A. Yu. Popov, Развитие теоремы Валирона–Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней, *CMFD*, 2013, Volume 49, 132–164

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 49 (2013). С. 132–164

УДК 517.5

РАЗВИТИЕ ТЕОРЕМЫ ВАЛИРОНА—ЛЕВИНА О НАИМЕНЬШЕМ ВОЗМОЖНОМ ТИПЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ВЕРХНЕЙ ρ-ПЛОТНОСТЬЮ КОРНЕЙ

© 2013 г. **А. Ю. ПОПОВ**

Аннотация. В статье решаются задачи о наименьшем возможном типе при порядке ρ целой функции, корни которой имеют заданную верхнюю ρ-плотность и удовлетворяют дополнительным ограничениям: лежат в некотором угле или на луче. Такая задача без ограничений на расположение корней была рассмотрена Валироном и полностью решена Левиным.

1. Введение. Постановка задач

В теории целых функций (обозначим их множество $\mathcal{A}(\mathbb{C})$) справедлив следующий принцип. Если корни функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ (точки, в которых f обращается в нуль) образуют «достаточно густую» последовательность, то величина $M(f,R) = \max\limits_{|z|\leqslant R} |f(z)|$ не может расти «слишком медленно» при $R \to +\infty$. В статье обсуждаются количественные аспекты этого принципа для целых функций положительного порядка.

Как обычно, с произвольной стремящейся к ∞ последовательностью $\Lambda \subset \mathbb{C}$ связывают две функции, заданные на $(0;+\infty)$ и характеризующие ее «густоту». Ими являются считающая функция $n_\Lambda(R)$ последовательности Λ, равная по определению количеству элементов Λ в круге $|z| \leqslant R$, и усредненная считающая функция $N_\Lambda(R) = \int\limits_0^R \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt$. Усредненную считающую функцию, определённую именно такой формулой, рассматривают только в случае $0 \notin \Lambda$. Численными характеристиками густоты последовательности Λ в статье будут выступать ее верхняя и нижняя ρ-плотности

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \limsup_{R\to+\infty} R^{-\rho} n_\Lambda(R), \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \liminf_{R\to+\infty} R^{-\rho} n_\Lambda(R), \quad \rho > 0 \tag{1.1}$$

а также верхняя и нижняя усредненные ρ-плотности

$$\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \limsup_{R\to+\infty} R^{-\rho} N_\Lambda(R), \quad \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \liminf_{R\to+\infty} R^{-\rho} N_\Lambda(R). \tag{1.2}$$

Через Λ_f, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, $f(z) \not\equiv 0$, обозначим множество всех корней функции f. Как известно, множество Λ_f либо пусто, либо конечно, либо является последовательностью, стремящейся к ∞. Корни нумеруются в порядке неубывания их модулей и каждый корень стоит в последовательности столько раз, какова его кратность. Вместо $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)$, $n_{\Lambda_f}(R)$ далее будем писать $\overline{\Delta}_\rho(f)$, $\underline{\Delta}_\rho(f)$, $n_f(R)$ соответственно и так же для «усредненных» характеристик множества корней f. Показателем скорости роста $M(f,R)$ при $R \to +\infty$ является тип при порядке ρ:

$$\sigma_\rho(f) = \limsup_{R\to+\infty} R^{-\rho} \ln M(f,R), \quad \sigma_\rho(0) = 0. \tag{1.3}$$

Определения (1.1)–(1.3) широко использовались еще более полувека назад [2, 9]. Обозначим также, следуя [3, с. 12, 18],

$$[\rho,\sigma) = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}) \,|\, \sigma_\rho(f) < \sigma\}, \quad [\rho,\sigma] = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}) \,|\, \sigma_\rho(f) \leqslant \sigma\}. \tag{1.4}$$

Валирон [13], основываясь на формуле Йенсена

$$N_f(R) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right| d\theta, \quad f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}), \quad f(0) = 1,$$

(верной, если на окружности $|z| = R$ функция $f(z)$ не имеет корней), вывел неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \overline{\Delta}^*_\rho(f) \quad \forall \rho > 0. \tag{1.5}$$

Затем, решив задачу получения неулучшаемой оценки снизу усредненной верхней ρ-плотности через верхнюю ρ-плотность

$$\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geqslant \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{e\rho} \quad \forall \rho > 0, \tag{1.6}$$

он пришел к неравенству

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\overline{\Delta}_\rho(f)}{e\rho} \quad \forall \rho > 0. \tag{1.7}$$

Неулучшаемость результатов (1.5), (1.7) доказал Левин [2, гл. 4]. Таким образом, были решены экстремальные задачи, состоящие в нахождении величин

$$C_0(\rho) = \inf\{\sigma_\rho(f) \,|\, \overline{\Delta}_\rho(f) = 1\}, \quad C^*_0(\rho) = \inf\{\sigma_\rho(f) \,|\, \overline{\Delta}^*_\rho(f) = 1\}. \tag{1.8}$$

Линейная замена переменной дает соотношения

$$\inf\{\sigma_\rho(f) \,|\, \overline{\Delta}_\rho(f) = a\} = aC_0(\rho), \quad \inf\{\sigma_\rho(f) \,|\, \overline{\Delta}^*_\rho(f) = a\} = aC^*_0(\rho) \quad \forall a > 0,$$

которые убеждают в том, что в (1.8) достаточно ограничиться единичными значениями верхних плотностей. Итак, справедливы равенства

$$C^*_0(\rho) = 1, \quad C_0(\rho) = \frac{1}{e\rho}, \tag{1.9}$$

и это утверждение разумно назвать теоремой Валирона—Левина. Заметим, что Левин доказал достижимость точной нижней грани в (1.8).

Теорема Валирона—Левина может быть трактована как точная (в терминах типа при порядке ρ) теорема единственности. Действительно, коль скоро заданы два произвольных положительных числа ρ и Δ, то согласно этой теореме любая функция $f \in \left[\rho, \dfrac{\Delta}{e\rho}\right)$ однозначно определяется последовательностью значений $\{f(\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, какова бы ни была последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, верхняя ρ-плотность которой не меньше Δ. Но заменить пространство $\left[\rho, \dfrac{\Delta}{e\rho}\right)$ на большее $\left[\rho, \dfrac{\Delta}{e\rho}\right]$ в этом утверждении нельзя. Аналогично, любая функция $f \in [\rho, \Delta^*)$ однозначно определяется своими значениями в последовательности точек, усредненная верхняя ρ-плотность которой не меньше Δ^*. И точно так же это утверждение перестает быть верным для пространства $[\rho, \Delta^*]$.

Посмотрим, что дает применение этих результатов к задаче о единственности целой функции, принимающей заданные значения в целых точках. Максимальное среди пространств (1.4) пространство единственности было найдено почти одновременно с появлением оценок (1.5), (1.7).

Теорема (Карлсон [10]). *Если $f \in [1, \pi)$, $f(n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$, то $f(z) \equiv 0$. Взять пространство $[1, \pi]$ в этой теореме нельзя: функция $\sin(\pi z)$, обращающаяся в нуль на $\mathbb{Z}$, имеет тип при порядке 1, равный π.*

Последовательность $\mathbb{Z}$ имеет верхнюю усредненную 1-плотность, равную 2, и применение первого из соотношений (1.9) даст пространство единственности $[1, 2)$. Еще худший результат даст применение второго равенства (1.9). Таким образом, теорема Валирона—Левина в данной ситуации непродуктивна. Причина такой непродуктивности в том, что весьма общая теорема единственности, не учитывающая ни распределение аргументов узлов интерполяции, ни их нижние ρ-плотности, применяется в задаче, в которой множество $\Lambda = \mathbb{Z}$ лежит на прямой (и даже центрально-симметрично относительно нуля), а его считающая функция ведет себя весьма регулярно: $n_\Lambda(R) = 2R + O(1)$. Поэтому актуальны модификации задачи (1.8), содержащие ограничения как на нижние ρ-плотности последовательности корней, так и на их аргументы.

Перейдем к постановкам задач. Через $\mathbb{C}^\infty_\alpha$, $0 < \alpha < 2\pi$, обозначим множество всех последовательностей комплексных чисел, которые стремятся к ∞ и «почти отсутствуют» в каком-либо угле величины $\alpha - \varepsilon$ $(\forall \varepsilon > 0)$. Точнее говоря, каково бы ни было число $\varepsilon \in (0, \alpha)$, все элементы последовательности класса $\mathbb{C}^\infty_\alpha$ кроме, может быть, конечного числа лежат вне некоторого угла с вершиной в точке 0 раствора $\alpha-\varepsilon$. В частности, $\mathbb{C}_{2\pi}^{\infty}$ — все последовательности, стремящиеся к ∞, аргументы которых имеют предел. Через $\mathbb{C}_{0}^{\infty}$ логично обозначить множество всех последовательностей, стремящихся к ∞.

Задача 1. Для любых чисел $\alpha\in[0,2\pi]$, $k\in[0,1]$ и $\rho>0$ требуется найти

$$C_\alpha(\rho;k)=\inf\{\sigma_\rho(f)\,|\overline{\Delta}_\rho(f)=1,\underline{\Delta}_\rho(f)\geqslant k,\Lambda_f\in\mathbb{C}_\alpha^\infty\}.$$

Задача 2. При тех же условиях найти

$$\widetilde{C}_\alpha(\rho;k)=\inf\{\sigma_\rho(f)\,|\exists\Lambda\in(\Lambda_f\cap\mathbb{C}_\alpha^\infty):\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=1,\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)\geqslant k\}.$$

Задача 1*. Для любых чисел $\alpha\in[0,2\pi]$ и $k\in[0,1]$ требуется найти

$$C_\alpha^*(\rho;k)=\inf\{\sigma_\rho(f)\,|\overline{\Delta}_\rho^*(f)=1,\underline{\Delta}_\rho^*(f)\geqslant k,\Lambda_f\in\mathbb{C}_\alpha^\infty\}.$$

Можно рассмотреть и аналогичную задачу 2*.

Мне неизвестны работы, в которых рассматривались бы эти задачи для значений $\alpha\in(0,2\pi)$. Задача нахождения $C_{2\pi}(\rho;0)$, по-видимому, впервые рассмотрена в [7, 8]. Даже в простейшем случае $\alpha=0$ величина $C_0(\rho,k)$ была найдена только при $k=0$ — см. выше (1.8), (1.9). В [9, с. 16], цитируется результат, влекущий за собой неравенство $C_0(\rho,k)\geqslant\rho^{-1}\exp(k-1)$, $0<k\leqslant1$, но я не знаю, было ли где-либо доказано равенство. Таким образом, можно утверждать, что эта проблематика мало исследована, но в теории целых функций ее актуальность несомненна.

Выскажем некоторые соображения относительно случая $k=1$, который весьма важен, но в этой статье ему не удалось уделить внимание. В данном случае задача 1 принимает следующий вид.

При любых $\rho>0$ и $\alpha\in(0,2\pi]$ требуется найти наименьший возможный тип целых функций, последовательность корней которых $\Lambda=\{\lambda_n\}$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{R\to+\infty}R^{-\rho}n_\Lambda(R)=1$.
2. При любом $\varepsilon\in(0,\alpha/2)$ лишь конечное число элементов Λ лежит вне угла $-\pi+\alpha/2-\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\pi-\alpha/2+\varepsilon$.

В этой ситуации считающая функция последовательности корней отличается «регулярным» поведением. И если бы удалось доказать, что наименьший возможный тип имеют те функции, последовательность корней которых обладает угловой плотностью (определение см. в [2, с. 118-119]), то задача была бы решена с помощью теоремы 1 из [2, гл. 2, § 1]. В предельном случае $\alpha=2\pi$ угловая плотность Λ существует и верна следующая теорема.

Теорема. *Если ρ не целое число, выполнено условие 1 и все корни целой функции кроме, может быть, конечного числа лежат в углах $|\arg z|<\varepsilon$ $(\forall\varepsilon>0)$, то тип такой функции равен $\pi|\operatorname{cosec}(\pi\rho)|$.*

В статье содержатся все результаты, полученные к настоящему времени по задачам 1, 1*, 2. Результаты, принадлежащие автору, приводятся с полными доказательствами. В разделе 2 изучен случай $\alpha=0$, $0<k\leqslant1$. В разделе 3 речь идет о случае $\pi\leqslant\alpha\leqslant2\pi$, $0<\rho<1$, $k=0$. В разделе 5 кратко рассказано о недавних результатах Г. Г. Брайчева и В. Б. Шерстюкова ($\alpha=2\pi$, $0<\rho<1$, $0<k\leqslant1$). В разделе 6 обсуждается различие между задачами 1 и 2 и выводится нетривиальная оценка сверху величины $\widetilde{C}_{2\pi}(\rho,0)$.

2. Произвольные аргументы корней

Давно известно неравенство

$$\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda)\geqslant\frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho}e^{k-1}\quad(\forall\rho>0)\qquad\text{при условии}\quad\frac{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}=k.\tag{2.1}$$

Из (2.1) и (1.5) сразу же следует, что

$$C_0(\rho;k)\geqslant\frac{e^{k-1}}{\rho}\quad\forall\rho>0.\tag{2.2}$$

Верно ли в (2.2) равенство? Ответ положителен, если возможно равенство

$$\sigma_\rho(f)=\overline{\Delta}_\rho^*(f),\tag{2.3}$$

когда последовательность корней функции f имеет верхнюю ρ-плотность, равную 1, а нижнюю ρ-плотность, равную k. В примере Левина функции, для которой верно равенство (2.3), нижняя ρ-плотность множества корней равна нулю. Оказывается, этот пример допускает обобщение!

Теорема 2.1. *Каковы бы ни были числа $\rho > 0$ и $k \in [0,1]$, существует целая функция f порядка ρ, обладающая следующими свойствами*:

$$1)\ \overline{\Delta}_\rho(f) = 1, \quad 2)\ \underline{\Delta}_\rho(f) = k, \quad 3)\ \sigma_\rho(f) = \overline{\Delta}^*_\rho(f) = \frac{1}{\rho}e^{k-1}, \quad 4)\ \underline{\Delta}^*_\rho(f) = \frac{k}{\rho}.$$

Теорема 2.1 вместе с (2.2) и (1.5) влечет за собой справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.2. *Верны равенства*

$$C_0^*(\rho;k) = 1, \quad C_0(\rho,k) = \frac{e^{k-1}}{\rho} \quad \forall\rho > 0 \quad \forall k \in [0,1].$$

Доказательство теоремы 2.1. Возьмем произвольные числа p и q, подчинив их лишь ограничению $o < q < p$, обозначим $\rho = (q+1)/p$. Нетрудно убедиться в том, что ρ принимает все значения в луче $(0,+\infty)$.

Рассмотрим сначала значение $k = 1$. Определим последовательность $n_m = [(q+1)m^q]$, где $[x]$ — целая часть числа x, и целую функцию $f(z) = \prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1 + (zm^{-p})^{n_m}\right)$. Корни f образуют множество

$$\left\{m^p \exp\left(\frac{\pi i(2k-1)}{n_m}\right) \mid m \in \mathbb{N},\, 1 \leqslant k \leqslant n_m\right\}.$$

Таким образом, модули корней составляют последовательность $\{m^p\}_{m\in\mathbb{N}}$, а количество корней, имеющих модуль m^p, равно n_m. Следовательно,

$$n_f(R) = \sum_{m\leqslant R^{\frac{1}{p}}} n_m = \sum_{m\leqslant R^{\frac{1}{p}}} (q+1)m^q + O\left(R^{\frac{1}{p}}\right) = R^{\frac{q+1}{p}} + O\left(R^{\frac{q}{p}} + R^{\frac{1}{p}}\right) =$$
$$= R^\rho + o(R^\rho),\ R \to +\infty. \tag{2.4}$$

Асимптотика (2.4) влечет за собой справедливость соотношений

$$\overline{\Delta}_\rho(f) = \underline{\Delta}_\rho(f) = 1, \qquad \overline{\Delta}^*_\rho(f) = \underline{\Delta}^*_\rho(f) = \frac{1}{\rho}. \tag{2.5}$$

Из разложения f в произведение получаем равенство

$$\ln M(f,R) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln\left(1 + \left(Rm^{-p}\right)^{n_m}\right), \quad R > 0. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$S(R) = \sum_{m\leqslant R^{1/p}} n_m \ln\left(Rm^{-p}\right) \tag{2.7}$$

и убедимся в справедливости двусторонней оценки

$$S(R) < \ln M(f,R) < S(R) + O\left(R^{\frac{1}{p}}\right). \tag{2.8}$$

Оценка снизу в (2.8) сразу же следует из (2.6): мы уменьшаем слагаемые, убирая 1 из аргумента логарифма и отбрасываем слагаемые (все они положительны) с номерами $m > R^{1/p}$. Выведем оценку сверху. Воспользовавшись неравенствами

$$\ln(1+x) < \ln x + \frac{1}{x},\ x \geqslant 1, \qquad \ln(1+x) < x,\ 0 < x < 1,$$

получим

$$\ln\left(1 + \left(Rm^{-p}\right)^{n_m}\right) < n_m \ln\left(Rm^{-p}\right) + \left(\frac{m^p}{R}\right)^{n_m}, \quad m \leqslant R^{\frac{1}{p}},$$
$$\ln\left(1 + \left(Rm^{-p}\right)^{n_m}\right) < \left(Rm^{-p}\right)^{n_m}, \quad m > R^{\frac{1}{p}}. \tag{2.9}$$

Из (2.6), (2.7) и (2.9) находим

$$\ln M(f,R) \leqslant S(R) + S_1(R) + S_2(R), \tag{2.10}$$

где

$$S_1(R) = \sum_{m \leqslant R^{1/p}} \left(\frac{m^p}{R}\right)^{n_m}, \quad S_2(R) = \sum_{m > R^{1/p}} \left(\frac{R}{m^p}\right)^{n_m}.$$

Сумму $S_1(R)$ оценим тривиально: все её слагаемые не больше 1, а самих слагаемых не больше $R^{1/p}$. Поэтому $S_1(R) \leqslant R^{1/p}$. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} 2^{-n_m}$ имеем

$$S_2(R) = \sum_{R^{1/p} < m < (2R)^{1/p}} \left(\frac{R}{m^p}\right)^{n_m} + O(1) = O\left(R^{1/p}\right).$$

Следовательно, $S_1(R) + S_2(R) = O(R^{1/p})$, и в силу (2.10) мы получаем оценку сверху (2.8).

Теперь отыщем асимптотику $S(R)$ при $R \to +\infty$. Воспользуемся тем, что погрешность замены суммы значений в целых точках $\sum\limits_{a \leqslant m \leqslant b} \varphi(m)$ функции φ, имеющей на отрезке $[a,b]$ ровно N участков монотонности, интегралом $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ не превосходит $O\left(N \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi(x)|\right)$. Функция $\varphi(x) = x^q(\ln R - p\ln x)$ имеет на отрезке $1 \leqslant x \leqslant R^{1/p}$ два участка монотонности, неотрицательна, ее максимум равен $p(qe)^{-1}R^{q/p}$. Следовательно,

$$S(R) = \sum_{m \leqslant R^{\frac{1}{p}}} (q+1)\, m^q (\ln R - p\ln m) + O\left(R^{\frac{1}{p}} \ln R\right) = \int\limits_1^{R^{\frac{1}{p}}} (q+1)\, x^q (\ln R - p\ln x)\, dx +$$

$$+ O\left(R^{\frac{q}{p}} + R^{\frac{1}{p}} \ln R\right) = \frac{pR^{\frac{q+1}{p}}}{q+1} + O\left(R^{\frac{q}{p}} + R^{\frac{1}{p}} \ln R\right) = \frac{R^\rho}{\rho} + o(R^\rho), \quad R \to +\infty. \tag{2.11}$$

Из (2.8) и (2.11) получаем равенство $\sigma_\rho(f) = 1/\rho$, которое вместе с (2.5) доказывает справедливость соотношений 1)–4) в случае $k=1$.

Теперь рассмотрим $k \in (0,1)$. Определим последовательность R_ν рекуррентными соотношениями: $R_1 = 2, R_{\nu+1} = R_\nu^4$. Положим также

$$N_\nu = [(1-k)\, R_\nu^\rho], \quad n_m = [(q+1)\, km^q], \quad I_\nu = \left(\left(k^{\frac{-1}{\rho}} R_\nu\right)^{\frac{1}{p}}, R_{\nu+1}^{\frac{1}{p}}\right),$$

$$f(z) = f_1(z)\, f_2(z), \quad f_1(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \prod_{m \in I_\nu} \left(1 + \left(\frac{z}{m^p}\right)^{n_m}\right), \quad f_2(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{R_\nu}\right)^{N_\nu}\right). \tag{2.12}$$

Покажем, что последовательность корней функции f имеет верхнюю плотность, равную 1, и нижнюю плотность, равную k. Согласно (2.12) имеем

$$n_f(R) = n_f\left(k^{\frac{-1}{\rho}} R_{\nu-1}\right) + \sum_{k^{\frac{-1}{\rho}} R_{\nu-1} < m^p \leqslant R} n_m, \quad k^{\frac{-1}{\rho}} R_{\nu-1} < R < R_\nu,$$

$$n_f(R) = n_f(R_\nu - 0) + N_\nu, \quad R_\nu \leqslant R \leqslant k^{\frac{-1}{\rho}} R_\nu. \tag{2.13}$$

Из явного выражения для n_m, N_ν и (2.13) выводим асимптотики

$$n_f(R) = kR^\rho + o(R^\rho), \quad R \to +\infty, \quad \sqrt{R_\nu} \leqslant R \leqslant R_\nu,$$

$$n_f(R) = R_\nu^\rho + o(R_\nu^\rho), \quad R \to +\infty, \quad R_\nu \leqslant R \leqslant k^{\frac{-1}{\rho}} R_\nu, \tag{2.14}$$

$$n_f(R) = kR^\rho + o(R^\rho), \quad R \to +\infty, \quad k^{\frac{-1}{\rho}} R_\nu \leqslant R \leqslant R_\nu^2 = \sqrt{R_{\nu+1}}.$$

Из (2.14) находим $\overline{\Delta}_\rho = 1$, $\underline{\Delta}_\rho(f) = k$, $\overline{\Delta}^*_\rho(f) = e^{k-1}/\rho$, $\underline{\Delta}^*_\rho(f) = k/\rho$. Осталось вычислить ρ-тип функции f. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Верны равенства

$$\sigma_\rho\left(f_1\right) = \frac{k}{\rho}, \quad \sigma_\rho\left(f_2\right) = \frac{1-k}{e\rho}.$$

Первое равенство доказывается так же, как и в случае $k=1$, а второе — так же, как у Левина в случае $k=0$. Но значения типов функций f_1 и f_2 мало что дают; мы можем получить лишь оценку $\sigma_\rho(f_1 f_2) \leqslant \sigma(f_1) + \sigma(f_2) \leqslant \dfrac{1}{\rho}(k + (1-k)/e)$, но $k + (1-k)/e > \exp(k-1)$ при $0 < k < 1$. Для доказательства равенства $\sigma_\rho(f) = \dfrac{1}{\rho}\exp(k-1)$ требуется более тонкий анализ.

Сначала отметим справедливость равенства

$$\sigma_\rho\left(f\right) = \limsup_{s\to+\infty} A_s, \text{ где } A_s = \max\{R^{-\rho}\ln M\left(f,R\right) | \sqrt{R_s} \leqslant R \leqslant \sqrt{R_{s+1}}\}.$$

Нам предстоит доказать, что в действительности

$$\lim_{s\to+\infty} A_s = \frac{1}{\rho}e^{k-1}. \tag{2.15}$$

Обозначим $E = \bigcup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} I_\nu$ и определим по аналогии со случаем $k=1$ функцию $S\left(R\right) = S_1\left(R\right) + S_2\left(R\right)$, где

$$S_1\left(R\right) = \sum_{m\in E, m^p\leqslant R} n_m\left(\ln R - p\ln m\right), \quad S_2\left(R\right) = \sum_{R_\nu\leqslant R} N_\nu\left(\ln R - \ln R_\nu\right).$$

Тем же методом, что и выше, выводится асимптотика

$$\ln M\left(f,R\right) = S\left(R\right) + o\left(R^\rho\right), \quad R\to+\infty. \tag{2.16}$$

Точно так же, как и в случае $k=1$, исследуется асимптотическое поведение $S_1(R)$. Имеем

$$S_1\left(R\right) \sim \frac{kR^\rho}{\rho}, \quad R\to+\infty, \quad R\in[\sqrt{R_s}, R_s]. \tag{2.17}$$

При $R\in(R_s, k^{-1/\rho}R_s)$, учитывая, что отрезок $\widetilde{I}_s = [R_s^{1/p}, (k^{-1/\rho}R_s)^{1/p}]$ не содержится в множестве E и, следовательно, значения $m\in\widetilde{I}_s$ в сумме S_1 не участвуют, приходим к асимптотике

$$\begin{aligned} S_1\left(R\right) &= \int\limits_1^{R_s^{\frac{1}{p}}} k\left(q+1\right)x^q\left(\ln R - p\ln x\right)dx + o\left(R^\rho\right) = \\ &= k\int\limits_1^{R_s^{\frac{1}{p}}}\left(q+1\right)x^q\left(\ln R_s - p\ln x\right)dx + k\ln\left(\frac{R}{R_s}\right)\int\limits_1^{R_s^{\frac{1}{p}}}\left(q+1\right)x^q dx + o\left(R^\rho\right) = \\ &= \frac{kR_s^\rho}{\rho} + kR_s^\rho\ln\left(\frac{R}{R_s}\right) + o\left(R^\rho\right), \quad R\to+\infty, \quad R\in\left(R_s, k^{\frac{-1}{\rho}}R_s\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Заметим, что, заменяя сумму $S_1(R)$ интегралом, мы игнорируем отсутствие слагаемых в ней с номерами $R_\nu^{1/p} \leqslant m \leqslant (k^{-1/\rho}R_\nu)^{1/p}, 1\leqslant\nu\leqslant s-1$, потому что они ввиду неравенств $R_{s-1} = R_s^{1/4} \leqslant \sqrt{R}$ вносят асимптотически малый вклад. Если же $R\in[k^{-1/\rho}R_s, R_s^2]$, то

$$S_1\left(R\right) = \frac{kR^\rho}{\rho} - \int\limits_{R_s^{\frac{1}{p}}}^{\left(k^{\frac{-1}{\rho}}R_s\right)^{\frac{1}{p}}} k\left(q+1\right)x^q\left(\ln R - p\ln x\right)dx + o\left(R^\rho\right) = \frac{kR^\rho}{\rho} - k\gamma_s + o\left(R^\rho\right),$$

где

$$\gamma_s = \int\limits_{R_s^{\frac{1}{p}}}^{\left(k^{\frac{-1}{\rho}} R_s\right)^{\frac{1}{p}}} (\ln R - p \ln x)\, dx^{q+1} = \left(k^{\frac{-1}{\rho}} R_s\right)^{\frac{q+1}{p}} \ln\left(\frac{R}{R_s} k^{\frac{1}{\rho}}\right) - R_s^{\frac{q+1}{p}} \ln\left(\frac{R}{R_s}\right) +$$

$$+\frac{p}{q+1}\left(\left(k^{\frac{-1}{\rho}} R_s\right)^{\frac{q+1}{p}} - R_s^{\frac{q+1}{p}}\right) = R_s^{\rho}\left(\frac{1}{k}\left(\ln\left(\frac{R}{R_s}\right) + \frac{1}{\rho}\ln k\right) - \ln\left(\frac{R}{R_s}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\right).$$

Следовательно, при $R \in [k^{-1/\rho} R_s, R_s^2]$, $R \to +\infty$ имеем

$$S_1(R) = \frac{kR^{\rho}}{\rho} - R_s^{\rho}\left(\ln\left(\frac{R}{R_s}\right) + \frac{1}{\rho}\ln k - k \ln\left(\frac{R}{R_s}\right) + \frac{1}{\rho}(1-k)\right) + o(R^{\rho}). \tag{2.19}$$

При тех же значениях R сумма $S_2(R)$ асимптотически равна слагаемому с номером s:

$$S_2(R) = (1-k) R_s^{\rho} \ln\left(\frac{R}{R_s}\right) + O\left(R^{\frac{\rho}{4}}\right). \tag{2.20}$$

Сложив асимптотики (2.19) и (2.20), находим

$$S(R) = \frac{kR^{\rho}}{\rho} - R_s^{\rho}\frac{1-k+\ln k}{\rho} + o(R^{\rho}), \quad R \to +\infty, \quad R \in [k^{\frac{-1}{\rho}} R_s, R_s^2]. \tag{2.21}$$

Из (2.18), (2.19) получаем асимптотики

$$S(R) = \frac{kR^{\rho}}{\rho} + o(R^{\rho}), \quad R \in [\sqrt{R_s}, R_s], \quad R \to +\infty,$$

$$S(R) = \frac{kR_s^{\rho}}{\rho} + R_s^{\rho}\ln\left(\frac{R}{R_s}\right) + o(R^{\rho}), \quad R \to +\infty, \quad R \in [R_s, k^{\frac{-1}{\rho}} R_s]. \tag{2.22}$$

Нам надо найти максимум функции $R^{-\rho}S(R)$ на отрезке $[\sqrt{R_s}, R_s^2]$ с точностью $o(1)$ при $s \to \infty$. Соотношения (2.21) и (2.22) дают

$$R^{-\rho}S(R) = \begin{cases} \dfrac{k}{\rho} + o(1), \quad R \in [\sqrt{R_s}, R_s], \\ \dfrac{k}{\rho}\left(\dfrac{R_s}{R}\right)^{\rho} + \left(\dfrac{R_s}{R}\right)^{\rho}\ln\left(\dfrac{R}{R_s}\right) + o(1), \quad R_s \leqslant R \leqslant k^{-1/\rho} R_s, \\ \dfrac{k}{\rho} + \left(\dfrac{R_s}{R}\right)^{\rho}\dfrac{1-k+\ln k}{\rho} + o(1), \quad R \in [k^{-1/\rho} R_s, R_s^2]. \end{cases} \tag{2.23}$$

Из (2.23) видно, что главный член правой части (2.23) достигает максимума на отрезке $R_s \leqslant R \leqslant k^{-1/\rho} R_s$ в точке $R = R_s \exp\left(\frac{1-k}{\rho}\right)$ и равен e^{k-1}/ρ. (Заметим, что $\exp\left(\frac{1-k}{\rho}\right) < k^{-1/\rho}$, $0 < k < 1$, так что точка максимума при больших s попадает на интервал $R_s, k^{-1/\rho} R_s$.) Равенство (2.15) доказано и этим доказательство теоремы 2.1 завершено. □

3. Наименьший тип целой функции порядка $\rho < 1$ с заданной верхней ρ-плотностью корней

В этом и следующем разделах ограничение на нижнюю ρ — плотность корней не накладывается. Ищется величина $C_{\alpha}(\rho)$. Задача решена для значений $\alpha \in [\pi, 2\pi]$; при $\alpha \in (0, \pi)$ результатов по этой задаче пока нет. Было бы интересно доказать неравенство

$$C_{\alpha}(\rho) > \frac{1}{e\rho} \quad \forall \alpha \in (0, \pi) \quad \forall \rho \in (0, 1).$$

Введем функцию

$$\varphi_{\rho}(t, a) = \frac{t^{-\rho}}{2}\ln\left(t^2 + 2at + 1\right), \quad t > 0, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1, \quad 0 < \rho < 1. \tag{3.1}$$

При указанных значениях ρ и a функция $\varphi_\rho(t,a)$ положительна на луче $0<t<+\infty$, непрерывна на нем и даже вещественно-аналитична. А так как

$$\lim_{t\to 0+}\varphi_\rho(t,a)=\lim_{t\to +\infty}\varphi_\rho(t,a)=0,$$

то максимум этой функции достигается в некоторой точке луча $0<t<+\infty$.

Теорема 3.1. *При любых $\alpha\in[\pi,2\pi]$, $\rho\in(0,1)$ верно равенство*

$$C_\alpha(\rho)=\max_{t>0}\varphi_\rho\left(t,-\cos\frac{\alpha}{2}\right). \tag{3.2}$$

Точная нижняя грань в задаче 1 при данных значениях α и ρ достигается на функции, корни которой расположены на $\mathbb{R}_+$, если $\alpha=2\pi$, и на двух лучах $\{r\exp(\pm i\beta)|r>0\}$, $\beta=\pi-\alpha/2$, если $\pi\leqslant\alpha<2\pi$.

Следствие 3.1. *При любом $\rho\in(0,1)$ верно равенство*

$$C_{2\pi}(\rho)=\max_{t>0}t^{-\rho}\ln(1+t), \tag{3.3}$$

$$C_\pi(\rho)=\frac{1}{2}\max_{t>0}t^{-\rho}\ln\left(1+t^2\right)=\frac{1}{2}C_{2\pi}\left(\frac{\rho}{2}\right).$$

Поведение функции $C_\alpha(\rho)$ требует отдельного исследования. Весьма вероятно (я не пробовал доказывать это утверждение), что при любом $\alpha\in[\pi,2\pi]$ функция $C_\alpha(\rho)$ не является элементарной.

Теорема 3.2. *Функция $C_\alpha(\rho)$ является непрерывной на множестве $\{(\alpha,\rho)\mid\pi\leqslant\alpha\leqslant 2\pi,\ 0<\rho<1\}$ и вещественно-аналитичной по α и ρ внутри него. Если $\pi\leqslant\alpha\leqslant 2\arccos(1-e/2))$, то функция $C_\alpha(\rho)$ убывает на интервале $0<\rho<1$. Если $2\arccos\left(1-\dfrac{e}{2}\right)<\alpha\leqslant 2\pi$, то функция $C_\alpha(\rho)$ убывает на интервале $0<\rho<\dfrac{1}{\ln(2-2\cos(\alpha/2))}$ и возрастает на интервале $\dfrac{1}{\ln(2-2\cos(\alpha/2))}<\rho<1$,*

$$\min\{C_\alpha(\rho)\,|0<\rho<1\}=\ln\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\right),\quad 2\arccos\left(1-\frac{e}{2}\right)<\alpha\leqslant 2\pi.$$

При $3\pi/2\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\rho\to 1-0}C_\alpha(\rho)=\left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|. \tag{3.4}$$

При любом $\alpha\in(\pi,2\pi]$ верна асимптотика

$$C_\alpha(\rho)=\frac{1}{e\rho}+\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\exp\left(\frac{-1}{\rho}-1\right)+O\left(\rho^{-2}\ \exp\left(\frac{-2}{\rho}\right)\right),\quad \rho\to 0+, \tag{3.5}$$

а если $\alpha=\pi$, то

$$C_\pi(\rho)=\frac{1}{e\rho}+\frac{1}{2}\exp\left(\frac{-2}{\rho}-1\right)+O\left(\rho^{-2}\ \exp\left(\frac{-4}{\rho}\right)\right),\quad \rho\to 0+. \tag{3.6}$$

Теорема 3.2 показывает, что функции $C_\alpha(\rho)$ при малых ρ весьма близки к $C_0(\rho)\equiv 1/(e\rho)$, но по мере увеличения ρ и α все более отдаляются от $C_0(\rho)$. Было бы интересно доказать выпуклость $C_\alpha(\rho)$ на интервале $0<\rho<1$, каково бы ни было число $\alpha\in[\pi,2\pi]$.

Доказательствам теорем предпошлем три леммы.

Обозначим

$$u=u(t,a)=t^2+2at+1,\quad \Phi(t,a)=\left(t^2+at\right)^{-1}u\ln u,\quad H(t,a)=\frac{2t\,(t+a)^2}{at^2+2t+a}-\ln u. \tag{3.7}$$

Лемма 3.1. *Справедливо тождество $H(0,a)\equiv 0$. При $\sqrt{2}/2\leqslant a\leqslant 1$ функция $H(t,a)$ возрастает на луче $0\leqslant t<+\infty$ и, следовательно, положительна. При $0<a<\sqrt{2}/2$ функция $H(t,a)$ убывает на отрезке $0\leqslant t\leqslant t_0(a)$ и возрастает на луче $t_0(a)<t<+\infty$, где $t_0(a)$ — единственный положительный корень уравнения*

$$at^4+4t^3+2a(4-a^2)t^2+4a^2t=a-2a^3.$$

Верно равенство $\lim\limits_{t\to\infty} H(t,a) = +\infty$ $(\forall a > 0)$. *Следовательно, при* $0 < a < \sqrt{2}/2$ *уравнение* $H(t,a) = 0$ *имеет единственный положительный корень, который обозначим* $t_1(a)$. *Функция* $H(t,a)$ *отрицательна на интервале* $0 < t < t_1(a)$ *и положительна на луче* $t_1(a) < t < +\infty$.

Доказательство. Тождество $H(0,a) \equiv 0,\ 0 < a < 1$, проверяется непосредственной подстановкой значения $t = 0$ в формулу для $H(t,a)$.

Вычислим частную производную функции $H(t,a)$ по переменной t:

$$\frac{\partial H(t,a)}{\partial t} = \frac{2t(t+a)H_1(t,a)}{(at^2+2t+a)^2(t^2+2at+1)^2},$$

где $H_1(t,a) = at^4 + 4t^3 + 2a(4-a^2)t^2 + 4a^2t + 2a^3 + a$.

Если $\sqrt{2}/2 \leqslant a \leqslant 1$, то $H_1(t,a)$ — многочлен переменной t с положительными коэффициентами (только при $a = \sqrt{2}/2$ свободный член равен нулю). Следовательно, $\dfrac{\partial H(t,a)}{\partial t} > 0$ при любом $t > 0$, функция $H(t,a)$ возрастает по переменной t и положительна на луче $0 < t < +\infty$ в силу своей непрерывности на луче $0 \leqslant t < +\infty$ и равенства нулю в точке $t = 0$. Если $0 < a < \sqrt{2}/2$, то $H_1(t,a)$ имеет отрицательный свободный член, а остальные коэффициенты этого полинома положительны. Поэтому $H_1(t,a) < 0$ при $0 \leqslant t < t_0(a)$, $H_1(t,a) > 0$ при $t > t_0(a)$. А так как знаки функций $H_1(t,a)$ и $\partial H(t,a)/\partial t$ при $t > 0,\ a > 0$ совпадают, то ясно, что $H(t,a)$ убывает на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0(a)$, принимает в точке $t = t_0(a)$ минимальное значение, а потом возрастает, стремясь к $+\infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, существует функция $t_1(a) > t_0(a)$ такая, что $H(t_1(a),a) \equiv 0,\ 0 < a \leqslant 1$, и знаки $H(t,a)$ таковы, как сказано в формулировке леммы. Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *При любых* $s \in (2,+\infty)$ *и* $a \in (0,1]$ *уравнение*

$$\Phi(t,a) = s \tag{3.8}$$

имеет на луче $0 < t < +\infty$ *единственное решение, которое обозначим* $T(s,a)$. *Функция* $T(s,a)$ *непрервывна на множестве* $\{(a,s)|0 < a \leqslant 1,\ 2 < s < +\infty\}$ *и является на нем вещественно-аналитичной по переменным* s *и* a. *При* $\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1$ *верно равенство* $\lim\limits_{s\to 2+0} T(s,a) = 0$.

Доказательство. Непосредственно проверяется справедливость тождества

$$\frac{\partial \Phi(t,a)}{\partial t} = H(t,a)\frac{at^2+2t+a}{(t^2+at)^2}. \tag{3.9}$$

При $\sqrt{2}/2 \leqslant a \leqslant 1$, как видно из (3.9) и 3.1, функция $\Phi(t,a)$ возрастает по переменной t на луче $0 \leqslant t < +\infty$. А так как $\Phi(0,a) = 2$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t,a) = +\infty$, функция Φ непрерывна, то уравнение (3.8) имеет на замкнутом луче $0 \leqslant t < +\infty$ единственное решение при любом $s \geqslant 2$, причем $\Phi(t,a) = 2 \Leftrightarrow t = 0$. Таким образом, при $\sqrt{2}/2 \leqslant a \leqslant 1$ функция $T(s,a)$ определена на луче $2 \leqslant s < +\infty$ и является обратной к $\Phi(t,a)$, $T(2,a) = 0$. Поэтому по теореме об обратной функции $T(s,a) \in C(2 \leqslant s < +\infty,\ \sqrt{2}/2 \leqslant a \leqslant 1)$, поскольку Φ является непрерывной по обеим переменным. Более того, функция $T(s,a)$ является вещественно-аналитичной по обеим переменным внутри этой области, поскольку $\Phi(t,a)$ вещественно-аналитична по t и a на множестве $\{(t,a)|0 < t < +\infty,\ 0 < a < 1\}$ и $\dfrac{\partial \Phi(t,a)}{\partial t} > 0$ при всех $a \in [\sqrt{2}/2, 1]$ и $t > 0$.

При $0 < a < \sqrt{2}/2$ согласно лемме 3.1 и (3.9) функция $\Phi(t,a)$ убывает на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1(a)$ и возрастает на луче $t_1(a) \leqslant t < +\infty$. Следовательно, множество значений функции $\Phi(t,a)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1(a)$ есть отрезок $[\Phi(t_1(a),a), 2] \subset (0,2]$; на нем решений уравнения (3.8) нет, поскольку $s > 2$. На луче $t_1(a), +\infty)$ уравнение (3.8) имеет единственное решение в силу непрерывности функции $\Phi(t,a)$, ее возрастания по переменной t, неравенства $\Phi(t_1(a),a) < \Phi(0,a) = 2$ и предельного соотношения $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t,a) = +\infty$. Таким образом, в случае $0 < a < \sqrt{2}/2$ функция $\Phi(t,a)$, будучи рассмотрена на луче $t_1(a) \leqslant t < +\infty$, имеет (как функция переменной t) обратную $T(s,a)$, которая при всех указанных значениях a определена на луче $\Phi(t_1(a),a) \leqslant s < +\infty$, содержащем в себе луч $2 \leqslant s < +\infty$. Ясно также, что функция $T(s,a)$ является непрерывной и вещественно-аналитичной по s на множестве $\{(s,a)|2 \leqslant s < +\infty,\ 0 < a < \sqrt{2}/2\}$, поскольку $\Phi(t,a)$ обладает этим свойством и $\partial\Phi(t,a)/\partial t > 0$ при всех $t \geqslant t_1(a)$, $a \in (0,\sqrt{2}/2)$.

Итак, доказана непрерывность функции $T(s,a)$ на каждом из множеств $\{(s,a)|2 \leqslant s < +\infty,\ \sqrt{2}/2 \leqslant a \leqslant 1\}$, $\{(s,a)|2 \leqslant s < +\infty,\ 0 < a < \sqrt{2}/2\}$ и вещественная аналитичность на их внутренности. Кроме того, во всех точках (t,a) таких, что $\Phi(t,a) > 2$, частная производная $\partial\Phi(t,a)/\partial t$ положительна. Следовательно, на множестве $\{(s,a)|2 < s < +\infty,\ 0 < a < 1\}$ выполняются равенства

$$\frac{\partial T\left(s,a\right)}{\partial s} = \frac{1}{\partial \Phi\left(t,a\right)/\partial t}\Big|_{t=T(s,a)}, \quad \frac{\partial T\left(s,a\right)}{\partial a} = -\frac{\partial \Phi\left(t,a\right)/\partial a}{\partial \Phi\left(t,a\right)/\partial t}\Big|_{t=T(s,a)}.$$

Из этих равенств видно, что на данном множестве функция $T(s,a)$ имеет частные производные и их наличие позволяет заключить, что особенности на линии $a = \sqrt{2}/2,\ 2 < s < +\infty$ отсутствуют и функция $T(s,a)$ непрерывна на множестве $\{(s,a)|2 \leqslant s < +\infty,\ 0 < a \leqslant 1\}$ и вещественно-аналитична на его внутренности. Лемма доказана. □

Положим (см. (3.1))

$$M\left(\rho,a\right) = \max\{\varphi_\rho\left(t,a\right)|0 < t < +\infty\}, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1. \tag{3.10}$$

Существование этой величины было обосновано в начале раздела 3.

Лемма 3.3. *Функция* $M(\rho,a)$ *непрерывна на квадрате* $\{(\rho,a)|0 < \rho < 1, 0 < a \leqslant 1\}$, *вещественно аналитична внутри него и*

$$\lim_{\rho\to 1-0} M\left(\rho,a\right) = a, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant 1. \tag{3.11}$$

Функция $M(\rho,a)$ *убывает по переменной* ρ *на интервале* $(0,1)$ *при любом* $a \in (0,e/2-1]$. *Если* $e/2-1 < a \leqslant 1$, *то функция* $M(\rho,a)$ *убывает по переменной* ρ *на полуинтервале* $0 < \rho \leqslant 1/\ln(2+2a)$, *возрастает на полуинтервале* $\dfrac{1}{\ln(2+2a)} \leqslant \rho < 1$, *а ее наименьшее значение*

$$M\left(\frac{1}{\ln\left(2+2a\right)},a\right) = \frac{1}{2}\ln\left(2+2a\right),\ \frac{e}{2}-1 < a \leqslant 1. \tag{3.12}$$

Доказательство. Убедимся в том, что производная $\partial\varphi_\rho(t,a)/\partial t$ имеет на луче $0 < t < +\infty$ единственный корень; ясно, что именно в нем и будет достигаться максимум $\varphi_\rho(t,a)$ по переменной t. Продифференцировав функцию φ по переменной t, находим

$$t^{\rho+1}\frac{\varphi_\rho\left(t,a\right)}{\partial t} = \frac{t^2+at}{t^2+2at+1} - \frac{\rho}{2}\ln\left(t^2+2at+1\right) = \frac{\rho\left(t^2+at\right)}{2\left(t^2+2at+1\right)}\left(\frac{2}{\rho} - \Phi\left(t,a\right)\right).$$

Полученная формула и лемма 3.2 доказывают, что частная производная $\partial\varphi_\rho/\partial t$ имеет единственный корень $t = T(2/\rho,a)$. Следовательно,

$$M\left(\rho,a\right) = \varphi_\rho\left(T\left(\frac{2}{\rho},a\right),a\right), \quad 0 < a \leqslant 1. \tag{3.13}$$

А так как согласно лемме 3.2 имеем

$$\lim_{\rho\to 1-0} T\left(\frac{2}{\rho},a\right) = 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant 1, \tag{3.14}$$

то из (3.13), (3.14) и предельного соотношения $\lim\limits_{\rho\to 1-0}\varphi_\rho(t,a) = a$ выводим (3.11).

Исследуем монотонность функции M по переменной ρ. Из (3.1) находим

$$T\left(s,a\right) = 1 \Leftrightarrow s = 2\ln\left(2+2a\right).$$

Ввиду возрастания функции $T(s,a)$ по переменной s заключаем, что при $0 < a \leqslant e/2-1$ точка, в которой функция $\varphi_\rho(t,a)$ достигает максимума, лежит на луче $t > 1$, поскольку при рассматриваемых значениях переменной a верно неравенство $\ln(2+2a) \leqslant 1$, зато $s/2 = 1/\rho > 1$.

Итак, зафиксируем значение $a \in (0, e/2-1]$, возьмем два произвольных числа ρ_1, ρ_2 таких, что $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$, и обозначим $t_1 = T(2/\rho_1, a)$, $t_2 = T(2/\rho_2, a)$. И так как $1 < t_2$ (см. предыдущий абзац), то $t_2^{-\rho_2} < t_2^{-\rho_1}$. Следовательно,

$$M(\rho_2, a) = \varphi_{\rho_2}(t_2, a) = \frac{1}{2} t_2^{-\rho_2} \ln\left(t_2^2 + 2at_2 + 1\right) < \frac{1}{2} t_2^{-\rho_1} \ln\left(t_2^2 + 2at_2 + 1\right) = \\ = \varphi_{\rho_1}(t_2, a) < \varphi_{\rho_1}(t_1, a) = M(\rho_1, a).$$

Убывание функции $M(\rho, a)$ по переменной ρ на интервале $0 < \rho < 1$ при $a \in (0, e/2-1]$ доказано. Совершенно аналогичным способом доказывается убывание $M(\rho, a)$ на интервале $0 < \rho < \dfrac{1}{\ln(2+2a)}$ в случае $e/2-1 < a \leqslant 1$, поскольку $T(2/\rho, a) > 1$ при этих значениях (ρ, a). Наоборот, при $a \in (e/2-1, 1]$, $\rho \in (1/\ln(2+2a), 1)$ выполняется неравенство $T(2/\rho, a) < 1$. Поэтому, если взять два числа ρ_1, ρ_2 такие, что $1/\ln(2+2a) < \rho_1 < \rho_2 < 1$, то окажется, что $t_1 < 1$, а значит $t_1^{-\rho_1} < t_1^{-\rho_2}$. Следовательно,

$$M(\rho_1, a) = \varphi_{\rho_1}(t_1, a) = \frac{1}{2} t_1^{-\rho_1} \ln\left(t_1^1 + 2at_1 + 1\right) < \frac{1}{2} t_1^{-\rho_2} \ln\left(t_1^2 + 2at_1 + 1\right) = \\ = \varphi_{\rho_2}(t_1, a) < \varphi_{\rho_2}(t_2, a) = M(\rho_2, a).$$

Этим доказано возрастание функции $M(\rho, a)$ на интервале $1/\ln(2+2a) < \rho < 1$ при любом $a \in (e/2-1, 1]$. Отсюда видно, что при $a \in (e/2-1, 1]$ наименьшее значение функции $M(\rho, a)$ достигается в точке $\rho(a) = 1/\ln(2+2a)$ и оно равно $\varphi_{\rho(a)}(T(2/\rho(a), a), a) = \varphi_{\rho(a)}(1, a) = 1/2 \ln(2+2a)$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Из определения класса последовательностей $\mathbb{C}_\alpha^\infty$ и величины $C_\alpha(\rho) = C_\alpha(\rho, 0)$ видно, что следует минимизировать $\sigma_\rho(f)$ на множестве целых функций f, последовательность корней которых $\Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обладает двумя свойствами:

1. выполнено
$$1) \limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} n_f(r) = 1; \tag{3.15}$$
2. существует функция $N(\varepsilon)(0 < \varepsilon < 1)$ такая, что верно неравенство
$$|\arg \lambda_n| \leqslant \frac{\beta+\varepsilon}{2}, \quad n > N(\varepsilon), \quad \beta = 2\pi - \alpha. \tag{3.16}$$

Давно известно, что если $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность всех корней целой функции f порядка $\rho \in (0,1)$, отличных от точки $z = 0$ (как обычно, каждый корень стоит в последовательности столько раз, какова его кратность), то функция f допускает представление $f(z) = f(0)\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - z/\lambda_n)$, если $f(0) \neq 0$, $f(z) = Az^m \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - z/\lambda_n)$, $m \in \mathbb{N}$, если $f(0) = 0$. Отсюда видно, что любое изменение множества корней на конечное число элементов сохраняет значение $\sigma_\rho(f)$ и, естественно, $\overline{\Delta}_\rho(f)$. Поэтому в доказательстве теоремы 3.1 можно, не ограничивая общности, рассматривать только случай $f(0) = 1$. Итак, доказываем теорему 3.1 для канонических произведений

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad |\lambda_n| \nearrow. \tag{3.17}$$

Обозначим $f_N(z) = \prod\limits_{n=N+1}^{\infty}(1 - z/\lambda_n)$.

Центральным моментом первого этапа доказательства является вывод неравенства

$$\sigma_\rho\left(f_{N(\varepsilon)}\right) \geqslant M\left(\rho, \cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right)\right) \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.18}$$

В случае $\alpha = \beta = \pi$ первый этап доказательства проводится несколько иначе; этот случай рассматривается отдельно. Ввиду доказанной выше непрерывности функции $M(\rho, a)$ на квадрате $0 < \rho < 1$, $0 < a \leqslant 1$ имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M\left(\rho, \cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right)\right) = M\left(\rho, \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right), \quad 0 \leqslant \beta < \pi.$$

Отсюда и из (3.18) ввиду равенства $\sigma_\rho(f_{N(\varepsilon)}) = \sigma_\rho(f)$ $(\forall\varepsilon > 0)$ находим

$$\sigma_\rho(f) \geqslant M\left(\rho, \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) = M\left(\rho, -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Последнее соотношение и определение величины $C_\alpha(\rho)$ влекут за собой оценку снизу

$$C_\alpha(\rho) \geqslant M\left(\rho, -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right). \tag{3.19}$$

Второй этап доказательства состоит в выводе противоположного неравенства. При любых $\rho \in (0,1)$ и $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ предъявляется целая функция f порядка ρ, корни которой лежат на лучах $\{\exp(\pm i(\pi - \alpha/2))|r > 0\}$ в случае $\pi \leqslant \alpha < 2\pi$ и на $\mathbb{R}_+$ в случае $\alpha = 2\pi$, выполняются предельное соотношение (3.15) и равенство

$$\sigma_\rho(f) = M\left(\rho, -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right). \tag{3.20}$$

Это означает справедливость неравенства

$$C_\alpha(\rho) \leqslant M\left(\rho, -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right). \tag{3.21}$$

Из (3.19), (3.21), определения функции M следует (3.2) и заодно доказана достижимость точной нижней грани в задаче 1 ($k = 0$, $0 < \rho < 1$, $\pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$) на функции с указанным выше расположением корней.

Таким образом, осталось вывести неравенство (3.18) и предъявить функцию f, для которой верны (3.15) и (3.20).

Начнем с вывода неравенства (3.18). Возьмем произвольную последовательность $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющую условиям (3.15) и (3.16). Обозначим $r_n = |\lambda_n|$, $\theta_n = \arg\lambda_n$. Ввиду (3.16), (3.17) верны соотношения

$$\ln M\left(f_{N(\varepsilon)}, R\right) \geqslant \ln|f_{N(\varepsilon)}(-R)| = \sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \ln|1 + \frac{R}{\lambda_n}| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \ln\left(\frac{R^2}{r_n^2} + 2\frac{R}{r_n}\cos\theta_n + 1\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \ln\left(\frac{R^2}{r_n^2} + 2\frac{R}{r_n}\cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right) + 1\right). \tag{3.22}$$

Если $\alpha > \pi$, то $\beta < \pi$, интервал $(0, \pi - \beta)$ непуст и

$$\ln\left(\frac{R^2}{r_n^2} + 2\frac{R}{r_n}\cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right) + 1\right) > 0 \quad \forall R > 0\ \forall n > N(\varepsilon)\ \ \forall\varepsilon \in (0, \pi - \beta).$$

Поэтому после удаления из последней суммы в (3.22) части слагаемых неравенство сохранится. Удалим те слагаемые, для которых $r_n > R/\tau$, где $\tau = T(2/\rho, \cos((\beta+\varepsilon)/2))$ — точка, в которой функция

$$\varphi_\rho\left(t, \cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}t^{-\rho}\ln\left(t^2 + 2t\cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right) + 1\right)$$

достигает максимума. Получим

$$\ln M\left(f_{N(\varepsilon)}, R\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n>N(\varepsilon), r_n\leqslant\frac{R}{\tau}} \ln\left(\frac{R^2}{r_n^2} + 2\frac{R}{r_n}\cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right) + 1\right).$$

А так как функция $\ln(t^2 + 2at + 1)$ возрастает на луче $0 < t < +\infty$, каково бы ни было положительное число a, то, взяв для отношения R/r_n его нижнюю границу, равную τ, приходим к оценке

$$\ln M\left(f_{N(\varepsilon)}, R\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(n_f\left(\frac{R}{\tau}\right) - N(\varepsilon)\right)\ln\left(\tau^2 + 2\tau\cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right) + 1\right) =$$

$$= \tau^\rho\left(n_f\left(\frac{R}{\tau}\right) - N(\varepsilon)\right)\varphi_\rho\left(\tau, \cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Разделим последнее соотношение на R^ρ и перейдем к верхнему пределу при $R \to +\infty$. Учитывая равенство (3.15), находим

$$\sigma_\rho\left(f_{N(\varepsilon)}\right) = \limsup_{R\to+\infty} \frac{\ln M\left(f_{N(\varepsilon)}, R\right)}{R^\rho} \geqslant \varphi_\rho\left(\tau, \cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right)\right) \limsup_{R\to+\infty} \frac{n_f\left(\frac{R}{\tau}\right) - N(\varepsilon)}{\left(\frac{R}{\tau}\right)^\rho} =$$

$$= \varphi_\rho\left(\tau, \cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right)\right) \limsup_{r\to+\infty} \frac{n_f(r) - N(\varepsilon)}{r^\rho} = \varphi_\rho\left(\tau, \cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right)\right) = M\left(\rho, \cos\left(\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Последнее равенство верно в силу выбора τ. Неравенство (3.18) в случае $\pi < \alpha \leqslant 2\pi$ доказано, а неравенство (3.19) из него было выведено выше.

Докажем неравенство (3.19) в случае $\alpha = \pi$, то есть

$$C_\pi(\rho) \geqslant M(\rho, 0) = \max_{t>0}\left(\frac{1}{2} t^{-\rho} \ln\left(1+t^2\right)\right). \tag{3.23}$$

Тем же методом, что и выше, получаем неравенство

$$\ln M\left(f_{N(\varepsilon)}, R\right) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \ln\left(\frac{R^2}{r_n^2} - 2\frac{R}{r_n}\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + 1\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{R^2}{r_n^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2\frac{R}{r_n}\sin\frac{\varepsilon}{2}}{1+\left(\frac{R}{r_n}\right)^2}\right) = S_1(R) + S_2(R). \tag{3.24}$$

Оценим сумму $S_1(R) = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{R^2}{r_n^2}\right)$.

Через t_ρ обозначим точку, в которой достигается максимум функции в (3.23):

$$M(\rho, 0) = \frac{1}{2} t_\rho^{-\rho} \ln\left(1 + t_\rho^2\right).$$

Тогда

$$S_1(\rho) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{r_n \leqslant R/t\rho} \ln\left(1 + \frac{R^2}{r_n^2}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \ln\left(1 + \frac{R^2}{r_n^2}\right) \geqslant \frac{1}{2} n_f\left(\frac{R}{t_\rho}\right) \ln\left(1 + t_\rho^2\right) - N(\varepsilon) \ln\left(R^2/r_1^2\right).$$

Отсюда находим

$$\limsup_{R\to+\infty} R^{-\rho} S_1(R) = \limsup_{R\to+\infty} \left(\frac{1}{2} n_f\left(\frac{R}{t_\rho}\right)\left(\frac{R}{t_\rho}\right)^{-\rho} t_\rho^{-\rho} \ln\left(1 + t_\rho^2\right) - R^{-\rho} N(\varepsilon) \ln\left(R^2/r_1^2\right)\right).$$

В последнем выражении вычитаемое стремится к нулю, а верхний предел уменьшаемого равен ($x = R/t_\rho \to +\infty$)

$$\frac{1}{2} t_\rho^{-\rho} \ln\left(1 + t_\rho^2\right) = \limsup_{x\to+\infty} x^{-\rho} n_f(x) = \frac{1}{2} t_\rho^{-\rho} \ln\left(1 + t_\rho^2\right) = M(\rho, 0).$$

Следовательно, верна оценка

$$\limsup_{R\to+\infty} R^{-\rho} S_1(R) \geqslant M(\rho, 0). \tag{3.25}$$

Осталось оценить снизу сумму $S_2(R)$. Для этого применим неравенство $\ln(1-x) \geqslant -2x$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. Это возможно, поскольку

$$\frac{2\left(\frac{R}{r_n}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}}{1+\left(\frac{R}{r_n}\right)^2} \leqslant \varepsilon \frac{\frac{R}{r_n}}{1+\left(\frac{R}{r_n}\right)^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

а число ε можно взять меньшим 1. Следовательно,

$$S_2(R) \geqslant -\varepsilon S_0(R), \quad S_0(R) = \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{R}{r_n}\right), \quad g(t) = \frac{t}{1+t^2}. \tag{3.26}$$

Ввиду неравенства $g(t) < \min(t, 1/t)$ имеем

$$S_0(R) < \sum_{r_n \leqslant R} \frac{r_n}{R} + \sum_{r_n > R} \frac{R}{r_n} = \frac{1}{R} \int\limits_0^R x dn_f(x) + R \int\limits_R^{+\infty} \frac{1}{x} dn_f(x).$$

Осуществив интегрирование по частям в двух последних интегралах, приходим к оценке

$$S_0(R) < n_f(R) + R \int\limits_R^{+\infty} \frac{n_f(x)}{x^2} dx. \tag{3.27}$$

А так как $\limsup\limits_{r \to +\infty} r^{-\rho} n_f(r) = 1$, то из (3.27) находим

$$\limsup_{R \to +\infty} R^{-\rho} S_0(R) \leqslant \frac{2-\rho}{1-\rho}. \tag{3.28}$$

Из (3.24)–(3.26) и (3.28) получаем

$$\sigma_\rho\left(f_{N(\varepsilon)}\right) = \limsup_{R \to +\infty} R^{-\rho} \ln M\left(f_{N(\varepsilon)}\right) \geqslant M(\rho, 0) - \varepsilon \frac{2-\rho}{1-\rho},$$

а это вместе с равенством $\sigma_\rho(f) = \sigma_\rho(f_{N(\varepsilon)})$ $(\forall \varepsilon > 0)$ после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0+$ дает (3.23).

Теперь для любых двух заданных чисел $\rho \in (0,1)$ и $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ построим целую функцию F, имеющую верхнюю ρ-плотность корней, равную 1, для ρ-типа которой верно равенство (3.20). Определим быстро растущую последовательность положительных чисел $\{x_k\}$ рекуррентными соотношениями: $x_1 = 2$, $x_{k+1} = x_k^4$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Обозначим $N_k = [x_k^\rho/2]$. Теперь возьмем возрастающую последовательность положительных чисел, обладающую следующими свойствами: все ее элементы лежат только на отрезках $\Delta_k = [x_k - 1, x_k]$, причем на каждом отрезке Δ_k располагается ровно N_k элементов. Занумеруем эту последовательность в порядке возрастания $\{r_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Нетрудно убедиться в том, что верхняя ρ-плотность последовательности $\{r_m\}$ равна $1/2$.

Положим

$$\beta = \pi - \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda_{2m-1} = r_m e^{i\beta}, \quad \lambda_{2m} = r_m e^{-i\beta}, \quad m \in \mathbb{N}, F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right). \tag{3.29}$$

Таким образом, корни функции F лежат на $\mathbb{R}_+$, если $\alpha = 2\pi$ и на лучах $\arg z = \pm\beta/2$, если $\pi \leqslant \alpha < 2\pi$, $\overline{\Delta}_\rho(F) = 1$. В случае $\alpha = 2\pi$ очевидно тождество

$$M(F, R) = F(-R) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{R}{\lambda_n}\right) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{R}{r_m}\right)^2, \quad R > 0. \tag{3.30}$$

Если же $\pi \leqslant \alpha < 2\pi$, то в силу (3.29) справедливо представление

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_m} e^{-i\beta}\right) \left(1 + \frac{z}{r_m} e^{-i\beta}\right) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{r_m} \cos\beta + \frac{z^2}{r_m^2}\right). \tag{3.31}$$

Из (3.31) следует тождество

$$M(F, R) = F(-R) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2R}{r_m} \cos\beta + \frac{R^2}{r_m^2}\right), \quad R > 0. \tag{3.32}$$

Видно, что (3.30) является частным случаем (3.32) при $\beta = 0$, т. е. $\alpha = 2\pi$.

Исходя из формулы (3.32), вычислим тип функции F при порядке ρ. Имеем

$$\sigma_\rho(F) = \limsup_{k \to \infty} A_k, \quad A_k = \max\{R^{-\rho} \ln M(F, R) \,|\, \sqrt{x_k} \leqslant R \leqslant \sqrt{x_{k+1}}\}. \tag{3.33}$$

Докажем, что на самом деле существует предел

$$\lim_{k \to \infty} A_k = M(\rho, \cos\beta) = M\left(\rho, -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right), \quad 0 < \rho < 1, \quad \pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi. \tag{3.34}$$

Из (3.33), (3.34) сразу же получим (3.20) и доказательство теоремы 3.1 завершится.

Оценка снизу A_k проста. В ряде с положительными слагаемыми

$$\ln M(F,R) = \prod_{m=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2R}{r_m}\cos\beta + \frac{R^2}{r_m^2}\right) \tag{3.35}$$

оставим только те, для которых $r_m \in \Delta_k$, и заменим r_m максимальным значением x_k:

$$\ln M(F,R) > N_k \ln\left(1 + \frac{2R}{x_k}\cos\beta + \frac{R^2}{x_k^2}\right).$$

Затем положим $R/x_k = t$, и так как $N_k > x_k^{\rho}/2 - 1$, придем к неравенству

$$R^{-\rho}\ln M(F,R) > \frac{1}{2}t^{-\rho}\ln\left(1 + 2t\cos\beta + t^2\right) + O\left(R^{-\rho}\ln R\right).$$

Взяв максимум по t, получаем

$$A_k > M(\rho,\cos\beta) + o(1), \quad k \to +\infty. \tag{3.36}$$

Оценка сверху A_k основана на том, что во-первых, слагаемые ряда (3.35), для которых $r_m \in \Delta_\nu, \nu \neq k$, дают асимптотически малый вклад в эту сумму при $R \in [\sqrt{x_k}, \sqrt{x_{k+1}}]$, а во-вторых, верна асимптотика

$$\sum_{r_m \in \Delta_k} \ln\left(1 + \frac{2R}{r_m}\cos\beta + \frac{R^2}{r_m^2}\right) = N_k \ln\left(1 + \frac{2R}{x_k}\cos\beta + \frac{R^2}{x_k^2}\right) + O\left(x_k^{\rho-1}\right). \tag{3.37}$$

Последнее соотношение следует из того, что

$$\left|\frac{d\ln\left(1 + \frac{aR}{y} + \frac{R^2}{y^2}\right)}{dy}\right| \leqslant \frac{2}{y} \quad \forall y > 0\ \forall R > 0\ \forall a \geqslant 0,$$

а значит погрешность от замены r_m на x_k в выражении $\ln\left(1 + \dfrac{2R}{r_m}\cos\beta + \frac{R^2}{r_m^2}\right)$ не выше $O(1/x_k)$, поскольку $r_m \in [x_k - 1, x_k]$. Суммы по корням функции F, модули которых лежат на отрезке Δ_ν, $\nu \neq k$, при $R \in [\sqrt{x_k}, \sqrt{x_{k+1}}]$ оцениваются следующим образом:

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{r_m \in \Delta_\nu} \ln\left(1 + \frac{2R}{r_m}\cos\beta + \frac{R^2}{r_m^2}\right) = O\left(\ln R \sum_{\nu=1}^{k-1} N_\nu\right) = O\left(x_{k-1}^{\rho}\ln R\right) = O\left(x_k^{\frac{\rho}{4}}\ln R\right) =$$

$$= O\left(R^{\frac{\rho}{2}}\ln R\right) = o(R^\rho), \quad R \to +\infty,$$

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\sum_{r_m \in \Delta_\nu} \ln\left(1 + \frac{2R}{r_m}\cos\beta + \frac{R^2}{r_m^2}\right) \leqslant 2\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\sum_{r_m \in \Delta_\nu} \ln\left(1 + \frac{R}{r_m}\right) \leqslant 2\sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{RN_\nu}{x_\nu - 1} =$$

$$= O\left(R\sum_{\nu=k+1}^{\infty} x_\nu^{\rho-1}\right) = O\left(Rx_{k+1}^{\rho-1}\right) = O\left(R \cdot R^{2(\rho-1)}\right) = O\left(R^{2\rho-1}\right) = o(R^\rho), \quad R \to +\infty.$$

Отсюда и из (3.37) при $R \in [\sqrt{x_k}, \sqrt{x_{k+1}}]$ находим

$$R^{-\rho}\ln M(F,R) \leqslant R^{-\rho}N_k \ln\left(1 + \frac{2R}{x_k}\cos\beta + \frac{R^2}{x_k^2}\right) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{R}{x_k}\right)^{-\rho}\ln\left(1 + \frac{2R}{x_k}\cos\beta + \frac{R^2}{x_k^2}\right) + o(1), \quad k \to \infty. \tag{3.38}$$

Снова обозначив $R/x_k = t$ и взяв максимум по t от функции, стоящей в правой части (3.38), на отрезке $x_k^{-1/2} \leqslant t \leqslant x_k = \sqrt{x_{k+1}}/x_k$ (при всех достаточно больших k точка максимума функции $\varphi_\rho(t,\cos\beta)$ попадает на этот отрезок) придем к асимптотическому неравенству

$$A_k \leqslant M(\rho,\cos\beta) + o(1), \quad k \to \infty. \tag{3.39}$$

Из (3.39), (3.36) следует (3.34). Доказательство теоремы 3.1 завершено. □

Доказательство теоремы 3.2. Утверждения о непрерывности, вещественной аналитичности, монотонности функции $C_\alpha(\rho)$ и предельное соотношение (3.4) следуют из (3.2), определения (3.10) и леммы 3.3. Остается вывести асимптотики (3.5), (3.6). Сперва доказывается асимптотическая формула

$$T\left(\frac{2}{\rho}, a\right) = \exp\left(\frac{1}{\rho}\right) - a\left(1+\frac{1}{\rho}\right) + O\left(\rho^{-2}\right)\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \to 0+, \quad 0 < a \leqslant 1. \tag{3.40}$$

Затем, поскольку

$$M(\rho, a) = \varphi_\rho\left(T\left(\frac{2}{\rho}, a\right), a\right), \tag{3.41}$$

мы подставляем асимптотику $T(2/\rho, a)$(3.40) в правую часть равенства (3.41) и приходим к (3.5), где $a = |\cos(\alpha/2))|$. Асимптотика (3.6) сразу же следует из соотношений (3.5) и (3.3).

Итак, для завершения доказательства теоремы осталось вывести асимптотику (3.40). Уравнение $\Phi(t, a) = 2/\rho$ равносильно уравнению

$$G(t) = 0, \quad G(t) = \frac{\rho}{2}\ln\left(t^2 + 2at + 1\right) - \frac{t^2 + at}{t^2 + 2at + 1}. \tag{3.42}$$

Обозначим $A = \exp(1/\rho)$, $\tau = A - t$. Функция G перепишется в виде

$$G(t) = \frac{\rho}{2}\ln\left(1 + \frac{2a - 2\tau}{A} + \frac{\tau^2 - 2a\tau + 1}{A^2}\right) - \frac{1 + at}{t^2 + 2at + 1}. \tag{3.43}$$

При любых $a \in (0, 1]$, $t > 0$ справедливо двойное неравенство

$$\frac{a}{t} - \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1 + at}{t^2 + 2at + 1} \leqslant \frac{a}{t} + \frac{1}{t^2}. \tag{3.44}$$

Из (3.43), (3.44) и оценки $\ln x \leqslant x - 1$ ($\forall x > 0$) находим

$$G(t) \leqslant \frac{\rho(a - \tau)}{A} + \frac{\rho\left(\tau^2 - 2a\tau + 1\right)}{2A^2} + \frac{a}{t} + \frac{1}{t^2}. \tag{3.45}$$

Далее имеем

$$1 + \frac{2(a - \tau)}{A} + \frac{\tau^2 - 2a\tau + 1}{A^2} = \left(1 + \frac{a - \tau}{A}\right)^2 + \frac{1 - a^2}{A^2} \geqslant \left(1 + \frac{a - \tau}{A}\right)^2.$$

Следовательно,

$$G(t) \geqslant \rho\ln\left(1 + \frac{a - \tau}{A}\right) + \frac{a}{t} - \frac{1}{t^2}. \tag{3.46}$$

Теперь ограничим значения τ отрезком $a \leqslant \tau \leqslant A/2 \Leftrightarrow A/2 \leqslant t \leqslant A - a$ и докажем, что именно на этом отрезке функция $G(t)$ при всех достаточно больших A имеет корень (единственность корня равносильного (3.42) уравнения была доказана в лемме 3.2). При этих значениях τ верны неравенства

$$\frac{1}{A} \leqslant \frac{1}{t} = \frac{1}{A} + \frac{\tau}{A(A - \tau)} \leqslant \frac{1}{A} + \frac{2\tau}{A^2}, \quad \frac{1}{A^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{4}{A^2}. \tag{3.47}$$

Из (3.45)–(3.47), воспользовавшись оценкой $\ln(1+y) > y - y^2$, $y \geqslant -0.5$, и проделав необходимые преобразования, получаем двойное неравенство

$$\frac{\rho(a - \tau) + a}{A} - \frac{\rho\tau^2 + 4}{A^2} \leqslant G(t) \leqslant \frac{\rho(a - \tau) + a}{A} + \frac{\rho\tau^2 + 2\tau + 5}{A^2}. \tag{3.48}$$

Положим

$$\tau_\pm = a\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \pm \frac{20}{A\rho^2}, \quad t_\pm = A - \tau_\pm.$$

Из (3.48) следует, что при всех достаточно малых ρ верны неравенства $G(t_+) < 0$, $G(t_-) > 0$. Отсюда заключаем, что на отрезке $[t_+, t_-]$ имеется корень функции G и при достаточно малых ρ верно включение $[t_+, t_-] \subset [A/2, A - a]$. Этим асимптотика (3.40) доказана и доказательство теоремы 3.2 завершено. □

4. Двусторонняя оценка наименьшего возможного ρ-типа целой функции порядка $\rho > 1$, корни которой имеют заданную верхнюю ρ-плотность и лежат в «малом» угле

В отличие от случая $0 < \rho < 1$, при $\rho > 1$ автору не удалось найти точное значение даже величины $C_{2\pi}(\rho)$. Получена лишь двусторонняя оценка $C_\alpha(\rho)$, когда α принимает значения $2\pi - \dfrac{\pi}{2p(p+1)} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $p = [\rho]$, ρ не целое. Причина такой незавершенности результатов в том, что разложение в произведение целой функции порядка $\rho > 1$ устроено сложнее, чем в случае $\rho < 1$, а основные идеи доказательства остались примерно теми же, что и при $\rho < 1$. Было бы желательно применить к этой задаче какие-либо новые, более тонкие методы исследования.

Всюду в этом разделе $p \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{gathered}
E_p(w) = (1-w)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{w^k}{k}\right), \\
\mathcal{F}_p(r,\varphi) = \ln\left|E_p\left(re^{i\varphi}\right)\right| = \frac{1}{2}\ln\left(r^2 - 2r\cos\varphi + 1\right) + \sum_{k=1}^{p} \frac{r^k}{k}\cos k\varphi.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Если f — целая функция нецелого порядка $\rho > 1$, то она имеет бесконечно много нулей $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (не ограничивая общности, как и в разделе 3 считаем, что $f(0) = 1$) и допускает разложение в произведение

$$
f(z) = f_0(z)\exp(g(z)), \quad f_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/\lambda_n), \quad p = [\rho], \tag{4.2}
$$

g — многочлен степени $\leqslant p$, $g(0) = 0$.

Из (4.2) видно, что $\sigma_\rho(f) = \sigma_\rho(f_0)$ и если $\varphi_n = \arg\lambda_n$, то

$$
\ln\left|f_0\left(re^{i\varphi}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \varphi - \varphi_n\right). \tag{4.3}
$$

Из теоремы Линделефа о типе целой функции целого порядка [2, гл. 1, § 11], следует, что если $\rho \in \mathbb{N}$, $0 < \overline{\Delta}_\rho(f) < +\infty$, а все корни функции f кроме, может быть, конечного числа, лежат в некотором угле раствора, меньшего π/ρ, то $\sigma_\rho(f) = +\infty$. Следовательно,

$$
C_\alpha(\rho) = +\infty \quad \text{при} \quad \rho \in \mathbb{N}, \quad 2\pi - \frac{\pi}{\rho} < \alpha \leqslant 2\pi. \tag{4.4}
$$

А так как мы рассматриваем еще меньший промежуток значений α, то для них задача интересна только при нецелом ρ. Заслуживает внимания, что, несмотря на равенство (4.4), даже самый большой из экстремумов $C_{2\pi}(\rho)$ ограничен на множестве $(1, +\infty)\backslash\mathbb{N}$.

Теорема 4.1. *Справедливы оценки сверху*

$$
C_{2\pi}(\rho) \leqslant 2^{1-\rho}\left(1 + \max_{r\geqslant 2}\frac{\ln(r-1)}{r}\right) < 1.28 \cdot 2^{1-\rho}, \quad 1 < \rho < 2, \tag{4.5}
$$

$$
C_{2\pi}(\rho) \leqslant \frac{2}{\rho}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^{\rho-1} < \frac{2^{2-\rho}}{\rho}, \quad \frac{3}{2} < \rho < 2, \tag{4.6}
$$

$$
C_{2\pi}(\rho) < 1, \quad \rho > 2. \tag{4.7}
$$

Для лучшего понимания формулировки теоремы об оценке снизу $C_\alpha(\rho)$, а также для ее доказательства важна

Лемма 4.1. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *минимум функции $\mathcal{F}_p(1,\varphi)$ на отрезке $\dfrac{\pi}{2p+2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2p}$ равен $\mathcal{F}_p\Big(1, \dfrac{\pi}{2p}\Big)$ при любом $p \in \mathbb{N}$;*
2. *последовательность $\Big\{\mathcal{F}_p\Big(1, \dfrac{\pi}{2p}\Big)\Big\}_{p\in\mathbb{N}}$ возрастает, $\mathcal{F}_1(1, \pi/2) = \dfrac{1}{2}\ln 2$;*
3. *последовательность $\Big\{\mathcal{F}_p\Big(1, \dfrac{\pi}{2p+1}\Big)\Big\}_{p\in\mathbb{N}}$ убывает, $\mathcal{F}_1(1, \pi/3) = \dfrac{1}{2}$;*

4. $\lim\limits_{p\to\infty}\mathcal{F}_p\Big(1,\dfrac{\pi}{2p}\Big)=\lim\limits_{p\to\infty}\mathcal{F}_p\Big(1,\dfrac{\pi}{2p+1}\Big)=ci\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)=-\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\dfrac{\cos t}{t}dt=0.472\ldots.$

Теорема 4.2. *Положим* $\alpha(\rho)=2\pi-\dfrac{\pi}{2p(p+1)},\ p=[\rho],\ \rho>1,\ \rho\notin\mathbb{N}.$

Справедливы неравенства

$$\frac{1}{2}\ln 2\leqslant\mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p}\right)\leqslant C_{\alpha(\rho)}\left(\rho\right),\qquad ci\left(\frac{\pi}{2}\right)<\mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p+1}\right)\leqslant C_{2\pi}\left(\rho\right).$$

При $1<\rho<2$ *верна более сильная оценка снизу*: $2^{-\rho/2}\leqslant C_{2\pi}(\rho)$.

В итоге получаем, что на множестве $\{\rho>1|\rho\notin\mathbb{N}\}$ функция $C_{2\pi}(\rho)$ ограничена сверху и отделена от нуля:

$$\frac{1}{2}<C_{2\pi}\left(\rho\right)<1.28,\ \rho\in(1,2)\,;\ 0.472<C_{2\pi}\left(\rho\right)<1,\ \rho\in(2,+\infty)\setminus\mathbb{N}.$$

Еще меньшая величина $C_{\alpha(\rho)}(\rho)$ ограничена снизу постоянной $(1/2)\ln 2$.

Автору неизвестно ни одно точное значение $C_{2\pi}(\rho)$ при $\rho>1$. Однако, из двойного неравенства

$$2^{-\rho/2}\leqslant C_{2\pi}(\rho)<2^{2-\rho}/\rho,\quad 3/2<\rho<2,$$

следует предельное соотношение

$$\lim_{\rho\to2-0}C_{2\pi}(\rho)=1/2,$$

и это — единственный точный результат, который получен при $\rho>1$. Не удается доказать монотонность $C_{2\pi}(\rho)$ на интервалах $p<\rho<p+1,\ p\in\mathbb{N}$. Было бы интересно выяснить, существует ли $L=\lim\limits_{\substack{\rho\to+\infty\\ \rho\notin\mathbb{N}}}C_{2\pi}(\rho)$. Есть основания предполагать, что ответ положителен и $L=ci(\pi/2)$, но это пока не доказано. Автору неизвестно, существует ли значение $\alpha\in(0,2\pi)$, при котором функция $C_\alpha(\rho)$ отделена от нуля на луче $\rho>1$. Напомним, что $C_0(\rho)=(e\rho)^{-1}$. Словом, проблем в этой области исследований немало.

Перейдем к доказательствам сформулированных утверждений. Начнем с вывода оценок снизу.

Лемма 4.2. *Если* $p\in\mathbb{N}$, *то при любом* $\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2p+2},\dfrac{\pi}{2p}\right]$ *функция* $\mathcal{F}_p(r,\varphi)$ *положительна и возрастает на луче* $0<r<+\infty$.

Доказательство. Из (4.1) находим

$$\frac{\partial\mathcal{F}_p}{\partial r}\left(r,\varphi\right)=\frac{r-\cos\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}+\sum_{k=1}^{p}r^{k-1}\cos k\varphi=r^p\frac{r\cos\left(p\varphi\right)-\cos\left(p+1\right)\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}.$$

При $\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2p+2},\dfrac{\pi}{2p}\right]$ оба слагаемых в числителе последней дроби неотрицательны и одновременно в нуль не обращаются. Следовательно,

$$\frac{\partial\mathcal{F}_p}{\partial r}\left(r,\varphi\right)>0\quad\forall r>0\quad\forall\varphi\in\left[\frac{\pi}{2p+2},\frac{\pi}{2p}\right].\tag{4.8}$$

А так как $\mathcal{F}_p(0,\varphi)\equiv0$, то из (4.8) получаем утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 4.2. Возьмем произвольную функцию f порядка $\rho\notin\mathbb{N},\ \rho>1$, множество корней которой образует последовательность $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^\infty_{\alpha(\rho)}$ и имеет верхнюю ρ-плотность, равную 1. Поскольку

$$2\pi-\alpha\left(\rho\right)=\frac{\pi}{2p\left(p+1\right)}=\frac{\pi}{2p}-\frac{\pi}{2p+2},\quad p=[\rho],$$

то, осуществив надлежащий поворот плоскости, получим, что для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n>N(\varepsilon)$ верно неравенство

$$-\frac{\pi}{2p}-\varepsilon<\arg\lambda_n<\varepsilon-\frac{\pi}{2p+2}.$$

По аналогии с предыдущим разделом обозначим $f_N(z) = \prod\limits_{n>N} E_p(z/\lambda_n)$. Тогда (см. выше (4.2) и (4.3)) имеем

$$\ln|f_{N(\varepsilon)}(r)| = \sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n\right), \quad \theta_n = -\arg\lambda_n \in [\frac{\pi}{2p+2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2p} + \varepsilon]. \tag{4.9}$$

Для применения метода асимптотической оценки снизу таких сумм, уже использованного в разделе 3 в случае $p = 0$, требуется положительность функции $\mathcal{F}_p$ и ее возрастание по первой переменной. Согласно лемме 4.2 в случае $p \in \mathbb{N}$ функция $\mathcal{F}_p(r,\varphi)$ обладает этим свойством, если $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2p+2}, \frac{\pi}{2p}\right]$. Поэтому в (4.9) следует заменить сумму $\sum\limits_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n\right)$ суммой $\sum\limits_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n'\right)$, где $\theta_n' = \theta_n$, если $\theta_n \in \left[\frac{\pi}{2p+2}, \frac{\pi}{2p}\right]$; $\theta_n' = \frac{\pi}{2p+2}$, если $\theta_n \in \left[\frac{\pi}{2p+2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2p+2}\right)$; $\theta_n' = \frac{\pi}{2p}$, если $\theta_n \in \left(\frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{2p} - \varepsilon\right]$. Имеем

$$\left|\sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n\right) - \sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n'\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{n>N(\varepsilon)} \max\left\{\left|\frac{\partial\mathcal{F}_p}{\partial\varphi}\left(\frac{r}{\lambda_n}, \varphi\right)\right| | \frac{\pi}{2p+2} - \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2p} + \varepsilon\right\}.$$

Из тождества

$$\frac{\partial\mathcal{F}_p}{\partial\varphi}(r,\varphi) = \frac{r\cos\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} - \sum_{k=1}^{p} r^k \sin k\varphi = r^{p+1}\frac{\sin(p+1)\varphi - r\sin p\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} \tag{4.10}$$

немедленно следует оценка $|\partial\mathcal{F}_p(r,\varphi)/\partial\varphi| \leqslant r^p \min(1,r)\operatorname{cosec}^2(\varphi/2)$. Следовательно, при $\varepsilon < \pi/(4p+4)$ получим неравенство

$$\left|\sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n\right) - \sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n'\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\pi}{8p+8}\right)} \sum_{n>N(\varepsilon)} \left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right)^p \min\left(1, \frac{r}{|\lambda_n|}\right).$$

Далее, ввиду неравенства

$$n_\Lambda(t) \leqslant at^\rho \ \ (\forall t > 0) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right)^p \min\left(1, \frac{r}{|\lambda_n|}\right) \leqslant \frac{a\rho r^\rho}{\{\rho\}(1 - \{\rho\})} \ \ (\forall r > 0), \ p = [\rho], \ a > 0,$$

при любом нецелом $\rho > 1$ получаем оценку

$$\left|\sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n\right) - \sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n'\right)\right| \leqslant \varepsilon A(\rho)\, r^\rho, \tag{4.11}$$

где $A(\rho) = 2\rho\{\rho\}^{-1}(1 - \{\rho\})^{-1}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{16p}\right)$. (Поскольку $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 1$, то существует такой номер N_0, что количество элементов последовательности $\{\lambda_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ в любом круге $|z| < t$ меньше $2t^\rho$.) Заметим, что скорость стремления $A(\rho)$ к $+\infty$ при $\rho \to +\infty$ или $\rho \to \nu \pm 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, в данном случае не важна. Принципиальным является наличие множителя ε в правой части (4.11).

Оценим снизу последнюю сумму в (4.11). Согласно лемме 4.2, все ее слагаемые положительны. Поэтому, отбросив часть их, придем к оценке снизу

$$\sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n'\right) > \sum_{n>N(\varepsilon),\ |\lambda_n|\leqslant r} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n'\right). \tag{4.12}$$

А так как по лемме 4.2 $\mathcal{F}_p(x,\varphi)$ возрастает на луче $0 < x < +\infty$ при любом $\varphi \in \left[\dfrac{\pi}{2p+2}, \dfrac{\pi}{2p}\right]$, то

$$\mathcal{F}_p\left(1, \theta_n'\right) \leqslant \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n'\right), \quad \text{если } |\lambda_n| \leqslant r.$$

Следовательно,

$$\sum_{n>N(\varepsilon),\ |\lambda_n|\leqslant r} \mathcal{F}_p\left(1, \theta_n'\right) \geqslant \sum_{n>N(\varepsilon),\ |\lambda_n|\leqslant r} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n'\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(n_f(r) - N(\varepsilon)\right) \min\{\mathcal{F}_p(1,\varphi) \,|\, \frac{\pi}{2p+2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2p}\} = \left(n_f(r) - N(\varepsilon)\right) \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p}\right). \tag{4.13}$$

Последнее равенство верно в силу утверждения 1) леммы 4.1.

Из (4.11)–(4.13) и (4.9) находим

$$\ln|f_{N(\varepsilon)}(r)| \geqslant \left(n_f(r) - N(\varepsilon)\right) \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p}\right) - \varepsilon A(\rho)\, r^{-\rho}.$$

Следовательно,

$$r^{-\rho} \ln\left(f_{N(\varepsilon)}(r)\right) \geqslant r^{-\rho}\left(n_f(r) - N(\varepsilon)\right) \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p}\right) - \varepsilon A(\rho).$$

Перейдя в этом соотношении к верхнему пределу при $r \to +\infty$ и учитывая равенство $\overline{\Delta}_\rho(f) = 1$, при любом $\varepsilon > 0$ получим

$$\sigma_\rho(f) = \sigma_\rho\left(f_{N(\varepsilon)}\right) \geqslant \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p}\right) - \varepsilon A(\rho),$$

и, наконец, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ придем к неравенству $\sigma_\rho(f) \geqslant \mathcal{F}_p\Big(1, \dfrac{\pi}{2p}\Big)$, которое и требовалось доказать.

Оценка снизу величины $C_{2\pi}(\rho)$ делается тем же самым методом. Рассмотрим целую функцию порядка ρ, множество ненулевых корней которой образует последовательность $\{\lambda_n\}_{n_\mathbb{N}} \in \mathbb{C}_{2\pi}^\infty$, а $N(\varepsilon)$ — такая функция, что при любом $n > N(\varepsilon)$ верно неравенство $|\arg\lambda_n| \leqslant \varepsilon$. Обозначим $\theta_n = \pi/(2p+1) - \arg\lambda_n$, получим

$$\ln\left|f_{N(\varepsilon)}\left(r\exp\left(\frac{\pi i}{2p+1}\right)\right)\right| = \sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \theta_n\right) \geqslant \sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_p\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \frac{\pi}{2p+1}\right) - \varepsilon A(\rho)\, r^\rho.$$

Далее, рассуждая в точности так же, как и выше, приходим к неравенству $\sigma_\rho(f) \geqslant \mathcal{F}_p\Big(1, \dfrac{\pi}{2p+1}\Big)$. Выбор луча,на котором оценивается снизу модуль функции f, продиктован теоремой Данжуа [11]:

$$\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi} \mathcal{F}_p(1,\varphi) = \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right).$$

При выводе оценки $2^{-\rho/2} \leqslant C_{2\pi}(\rho),\ 1 < \rho < 2$, используется равенство

$$\mathcal{F}_1\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Изложенным выше методом получаем оценку

$$\ln|f_{N(\varepsilon)}\left(re^{\pi i/4}\right)| \geqslant \sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_1\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \frac{\pi}{4}\right) - \varepsilon A(\rho)\, r^\rho. \tag{4.14}$$

Оценка снизу суммы в (4.14) делается так. По лемме 4.2 функция $\mathcal{F}_1\Big(x, \dfrac{\pi}{4}\Big)$ является положительной и возрастающей на луче $0 < x < +\infty$. Поэтому

$$\sum_{n>N(\varepsilon)} \mathcal{F}_1\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \frac{\pi}{4}\right) > \sum_{n>N(\varepsilon),\ |\lambda_n|\leqslant r/\sqrt{2}} \mathcal{F}_1\left(\frac{r}{|\lambda_n|}, \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \left(n_f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) - N(\varepsilon)\right) \mathcal{F}_1\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= n_f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) - N(\varepsilon). \quad (4.15)$$

Из (4.14), (4.15) находим

$$\limsup_{r\to+\infty}\left(r^{-\rho}\ln\left|f_{N(\varepsilon)}\left(re^{\pi i/4}\right)\right|\right) \geqslant \limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho}\left(n_f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) - N(\varepsilon)\right) - \varepsilon A(\rho) = 2^{-\rho/2} - \varepsilon A(\rho).$$

В силу произвольности ε и равенства $\sigma_\rho(f) = \sigma_\rho(f_{N(\varepsilon)})$ $(\forall\varepsilon > 0)$ получаем $\sigma_\rho(f) \geqslant 2^{-\rho/2}$. Теорема доказана. □

Докажем лемму 4.1, которую мы сформулировали, использовали в доказательстве теоремы 4.2, но еще не доказали.

Доказательство. Начнем с доказательства утверждения 1). Согласно (4.10) имеем

$$\frac{\partial\mathcal{F}_p}{\partial\varphi}(1,\varphi) = \frac{\sin(p+1)\varphi - \sin p\varphi}{2 - 2\cos\varphi} = \frac{\cos(p+1/2)\varphi}{2\sin\varphi/2}. \quad (4.16)$$

Отсюда видно, что функция $\mathcal{F}_p(1,\varphi)$ возрастает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2p+2}, \frac{\pi}{2p+1}\right]$, убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2p+1}, \frac{\pi}{2p}\right]$ и, следовательно,

$$\min\{\mathcal{F}_p(1,\varphi)\,|\,\frac{\pi}{2p+2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2p}\} = \min\left(\mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+2}\right), \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p}\right)\right).$$

Поэтому для доказательства утверждения 1) достаточно проверить справедливость неравенства

$$\mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p}\right) < \mathcal{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+2}\right) \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (4.17)$$

Воспользовавшись определением функции $\mathcal{F}_p$, перепишем неравенство (4.17) в следующей форме:

$$\ln\sin\left(\frac{\pi}{4p}\right) - \ln\sin\left(\frac{\pi}{4p+4}\right) < \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\cos\left(\frac{\pi k}{2p+2}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{2p}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\frac{2}{k}\sin\left(\frac{\pi k}{4p(p+1)}\right)\sin\left(\frac{\pi k(2p+1)}{4p(p+1)}\right). \quad (4.18)$$

Именно это неравенство мы и будем доказывать. Левую часть (4.18) оценим сверху, а правую — снизу.

Если $g \in C^3[a,b]$ и $g'''(x)$ убывает на $[a,b]$, то верно неравенство

$$g(b) - g(a) < g'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24}g'''(a). \quad (4.19)$$

Действительно, обозначив $x_0 = (a+b)/2,\ h = (b-a)/2$ и написав тейлоровское разложение с остатком в форме Лагранжа, получим

$$g(b) = g(x_0) + hg'(x_0) + \frac{h^2}{2}g''(x_0) + \frac{h^3}{6}g'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_0, b),$$

$$g(a) = g(x_0) - hg'(x_0) + \frac{h^2}{2}g''(x_0) - \frac{h^3}{6}g'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (a, x_0).$$

Вычтем второе равенство из первого:

$$g(b) - g(a) = 2hg'(x_0)\,\frac{h^3}{6}\left(g'''(\xi_1) + g'''(\xi_2)\right). \quad (4.20)$$

Воспользовавшись убыванием g''', приходим к (4.19).

Возьмем в (4.19) $g(x) = \ln\sin x$, $a = \pi/(4p+4), b = \pi/(4p)$. Поскольку третья производная $g'''(x) = 2\operatorname{ctg} x(1+\operatorname{ctg}^2 x)$ убывает на $(0,\pi/2)$ и допускает оценку $g'''(x) \leqslant (8/3)\operatorname{ctg}^3 x$, $0 < x \leqslant \pi/6$, приходим к неравенству

$$\ln\sin\left(\frac{\pi}{4p}\right) < \ln\sin\left(\frac{\pi}{4p+4}\right) < \frac{\pi}{4p\,(p+1)}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\,(2p+1)}{8p\,(p+1)}\right) + \\ + \frac{\pi^3}{64p^3\,(p+1)^3}\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4p+4}\right) < \frac{\pi}{4p\,(p+1)}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\,(2p+1)}{8p\,(p+1)}\right) + \frac{1}{9p^3}. \tag{4.21}$$

В последнем переходе использована оценка $\operatorname{ctg}\alpha < 1/\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$.

Согласно неравенству $\sin x > x - x^3/6$ $(\forall x > 0)$ имеем

$$\frac{2}{k}\sin\left(\frac{\pi k}{4p\,(p+1)}\right) > \frac{\pi}{2p\,(p+1)} - \frac{k^2}{6p^3\,(p+1)^3}.$$

Следовательно, сумма, стоящая в правой части (4.18), допускает оценку снизу

$$S_p = \sum_{k=1}^{p}\frac{2}{k}\sin\left(\frac{\pi k}{4p\,(p+1)}\right)\sin\left(\frac{\pi k\,(2p+1)}{4p\,(p+1)}\right) > \frac{\pi}{2p\,(p+1)}\sum_{k=1}^{p}\sin\left(\frac{\pi k\,(2p+1)}{4p\,(p+1)}\right) - \frac{1}{6p^3\,(p+1)^3}\sum_{k=1}^{p}k^2.$$

А так как

$$\sum_{k=1}^{p}k^2 = \frac{1}{3}p\left(p+\frac{1}{2}\right)(p+1), \qquad \sum_{k=1}^{p}\sin kx = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\cos\,(p+1/2)\,x}{2\sin\,(x/2)},$$

то приходим к неравенству

$$S_p > \frac{\pi}{4p\,(p+1)}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\,(2p+1)}{8p\,(p+1)}\right) - \frac{\pi}{4p\,(p+1)}\frac{\cos\left(\frac{\pi(p+1/2)^2}{2p(p+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2p+1)}{8p(p+1)}\right)} - \frac{p+1/2}{18p^2\,(p+1)^2}. \tag{4.22}$$

Сравнив оценки (4.21) и (4.22), приходим к выводу, что для доказательства (4.18) достаточно установить справедливость неравенства

$$\frac{1}{9p^3} < \frac{\pi}{4p\,(p+1)}\frac{\cos\left(\frac{\pi\left(p^2+p+1/2\right)}{2p(p+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2p+1)}{8p(p+1)}\right)} - \frac{p+1/2}{18p^2\,(p+1)^2}. \tag{4.23}$$

Имеем (т. к. $\sin at < a\sin t$, $a > 1$, $at < \pi$)

$$-\cos\left(\frac{\pi\left(p^2+p+1/4\right)}{2p\,(p+1)}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8p\,(p+1)}\right) > \frac{1}{2p+1}\sin\left(\frac{\pi\,(2p+1)}{8p\,(p+1)}\right).$$

Поэтому мы можем неравенство (4.23) заменить более сильным

$$\frac{1}{9p^3} + \frac{p+1/2}{18p^2\,(p+1)^2} < \frac{\pi}{4p\,(p+1)\,(2p+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \frac{p\,(p+1/2)}{18\,(p+1)^2} < \frac{\pi p^2}{8\,(p+1)\,(p+1/2)}$$

и доказывать именно его. Левая часть последнего неравенства меньше $1/9 + 1/18 = 1/6$, а правая возрастает и при $p = 2$ равна $\pi/15 > 1/5$. Таким образом, неравенство (4.18) при любом целом $p \geqslant 2$ доказано. В случае $p = 1$ оно принимает вид

$$\mathcal{F}_1\left(1,\frac{\pi}{2}\right) < \mathcal{F}_1\left(1,\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \ln\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right) < \ln\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right) + \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ln\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Левая часть последнего неравенства меньше $\ln 2 < 0.7$, зато $1/\sqrt{2} > 0.7$. этим неравенство (4.17) доказано при всех $p \in \mathbb{N}$. Заодно доказано утверждение 2), поскольку

$$\mathcal{F}_{p+1}\,(r,\varphi) = \mathcal{F}_p\,(r,\varphi) + r^{p+1}\frac{\cos\,(p+1)\,\varphi}{p+1} \Rightarrow \mathcal{F}_{p+1}\left(1,\frac{\pi}{2p+2}\right) = \mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p+2}\right).$$

Докажем утверждение 3), которое состоит в справедливости неравенства

$$\mathcal{F}_{p+1}\left(1,\frac{\pi}{2p+3}\right) < \mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p+1}\right) \quad p \in \mathbb{N}.$$

Согласно определению функций $\mathcal{F}_p$ это неравенство записывается так:

$$\ln\sin\left(\frac{\pi}{4p+6}\right)+\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{\pi k}{2p+3}\right)<\ln\sin\left(\frac{\pi}{4p+2}\right)+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{\pi k}{2p+1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{p+1}\cos\left(\frac{\pi\,(p+1)}{2p+3}\right)+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\cos\left(\frac{\pi k}{2p+3}\right)-\cos\left(\frac{\pi k}{2p+1}\right)\right)<$$

$$<\ln\sin\left(\frac{\pi}{4p+2}\right)-\ln\sin\left(\frac{\pi}{4p+6}\right). \tag{4.24}$$

Будем доказывать неравенство (4.24). Его левая часть равна

$$\frac{1}{p+1}\cos\left(\frac{\pi\,(p+1)}{2p+3}\right)+\sum_{k=1}^{p}\frac{2}{k}\sin\left(\frac{\pi k}{(2p+1)\,(2p+3)}\right)\sin\left(\frac{\pi k\,(2p+2)}{(2p+1)\,(2p+3)}\right)<$$

$$<\frac{1}{p+1}\cos\left(\frac{\pi\,(p+1)}{2p+3}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{(2p+1)\,(2p+3)}\right)\sum_{k=1}^{p}\sin\left(\frac{\pi k\,(2p+2)}{(2p+1)\,(2p+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{p+1}\cos\left(\frac{\pi\,(p+1)}{2p+3}\right)+\frac{1}{p+1}\cos\left(\frac{\pi\,(p+1)}{2p+3}\right)\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\,(p+1)}{(2p+1)\,(2p+3)}\right)-\frac{\cos\left(\frac{\pi(p+2)(p+1/2)}{(2p+1)(2p+3)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(p+1)}{(2p+1)(2p+3)}\right)}\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{(2p+1)\,(2p+3)}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\,(p+1)}{(2p+1)\,(2p+3)}\right)+\cos\left(\frac{\pi\,(p+1)}{2p+3}\right)\left(\frac{1}{p+1}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{(2p+1)(2p+3)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(p+1)}{(2p+1)(2p+3)}\right)}\right).$$

А так как $\sin ax<a\sin x\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{\sin x}{\sin ax}$, $a>1$, $0<x<\dfrac{\pi}{a}$, $\cos\dfrac{\pi(p+1)}{2p+3}>0$, то последнее слагаемое отрицательно и мы заключаем, что левая часть неравенства (4.24), подлежащего доказательству, меньше

$$\sin\left(\frac{\pi}{(2p+1)\,(2p+3)}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\,(p+1)}{(2p+1)\,(2p+3)}\right)<\frac{\pi}{(2p+1)\,(2p+3)}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\,(p+1)}{(2p+1)\,(2p+3)}\right).$$

В то же время из (4.20) видно, что, в силу положительной третьей производной функции $\ln\sin x$ на интервале $0<x<\pi/2$, правая часть (4.24) превосходит

$$\left(\frac{\pi}{(4p+2)}-\frac{\pi}{4p+6}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4p+2}+\frac{\pi}{4p+6}\right)\right)=\frac{\pi}{(2p+1)\,(2p+3)}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\,(p+1)}{(2p+1)\,(2p+3)}\right).$$

Неравенство (4.24) доказано, а вместе с ним доказано утверждение 3).

Для доказательства утверждения 4) заметим, что в силу тождества

$$\mathcal{F}_p\,(r,\varphi)=-\sum_{k=p+1}^{\infty}\left(\frac{r^k}{k}\right)\cos k\varphi,\quad r\leqslant 1$$

(точка $r=1$, $\varphi=0$ исключается) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{p\to\infty}\mathcal{F}_p\,(1,\pi)=0. \tag{4.25}$$

По формуле Ньютона—Лейбница и согласно (4.16) имеем

$$\mathcal{F}_p\,(1,\pi)-\mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p+1}\right)=\int\limits_{\frac{\pi}{2p+1}}^{\pi}\frac{\partial\mathcal{F}_p}{\partial\varphi}\,(1,\varphi)\,d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2p+1}}^{\pi}\frac{\cos\,(p+1/2)\,\varphi}{2\sin\varphi/2}d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2p+1}}^{\pi}\frac{\cos\,(p+1/2)\,\varphi}{\varphi}d\varphi+\int\limits_{\frac{\pi}{2p+1}}^{\pi}\left(\frac{1}{2\sin\varphi/2}-\frac{1}{\varphi}\right)\cos\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\varphi\right)d\varphi. \tag{4.26}$$

Функция $\dfrac{1}{2\sin\varphi/2} - \dfrac{1}{\varphi}$, будучи доопределена нулем в точке $\varphi = 0$, является непрерывной на отрезке $[0,\pi]$. Поэтому

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\varphi/2} - \frac{1}{\varphi}\right)\cos\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\varphi\right)d\varphi = 0. \tag{4.27}$$

Из (4.25)–(4.27) находим

$$\lim_{p\to\infty}\mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p+1}\right) = \lim_{p\to\infty} -\int\limits_{\frac{\pi}{2p+1}}^{\pi}\frac{\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\varphi}d\varphi = \lim_{p\to\infty} -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi(p+1/2)}\frac{\cos t}{t}dt = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt.$$

Найдем предел последовательности $\mathcal{F}_p\Big(1,\dfrac{\pi}{2p}\Big)$. Верна оценка

$$\left|\mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p}\right) - \mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p+1}\right)\right| \leqslant \left(\frac{\pi}{2p} - \frac{\pi}{2p+1}\right)\max\left\{\left|\frac{\partial\mathcal{F}_p}{\partial\varphi}(1,\varphi)\right| | \frac{\pi}{2p+1}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2p}\right\} =$$
$$= \frac{\pi}{2p(p+1)}\max\left\{\frac{-\cos(p+1/2)\varphi}{2\sin(\varphi/2)} | \frac{\pi}{2p+1}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2p}\right\}.$$

Максимум функции $(\cos(p+1/2)\varphi)\operatorname{cosec}(\varphi/2)$ на отрезке $\dfrac{\pi}{2p+1}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2p}$ достигается в точке $\pi/(2p)$ и равен 1 — это простое упражнение по математическому анализу и тригонометрии. Следовательно,

$$\left|\mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p}\right) - \mathcal{F}_p\left(1,\frac{\pi}{2p+1}\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{4p(2p+1)}.$$

Отсюда видно, что последовательность $\mathcal{F}_p\Big(1,\dfrac{\pi}{2p}\Big)$ имеет тот же предел, что и $\mathcal{F}_p\Big(1,\dfrac{\pi}{2p+1}\Big)$. Лемма 4.1 полностью доказана. □

Теорема 4.3. *Верно неравенство*

$$C_{2\pi}(\rho) \leqslant \max\left\{r^{-\rho}\mathcal{M}_p(r) | r \geqslant 1+\frac{1}{p}\right\},$$

где $p = [\rho]$, $\mathcal{M}_p(r) = \max\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi}\mathcal{F}_p(r,\varphi)$.

Максимум на луче $r \geqslant 1+1/p$ существует, так как функция $\mathcal{M}_p(r)$ непрерывна, положительна, $\mathcal{M}_p(r) = O(r^p)$, $r\to+\infty$, и, следовательно, $\lim\limits_{r\to+\infty} r^{-\rho}\mathcal{M}_p(r) = 0$.

Сейчас мы выведем из теоремы 4.3 теорему 4.1, а потом докажем теорему 4.3. Имеем $\mathcal{M}_1(r) = r+\ln(r-1)$, $r\geqslant 2$. Следовательно, при $\rho\in(1,2)$, $r\geqslant 2$

$$B(r,\rho) \equiv r^{-\rho}(r+\ln(r-1)) = r^{1-\rho} + r^{-\rho}\ln(r-1) \leqslant 2^{1-\rho} + r^{-\rho}\ln(r-1) =$$
$$= 2^{1-\rho}\left(1+2^{\rho-1}r^{1-\rho}\frac{\ln(r-1)}{r}\right) = 2^{1-\rho}\left(\frac{r}{2}\right)^{1-\rho}\left(\frac{\ln(r-1)}{r}\right) \leqslant 2^{1-\rho}\left(1+\frac{\ln(r-1)}{r}\right).$$

Отсюда сразу же следует оценка (4.5). Для доказательства (4.6) заметим, что $\ln(r-1)\leqslant r-2$. Следовательно, при $r\geqslant 2$ верно неравенство

$$B(r,\rho) \leqslant r^{-\rho}(2r-2) \Rightarrow \max_{r\geqslant 2} B(r,\rho) \leqslant 2\max\frac{r-1}{r^\rho} = \frac{2}{\rho}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^{\rho-1}.$$

Первое неравенство (4.6) доказано. Докажем второе: проверим, что $\left(\dfrac{\rho-1}{\rho}\right)^{\rho-1} < 2^{1-\rho}$ при $1<\rho<2$. Это неравенство равносильно такому:

$$(1-\rho)\ln\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right) < (1-\rho)\ln 2 \Leftrightarrow \ln 2 < \ln\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right) \Leftrightarrow 2 < \frac{\rho}{\rho-1}.$$

Последнее неравенство при $\rho\in(1,2)$ очевидно.

Для вывода из теоремы 4.3 неравенства (4.7) достаточно проверить, что при всех $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, верна оценка $\mathcal{M}_p(r) \leqslant r^p$, $r \geqslant 1 + \dfrac{1}{p}$. (Тогда при $\rho \in (p, p+1)$ неравенство будет строгим.) Ввиду тождества Данжуа [11]

$$\mathcal{M}_p(r) = \ln(r-1) + \sum_{k=1}^{p} \frac{r^k}{k}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad r \geqslant 1 + \frac{1}{p},$$

задача сводится к доказательству неравенства

$$\max\{G_p(r) \,|\, r \geqslant 1 + \frac{1}{p}\} \leqslant 0 \quad (\forall p \geqslant 2), \quad \text{где} \quad G_p(r) = \ln(r-1) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{r^k}{k} - \frac{p-1}{p} r^p.$$

Найдем точку минимума функции G_p. Ее производная равна $(m = p-1)$

$$G_p' = \frac{1}{r-1} + \sum_{k=1}^{m} r^{k-1} - m r^m = \frac{r^m}{r-1} - m r^m = r^m \left(\frac{1}{r-1} - m \right).$$

Отсюда видно, что максимум функции $G_p(r)$ на луче $r \geqslant 1 + 1/p$ достигается в точке $r = 1 + 1/m$. Следовательно, осталось доказать неравенство

$$G_p\left(1 + \frac{1}{m}\right) \leqslant 0, \quad p = m+1, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.28}$$

При $m = 1$ имеет место равенство. Далее $m \geqslant 2$.

Отметим следующий факт. Если $k \in \mathbb{R}$, функция g выпукла вниз на отрезке $[k - 1/2, k + 1/2]$ и $\exists g'(k)$, то

$$g(k) \leqslant \int_{k-1/2}^{k+1/2} g(x)\, dx. \tag{4.29}$$

Действительно, в силу выпуклости верно неравенство

$$g(k) + g'(k)(x-k) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [k - 1/2, k + 1/2]. \tag{4.30}$$

Проинтегрировав (4.30) по отрезку $[k - 1/2, k + 1/2]$, приходим к (4.29).

Обозначим $s = 1 + 1/m$. Нетрудно проверить, что функция $g(x) = s^x/x$ выпукла на $(0, +\infty)$. Поэтому согласно (4.29) имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{s^k}{k} \leqslant \int_{1/2}^{m+1/2} \frac{s^x}{x} dx = \int_{1/2}^{m+1/2} \frac{dx}{x} + \int_{1/2}^{m+1/2} \frac{s^x - 1}{x} dx = \ln(2m+1) + \int_{\frac{1}{2}\ln s}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\ln s} \frac{e^t - 1}{t} dt. \tag{4.31}$$

Сравним последний интеграл в (4.31) с интегралом

$$I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!} < 1.32.$$

Имеем

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) < \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} \right) = 1 + \frac{1}{12m^3} + \frac{1}{6m^3} \leqslant 1 + \frac{1}{6m^2}, \quad m \geqslant 2.$$

Следовательно,

$$\int_1^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\ln s} \frac{e^t - 1}{t} dt < \int_1^{1+\frac{1}{6m^2}} (e^t - 1)\, dt \leqslant \frac{1}{6m^2} \left(\exp\left(1 + \frac{1}{6m^2}\right) - 1 \right) \leqslant \frac{e^{1.05} - 1}{6m^2} < \frac{1}{3m^2}. \tag{4.32}$$

А так как функция $(e^t-1)/t$ превосходит 1 при $t>0$, то

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\ln s}\frac{e^t-1}{t}dt>\frac{1}{2}\ln s=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)>\frac{1}{2m}-\frac{1}{4m^2}. \tag{4.33}$$

Из (4.32), (4.33) находим

$$\int\limits_{\frac{1}{2}\ln s}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\ln s}\frac{e^t-1}{t}dt<I-\frac{1}{2m}+\frac{7}{12m^2},\quad m\geqslant 2. \tag{4.34}$$

Из (4.31), (4.34) вытекает оценка

$$G_p\left(s\right)\leqslant\ln\left(2+\frac{1}{m}\right)+I-\frac{1}{2m}+\frac{7}{12m^2}+\frac{m}{m+1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=I+\ln 2-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m+$$
$$+\ln\left(1+\frac{1}{2m}\right)-\frac{1}{2m}+\frac{7}{12m^2}<I+\ln 2-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m+\frac{7}{12m^2}<2.02-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m+\frac{7}{12m^2}. \tag{4.35}$$

Оценка (4.35) вместе с убыванием последовательности $a_m=\dfrac{7}{12m^2}-\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$ и условием $m\geqslant 2$ приводит к неравенству

$$G_p\left(s\right)\leqslant 2.02+a_2=2.02+\frac{7}{48}-2.25<0,$$

что и требовалось доказать. Неравенство (4.7) доказано, и вывод теоремы 4.1 из теоремы 4.3 завершен.

Доказательство теоремы 4.3. Целая функция порядка ρ, корни которой лежат на $\mathbb{R}_+$, имеющая верхнюю ρ-плотность, равную 1, и тип, не превосходящий $B(\rho)=\max\{r^{-\rho}\mathcal{M}_p(r)|r>0\}$, строится почти так же, как и в теореме 3.1; но есть отличия. Рассмотрим ту же последовательность $\{x_k\}$, что и в теореме 3.1:

$$x_1=2,\ x_{k+1}=x_k^4\ \forall k\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ x_k=2^{4^{k-1}}\ \Rightarrow\ k\asymp\ln\ln x_k,\ k\to\infty.$$

Положим $N_k=[x_k^\rho]$, а возрастающую последовательность положительных чисел $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ возьмем такой, что все ее элементы располагаются на отрезках $I_k=[x_k,x_{k+1}]$, причем на I_k лежит ровно N_k элементов последовательности Λ.

Убедимся в том, что верхняя ρ-плотность последовательности Λ равна 1. Для любого $r\in\mathbb{R}$, $r\geqslant 4$, всегда отыщется такой номер k, что $\sqrt{k}\leqslant r<x_k^2=\sqrt{x_{k+1}}$. Если $\sqrt{x_k}\leqslant r<x_k$, то

$$n_\Lambda\left(r\right)=\sum_{\nu=1}^{k-1}N_\nu\leqslant\left(k-1\right)N_{k-1}=O\left(x_{k-1}^\rho\ln\ln x_k\right)=O\left(x_k^{\rho/4}\ln\ln x_k\right)=O\left(r^{\rho/2}\ln\ln r\right).$$

Если $x_k\leqslant r\leqslant\sqrt{x_{k+1}}$, то

$$n_\Lambda\left(r\right)\leqslant N_k+\sum_{\nu=1}^{k-1}N_\nu\leqslant\left(k-1\right)N_{k-1}\leqslant x_k^\rho+O\left(x_k^{\rho/4}\ln\ln x_k\right)\leqslant r^\rho+O\left(r^{\rho/4}\ln\ln r\right).$$

Во всех случаях верно асимптотическое неравенство

$$r^{-\rho}n_\Lambda\left(r\right)\leqslant 1+O\left(r^{-\rho/2}\ln\ln r\right)=1+o\left(1\right)\ \Rightarrow\ \overline{\Delta}_\rho\left(\Lambda\right)\leqslant 1. \tag{4.36}$$

С другой стороны, имеем

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)\geqslant\limsup_{k\to\infty}(x_k+1)^{-\rho}n_\Lambda(x_k+1)\geqslant\limsup_{k\to\infty}(x_k+1)^{-\rho}(N_k+N_{k-1})\geqslant\limsup_{k\to\infty}(x_k+1)^{-\rho}x_k^\rho=1. \tag{4.37}$$

Из (4.36), (4.37) находим $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=1$.

Определим целую функцию

$$F\left(z\right)=\prod_{n=1}^{\infty}E_p\left(z/\lambda_n\right),\ p=[\rho].$$

Множество ее корней есть Λ. Покажем, что $\sigma_\rho(F) \leqslant B(\rho)$. Из (4.2), (4.3) и определения $\mathcal{M}_p(r)$ находим

$$\ln M\left(F,R\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{|\lambda_n|}\right). \tag{4.38}$$

Из (4.38), возрастания функции $\mathcal{M}_p(r)$ на луче $0 < r < +\infty$ и построения последовательности Λ следует оценка

$$\ln M\left(F,R\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{x_\nu}\right) \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^\rho \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{x_\nu}\right). \tag{4.39}$$

Как и выше, возьмем такой номер k, что $\sqrt{x_k} \leqslant R < x_k^2$. Покажем, что сумма слагаемых ряда (4.39) с номерами $\nu < k$ и $\nu > k$ есть $o(R^\rho)$ при $R \to +\infty$. Существенный вклад в асимптотику этой суммы дает лишь слагаемое с номером $\nu = k$.

Если $\nu \geqslant k+1$, то $R/x_\nu \leqslant R/x_{k+1} \leqslant x_k^{-2} \leqslant x_1^{-2} = 1/4$, а при $r \in (0,1)$ верно представление $\mathcal{F}_p(r,\varphi) = -\sum\limits_{k=p+1}^{\infty} (r^k/k)\cos k\varphi$, из которого следует оценка

$$\mathcal{M}_p\left(r\right) \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k}{k} < \frac{1}{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} r^k = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{r^{p+1}}{1-r} \leqslant \frac{2r^{p+1}}{p+1} \leqslant r^{p+1}, \quad 0 < r \leqslant \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty} x_\nu^\rho \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{x_\nu}\right) < \sum_{\nu=k+1}^{\infty} x_\nu^\rho \left(\frac{R}{x_\nu}\right)^{p+1} = R^{p+1} \sum_{\nu=k+1}^{\infty} x_\nu^{\rho-p-1}.$$

Ввиду быстрого роста последовательности x_ν ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^{-\delta}$ сходится ($\forall \delta > 0$) и, более того, отношение последующего слагаемого этого ряда к предыдущему стремится к нулю. Отсюда, обозначив $\delta = p+1-\rho$, при всех достаточно больших k находим

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty} x_\nu^{-\delta} \leqslant 2x_{k+1}^{-\delta} \leqslant 2R^{-2\delta}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty} x_\nu^\rho \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{x_\nu}\right) < 2R^{p+1-2\delta} = 2R^{\rho-\delta} = o\left(r^\rho\right), \quad R \to +\infty. \tag{4.40}$$

Воспользовавшись доказанным выше неравенством $\mathcal{M}_p(r) \leqslant r^p$ ($r \geqslant 1 + 1/p,\ p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2$), при $k < \nu$ получаем оценку (множитель 2 появляется в случае $p = 1$)

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} x_\nu^\rho \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{x_\nu}\right) \leqslant 2R^p \sum_{\nu=1}^{k-1} x_\nu^{\rho-p} \leqslant 2R^p x_{k-1}^{\rho-p} \leqslant 2R^p \left(\sqrt{R}\right)^{\rho-p} \leqslant 2R^{\rho-\{\rho\}/2} = o\left(R^\rho\right), \quad R \to +\infty. \tag{4.41}$$

Из (4.39)–(4.41) находим

$$\frac{\ln M\left(F,R\right)}{R^\rho} \leqslant \left(\frac{x_k}{R}\right)^\rho \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{x_k}\right) + o\left(1\right), \quad R \in [\sqrt{x_k}, \sqrt{x_{k+1}}) \to +\infty.$$

А так как, очевидно,

$$\left(\frac{x_k}{R}\right)^\rho \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{x_k}\right) \leqslant \max\{r^{-\rho} \mathcal{M}_p\left(r\right) | r > 0\} = B\left(\rho\right),$$

то требуемое неравенство

$$\sigma_\rho\left(F\right) = \limsup_{R \to +\infty} R^{-\rho} \ln M\left(F,R\right) \leqslant B\left(\rho\right)$$

доказано. Осталось лишь вывести, что

$$B\left(\rho\right) = \max\left\{r^{-\rho} \mathcal{M}_p\left(r\right) | r \geqslant 1 + \frac{1}{p}\right\}.$$

Другими словами, надо установить, что максимум выражения $r^{-\rho}\mathcal{M}_p(r)$ достигается на луче $r \geqslant 1 + 1/p$. Для этого достаточно проверить возрастание функции $r^{-\rho}\mathcal{M}_p(r)$ на интервале $0 < r < 1 + 1/p$ (эта функция непрерывна на $(0, +\infty)$). Докажем большее: неубывание на интервале $0 < r < 1 + 1/p$ функции $r^{-p-1}\mathcal{M}_p(r)$ при любом $p \in \mathbb{N}$. Имеем $r^{-2}\mathcal{M}_1(r) \equiv 1/2,\ 0 < r < 2$. Далее $p \geqslant 2$.

При $p \geqslant 2$ согласно теореме Данжуа [11] справедливо представление

$$\mathcal{M}_p(r) = \int\limits_0^r t^p \frac{\sin(p\alpha_p(t))}{\sin(\alpha_p(t))} dt, \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}, \tag{4.42}$$

где $\alpha_p(t)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\sin(p+1)\alpha}{\sin p\alpha} = t, \quad 0 < t < 1 + \frac{1}{p}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{p+1}. \tag{4.43}$$

Сделав замену переменной $t = r\tau$, преобразуем интеграл (4.42):

$$r^{-p-1}\mathcal{M}_p(r) = \int\limits_0^1 r^p \frac{\sin(p\alpha_p(r\tau))}{\sin(\alpha_p(r\tau))} d\tau, \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}. \tag{4.44}$$

Из (4.44) видно, что осталось лишь доказать убывание функции $\alpha_p(t)$ на интервале $0 < t < 1 + \dfrac{1}{p}$, поскольку функция $\dfrac{\sin(p\alpha)}{\sin\alpha}$ убывает на интервале $0 < \alpha < \pi/p$. Убывание $\alpha_p(t)$ в свою очередь следует из (4.43) и убывания функции $\sin((p+1)\alpha)/\sin(p\alpha)$ на интервале $0 < \alpha < \pi/(p+1)$. Этим теорема 4.3 полностью доказана. □

5. Решение задач 1 и 1* при произвольном значении нижней плотности в случае $\alpha = 2\pi$, $\rho \in (0,1)$

Совсем недавно вышла в свет статья [1], в которой найдена величина $C_{2\pi}(\rho; k)$ при любых $k \in (0,1)$ и $\rho \in (0,1)$. Таким образом, теперь известен наименьший возможный ρ-тип целых функций f, у которых $\overline{\Delta}_\rho(f) = 1$, $\underline{\Delta}_\rho(f) = k$, и, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, все корни f за исключением, может быть, конечного числа лежат в угле $|\arg z| < \varepsilon$. Заметим, что в [1] были рассмотрены лишь функции, все корни которых лежат на $\mathbb{R}_+$. Но переход к более общему случаю

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : (|\arg\lambda_n| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)), \quad \Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

не очень сложен.

Как и следовало ожидать, при любом фиксированном $\rho \in (0,1)$ функция $C_{2\pi}(\rho; k)$ является непрерывной (и даже выпуклой) функцией переменной k на отрезке $[0,1]$. Но зависимость этой функции от k довольно сложна, в отличие от случая $\alpha = 0$ ($C_0(\rho; k) = e^k C_0(\rho; 0)$). Мы не приводим этот результат, отсылая интересующегося читателя к [1].

Отметим еще, что случай $k = 1$, $\alpha = 2\pi$ был разобран еще в [13]. Это — единственная пара параметров k, α в задаче 1, при которой нет необходимости минимизировать тип. Верна теорема:

Теорема 5.1. *Если все корни $\{\lambda_n\}$ целой функции f лежат на одном луче, $\rho \in (0,1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{|\lambda_n|^\rho} = 1$, то*

$$\sigma_\rho(f) = \pi \operatorname{cosec}(\pi\rho).$$

И, наконец, за несколько дней до того, как автор написал эти строки, Г. Г. Брайчев подал в один из математических журналов статью, в которой решена аналогичная задача с ограничениями на усредненные плотности. Им найдена функция $C^*_{2\pi}(\rho; k)$ при любых $k \in [0,1)$ и $\rho \in (0,1)$. Задача нахождения $C^*_{2\pi}(\rho; k)$, по моему мнению, была сложнее задачи нахождения $C_{2\pi}(\rho; k)$. Если в [1] были, в основном, использованы идеи, близкие к идеям автора, продемонстрированным в [5, 6] в задаче отыскания максимального индекса конденсации, то в задаче отыскания $C^*_{2\pi}$ пришлось добавить к ним принципиально новые соображения.

Стоит отметить, что после выхода в свет публикации [7] у автора возникло желание найти $C^*_{2\pi}(\rho;0)$ при $\rho\in(0,1)$, однако это не получилось. С разрешения Г. Г. Брайчева приводим ответ (в простейшем случае $k=0$):

$$C^*_{2\pi}(\rho;0)=e\rho C_{2\pi}(\rho;0)\quad\forall\rho\in(0,1).$$

Интересно, что

$$C^*_0(\rho;0)\equiv 1\equiv e\rho C_0(\rho;0)\quad\forall\rho>0.$$

Скоро ли мы узнаем, верно ли тождество

$$C^*_\alpha(\rho;0)\equiv e\rho C_\alpha(\rho;0),\quad \rho\in(0,1),$$

хотя бы при каком-нибудь значении $\alpha\in(0,2\pi)$ (или, может быть, при любом)?

Итак, можно утверждать, что для максимального значения $\alpha=2\pi$ задачи 1 и 1* при $\rho\in(0,1)$ полностью решены.

6. Один результат по задаче 2 в случае $\alpha = 2\pi$

Задача 2 почти не исследована. Очевидны тождества $\widetilde{C}_0(\rho;k)\equiv C_0(\rho;k)$, $\rho>0$, $0\leqslant k\leqslant 1$, и неравенство

$$\widetilde{C}_\alpha(\rho;k)\leqslant C_\alpha(\rho;k)\quad\forall\rho>0\quad\forall k\in[0,1]\quad\forall\alpha\in(0,2\pi]. \tag{6.1}$$

Возможно ли в (6.1) строгое неравенство? Другими словами, можно ли понизить минимальный тип функции (при ограничении $k\leqslant\underline{\Delta}_\rho(f)\leqslant\overline{\Delta}_\rho(f)\leqslant 1$ и на величину угла, в котором расположены корни), умножив ее на другую целую функцию, не равную нулю тождественно? Феномен понижения типа целой функции порядка $1/2$ с корнями на одном луче посредством умножения ее на другую целую функцию исследовал Рубел [6]. Автор [12] доказал, что $\widetilde{C}_{2\pi}\Big(\dfrac12;0\Big)<0.8$, тогда как $C_{2\pi}\Big(\dfrac12;0\Big)>0.804$. Таким образом, было выведено неравенство

$$\widetilde{C}_{2\pi}\left(\frac12;0\right)<C_{2\pi}\left(\frac12;0\right)-4\cdot10^{-3}. \tag{6.2}$$

Заслуживает внимания, что именно $\widetilde{C}_{2\pi}(1/2,k)$ (а не $C_{2\pi}(1/2,k)$) является точной верхней гранью таких значений r, что все системы экспонент $\{\exp(\pm\lambda_n z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ полны в пространстве $\mathcal{A}(|z|<r)$, где множество последовательностей $\{\lambda_n\}$ пробегает $\mathbb{C}^\infty_{2\pi}$, причем

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}=1,\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}=k.$$

Поэтому весьма актуальной задачей является получение нетривиальных оценок снизу величины $\widetilde{C}_{2\pi}(1/2,k)$ и сначала хотя бы вывод неравенства

$$\widetilde{C}_{2\pi}(1/2,k)>2e^{k-1},\quad 0\leqslant k<1.$$

В этом разделе результат (6.2) переносится на малые значения ρ. Не подлежит сомнению, что за счет усовершенствования некоторых рассуждений, применяемых в доказательстве, оценка может быть уточнена.

Теорема 6.1. *При любом $\rho\in(0,1/9]$ верно неравенство*

$$\widetilde{C}_{2\pi}(\rho,0)<C_{2\pi}(\rho,0)-\frac{\rho}{40}\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right). \tag{6.3}$$

Докажем сперва несколько вспомогательных утверждений. Положим

$$\widetilde{g}_\rho(t)=t^{-\rho}\ln(1+t),\quad \widetilde{g}_\rho(t)=t^{p+1}\frac{dg_\rho(t)}{dt}=\frac{t}{t+1}-\rho\ln(1+t).$$

Обозначим t_ρ точку максимума $g_\rho(t)$ на луче $0<t<+\infty$, совпадающую с единственным корнем функции $\widetilde{g}_\rho(t)$ на этом луче.

Лемма 6.1. *При любом $\rho\in(0,1)$ верно неравенство $t_\rho<\exp(1/\rho)$, а если $\rho\in(0,1/3]$, то $t_\rho>\exp(1/\rho-\rho)$.*

Доказательство. Поскольку функция $\widetilde{g}_\rho(t)$ возрастает на интервале $0 < t < \dfrac{1}{\rho} - 1$, убывает на луче $\dfrac{1}{\rho} - 1 \leqslant t < +\infty$, $\widetilde{g}_\rho(0) = 0$, то

$$t < t_\rho \Leftrightarrow \widetilde{g}_\rho(t) > 0, \quad t_\rho < t \Leftrightarrow \widetilde{g}_\rho(t) < 0. \tag{6.4}$$

Следовательно, достаточно вывести неравенства

$$\widetilde{g}_\rho\left(\exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right) > 0 \quad \text{при} \quad \rho \in \left(0, \frac{1}{3}\right], \quad \widetilde{g}_\rho\left(\exp\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < \rho < 1. \tag{6.5}$$

Имеем:

$$\widetilde{g}_\rho(t) = 1 - \frac{1}{t+1} - \rho\ln t - \rho\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) > 1 - \rho\ln t - \frac{1}{t+1} - \frac{\rho}{t} > 1 - \rho\ln t - \frac{\rho+1}{t}.$$

Отсюда находим

$$\widetilde{g}_\rho\left(\exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right) > 1 - \rho\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right) - (1+\rho)\exp\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) = \rho^2 - (1+\rho)\exp\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) >$$

$$> \rho^2 - \exp\left(2\rho - \frac{1}{\rho}\right).$$

А так как $2\rho - \dfrac{1}{\rho} \leqslant -\dfrac{7}{9\rho}$ при $0 < \rho \leqslant \dfrac{1}{3}$ и $e^{-x} \leqslant \dfrac{4}{e^2x^2}$ $(\forall x > 0)$, то приходим к неравенству

$$\widetilde{g}_\rho\left(\exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right) > \rho^2 - \exp\left(-\frac{7}{9\rho}\right) \geqslant \rho^2 - \frac{4}{e^2}\cdot\frac{81}{49}\rho^2 = \rho^2\left(1 - \frac{324}{49e^2}\right) > 0.1\rho^2.$$

Первое неравенство (6.5) доказано. Второе же почти очевидно, так как $\rho\ln(1 + \exp(1/\rho)) > 1$, а $\dfrac{t}{t+1} < 1$. Лемма доказана. □

Обозначим $C(\rho) = \max\{g_\rho(t) | t > 0\} = g_\rho(t_\rho) \equiv C_{2\pi}(\rho; 0)$, $\rho \in (0,1)$.

Лемма 6.2. *При* $\rho \in (0, 1/9]$, $t \in (0, \exp(1/\rho - \rho)] \cup [\exp(1/\rho + \rho), +\infty)$ *верно неравенство*

$$g_\rho(t) < \frac{1}{e\rho} - \frac{\rho^3}{11}. \tag{6.6}$$

Доказательство. Из (6.4) видно, что функция $g_\rho(t)$ возрастает на интервале $0 < t < t_\rho$ и убывает на луче $t > t_\rho$. А так как согласно лемме полуинтервал $(0, \exp(1/\rho - \rho)]$ лежит слева от точки t_ρ, а луч $[\exp(1/\rho + \rho), +\infty)$ — справа от этой точки, то неравенство (6.6) достаточно доказать только для двух значений $t = \exp(1/\rho \pm \rho)$.

Имеем

$$g_\rho\left(\exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right)^{-\rho} \times$$

$$\times \ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right) = \exp(-1+\rho^2)\left(\ln\exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right) + \ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right)\right) =$$

$$= \exp(-1+\rho^2)\left(\frac{1}{\rho} - \rho + \ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{\exp(\rho^2)}{e\rho}\left(1 - \rho^2 + \rho\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right)\right). \tag{6.7}$$

Воспользуемся неравенствами

$$e^x < 1 + x + \frac{7x^2}{12}, \ 0 < x \leqslant \frac{1}{3}; \ \ln(1+x) < x, \ x > 0; \ e^{-x} < x^{-4}, \ x \geqslant 8.8. \tag{6.8}$$

Из (6.7), (6.8) при $0 < \rho \leqslant 1/9$ находим

$$g_\rho\left(\exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\right) < \frac{1}{e\rho}\left(1 + \rho^2 + \frac{7}{12}\rho^4\right)\left(1 - \rho^2 + \rho\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)^{-4}\right) <$$

$$< \frac{1}{e\rho}\left(1+\rho^2+\frac{7}{12}\rho^4\right)\left(1-\rho^2+1.1\rho^5\right) < \frac{1}{e\rho}\left(1-\frac{5}{12}\rho^4+1.1\rho^5-\frac{7}{12}\rho^6+1.1\rho^7+\frac{7.7}{12}\rho^9\right) <$$

$$< \frac{1}{e\rho}\left(1-\frac{5}{12}\rho^4+1.1\rho^5\right) < \frac{1}{e\rho}\left(1-\frac{\rho^4}{4}\right) = \frac{1}{e\rho}-\frac{\rho^3}{4e} < \frac{1}{e\rho}-\frac{\rho^3}{11}.$$

Неравенство (6.6) при $0 < t \leqslant \exp(1/\rho-\rho)$ доказано.

При $t \geqslant \exp(1/\rho+\rho)$, рассуждая аналогичным образом, находим

$$g_\rho(t) \leqslant g_\rho\left(\exp\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)\right)^{-\rho} \times$$

$$\times \ln\left(1+\exp\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)\right) = \exp(-1-\rho^2)\left(\frac{1}{\rho}+\rho+\ln\left(1+\exp\left(-\frac{1}{\rho}-\rho\right)\right)\right) <$$

$$< \exp(-1-\rho^2)\left(\frac{1}{\rho}+\rho+\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right) = \frac{\exp(-\rho^2)}{e\rho}\left(1+\rho^2+\rho\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right) <$$

$$< \frac{\exp(-\rho^2)}{e\rho}\left(1+\rho^2+\rho^5\right) < \frac{1}{e\rho}\left(1-\rho^2+\frac{\rho^4}{2}\right)\left(1+\rho^2+\rho^5\right) =$$

$$= \frac{1}{e\rho}\left(1-\frac{\rho^4}{2}+\rho^5+\frac{\rho^6}{2}-\rho^7+\frac{\rho^9}{2}\right) < \frac{1}{e\rho}\left(1-\frac{\rho^4}{2}+\frac{3}{2}\rho^5\right) < \frac{1}{e\rho}\left(1-\frac{\rho^4}{4}\right) < \frac{1}{e\rho}-\frac{\rho^3}{11}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 6.3. *Если* $0 < \rho \leqslant 1/9$, $T \geqslant e^9$, $Te^{-\rho} \leqslant t \leqslant Te^{\rho}$, *то верна оценка*

$$\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{3}t+t^2) < \left(1-\frac{0.1}{T\ln T}\right)\ln(1+t).$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{3}t+t^2)-\ln(1+t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+\sqrt{3}t+1}{t^2+t+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{t(2-\sqrt{3})}{t^2+2t+1}\right) <$$

$$< -\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{t}{t^2+2t+1} < \frac{-0.133t}{(t+1)^2} = \frac{-0.133}{t}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 < -\frac{0.13}{t}.$$

Следовательно, учитывая ограничения на t, T и ρ получаем неравенства

$$\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{3}t+t^2) < \ln(1+t)-\frac{0.13}{t} = \left(1-\frac{0.13}{t\ln(1+t)}\right)\ln(1+t) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1-\frac{0.13e^{-\rho}}{T\ln T}\cdot\frac{\ln T}{\ln(1+Te^{\rho})}\right)\ln(1+t) \leqslant \left(1-\frac{0.13e^{-1/9}}{T\ln T}\cdot\frac{9}{\ln(1+e^{9+1/9})}\right)\ln(1+t) <$$

$$< \left(1-\frac{0.1}{T\ln T}\right)\ln(1+t).$$

Лемма доказана. □

Из лемм 6.2, 6.3 немедленно вытекает важное для дальнейшего

Следствие 6.1. *Пусть*

$$\mathcal{D}_\rho = \left\{re^{i\varphi} \mid \exp\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right) < r < \exp\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right),\quad \frac{5\pi}{6} < \varphi < \frac{7\pi}{6}\right\}. \tag{6.9}$$

Тогда при любом $\rho \in (0, 1/9]$ *верно неравенство*

$$\max\{|z|^{-\rho}\ln|1-z| \mid z \in \mathbb{C}\backslash(\mathcal{D}_\rho \cup \{0\})\} \leqslant \left(1-0.1\rho\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right)C(\rho). \tag{6.10}$$

Доказательство. При $\varphi \in \left[0, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, 2\pi\right]$ имеем

$$\ln|1 - re^{i\varphi}| \leqslant \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{3}r + r^2).$$

По лемме 6.3, взяв $T = e^\rho$, получим оценку

$$r^{-\rho}\ln|1 - re^{i\varphi}| \leqslant r^{-\rho}\left(1 - 0.1\rho\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right)\ln(1 + r),$$

а максимум функции $r^{-\rho}\ln(1+r)$ как раз и равен $C(\rho)$. В этом случае неравенство (6.10) доказано. Если же $\varphi \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$, но r находится вне интервала $\left(\exp\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right), \exp\left(\frac{1}{\rho} + \rho\right)\right)$, то по лемме 6.2 функция $r^{-\rho}\ln(1-re^{i\varphi}) \leqslant r^{-\rho}\ln(1+r)$ не превосходит $\frac{1}{e\rho} - \frac{\rho^3}{11} < C(\rho) - \frac{\rho^3}{11}$. А так как по лемме 6.2

$$C(\rho) - \frac{\rho^3}{11} < \left(1 - 0.1\rho\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right)C(\rho),$$

то мы получаем неравенство (6.10) и в этом случае. Следствие доказано. □

Доказательство теоремы 6.1. Определим последовательности

$$x_k = 2^{4^{k-1}}, \quad y_k = x_k\exp\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad N_k = [x_k^\rho], \quad M_k = [ay_k^\rho],$$

где

$$a = a(\rho) = \frac{\rho}{20}\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right). \tag{6.11}$$

Положим

$$F_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{x_k}\right)^{N_k}, \quad F_2(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{y_k}\right)^{M_k}.$$

Рассуждая так же, как и в доказательствах теорем 3.1 и 4.3, получаем равенства

$$\overline{\Delta}_\rho(F_1) = 1, \quad \sigma_\rho(F_1) = C(\rho), \quad \overline{\Delta}_\rho(F_2) = a, \quad \sigma_\rho(F_2) = aC(\rho) \tag{6.12}$$

и асимптотическую оценку сверху для $\ln|F_1(z)|$:

$$r^{-\rho}\ln|F_1(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x_k}{r}\right)^\rho\ln\left(1 - \frac{2r}{x_k}\cos\varphi + \frac{r^2}{x_k^2}\right) + o(1), \quad r \in [\sqrt{x_k}, \sqrt{x_{k+1}}],\ k \to \infty. \tag{6.13}$$

Рассмотрим области $\mathcal{D}_{k,\rho} = x_k\mathcal{D}_\rho$ и их объединение $G_\rho = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathcal{D}_{k,\rho}$. Из (6.10), (6.13) находим

$$\limsup_{z\to\infty,\ z\notin G_\rho}|z|^{-\rho}\ln|F_1(z)| \leqslant \left(1 - 0.1\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right)C(\rho). \tag{6.14}$$

Теперь, рассмотрев функцию $F(z) = F_1(z)F_2(z)$, из (6.11), (6.12), (6.14) выводим оценку

$$\limsup_{z\to\infty,\ z\notin G_\rho}|z|^{-\rho}\ln|F(z)| \leqslant \left(1 - \frac{1}{20}\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right)C(\rho). \tag{6.15}$$

В области G_ρ функция $F_2(z)$ «достаточно быстро» стремится к нулю при $z \to \infty$. Действительно, при $z \in \mathcal{D}_{k,\rho}$ имеем

$$\ln|F_2(z)| = M_k\ln\left|1 + \frac{z}{y_k}\right| + o\left(|z|^\rho\right), \quad k \to \infty.$$

Следовательно, учитывая отрицательность $\ln|1 + z/y_k|$ в области $\mathcal{D}_{k,\rho}$, получаем асимптотические оценки $(k \to \infty,\ z \in \mathcal{D}_{k,\rho})$

$$\begin{aligned}|z|^{-\rho}\ln|F_2(z)| &\leqslant \frac{ay_k^\rho}{|z|^\rho}\ln\left|1 + \frac{z}{y_k}\right| + o(1) \leqslant \frac{1}{2}ae^{-\rho^2}\ln\left(e^{2\rho} - \sqrt{3}e^\rho + 1\right) + o(1) \leqslant \\ &\leqslant \frac{a}{2}\exp\left(-\frac{1}{81}\right)\ln\left(e^{2/9} - \sqrt{3}e^{1/9} + 1\right) + o(1) \leqslant -\frac{a}{2}.\end{aligned} \tag{6.16}$$

(Последнее неравенство верно при всех достаточно больших k). Из (6.16) находим

$$\limsup_{z\to\infty,\ z\in G_\rho} |z|^{-\rho}\ln|F_2(z)| \leqslant -\frac{a}{2} = -\frac{\rho}{40}\exp\left(-\frac{1}{\rho}\right). \tag{6.17}$$

А так как $C(\rho) > 2$ при $0 < \rho < 1/(2e)$, то из (6.15), (6.17) получаем (6.3). Теорема 6.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2011. — *75*, № 1. — С. 3–28.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
3. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. — М.: Наука, 1981.
4. *Попов А. Ю.* О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1999. — *5*. — С. 48–52.
5. *Попов А. Ю.* Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения// Мат. сб. — 1999. — *190*, № 5. — С. 113–138.
6. *Попов А. Ю.* Точная оценка индекса конденсации последовательности положительных чисел// Тр. МИАН. — 2004. — Доп. 1. — С. 183–206.
7. *Попов А. Ю.* Наименьший возможный тип при $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2005. — *1*. — С. 31–36.
8. *Попов А. Ю.* О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ-плотности, лежащими на одном луче// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 2. — С. 246–260.
9. *Boas R. P.* Entire functions. — New York: Academic Press Inc. Publishers, 1954.
10. *Carlson F.* Sur une classe de séries de Taylor. — Diss. — Upsala, 1914.
11. *Denjoy A.* Sur les produits canoniques d'ordre infini// Journ. de Math. (6). — 1910. — *6*. — С. 1–136.
12. *Rubel L.* Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions// Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — *83*. — С. 417–429.
13. *Valiron G.* Sur le fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière// Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. Ser. — 1913. — *5*. — С. 117–257.

А. Ю. Попов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет