

Общероссийский математический портал

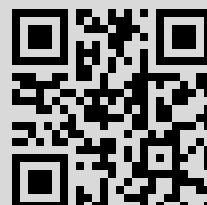
А. О. Блинов, В. П. Фраленко, Многомерная аппроксимация в задачах моделирования и оптимизации, *Автомат. и телемех.*, 2009, выпуск 4, 98–109

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 213.24.135.225

24 ноября 2015 г., 17:54:13



Приближенные и численные методы

PACS 02.30.Yy

© 2009 г. А.О. БЛИНОВ,
В.П. ФРАЛЕНКО
(Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский)

МНОГОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ¹

Рассматривается аналитическая аппроксимация по методу наименьших квадратов функций многих переменных, участвующих в описании моделей объектов управления и алгоритмах оптимизации. В качестве содержательных примеров рассматривается исследование маневров нештатной посадки и пространственных маневров вертолета. Кратко описана программная реализация указанных алгоритмов.

1. Введение

При исследовании и решении оптимизационных задач и задач управления встречаются ситуации, когда модель объекта имеет сложное аналитическое описание или не имеет его вовсе. Особенно часто это бывает в случае сложных динамических систем, например, таких как летательные аппараты. Отдельные характеристики и зависимости в таких системах могут быть заданы с помощью массивов данных или компьютерных программ. Для применения известных эффективных методов исследования, оптимизации и синтеза оптимального управления необходимо иметь полное аналитическое описание исследуемой модели.

Кроме того, на вычислительном этапе построения оптимальных законов управления возникает задача аппроксимации таблиц функций, генерирующих эти законы (Беллмана, Кротова и др.)

Данная работа имеет целью рассмотреть метод наименьших квадратов (МНК) как один из возможных вариантов аналитической аппроксимации функций многих переменных и применить его к задаче восполнения аналитического описания моделей сложных динамических систем и алгоритму синтеза оптимального управления для построения разрешающей функции Кротова. В качестве содержательных примеров рассмотрены задачи аппроксимации имитационной модели вертолета и оптимизации пространственных маневров вертолета.

О перспективах применения МНК к полиномиальной аппроксимации (в частности, интерполяции) функций многих переменных А.А. Красовский писал еще в 1989 г. [1] с учетом возможности воспроизведения производных в непрерывном виде

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00274).

и сокращения вычислительных затрат за счет перехода к кусочно-полиномиальной аппроксимации. Многомерная интерполяция сложнее, чем аппроксимация, в том отношении, что требуется согласование конструкции интерполирующего полинома и конфигурации узлов интерполяции. МНК позволяет использовать аппроксимирующие функции произвольного вида, который может определяться особенностями решаемой задачи.

2. Метод наименьших квадратов и его применение

Схема аппроксимации таблично заданных функций по МНК состоит в следующем. Рассматриваются полиномы вида

$$(1) \quad \varphi(z) = \sum_{j=1}^{\alpha} \psi_j g_j(z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

где $\{g_j(z)\}$ – некоторый набор заданных базисных функций (многочленов), ψ_j – соответствующий набор коэффициентов, подлежащих определению. Решается задача минимизации невязки:

$$S(\psi_j) = \sum_{i=1}^{\beta} (\varphi(z_i) - y(z_i))^2 \rightarrow \min_{\psi_j},$$

где β – количество узлов аппроксимации, $y(z_i)$ – значение приближаемой функции в узле аппроксимации.

Эта задача сводится к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{\beta} ([g_j(z_i)] [\psi_j] - y(z_i)) g_j(z_i) = 0$$

(относительно набора коэффициентов $[\psi_j]$), представляющей условия стационарности.

В общем случае эта система разрешима, а если число узлов аппроксимации больше либо равно количеству коэффициентов аппроксимирующего полинома и сетка узлов не вырождена, то имеет единственное решение. В случае равенства можно говорить об интерполяции (если выполнены условия согласования).

МНК может быть применен для аппроксимации моделей динамических систем в случаях, когда они не имеют полного аналитического описания. Рассмотрим модель движения, представляющую собой управляемую систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$(2) \quad \dot{x} = f(t, x, u) \quad (\dot{x}^i = f^i(t, x, u))$$

или в дискретном виде

$$x(t+1) = x(t) + f(t, x, u) \quad (x^i(t+1) = x^i(t) + f^i(t, x, u)),$$

и дополнительные ограничения

$$x \in \mathbf{X}(t) = \{x: \xi^j(t, x) \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbf{U}(t, x) = \{u: \nu^k(t, x) \leq 0\} \subset \mathbb{R}^p,$$

и пусть имеется, по крайней мере, программно-алгоритмическое представление (компьютерные программы для расчета) правых частей уравнений (2) и левых частей неравенств как функций многих переменных $f^i(t, x, u)$, $\xi^j(t, x)$, $\nu^k(t, x)$. По имеющимся программам подсчитываются таблицы их значений на сетке узлов, генерированной комбинациями значений каждого аргумента, распределенных равномерно в его рабочем диапазоне. Затем правые части динамической системы по МНК

могут быть зааппроксимированы в произвольной форме. Тем самым таблично заданные или не имеющие полного аналитического описания зависимости $f^i(t, x, u)$ представляются в виде аналитических функций заданного вида.

Другое применение МНК – аппроксимация соотношений Кротова – Беллмана в составе алгоритмов поиска оптимального управления [2]:

$$\begin{aligned} P(t, x(t)) &= \varphi(t, x) - H(\{\varphi(t+1, x)\}, x) = 0, \\ G(x) &= \varphi(t_F, x) + F(x) = 0, \\ H(\{\varphi(t+1, x)\}, x) &= \sup_{u \in \mathbf{U}(t, x)} \varphi(t+1, f(t, x, u)). \end{aligned}$$

Функция Кротова $\varphi(t, x)$ аппроксимируется многомерным полиномом (1):

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(t) g_{\alpha}(x), \\ \min_{[\psi_{\alpha}(t)]} \sum_{\beta} &\left([g_{\alpha}(x_{\beta}(t))] [\psi_{\alpha}(t)] - H(t, x_{\beta}(t), \{\psi_{\alpha}(t+1)\}) \right)^2, \\ \min_{[\psi_{\alpha}(t_F)]} \sum_{\beta} &\left([g_{\alpha}(x_{\beta}(t_F))] [\psi_{\alpha}(t_F)] + F(x_{\beta}(t_F)) \right)^2. \end{aligned}$$

В качестве аппроксимирующих реализованы два типа конструкций. Первый тип – композиция одномерных полиномов

$$\varphi(t, x) = \sum_{j_1=0}^{m_1} (x^1)^{j_1} \times \left(\sum_{j_2=0}^{m_2} (x^2)^{j_2} \left(\dots \sum_{j_n=0}^{m_n} \Psi_{j_1, j_2, \dots, j_n}(t) (x^n)^{j_n} \right) \right),$$

Второй тип – регулярный полином порядка n

$$\varphi(t, x) = \nu(t) + \psi^T(t)x + \frac{1}{2}x^T \sigma(t)x + \dots,$$

где $\psi(t)$ – n -мерный вектор, $\sigma(t)$ – матрица $n \times n$.

В вычислительном плане наиболее удобно строить постоянную во времени прямоугольную сетку $x_{\beta}(t) = \text{const}$, в особенности когда синтезируется управление в окрестности некоторой траектории системы (2), например, оптимальной для заданного начального условия. С этой целью указанная траектория и соответствующее управление берутся в качестве опорных, и система (2) преобразуется к новым переменным – отклонениям от опорных значений.

О точности полученного приближенного синтеза $\tilde{u}(t, x(t))$ дает представление верхняя оценка Кротова:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta(t_I), \\ \Delta(t) &= \Delta(t+1) + \max_x P(t, x) - \min_x P(t, x_{\beta}), \\ \Delta(t_F) &= \max_x G(x) - \min_x G(x), \end{aligned}$$

где $P(t, x) = \max_{u \in \mathbf{U}} (\varphi(t+1, f(t, x, u))) - \varphi(t, x)$, x пробегает замкнутую область (практически, по достаточно густой сети узлов). Найденное управление тем ближе к оптимальному, чем меньше эта оценка.

Ниже рассмотрены конкретные примеры описанных конструкций и схем. На этапе качественного анализа для поиска начальных приближений использовалась система Maple, а дальнейшее уточнение, требующее более объемных вычислений, проводилось с использованием C++ и суперкомпьютера.

3. Аналитическая аппроксимация имитационной модели вертолета

Рассматривается имитационная модель полета вертолета, не имеющая полного аналитического описания, что затрудняет качественный анализ и заставляет с самого начала применять приближенные методы для работы с ней. Модель движения вертолета в продольной вертикальной плоскости в земной системе координат выглядит следующим образом:

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2) = \frac{1}{m}(-X_{BP} \cos \theta - Gu^1), \\ \dot{x}^2 = f^2(t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2) = \frac{1}{m}(-X_{BP} \sin \theta + T - G) + 0,53, \\ \dot{x}^3 = f^3(t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2) = F^3 + \frac{75(N_{расп} - \bar{N}_{расп})}{J_p x^3} - 0,52, \\ \dot{x}^4 = f^4(x^2) = x^2, \end{cases}$$

где x^4 – высота, x^1, x^2 – горизонтальная и вертикальная составляющие вектора скорости, x^3 – угловая скорость вращения несущего винта, u^1 – угол отклонения вектора тяги от вертикали, u^2 – общий шаг несущего винта.

$$\begin{aligned} X_{BP} &= Q((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad T = F_T(x^3 R)^2, \quad \theta = \arctg\left(\frac{x^2}{x^1}\right), \\ F^3 &= \frac{75}{x^3 J_p}(N_{расп} - N_{HB}), \quad F_T = \frac{m f^2 + X_{BP} \sin \theta + G}{\cos(u^1)(x^3 R)^2}, \\ m &= \frac{G}{g}, \quad Q = CxS \frac{\Delta}{16}, \end{aligned}$$

$N_{расп}$, N_{HB} – соответственно располагаемая и потребляемая мощность, R – радиус винта, G – вес вертолета, g – ускорение свободного падения у поверхности Земли, J_p – момент инерции винта, CxS – коэффициент аэродинамического сопротивления, Δ – плотность воздуха.

Заданы начальные значения фазовых переменных и ограничения на управления и фазовые переменные в ходе и в конце маневра:

$$(4) \quad \begin{aligned} x^{1-4}(0), \quad u^i \leq u^i \leq u^{i+}, \quad i = 1, 2, \quad x^1(t_F) \leq x^{1+}, \\ x^2(t) \geq x^{2-}(t), \quad x^2(t_F) \geq x^{2-}, \quad x^{3-} \leq x^3(t_F) \leq x^{3+}, \end{aligned}$$

определяющие рабочие диапазоны переменных при аппроксимации.

В приведенной модели имеются зависимости

$$(5) \quad \begin{aligned} F_T(t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2), \\ F^3(N_{HB}, t, x^1, x^2, x^3, u^1, u^2), \end{aligned}$$

которые имеют весьма сложный нелинейный характер и задаются в форме достаточно громоздких алгоритмов и массивов эмпирических данных для конкретных вертолетов. Для исследования модели эти данные могут использоваться в такой форме непосредственно обращением к соответствующим подпрограммам в ходе расчетов, либо рассчитываться и табулироваться заранее с последующей аппроксимацией аналитическими зависимостями.

Так как непосредственное обращение к подпрограммам в ходе расчетов представлялось невозможным, то был избран второй вариант: для восполнения аналитических описаний аппроксимировать конструкции (5) по заданному набору точек. На Fortran-программе, описывающей основные соотношения модели, и с помощью Maple 7 был проведен расчет узловых значений исследуемых зависимостей и построено несколько аппроксимаций.

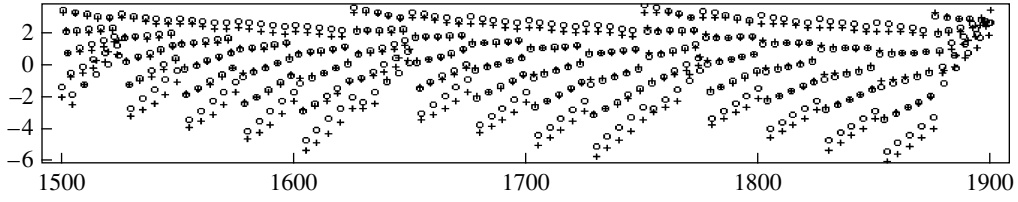


Рис. 1.

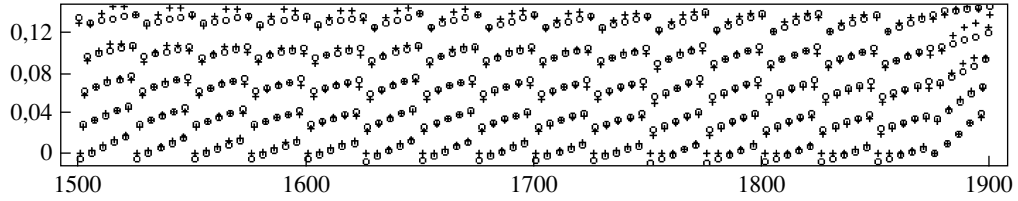


Рис. 2.

В рабочих диапазонах, определяемых условиями (4), были посчитаны два варианта сетки узлов аппроксимации и соответственно получены два варианта таблиц, путем полного перебора по трем и пяти значениям каждой переменной (243 и 3125 строк). По МНК для каждой из сеток было построено семейство аппроксимаций зависимостей (5). При этом использовались аппроксимирующие полиномы вида (1) с различными значениями степеней и числом коэффициентов. Приведем их вид:

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= \nu + \psi_1 x^1 + \psi_2 x^2 + \psi_3 x^3 + \psi_4 u^1 + \psi_5 u^2, \\
 \chi_2 &= \nu_0 + \nu_1 x^3 + x^1(\psi_{1,0} + \psi_{1,1} x^3) + x^2(\psi_{2,0} + \psi_{2,1} x^3) + \\
 &\quad + u^1(\psi_{3,0} + \psi_{3,1} x^3) + u^2(\psi_{4,0} + \psi_{4,1} x^3), \\
 \chi_3 &= \nu_0 + \nu_1 x^3 + \nu_2 (x^3)^2 + x^1(\psi_{1,0} + \psi_{1,1} x^3 + \psi_{1,2} (x^3)^2) + \\
 &\quad + x^2(\psi_{2,0} + \psi_{2,1} x^3 + \psi_{2,2} (x^3)^2) + u^2(\psi_{3,0} + \psi_{3,1} x^3 + \psi_{3,2} (x^3)^2), \\
 \chi_4 &= \nu_0 + \nu_1 x^3 + \nu_2 (x^3)^2 + x^1(\psi_{1,0} + \psi_{1,1} x^3 + \psi_{1,2} (x^3)^2) + \\
 &\quad + x^2(\psi_{2,0} + \psi_{2,1} x^3 + \psi_{2,2} (x^3)^2) + u^1(\psi_{3,0} + \psi_{3,1} x^3 + \psi_{3,2} (x^3)^2) + \\
 &\quad + u^2(\psi_{4,0} + \psi_{4,1} x^3 + \psi_{4,2} (x^3)^2), \\
 \chi_5 &= \sum_{j_1=0}^1 (x^1)^{j_1} \left(\sum_{j_2=0}^1 (x^2)^{j_2} \left(\sum_{j_3=0}^1 (x^3)^{j_3} \left(\sum_{j_4=0}^1 (u^1)^{j_4} \left(\sum_{j_5=0}^1 \psi_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5} (u^2)^{j_5} \right) \right) \right) \right), \\
 \chi_6 &= \sum_{j_1=0}^1 (x^1)^{j_1} \left(\sum_{j_2=0}^1 (x^2)^{j_2} \left(\sum_{j_3=0}^2 (x^3)^{j_3} \left(\sum_{j_4=0}^1 (u^1)^{j_4} \left(\sum_{j_5=0}^1 \psi_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5} (u^2)^{j_5} \right) \right) \right) \right), \\
 \chi_7 &= \sum_{j_1=0}^2 (x^1)^{j_1} \left(\sum_{j_2=0}^2 (x^2)^{j_2} \left(\sum_{j_3=0}^2 (x^3)^{j_3} \left(\sum_{j_4=0}^1 (u^1)^{j_4} \left(\sum_{j_5=0}^1 \psi_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5} (u^2)^{j_5} \right) \right) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Для иллюстрации на рис. 1 и 2 отражены результаты аппроксимации зависимостей F^3 и F_T соответственно на некоторых узлах при использовании полинома χ_4 на более густой сетке узлов. По горизонтальной оси – номера узлов аппроксимации, по

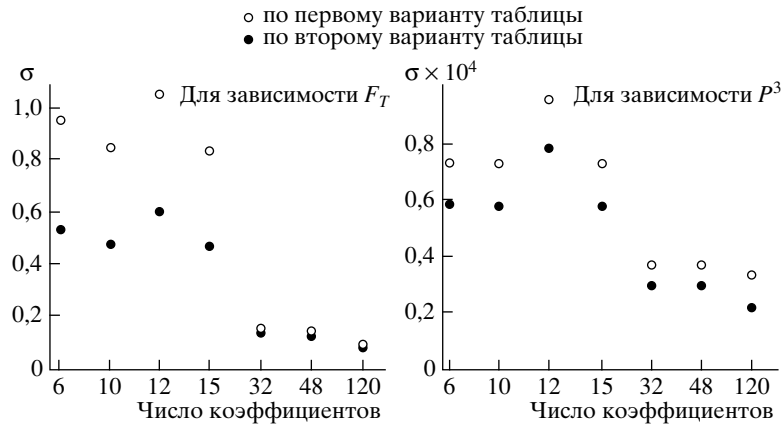


Рис. 3.

вертикальной – крестиками показаны фактические значения приближаемых зависимостей, кружками отмечены значения функций, построенных с помощью МНК.

Видно, что аппроксимация получается достаточно точная. Был проведен сравнительный анализ точности аппроксимаций на разных сетках и с разными полиномами по критерию минимума среднеквадратического отклонения значений полученного полинома $\chi(z_i)$ от табличных значений в узлах $\phi(z_i)$:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{\beta} (\chi(z_i) - \phi(z_i))^2}{\beta}.$$

Результаты этого анализа представлены на рис. 3. По горизонтальной оси отмечено количество коэффициентов аппроксимирующего полинома, по вертикальной – значение σ .

Расчеты проводились на примере условного вертолета, близкого по характеристикам к вертолету Ка-226 [3], для следующих числовых значений параметров, ограничений и начальных условий:

$$\begin{aligned} G &= 3400 \text{ кг}; & P &= 0,2; & Q &= 0,0004; & R &= 6,5 \text{ м}; & N &= 357 \text{ л.с.}; \\ u^{1-} &= -0,35; & u^{1+} &= 0,35; & u^{2-} &= 0; & u^{2+} &= 0,35; \\ x^{1+} &= 7 \text{ м/с}; & x^{2-} &= -3,5 \text{ м/с}; & x^{3-} &= 24,5 \text{ 1/с}; & x^{3+} &= 31,5 \text{ 1/с}; \\ x^1(0) &= x^2(0) = 0; & x^3(0) &= 29,5 \text{ 1/с}; & x^4(0) &= 0. \end{aligned}$$

Более простые, но менее точные аппроксимации можно использовать на этапе качественного анализа поведения динамической системы, более сложные и точные удобно использовать в алгоритмах улучшения. Следует заметить, что из более сложных аппроксимаций можно получать упрощенные варианты системы, применив МНК еще раз. При этом точность сохраняется.

Например, взяв сетку из 243 узлов и полином χ_6 и построив аппроксимацию по МНК системы (3), получим систему в аналитическом виде, но нелинейную и громоздкую. Применив к этой системе МНК еще раз с линейными аппроксимирующими конструкциями, получим простую линейную систему. По упрощенной системе можно делать выводы о динамике сложной нелинейной системы. Например, можно строить программы управления, различным образом расставляя точки переключения либо выражая управление из определенных условий. При этом гораздо легче

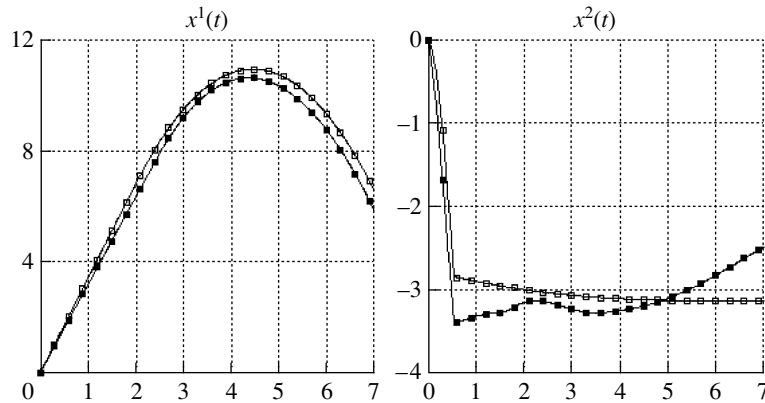


Рис. 4.

работать с упрощенной системой, чем с нелинейной системой. Важно то, что все закономерности изменения фазовых переменных на одном и том же управлении для обеих систем сохраняются.

Благодаря тому, что полученные приближения исходной модели имеют полное аналитическое описание, их можно использовать при исследовании и оптимизации взлетно-посадочных характеристик вертолета с непосредственным применением различных теоретических методов и алгоритмов улучшения и оптимального синтеза управления [4, 5]. Таким путем в [6, 7] проведено исследование режимов безопасной посадки вертолета в аварийных ситуациях, вызванных отказом одного из двигателей, которое сводится к решению следующей оптимизационной задачи. Требуется минимизировать конечную высоту $h(t_F) = x^4(t_F)$ при выполнении ограничений (4), отражающих требования безопасности. Это равносильно максимизации нижней границы опасной зоны. Приведем некоторые результаты, полученные в этой работе с использованием построенных аналитических аппроксимаций.

Вначале была построена наиболее простая, линейная, аппроксимация модели с использованием линейной конструкции полинома и первого варианта таблицы. С ее помощью был проведен качественный анализ согласно процедуре, описанной в [6], и получено начальное приближение оптимального решения для последующего улучшения $(t_F, u^1(t), u^2(t))_0$. На следующем этапе – улучшения начального приближения – использовалась более точная модель, полученная по первому варианту таблицы узлов и аппроксимирующей конструкции φ_1 . На рис. 4 представлены оба режима посадки, соответствующие начальному приближению (белые квадратики) и улучшенному варианту (черные квадратики). Видно, что они сравнительно мало различаются, что говорит о хорошем начальном приближении, полученном в результате качественного анализа.

4. Поиск оптимального управления на основе аппроксимации соотношений Беллмана

Были проведены расчеты по описанной выше схеме применительно к задаче оптимизации пространственных маневров вертолета. Вертолет рассматривается как материальная точка, движение которой в земной системе координат описывается уравнениями

$$(6) \quad \frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = a + g,$$

где r, v, a, g – векторы положения, скорости тягового ускорения и ускорения силы тяжести, удовлетворяющие дополнительным ограничениям:

$$\begin{aligned} x_{\min} &\leq x \leq x_{\max}, & y_{\min} &\leq y \leq y_{\max}, & z_{\min} &\leq z \leq z_{\max}, \\ v_{x \min} &\leq v_x \leq v_{x \max}, & v_{y \min} &\leq v_y \leq v_{y \max}, & v_{z \min} &\leq v_z \leq v_{z \max}, \\ |a| &\leq \alpha, \end{aligned}$$

где (x, z) (v_x, v_z) – горизонтальные составляющие векторов r и v , y, v_y – их вертикальные составляющие в земной системе координат.

Ограничения составляющих путевой скорости (горизонтальных составляющих) зависят от ограничений воздушной скорости вертолета и наличия ветра заданной величины и направления:

$$\begin{aligned} v_{x \min} &= v_{x \min} + w \cos \sigma, & v_{x \max} &= v_{x \max} + w \cos \sigma, \\ v_{z \min} &= v_{z \min} + w \sin \sigma, & v_{z \max} &= v_{z \max} + w \sin \sigma, \end{aligned}$$

где w – величина скорости ветра, σ – его направление.

В качестве характерных рассматривались маневры подъема-разгона. Минимизируемый функционал включает время маневра и взвешенное среднеквадратическое отклонение конечных векторов положения и скорости от заданных:

$$I = t_F + b_1 |r(t_F) - r_F|^2 + b_2 |v(t_F) - v_F|^2.$$

Рассматриваемая модель движения (6) представляет собой существенно упрощенную версию системы уравнений динамики вертолета. Она была дискретизована с достаточно малым шагом, на котором управление a принималось постоянным:

$$(7) \quad r(\tau + 1) = r(\tau) + hv(\tau) + \frac{1}{2}h^2(a(\tau) + g), \quad v(\tau + 1) = v(\tau) + h(a(\tau) + g),$$

где τ – дискретное время, за единицу которого принят шаг дискретизации h .

Ранее была найдена приближенно-оптимальная траектория маневра для следующих начальных и конечных условий:

$$\begin{aligned} v_{xI} &= v_{xzI} \cos \Psi_I, & v_{zI} &= v_{xzI} \sin \Psi_I, & v_{yI} &= 0, \\ v_{xF} &= v_{xzF} \cos \Psi_F, & v_{zF} &= v_{xzF} \sin \Psi_F, & v_{yF} &= 0, \end{aligned}$$

где v_{xz} – горизонтальная проекция скорости полета, Ψ – путевой угол. В ее окрестности требовалось осуществить приближенно-оптимальный синтез управления оптимизированным выше методом наименьших квадратов. Для этого необходимо было построить решетку. Понятно, что проще всего построить постоянную во времени прямоугольную решетку. С этой целью сделана соответствующая замена переменных в системе (7):

$$\begin{cases} x^1(\tau + 1) - x^1(\tau) = -\Delta r^1 + h(x^4 + \bar{v}^1) + \frac{1}{2}(h)^2(a^1 + g^1), \\ x^2(\tau + 1) - x^2(\tau) = -\Delta r^2 + h(x^5 + \bar{v}^2) + \frac{1}{2}(h)^2(a^2 + g^2), \\ x^3(\tau + 1) - x^3(\tau) = -\Delta r^3 + h(x^6 + \bar{v}^3) + \frac{1}{2}(h)^2(a^3 + g^3), \\ x^4(\tau + 1) - x^4(\tau) = -\Delta v^1 + h(a^1 + g^1), \\ x^5(\tau + 1) - x^5(\tau) = -\Delta v^2 + h(a^2 + g^2), \\ x^6(\tau + 1) - x^6(\tau) = -\Delta v^3 + h(a^3 + g^3), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta r^i &= \bar{r}^i(\tau + 1) - \bar{r}^i(\tau), & \Delta v^i &= \bar{v}^i(\tau + 1) - \bar{v}^i(\tau), \\ x^{1-3} &= r^{1-3} - \bar{r}^{1-3}(\tau), & x^{4-6} &= v^{1-3} - \bar{v}^{1-3}(\tau). \\ a^1 &= \alpha \sin \theta \cos \gamma, & a^2 &= \alpha \cos \theta, & a^3 &= \alpha \sin \theta \sin \gamma, \\ g_1 &= g_3 = 0, & g_2 &= 9,8. \end{aligned}$$

Аргумент в правых частях для краткости опущен. Далее работа велась уже с этой системой. Минимизируемый функционал в новых переменных имеет вид:

$$I = t_F + \sum_{i=1}^6 (x^i)^2.$$

В качестве аппроксимирующей зависимости был взят полином вида:

$$\varphi = \nu + \psi^T x + \frac{1}{2} x^T \sigma x.$$

В результате работы программы получена таблица (28×40) коэффициентов аппроксимирующего полинома, тем самым построена приближенная функция Кротова – Беллмана, генерирующая для каждого момента времени и состояния в рассматриваемой окрестности приближенно-оптимальное позиционное (ситуационное) управление.

На графике рис. 5 представлено несколько траекторий подъема-разгона на интервале от 30-й до 40-й секунды (в отклонениях высоты от опорных значений), реализуемых построенным позиционным управлением $(\tilde{u}(t, x))$ и берущих начало из различных состояний (они указаны в таблице на соответствующем рисунке).

Видно, что построенное семейство траекторий приближается к заданному опорному состоянию (нулевое в используемых переменных).

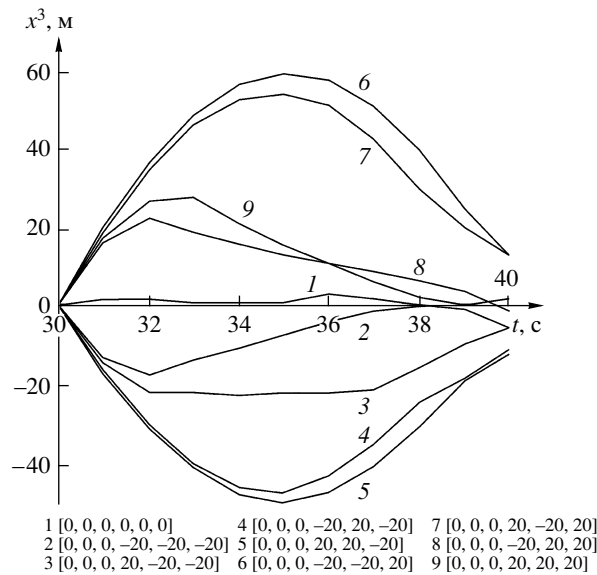


Рис. 5.

Была просчитана оценка синтеза. Для одного варианта сетки она получилась слишком большой, что связано с большими размерами рассматриваемой области. В связи с этим область была уменьшена до размеров $-20 \leq r^{1-3} \leq 20$, $-2 \leq v^{1-3} \leq 2$, при этом оценка уменьшилась до 0,3.

5. Программная реализация

Алгоритм аппроксимации по МНК является важной частью разрабатываемого в Институте программных систем РАН программно-алгоритмического комплекса оптимизации законов управления ISCON (Improvement and Synthesis of Control). Он предназначен для моделирования сложных динамических процессов, решения оптимизационных задач и задач улучшения управления для различных прикладных областей на кластерном вычислительном устройстве. Для этого в нем реализованы алгоритмы аппроксимации и улучшения приближенно-оптимального управления. Главными компонентами комплекса являются графический интерфейс, сервер управления, управляющие модули и набор исполняемых модулей.

Область применения программного комплекса (ПК) определяется реализованными методами (исполняемыми модулями), предназначенными для построения аналитического описания модели по имеющимся статистическим данным (алгоритм аппроксимации по МНК), улучшения приближенно оптимальной программы управления динамической системой, моделирования и исследования упругих систем. Указанные методы могут быть применены, например, к задачам управления экономическими системами, движением летательных аппаратов, задачам оптимального конструирования упругих стержней. Результаты работы программ имеют большое теоретическое значение и могут применяться на практике.

ПК содержит: сервер управления (средство управления и контроля комплексом), управляющие модули (инструменты формирования среды для решения поставленных задач), исполняемые модули (выполняют сам счет поставленных задач) и интерфейс пользователя (средство запуска счета параметризованных задач). На рис. 6 представлена общая схема комплекса.



Рис. 6.

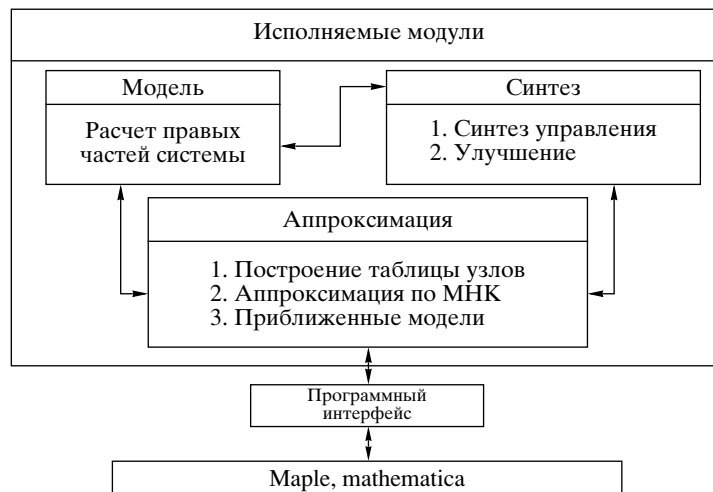


Рис. 7.

Для параллельной реализации ПК была использована гетерогенная аппаратная среда. Компоненты ПК физически разделены. Графический интерфейс, сервер управления и управляющие модули работают на платформе IBM PC, а аппаратная платформа для исполняемых модулей вообще не фиксируется. В составе ПК, в частности, есть исполняемые модули, работающие на аппаратной платформе IBM PC, модули, выполняющиеся на аппаратной платформе суперкомпьютеров «СКИФ» кластерного уровня, включающей: управляющую ЭВМ (фронтенд), вычислительные узлы кластерного уровня; системную сеть кластера (SCI), объединяющую вычислительные узлы; вспомогательную сеть (семейства Ethernet, с поддержкой TCP/IP), объединяющую управляющую ЭВМ и вычислительные узлы.

Семейство суперкомпьютеров «СКИФ» базируется на масштабируемой кластерной архитектуре, реализуемой на классических кластерах из вычислительных узлов на основе компонент широкого применения (стандартных микропроцессоров, модулей памяти, жестких дисков и материнских плат, в том числе с поддержкой SMP). Кластер работает под операционной системой Linux (RedHat 6.2), особенностью реализации СКУ СКИФ является использование в каждом узле двух процессоров.

Описанные выше алгоритмы используются не только для аналитического представления модели объекта, но и в промежуточных конструкциях методов улучшения и синтеза управления, а также могут быть применены и к «элементарным» конечным задачам оптимизации в составе этих методов [7]. Кроме того, алгоритм аппроксимации модели выполняет роль части программного интерфейса при взаимодействии ПК ISCON и систем символьных вычислений (Maple, Mathematica).

На рис. 7 изображено взаимодействие некоторых исполняемых модулей.

В блоке МОДЕЛЬ находится программная реализация исходной модели объекта (система (2)). В блоке АППРОКСИМАЦИЯ строится сетка узлов аппроксимации. Затем в результате взаимодействия с блоком МОДЕЛЬ формируется таблица значений правых частей модели. Получается таблично заданная функция, которую можно приблизить по МНК с помощью различных аппроксимирующих конструкций вида (1). Таким образом получается семейство моделей различной сложности. С помощью систем символьных вычислений (Maple, Mathematica) можно провести качественный анализ исходной системы, получить начальное приближение и затем решать задачи синтеза оптимального управления и его улучшения алгоритмами, реализованными в блоке СИНТЕЗ.

6. Заключение

Композиционные полиномы были использованы для приближенного синтеза оптимального управления еще в [8]. Здесь их предложено применять для аналитического описания моделей объектов управления. Главное их преимущество – возможность сведения задачи многомерной аппроксимации к семейству задач одномерной аппроксимации, хорошо изученных в различных приложениях. В частности, для степенных полиномов гарантируется совместность системы линейных уравнений МНК в случаях, когда число узлов равно или близко числу коэффициентов. Кроме того, они допускают комбинации различных аппроксимирующих конструкций (например, степенных, тригонометрических, сплайновых и т.п.) для различных переменных, что существенно расширяет возможности их использования.

Предложенный подход может быть использован для аппроксимации сложных моделей, представленных аналитически, в классах, допускающих эффективное решение задачи известными методами. Такие классы характеризуются определенными условиями (например, линейность относительно управлений, условия инволютивности коэффициентов при этих управлениях для преобразования к производным системам меньшего порядка [5]). При этом естественным образом приходим к условному МНК.

Получаемое с помощью МНК приближенное представление динамической системы позволяет провести качественный анализ ее поведения и даже получить грубое начальное приближение для различных алгоритмов улучшения управления, если решается задача оптимизации.

Разработанный алгоритм аппроксимации может быть применен к любым динамическим системам. Модель динамики вертолета как летательного аппарата с наиболее сложной аэродинамикой выбрана здесь для иллюстрации. Создаваемый с использованием алгоритма программный комплекс ISCON призван существенно облегчить проектирование оптимальных законов управления. Он позволит «прикладникам» эффективно взаимодействовать с «теоретиками», задавая модели исследуемых систем и условия задач в привычной форме, не вникая в сложный математический аппарат их решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский А.А. Аппроксимация функций многих аргументов в системах цифрового моделирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 3. С. 3–11.
2. Ухин М.Ю. Приближенный синтез оптимального управления. М.: Физматлит, 2006.
3. Суриков Н.Ф., Иоффе Г.И., Дмитриев Ф.Ф., Пак Е.Г. Вертолет Ка-26. М.: Транспорт, 1982.
4. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
5. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
6. Трушкова Е.А., Квоков В.Н., Ухин М.Ю. Улучшение и оптимизация управления летательным аппаратом с использованием аналитических аппроксимаций модели объекта // Вест. СГАУ.
7. Гурман В.И., Квоков В.Н., Ухин М.Ю. Приближенные методы оптимизации управления летательным аппаратом // АиТ. 2008. № 4. С. 191–201.
8. Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностроение, 1969.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 01.10.2008