можем поставить в соответствие точку на сфере и касательный вектор в этой точке. Если $R \in \mathrm{SO}(3)$, то соответствующая проекция на сферу задается как $R \mapsto Re_1$.

Пусть $Re_1 = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Из описания симметрий несложно понять, что ε^3 и ε^4 является отражениями относительно координатных плоскостей $y = 0$ и $z = 0$. Геометрический смысл симметрии ε^6 менее очевиден.

Предположим, что $R_t e_1 \neq \pm e_1$. Кривая $\varepsilon^6(R_s)e_1$ с точностью до некоторого поворота является отражением кривой $R_s e_1$ относительно центра хорды, соединяющего e_1 с $R_t e_1$. Под хордой мы понимаем короткую дугу большой окружности, которая проходит через эти две точки.

Выпишем явно выражение для отражения кривой $R_s e_1$. Центральная точка хорды задается уравнением

$$\vec{c} = \frac{e_1 + R_t e_1}{\|e_1 + R_t e_1\|}.$$

Или в терминах кватернионов:

$$c = \frac{i + q_t i q_t^{-1}}{\|i + q_t i q_t^{-1}\|}.$$

Далее мы обращаем параметр времени на геодезической $q_s \mapsto q_{t-s}$ и поворачиваем $q_{t-s} i q_{t-s}^{-1}$ вокруг $\vec{c}$ на угол π. Это даст нам выражения для отражения вокруг центра хорды:

$$a_s = -\frac{(i + q_t i q_t^{-1}) q_{t-s} i q_{t-s}^{-1} (i + q_t i q_t^{-1})}{\|e_1 + q_t e_1 q_t^{-1}\|^2}.$$

Рассмотрим теперь параметризацию R_s с помощью углов Эйлера:

$$R_s = e^{\alpha_3(s) A_1} e^{\alpha_2(s) A_3} e^{\alpha_1(s) A_1}.$$

Заметим, что $\alpha_i(s)$ отличны от $\phi_i(s)$ введенных ранее. Мы утверждаем, что

$$a_s = e^{(\alpha_3(t)+\alpha_1(t)-\pi)i/2} q_t^{-1} q_{t-s} i q_{t-s}^{-1} q_t e^{-(\alpha_3(t)+\alpha_1(t)-\pi)i/2}. \tag{4.2}$$

Здесь $e^{(\alpha_3(t)+\alpha_1(t)-\pi)i/2}$ – кватернион, которому соответствует вращение вокруг e_1 на угол $\alpha_3(t)+\alpha_1(t)-\pi$. Тождество (4.2) может быть доказано с помощью длинных вычислений, используя стандартные тригонометрические тождества.

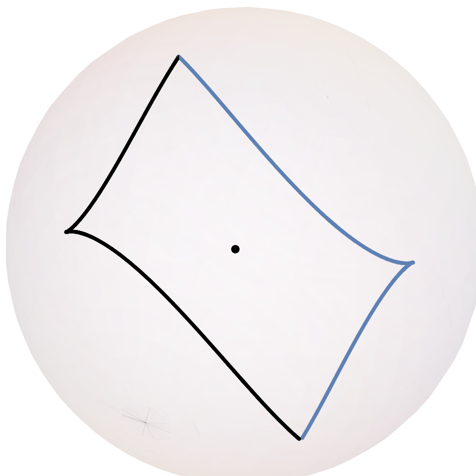

Рис. 3. Действие ε^6 в образе экспоненциального отображения

§ 5. Почти риманова геометрия на S^2

В предыдущем разделе мы получили некоторые необходимые условия оптимальности для экстремальных траекторий. К сожалению, параметризация геодезических слишком сложна, чтобы можно было непосредственно разрешить уравнения $q^i(t)=0$ или хотя бы получить некоторые конструктивные оценки на их корни. Вместо этого мы немного ослабим задачу и будем искать минимальные кривые, которые соединяют две подгруппы $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SO}(3)$. Оказывается, что эта задача равносильна отысканию минимальных кривых на почти римановой сфере $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$, которая изучалась ранее в статьях [19, 20]. Мы используем известные факты об этой задаче, чтобы получить оценки на время разреза и на диаметр субримановых метрик на $\mathrm{SO}(3)$.

Рассмотрим два векторных поля на S^2:

$$X_1(\vec{\gamma}) = \vec{\gamma} \times e_2, \qquad X_2(\vec{\gamma}) = \sqrt{1-a^2}\,\vec{\gamma} \times e_1, \qquad \vec{\gamma} \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| = 1\},$$

где $\vec{a} \times \vec{b}$ обозначает стандартное векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Эти поля порождают распределение переменного ранга $\vec{\Delta}$ на S^2. Предположим также, что $X_1(\vec{\gamma})$ и $X_2(\vec{\gamma})$ ортонормированы. В этом случае S^2 имеет структуру почти риманова многообразия. Пусть $\vec{\gamma} = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Множество точек, где $\operatorname{rank} \vec{\Delta}_{\vec{\gamma}} = 1$, называется сингулярным множеством $\mathcal{S}$, и в координатах $\mathcal{S} = \{\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{\gamma}| = 1, z = 0\}$.

Задача нахождения почти римановых геодезических на S^2 может быть сформулирована, как задача оптимального управления

$$\dot{\vec{\gamma}} = \vec{\gamma} \times \vec{\omega}, \tag{5.1}$$

$$\vec{\gamma}, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3, \qquad |\vec{\gamma}| = 1, \qquad \vec{\omega} = u_2\sqrt{1-a^2}e_1 + u_1 e_2, \tag{5.2}$$

$$\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}_0, \qquad \vec{\gamma}(T) = \vec{\gamma}_T, \tag{5.3}$$

$$\int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \to \min . \tag{5.4}$$

Решение уравнения (5.1) имеет вид

$$\vec{\gamma}_t = R_t^{-1}\vec{\gamma}_0, \tag{5.5}$$

где $R_t \in \mathrm{SO}(3)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\dot{R} = R\Omega, \qquad R(0) = \mathrm{Id},$$

а матрица $\Omega \in \mathrm{so}(3)$ изоморфна вектору $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Матрица R_t – оператор, который переводит координаты вектора в подвижном репере в координаты в фиксированном репере.

Задача оптимального управления (5.1) поднимается на SO(3) следующим образом:

$$\dot{R} = R\Omega = R(u_2\sqrt{1-a^2}A_1 + u_1 A_2), \tag{5.6}$$

$$R \in \mathrm{SO}(3), \qquad \Omega \in \mathrm{so}(3), \tag{5.7}$$

$$R(0) = e^{\beta X_0}, \qquad R(T) = e^{\beta X_0} R_T, \tag{5.8}$$

$$\int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \to \min, \tag{5.9}$$

где $\beta \in [0, 2\pi)$, матрица $X_0 \in \mathrm{so}(3)$ изоморфна вектору $\vec{\gamma}_0 \in \mathbb{R}^3$, $R_T \in \mathrm{SO}(3)$ – специальная ортогональная матрица такая, что $\vec{\gamma}_T = R_T^{-1}\vec{\gamma}_0$, $e^{\beta X_0}$ – матрица, которой соответствует вращение на угол β вокруг начального вектора $\vec{\gamma}_0$. В результате мы получаем задачу оптимального перехода между подмногообразиями $e^{\beta X_0}$ и $e^{\beta X_0}R_T$ в SO(3).

Пусть $L_R : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ левый сдвиг на группе

$$L_R : g \mapsto Rg, \qquad g \in \mathrm{SO}(3).$$

Пусть также $p_t \in \mathfrak{g}^*$ есть решение уравнений (2.2) и $\lambda_t \in T^*_{R(t)}\mathrm{SO}(3)$ задано соотношением

$$\lambda_t = (dL^*_{R(t)})^{-1} p_t.$$

Здесь $dL_R : \mathrm{so}(3) \mapsto T_R \,\mathrm{SO}(3)$, как обычно, дифференциал левого сдвига L_R. Экстремальные траектории задачи (5.6)-(5.9) являются субримановыми геодезическими $(\mathrm{SO}(3), \Delta, g)$, которые удовлетворяют условиям трансверсальности

$$\langle \lambda_0, T\left(e^{\beta X_0}\right)\rangle = 0, \qquad \langle \lambda_T, T\left(e^{\beta X_0} R_T\right)\rangle = 0.$$

Из левоинвариантности задачи следует, что достаточно задать условия трансверсальности только в единице (см. [18] или [23]):

$$\langle p_0, X_0\rangle = 0. \tag{5.10}$$

Используя изоморфизм между $\mathrm{SO}(3)$ и $\mathbb{R}^3$, мы можем записать это в виде

$$\langle \vec{p}_0, \vec{\gamma}_0\rangle = -\sin\psi_0 x_0 + \cos\psi_0 y_0\sqrt{1-a^2} + p_3(0) z_0 = 0.$$

Таким образом, мы можем использовать параметризацию геодезических из раздела 2, чтобы получить полную параметризацию почти римановых геодезических на S^2. Для заданной точки $\vec{\gamma}_0$ любая геодезическая, которая начинается в $\vec{\gamma}_0$, параметризуется как $\vec{\gamma}_t = R_t^{-1}\vec{\gamma}_0$, где R_t есть субриманова геодезическая, удовлетворяющая условиям (5.10).

Перейдем теперь к оценкам на время разреза. В статьях [19, 20] был получен следующий результат.

Теорема 5 [20].

1. *Гауссова кривизна почти римановой структуры на S^2 отрицательна на $S^2/\mathcal{S}$ для всех $a \in [0, 1)$.*
2. *Геодезический поток на почти римановой сфере обладает двумя симметриями отражения: относительно $\mathcal{S}$ и относительно плоскости $x = 0$.*
3. *Если $\vec{\gamma}_0 \in \mathcal{S}$, то $\mathcal{S} \setminus \{\vec{\gamma}_0\}$ является множеством разреза.*

Возьмем начальную точку $\vec{\gamma}_0$ на сингулярном множестве, т.е. примем $z_0 = 0$. Нас интересует момент времени, когда $z_t = 0$. Поскольку мы знаем, что $\vec{\gamma}_t = R_t^{-1}\vec{\gamma}_0$, то с учетом условий трансверсальности мы приходим к простому уравнению

$$z_t = 0 \iff \sin\phi_3(t) = 0.$$

Более того, нам известно, что функция $\phi_3(t)$ монотонна. Следовательно,

$$z_t = 0 \iff \phi_3(t) = \pi.$$

Из неравенств (2.8) следует, что время разреза для траекторий, которые начинаются на сингулярном множестве, удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\pi\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{M}} \leqslant t_{cut} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{M(1-a^2)}}.$$

Отсюда можно сделать простой вывод для субримановой задачи на $\mathrm{SO}(3)$.

Предложение 4. *В семействе* (1.3)-(1.5) *субримановых задач на группе* SO(3) *верна следующая оценка на время разреза:*

$$t_{cut} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{M(1-a^2)}} + \pi.$$

В частности, для диаметра $\mathrm{diam}_{\mathrm{SO}(3)}(a)$ *субримановой метрики справедлива оценка*

$$\mathrm{diam}_{\mathrm{SO}(3)}(a) \leqslant \pi + \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Доказательство. Мы построим траекторию, которая соединяет Id с $R_T \in \mathrm{SO}(3)$, с помощью двух геодезических дуг. Поскольку субриманова структура является левоинвариантной, достаточно построить кривую, которая соединяет R_T^{-1} с Id.

Сперва мы найдем минимальную почти риманову геодезическую $\gamma_s : [0,\tau] \to S^2$, которая соединяет $R_T e_2$ с e_2. Рассмотрим соответствующую субриманову геодезическую $R_s : [0,\tau] \to \mathrm{SO}(3)$, которая, очевидно, имеет ту же длину. Конечное положение R_τ с точностью до вращения вокруг вектора e_2 является тождественным элементом. Но мы знаем, что вращение вокруг e_2 также является геодезической длины не более π. Отсюда мы получаем оценки на время разреза. Оценка на диаметр получается элементарным сравнением величин M для различных областей C_i фазового портрета маятника.

§ 6. Численные эксперименты

В этом параграфе мы формулируем некоторые гипотезы, которые согласуются с численными экспериментами.

Рассмотрим сперва известный случай $a = 0$. Известно, что множество разреза на SO(3) в этом случае состоит из двумерной сферы $Cut_{glob} = \{(q_0, q_1, q_2, q_3) : q_0 = 0, |q| = 1\}$ и окружности $Cut_{loc} = \{(q_0, q_1, q_2, q_3) : q_1 = q_2 = 0, |q| = 1\}$ [9]. При проекции на подпространство q_1, q_2, q_3 малые субримановы сферы выглядят так же, как и сферы в группе Гейзенберга. В том числе они имеют пару конических особенностей при пересечении с осью q_3 (см. рис. 4). Эти конические точки являются одновременно сопряженными точками и точками Максвелла, так как, благодаря симметрии вращения, в них приходит однопараметрическое семейство геодезических.

При $a \neq 0$ симметрия вращения распадается на симметрии отражения относительно плоскостей $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$. В результате геодезические начинают пересекаться попарно в каждой из указанных плоскостей. Численные эксперименты показывают, что экстремальные траектории имеют сначала точку Максвелла в плоскости $q_1 = 0$, а уже потом в $q_2 = 0$. При этом, если при $a = 0$ сфера имеет всего одну особенность, то при $a \neq 0$ имеется одномерное подмножество, где сфера не C^1-гладка, причем это подмножество лежит в плоскости $q_1 = 0$.

Ситуация здесь похожа на пересечение сферы со множеством разреза римановой задачи на эллипсоиде вращения. Для вершины на оси вращения множеством разреза является противоположная вершина, которая есть точка Максвелла. Если такой эллипсоид продеформировать в эллипсоид общего положения, то эта точка Максвелла распадается на две кривые, которые состоят из

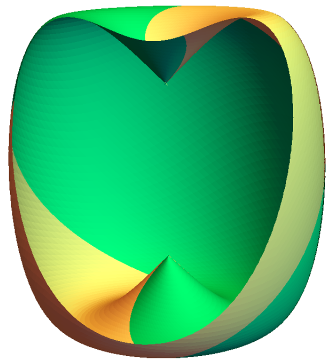

Рис. 4. Субриманова сфера при $a = 0$

точек Максвелла и пересекаются трансверсально в исходной точке. На рис. 6 изображена каустика и множества Максвелла в вершине на эллипсоиде общего положения.

Таким образом, мы можем предположить, что множество разреза состоит из внешней сферы Cut_{glob} и некоторого подмножества Cut'_{loc} плоскости $q_1 = 0$, которое содержит окружность Cut_{loc} (см. рис. 7). Граница множества Cut'_{loc} должна состоять из сопряженных точек, куда приходит единственная экстремальная кривая. Все остальные точки (заштрихованный участок) должны являться точками Максвелла. Эти рассуждения хорошо согласуются и с численными экспериментами, и с общими локальными результатами из [30].

Численные эксперименты также показывают, что время разреза не зависит от угловой переменной θ_0 математического маятника (2.4). На рис. 8 видно, что при одном и том же значении параметра действия k, функция $q_0(t)$ имеет один и тот же нуль для всех θ_0.

Графики функций $q_1(t)$ показаны на рис. 9. Первые нули не являются временами Максвелла, потому что это как раз моменты времени из теоремы 4, при которых траектория является неподвижной точкой симметрии. Это видно непосредственно при численном построении геодезических. Однако второй нуль, судя по численным экспериментам, уже является временем Максвелла и, как видно из рис. 9, не зависит от траектории из семейства.

Заключение

В этой статье мы изучили некоторые свойства геодезического потока в субримановых задачах на группе SO(3). Нами были описаны периодические геодезические и их простейшие свойства, симметрии экспоненциального отображения, получены некоторые необходимые условия оптимальности и приведены конкретные оценки на времена разреза и диаметр метрик.

В дальнейшем было бы интересно получить полный оптимальный синтез в задачах SO(3), как это было сделано для группы SE(2) в статьях [2, 3, 4].

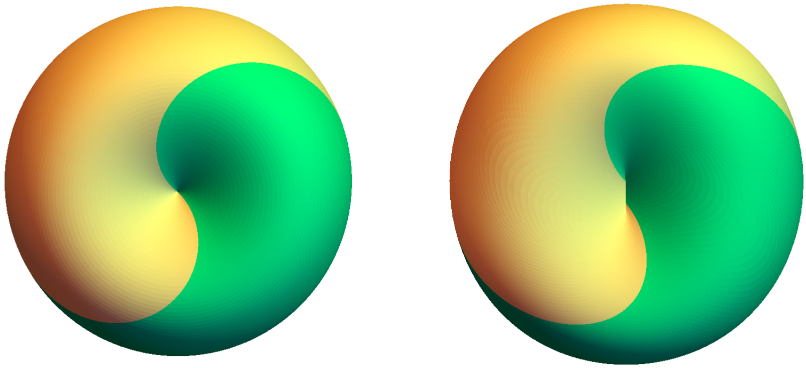

Рис. 5. Особенности субримановых сфер на группе SO(3). Слева изображена коническая особенность при $a = 0$, справа изображена особенность при $a = 1/2$

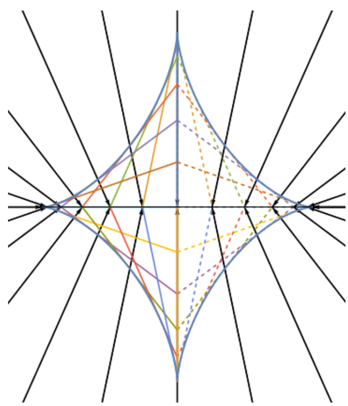

Рис. 6. Каустика в вершине на эллипсоиде общего положения

Тем не менее, параметризация геодезических на SO(3) намного сложнее, чем в случае группы SE(2), что затрудняет получение оценок на времена Максвелла и сопряженное время.

Благодарности. Авторы благодарны А. А. Аграчеву за полезные замечания во время работы над материалом статьи и А. П. Маштакову за предоставленный исходный код программы для численного построения волновых фронтов.

§ A. Кватернионы, SO(3) и $\mathbb{R}^3$

Пусть $\mathbb{H} = \{q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 : q_0, ..., q_3 \in \mathbb{R}\}$ – алгебра кватернионов. Длина кватерниона $q \in \mathbb{H}$ задается как $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. Кватернион

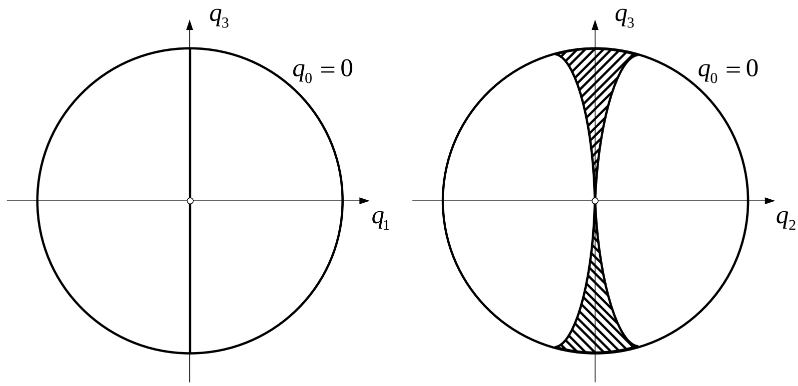

Рис. 7. Предполагаемое устройство множества разреза при $a \neq 0$ в проекции на различные координатные подпространства.

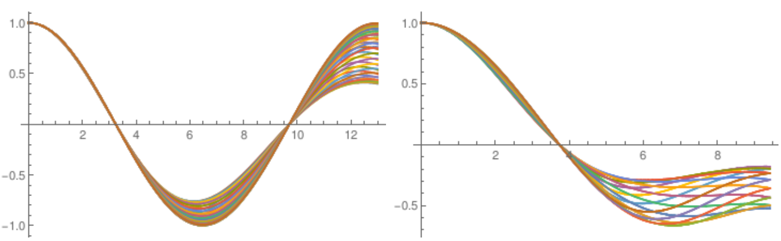

Рис. 8. График семейства функций $q_0(t)$ для различных θ_0 при $a = 1/4$, $k = 0.985$ из области C_1 (слева) и $a = 1/2$, $k = 0.945$ из области C_2 (справа).

$\overline{q} = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ называется сопряженным к q. Обратный кватернион к $q \neq 0$ имеет вид

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}.$$

Пусть $S^3 = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ – трехмерная сфера, а $I = \{q \in \mathbb{H} : q_0 = 0\}$ – пространство мнимых кватернионов, которое естественно отождествляется с $\mathbb{R}^3$. Каждый кватернион $q \in S^3$ задает оператор вращения R_q, который действует на векторах $a \in I$ по следующему правилу:

$$R_q : a \mapsto qaq^{-1} \in I.$$

Для любого R_q существуют два различных кватерниона q и $-q$ на S^3, которые задают одно и тоже вращение и, следовательно, $p : q \mapsto R_q$ задает двулистное накрытие S^3 над $\mathrm{SO}(3)$. Это накрытие есть локальный дифеоморфизм [31] и в координатах задается следующим образом:

$$p : q \mapsto \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \qquad (A.1)$$

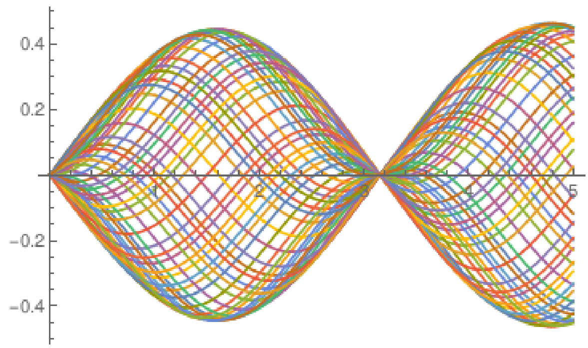

Рис. 9. График семейства функций $q_1(t)$ для различных θ_0 из области C_2 при $a = 1/2$, $k = 0.285$.

Если $R \in \mathrm{SO}(3)$ — вращение вокруг вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ на угол β, то соответствующий кватернион $q \in S^3$ имеет вид:

$$q = \cos\frac{\beta}{2} + \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{|\vec{a}|} \sin\frac{\beta}{2}. \tag{A.2}$$

Пространство I имеет структуру алгебры Ли со скобкой

$$[a, b] = ab - ba.$$

Все три пространства: I, $\mathrm{so}(3)$ и $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением – изоморфны, как алгебры Ли. Этот изоморфизм задается как:

$$A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \simeq a = \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 j}{2} \simeq \vec{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3. \tag{A.3}$$

Более детальное описание кватернионов имеется в [31].

§ B. Эллиптические интегралы и эллиптические функции

В этой статье мы используем следующие определения:

1. Эллиптический интеграл первого рода:

$$F(\phi, k^2) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}; \tag{B.1}$$

2. Эллиптический интеграл второго рода:

$$E(\phi, k^2) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta, \tag{B.2}$$

где $0 \leqslant k < 1$. Полные эллиптические интегралы задаются, как $K(k^2) = F(\pi/2, k^2)$ и $E(k^2) = E(\pi/2, k^2)$.

Амплитуда Якоби $\operatorname{am}(\theta, k^2)$ является обратной функцией к эллиптическому интегралу первого рода по отношению к θ. Эллиптические функции Якоби задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(\theta, k^2) &= \sin\left(\operatorname{am}(\theta, k^2)\right); \\
\operatorname{cn}(\theta, k^2) &= \cos\left(\operatorname{am}(\theta, k^2)\right); \\
\operatorname{dn}(\theta, k^2) &= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\theta, k^2)}.
\end{aligned}$$

Функции $\operatorname{sn}(\theta, k^2)$ и $\operatorname{cn}(\theta, k^2)$ имеют период $4K(k^2)$, а $\operatorname{dn}(\theta, k^2)$ имеет период $2K(k^2)$. Мы опускаем k^2, когда это не вызывает путаницы.

Эллиптический интеграл третьего рода задается следующим образом:

$$\Pi(n; \phi, k^2) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 - n\sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}.$$

С помощью замены переменных $\sin\theta = \operatorname{sn}(\alpha, k^2)$ он принимает вид

$$\Pi(n; \phi, k^2) = \int_0^{F(\phi; k^2)} \frac{d\alpha}{1 - n\operatorname{sn}^2(\alpha, k^2)}. \tag{B.3}$$

Полный эллиптический интеграл обозначается как $\Pi(n; k^2) = \Pi(n; \pi/2, k^2)$.

Все три эллиптических интеграла обладают следующим свойством [24]:

$$F(\phi + m\pi, k^2) = F(\phi, k^2) + 2mK(k^2), \tag{B.4}$$

$$E(\phi + m\pi, k^2) = E(\phi, k^2) + 2mE(k^2), \tag{B.5}$$

$$\Pi(n; \phi + m\pi, k^2) = \Pi(n; \phi, k^2) + 2m\Pi(n, k^2). \tag{B.6}$$

Из (B.4) можно получить аналогичную формулу для $\operatorname{am}(\theta, k^2)$:

$$\operatorname{am}(\theta + 2mK(k^2), k^2) = \operatorname{am}(\theta, k^2) + m\pi. \tag{B.7}$$

Справедливы следующие формулы для производных полных эллиптических интегралов [32]:

$$\frac{dK(k^2)}{dk} = \frac{E(k^2) - (1 - k^2)K(k^2)}{k(1 - k^2)}, \tag{B.8}$$

$$\frac{dE(k^2)}{dk} = \frac{E(k^2) - K(k^2)}{k}, \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial\Pi(n, k^2)}{\partial k} = \frac{kE(k^2) - k(1 - k^2)\Pi(n, k^2)}{(1 - k^2)(k^2 - n)}, \tag{B.10}$$

$$\frac{\partial\Pi(n, k^2)}{\partial n} = \frac{nE(k^2) + (k^2 - n)K(k^2) + (n^2 - k^2)\Pi(n, k^2)}{2(1 - k^2)(n - 1)n}. \tag{B.11}$$

Справедливы следующие асимптотические разложения при $k \to 0$ [32]:

$$K(k^2) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right) + O(k^4), \tag{B.12}$$

$$E(k^2) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + O(k^4). \tag{B.13}$$

Когда $k \to 1 - 0$, мы имеем [32]:

$$\lim_{k \to 1-0}\left(K(k^2) - \ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\right) = 0. \tag{B.14}$$

Список литературы

[1] U. Boscain, T. Chambrion, G. Charlot, “Nonisotropic 3-level Quantum Systems: Complete Solutions for Minimum Time and Minimal Energy”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **5**:4 (2005), 957-990.

[2] Yu. Sachkov, I. Moiseev, “Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **16**:2 (2010), 380-399.

[3] Yu. Sachkov, “Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **16**:4 (2010), 1018-1039.

[4] Yu. Sachkov, “Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **17**:2 (2011), 293–321.

[5] U. Boscain, R. Duits, F. Rossi, Y. Sachkov, “Curve cuspless reconstruction via sub-Riemannian geometry”, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, **20**:3 (2014), 748-770.

[6] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, American Mathematical Society, 2006.

[7] A. Agrachev, D. Barilari, “Sub-Riemanian structures on 3D Lie groups”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **18**:1 (2012), 21-44.

[8] А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, “Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи”, *Динамические системы – 7*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **16**, ВИНИТИ, М., 1987, 5–85.

[9] U. Boscain, F. Rossi, “Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and Lens Spaces”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **47** (2008), 1851-1878.

[10] В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли”, *Сибирский математический журнал*, **42**:4 (2001), 731–748.

[11] O. Calin, D.-C. Chang, I. Markina, “Sub-Riemannian geometry on the sphere S^3”, *Canad. J. Math.*, **61**:4 (2009), 721-739.

[12] D.-C. Chang, I. Markina, A. Vasil’ev, “Sub-Riemannian geometry on the 3-D sphere”, *Complex analysis and operator theory*, **3**:2 (2009), 361-377.

[13] В. Н. Берестовский, “Геодезические левоинвариантной неголономной римановой метрики на группе движений евклидовой плоскости”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:6 (1994), 1223–1229.

[14] Y. Butt, Yu. Sachkov, A. Bhatti, “Extremal Trajectories and Maxwell Strata in Sub-Riemannian Problem on Group of Motions of Pseudo-Euclidean Plane”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **20**:3 (2014), 341–364.

[15] Yu. Sachkov, A. Mashtakov, “Superintegrability of Sub-Riemannian Problems on Unimodular 3D Lie Groups”, *Preprint*, **arXiv:1405.1716**.

[16] B. Kruglikov, "Examples of Integrable Sub-Riemannian Geodesic Flows", *Journal of Dynamical and Control Systems*, **8**:3 (2002), 323-340.

[17] D. Barilari, L. Rizzi., "Comparison theorems for conjugate points in sub-Riemannian geometry", *Preprint*, **arXiv:1401.3193v2**.

[18] U. Boscain, T. Chambrion, J.-P. Gauthier, "On the K+P problem for a three-level quantum system: optimality implies resonance", *Journal of Dynamical and Control Systems*, **8** (2002), 547-572.

[19] B. Bonnard, O. Cots, J.-B. Pomet, N. Shcherbakova, "Riemannian metrics on 2D-manifolds related to the Euler-Poinsot rigid body motion", *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **20**:3 (2014), 864-893.

[20] B. Bonnard, M. Chyba, "Two applications of geometric optimal control to the dynamics of spin particle", *Preprint*, **URL: http://hal.inria.fr/hal-00956828**.

[21] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry*, URL: http://webusers.imj-prg.fr/ davide.barilari/Notes.php, 2015.

[22] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1983.

[23] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005.

[24] D. Lawden, *Elliptic functions and applications*, Springer-Verlag, 1989.

[25] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики, том 1: Механика*, Физматлит, М., 2004.

[26] E. T. Whittaker, *A treatise on the analytic dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge university press, 1989.

[27] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge University Press, 1996.

[28] C. Schiller, *Motion mountain. The adventure of physics, volume 5: Motion inside matter – pleasure, technology and stars*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2013.

[29] A. Hatcher, *Algebraic topology*, 2001.

[30] A. A. Agrachev, G. Charlot, J. P. Gauthier, V. M. Zakalyukin, "On sub-Riemannian caustics and wave fronts for contact distributions in the three-space", *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6**:3 (2000), 365-395.

[31] J. Conway, D. Smith, *On quaternions and octonions. Their geometry, arithmetic and symmetry*, A. K. Peters/CRC Press, 2003.

[32] P. Byrd, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Springer-Verlag, 1970.

И.Ю. Бесчастный (I. Yu. Beschastnyi)
Институт Программных Систем им. А. К. Айламазяна РАН
E-mail: i.beschastnyi@gmail.com

Поступила в редакцию 02.06.2015

Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)
Институт Программных Систем им. А. К. Айламазяна РАН
E-mail: yusachkov@gmail.com