

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, А. М. Седлецкий, Распределение корней функций Миттаг-Леффлера, *СМФН*, 2011, том 40, 3–171

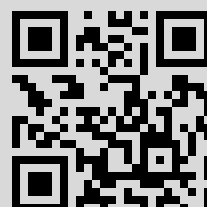
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 213.24.135.225

24 ноября 2015 г., 17:01:25



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

© 2011 г. А. Ю. ПОПОВ, А. М. СЕДЛЕЦКИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Интегральные представления, асимптотики и оценки функций Миттаг-Леффлера .	6
1.1. Интегральные представления функции Миттаг-Леффлера	6
1.2. Основные теоремы об асимптотическом поведении функций Миттаг-Леффлера	11
1.3. Полное асимптотическое разложение одного интеграла	14
1.4. Асимптотическое разложение функции Миттаг-Леффлера порядка $\rho \geq 3/4$	18
1.5. Асимптотическое разложение функции Миттаг-Леффлера порядка $\rho \leq 3/4$	25
Глава 2. Асимптотические свойства нулей функции Миттаг-Леффлера	33
2.1. Асимптотические формулы для нулей	33
2.2. Согласование асимптотики и нумерации нулей	48
Глава 3. Задача о вещественности всех корней функции Миттаг-Леффлера порядка, меньшего $1/2$	56
3.1. Основные результаты главы	56
3.2. Идейное содержание доказательств теорем 3.1.1–3.1.3	59
3.3. Первый корень функции Миттаг-Леффлера	61
3.4. Некоторые неравенства для гамма-функции и ее производных	65
3.5. Доказательство леммы 3.1.1	68
3.6. Доказательство теоремы 3.1.1 в случае $0.4 \leq \rho < 0.5$	69
3.7. Доказательство теоремы 3.1.1 в случае $0.25 < \rho < 0.4$	71
3.8. Доказательство теоремы 3.1.1 в случае $1/6 < \rho \leq 1/4$	73
3.9. Окончание доказательства теоремы 3.1.1 (случай $0 < \rho \leq 1/6$). Доказательство теоремы 3.1.2	75
3.10. Доказательство теоремы 3.1.3	85
3.11. Доказательство теоремы 3.1.4	95
3.12. Доказательство теоремы 3.1.5	96
Глава 4. Неасимптотические свойства нулей	101
4.1. Вещественные корни	101
4.2. Распределение нулей в углах	106
4.3. Случай $\rho = 1/2$	113
4.4. Отсутствие кратных нулей	121
4.5. Нули функции $E_1(z; \mu)$, неполной гамма-функции, функции ошибок	123
Глава 5. Нули преобразований Лапласа и вырожденной гипергеометрической функции	127
5.1. Постановка задачи	127
5.2. Нули финитных преобразований Лапласа	128
5.3. Нули вырожденной гипергеометрической функции	136
Глава 6. Действительные корни функции Миттаг-Леффлера порядка $\rho \in (1/2, 1)$	143
6.1. Постановка задачи и основные результаты	143
6.2. Доказательство теоремы 6.1.2	146
6.3. Несколько неравенств	150
6.4. Наличие действительных корней при некоторых специальных значениях параметра $\mu > 1/\rho$	154
6.5. Доказательство теоремы 6.1.1	158
6.6. Доказательство теоремы 6.1.3	161

6.7. План доказательства теоремы 6.1.4	162
6.8. Завершение доказательства теоремы 6.1.4	165
6.9. Доказательство утверждения 1) теоремы 6.1.5	169
Список литературы	170

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1903 г. в связи с открытым им методом суммирования степенных рядов шведский математик Миттаг-Леффлер [39] ввел в анализ новую (целую) функцию

$$E_{1/\rho}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + n\rho)}, \quad \rho > 0,$$

впоследствии и получившую его имя.

Появление новой функции не осталось незамеченным. Показательно, что уже в первых работах о ней авторов интересовал вопрос распределения ее нулей. Так, Виман (см. [45]) доказал, что при $\rho \geq 2$ все ее нули (корни) вещественны, отрицательны и просты. Позже Пойа (см. [42]) с помощью другого приема передоказал этот факт для случая $2 \leq \rho \in \mathbb{N}$.

С течением времени функция $E_{1/\rho}(z)$ завоевывала все новые позиции в теории функций. Вместе с этим получило разумное расширение и само ее определение с помощью дополнительного параметра μ . Расширение это состояло в переходе к более общей функции

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

которую мы также будем называть *функцией Миттаг-Леффлера* ($E_{1/\rho}(z) = E_{\rho}(z; 1)$). Этот термин и обозначение $E_{\rho}(z; \mu)$ – не единственные из встречающихся в литературе. Например, встречаются обозначения $E_{1/\rho}(z; \mu)$, $E_{1/\rho, \mu}(z)$ и термины «обобщенная функция Миттаг-Леффлера», «функция типа Миттаг-Леффлера». Функция $E_{\rho}(z; 1) = E_{1/\rho}(z)$ будет у нас выступать как *классическая функция Миттаг-Леффлера*.

В нашей стране интерес к функции $E_{\rho}(z; \mu)$ в значительной степени был стимулирован выходом в свет монографии [4] Джрбашяна. Мы придерживаемся обозначения (1), принятого в этой книге.

Из определения (1) сразу вытекают формулы

$$E_1(z; 1) = e^z, \quad E_1(z; -m) = z^{m+1}e^z, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad (2)$$

$$E_{1/2}(z; 1) = \operatorname{ch}\sqrt{z}, \quad E_{1/2}(z; -(2m-1)) = z^m \operatorname{ch}\sqrt{z}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$E_{1/2}(z; 2) = \frac{(\operatorname{sh}\sqrt{z})}{\sqrt{z}}, \quad E_{1/2}(z; -2m) = z^{m+1/2} \operatorname{sh}\sqrt{z}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$E_1(z; c) = \frac{\Phi(1, c; z)}{\Gamma(c)}, \quad c \notin -\mathbb{Z}_+ \quad (3)$$

где $\Phi(a, c; z) = F_1(a, c; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Эти формулы лишней раз свидетельствуют о широте класса целых функций (1).

Позже мы увидим, что, за исключением случаев (2), функция $E_{\rho}(z; \mu)$ имеет бесконечное множество нулей.

Одно из важных направлений, связанных с функциями (1) — это теория интегральных преобразований типа Фурье—Лапласа с ядрами Миттаг-Леффлера. Некоторый намек на возможность построения таких преобразований содержится в первой формуле (2). А содержательная, аналитическая часть этой теории опирается на асимптотические оценки функций (1). К настоящему моменту указанные теория и оценки с наибольшей полнотой представлены в [4].

В последнее время сфера применений функции $E_{\rho}(z; \mu)$ значительно расширилась. Например, она активно используется в теории случайных процессов; здесь укажем лишь на (наиболее характерные) работы [36, 37].

Вопрос о распределении нулей функций Миттаг-Леффлера является одним из центральных в теории этих функций. Основанием для исследований в этом направлении служит уже сама обширность класса целых функций (1), обладающих замечательным асимптотическим поведением. Но важно, что потребность в такой деятельности подкрепляется и различными аспектами спектральной теории, теории обратных задач, теории аппроксимации. Остановимся на этом вкратце.

Наиболее активным потребителем (а можно даже сказать, и заказчиком) теории распределения нулей функций (1) служит та ветвь спектральной теории, в которой рассматриваются дифференциальные операторы с участием дробных производных. Об этом подробно сказано в статье Нахушева (см. [10]), ставящей вопрос о количестве вещественных нулей функции $E_\rho(z; \mu)$ при $\rho > 1/2$ и вещественных μ .

Интересная связь между обратными задачами специального вида и распределением нулей функции $E_\rho(z; \mu)$ при определенных значениях пар параметров ρ, μ обнаружена Тихоновым (см. [28]), доклады которого на специальном семинаре механико-математического факультета МГУ способствовали активизации нашей работы по распределению нулей.

Второму автору для всех $1 \leq p < \infty$ впервые удалось построить системы экспонент $e^{i\lambda_n x}$, одновременно полные и минимальные в пространствах L^p на прямой с быстро убывающим весом (см. об этом [22]). При определенных условиях на вес показатели λ_n этих систем описаны как последовательности нулей функций (1) (с параметрами, зависящими от веса).

Таким образом, помимо бесспорного самостоятельного значения, теория распределения нулей функций типа Миттаг-Леффлера вполне представительно мотивирована и важными приложениями в анализе. Наша цель состоит в том, чтобы изложить *современное состояние* этой теории.

В ее развитии, помимо указанных уже авторов (см. [42, 45]), принимали участие такие математики, как Джрбашян и Нерсисян (об этом см. [4]), Островский и Переселкова (см. [40]), Псху (см. [16]) и другие. Свою лепту внесли и авторы данного труда.

В основном, здесь мы рассматриваем следующий круг задач:

- 1) асимптотическое поведение нулей функций Миттаг-Леффлера и согласованный с ним способ нумерации *всех нулей*,
- 2) количество вещественных нулей функций (1) при $\mu \in \mathbb{R}$,
- 3) идущая от А. Вимана задача описания множества параметров (ρ, μ) , $0 < \rho \leq 1/2$, таких, что все нули функции $E_\rho(z; \mu)$ вещественны, отрицательны и просты, и локализации этих нулей,
- 4) так называемые неасимптотические свойства нулей, например, их распределение в некотором угле, вопрос о кратных нулях.

Кроме этого, исследуется распределение нулей и некоторых других целых функций, в том или ином смысле близких к функциям (1), а именно, вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(a, c; z)$ (см. формулу (3)) и преобразований Лапласа финитных монотонных функций (упомянутая близость здесь состоит в том, что функция $E_1(z; \mu)$ при определенных значениях μ записывается именно в виде такого преобразования).

Главы 1, 3, 6 написаны А. Ю. Поповым, гл. 2, 4, 5 — А. М. Седлецким.

Авторы благодарят А. А. Юхименко за техническую помощь при оформлении работы.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00225-а.

ГЛАВА 1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, АСИМПТОТИКИ И ОЦЕНКИ
ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

В первой главе приводятся теоремы о полном асимптотическом разложении функций $E_\rho(z; \mu)$ при $z \rightarrow \infty$. Доказательства этих теорем опираются на интегральные представления функций Миттаг-Леффлера. С интегральных представлений мы и начнем повествование. В этой части наше изложение является синтезом подходов, имеющихся в [4, гл. 3] и [5, гл. 1, § 5; гл. 4, § 4]. Заметим, что в [5] рассматривается лишь классическая функция Миттаг-Леффлера. В теоремах об асимптотиках $E_\rho(z; \mu)$ мы устраняем погрешности и недоработки, наличествующие в [4, 5], и даем более детальный анализ. Характерной особенностью наших теорем об асимптотиках функций Миттаг-Леффлера является явная оценка остаточного члена (без символа O), которая верна не только при «достаточно больших» $|z|$, а при всех $z \neq 0$ (иногда при $|z| \geq 2$).

1.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Через $\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)$, $\sigma > 0$, $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, обозначим контур на римановой поверхности аргумента

$$\mathfrak{P} = \{\zeta = re^{i\varphi}, \quad r > 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}\}$$

(такой контур обычно называют петлей Ханкеля), проходимый в направлении неубывания $\text{Arg} \zeta$ и состоящий из следующих частей:

- 1) луч $\text{Arg} \zeta = \alpha_1$, $|\zeta| \geq \sigma$,
- 2) дуга $|\zeta| = \sigma$, $\alpha_1 \leq \text{Arg} \zeta \leq \alpha_2$,
- 3) луч $\text{Arg} \zeta = \alpha_2$, $|\zeta| \geq \sigma$.

Теорема 1.1.1. При любых $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $\sigma > |z|^\rho$, $\alpha_1 \in (-3\pi/2, -\pi/2)$, $\alpha_2 \in (\pi/2, 3\pi/2)$ справедливо равенство

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \frac{\zeta^{1/\rho - \mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta^{1/\rho} - z}. \quad (1.1.1)$$

Замечание 1. Если $\text{Re} \mu > 0$, то ввиду сходимости соответствующих несобственных интегралов формула (1.1.1) верна и при $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_1 = -3\pi/2$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\alpha_2 = 3\pi/2$.

Доказательству предположим лемму Ханкеля.

Лемма 1.1.1. При любых $\sigma > 0$, $\alpha_1 \in (-3\pi/2, -\pi/2)$, $\alpha_2 \in (\pi/2, 3\pi/2)$ имеет место тождество

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \zeta^{-s} e^\zeta d\zeta, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (1.1.2)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что интеграл (1.1.2) не зависит от выбора чисел σ , α_1 и α_2 в границах, указанных в лемме. Это вытекает из отсутствия на римановой поверхности $\mathfrak{P}$ особенностей подынтегральной функции $\zeta^{-s} e^\zeta$ (в «обычной» комплексной плоскости при выборе главной ветви аргумента она голоморфна на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$) и достаточно быстрого убывания экспоненты в замкнутых углах, лежащих внутри открытых областей $\{\zeta = re^{i\varphi} \mid r > 0, \pi/2 < |\varphi| < 3\pi/2\}$. Здесь и ниже под $\ln(re^{i\varphi})$, $r > 0$, понимается $\ln r + i\varphi$; в соответствии с этим определяется нецелая степень ζ .

Заметим также, что интеграл $\int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \zeta^{-s} e^\zeta d\zeta$ является целой функцией комплексной переменной s . Действительно, он существует при всех $s \in \mathbb{C}$ и имеет производную, равную

$$\int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \frac{d}{ds} (\zeta^{-s} e^\zeta) d\zeta = - \int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \zeta^{-s} e^\zeta \ln \zeta d\zeta. \quad (1.1.3)$$

Последнее утверждение корректно ввиду равномерной по s на любом компакте в $\mathbb{C}$ сходимости интеграла (1.1.3). Поэтому в силу теоремы единственности тождество (1.1.2) достаточно доказать лишь при $s \in (0, 1)$.

Итак, установим справедливость (1.1.2) при $s \in (0, 1)$, $\alpha_1 = -\pi$, $\alpha_2 = \pi$. При $s \in (0, 1)$ возможен переход к значению $\sigma = 0$, поскольку

$$\int_{|\zeta|=\sigma} \zeta^{-s} e^\zeta d\zeta = O\left(\int_{|\zeta|=\sigma} |\zeta|^{-s} |d\zeta|\right) = O(\sigma^{1-s}) = o(1) \quad (\sigma \rightarrow 0+).$$

Следовательно, при $s \in (0, 1)$ интеграл

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, -\pi, \pi)} \zeta^{-s} e^\zeta d\zeta$$

равен разности интегралов от $\zeta^{-s} e^\zeta$ по нижнему и верхнему берегам разреза $(-\infty, 0]$, где интегрирование ведется от $-\infty$ до 0. В соответствии со сказанным находим, что

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{+\infty}^0 e^{-r} (re^{-\pi i})^{-s} d(-r) - \int_{+\infty}^0 e^{-r} (re^{-\pi i})^{-s} d(-r) \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{+\infty} r^{-s} e^{-r} e^{-\pi i s} dr - \int_0^{+\infty} r^{-s} e^{-r} e^{-\pi i s} dr \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} r^{-s} e^{-r} \left(\frac{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}}{2i} \right) dr = \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \int_0^{+\infty} r^{-s} e^{-r} dr = \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \Gamma(1-s). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Воспользовавшись формулой дополнения

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}, \quad (1.1.5)$$

из (1.1.4) получаем (1.1.2). Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.1.1. Согласно лемме 1.1.1 при любом целом k имеем равенство

$$\frac{1}{\Gamma(\mu + k/\rho)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \frac{e^\zeta d\zeta}{\zeta^{\mu+k/\rho}}. \quad (1.1.6)$$

Умножив равенства (1.1.6) на z^k и просуммировав их по k от 0 до N (N — произвольное натуральное число), получим равенство

$$\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \frac{e^\zeta}{\zeta^\mu} \left(\sum_{k=0}^N \left(\frac{z}{\zeta^{1/\rho}} \right)^k \right) d\zeta. \quad (1.1.7)$$

Теперь в равенстве (1.1.7) требуется перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$. Левая часть (1.1.7) сходится к $E_\rho(z; \mu)$. Последовательность сумм, стоящих под знаком интеграла, при каждом значении $\zeta \in \gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)$ сходится к

$$(1 - z\zeta^{-1/\rho})^{-1},$$

поскольку $|z| < \sigma^{1/\rho} \leq |\zeta|^{1/\rho}$, а значит, знаменатель геометрической прогрессии $(z\zeta^{-1/\rho})^k$ по модулю меньше 1. Отсюда мы собираемся заключить, что справедливо представление

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \frac{e^\zeta d\zeta}{\zeta^\mu (1 - z\zeta^{-1/\rho})} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \frac{\zeta^{1/\rho - \mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta^{1/\rho} - z},$$

которое и требуется доказать. Однако, этот переход требует дополнительного обоснования. Как известно, из поточечной (и даже равномерной) сходимости последовательности целых функций $f_n(\zeta)$ к $f(\zeta)$ на каком-либо луче $\ell \subset \mathbb{C}$ отнюдь не следует предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\ell} f_n(\zeta) d\zeta = \int_{\ell} f(\zeta) d\zeta, \quad (1.1.8)$$

даже если функция f суммируема на ℓ . По теореме Лебега для справедливости (1.1.8) достаточно наличия у $\{|f_n(\zeta)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ общей мажоранты, суммируемой на ℓ (см., например, [33, гл. 1]). В данном случае такой мажорантой является ($\mu = \mu_1 + i\mu_2$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) = \text{Arg}\zeta$)

$$\begin{aligned} \frac{\exp(\text{Re } \zeta)}{|\zeta|^{\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z}{\zeta^{1/\rho}} \right|^k &= \frac{\exp(\text{Re } \zeta)}{|\zeta|^{\mu_1} \exp(-\mu_2 \varphi(\zeta))} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{|\zeta|^{1/\rho}} \right)^k = \\ &= \frac{\exp(\text{Re } \zeta + \mu_2 \varphi(\zeta))}{|\zeta|^{\mu_1} (1 - |z| |\zeta|^{-1/\rho})} \leq \frac{|\zeta|^{1/\rho - \mu_1} \exp(\text{Re } \zeta + 3\pi\mu_2/2)}{|\zeta|^{1/\rho} - |z|}. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Нетрудно убедиться в том, что мажоранта, стоящая в правой части (1.1.9), суммируема на контуре γ , поскольку на лучах этого контура экспонента от $\text{Re } \zeta$ убывает быстрее любой отрицательной степени $|\zeta|$, а знаменатель последней дроби в (1.1.9) в силу условия $|z|^\rho < \sigma \leq |\zeta|$ отделен от нуля. Тем самым, предельный переход в (1.1.7) корректен и теорема полностью доказана. $\square$

При некоторых значениях параметров ρ , μ для доказательства «неасимптотических» теорем о нулях $E_\rho(z; \mu)$ потребуются более специальные интегральные представления.

При $\rho > 1$, $\mu < 1 + 1/\rho$ положим

$$g_\rho(z; t, \mu) = \frac{t \sin \pi \mu - z \sin \pi(\mu - 1/\rho)}{t^2 - 2tz \cos(\pi/\rho) + z^2}, \quad (1.1.10)$$

$$f_\rho(z; t, \mu) = \frac{e^{-\pi i \mu}}{ze^{-\pi i/\rho} - t} - \frac{e^{\pi i \mu}}{ze^{\pi i/\rho} - t}, \quad (1.1.11)$$

$$F_\rho(z; \mu) = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{+\infty} g_\rho(z, t, \mu) t^{\rho(1-\mu)} \exp(-t^\rho) dt. \quad (1.1.12)$$

Несложно проверяется справедливость тождества $f_\rho(z; t, \mu) = 2ig_\rho(z; t, \mu)$. Поэтому наравне с (1.1.12) имеем равенство

$$F_\rho(z; \mu) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_0^{+\infty} f_\rho(z, t, \mu) t^{\rho(1-\mu)} \exp(-t^\rho) dt. \quad (1.1.13)$$

Если $\arg z = \pm\pi/\rho$, то интегралы (1.1.12), (1.1.13) понимаются в смысле главного значения.

Теорема 1.1.2. При $\rho > 1$, $\mu < 1 + 1/\rho$ верны следующие представления:

$$E_\rho(z; \mu) = F_\rho(z; \mu), \quad \frac{\pi}{\rho} < |\arg z| \leq \pi, \quad (1.1.14)$$

$$E_\rho(z; \mu) = F_\rho(z; \mu) + \frac{\rho}{2} z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho), \quad \arg z = \pm \frac{\pi}{\rho}, \quad (1.1.15)$$

$$E_\rho(z; \mu) = F_\rho(z; \mu) + \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho), \quad |\arg z| < \frac{\pi}{\rho}. \quad (1.1.16)$$

Доказательство. Возьмем в формуле (1.1.1) $\alpha_1 = -\pi$, $\alpha_2 = \pi$ и сделаем замену переменной $w = \zeta^{1/\rho}$. Получим равенство

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{w^{\rho(1-\mu)} \exp(w^\rho) dw}{w - z}, \quad (1.1.17)$$

где $\gamma_R = \gamma(R, -\pi/\rho, \pi/\rho)$, $R > |z|$. Если деформировать контур γ_R , уменьшая значение R до нуля, то при $|\arg z| > \pi/\rho$ особенность подынтегральной функции будет лежать слева от контура. Следовательно, представление (1.1.17) верно при любом $R > 0$, а не только при $|z| < R$, если

$|\arg z| > \pi/\rho$. Переход в (1.1.17) к значению $R = 0$ возможен только если подынтегральная функция суммируема на лучах $\arg w = \pm\pi/\rho$. Это имеет место при $\rho(1-\mu) > -1$, т. е. при $\mu < 1 + 1/\rho$. Если $|\arg z| < \pi/\rho$, то, осуществляя деформацию контура, мы встретим на пути полюс в точке $w = z$ и, обойдя его, должны будем прибавить вычет, равный $\rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho)$. Таким образом, приходим к представлению

$$E_\rho(z; \mu) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{w^{\rho(1-\mu)} \exp(w^\rho) dw}{w - z}, & |\arg z| > \frac{\pi}{\rho}, \\ \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{w^{\rho(1-\mu)} \exp(w^\rho) dw}{w - z} + \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho), & |\arg z| < \frac{\pi}{\rho}. \end{cases} \quad (1.1.18)$$

Если же $\arg z = \pm\frac{\pi}{\rho}$, то при указанной деформации контура полюс попадает на γ_0 и к интегралу, согласно формуле Сохоцкого, требуется прибавить половину вычета.

Для завершения доказательства теоремы 1.1.2 (см. (1.1.13)) осталось установить справедливость равенства

$$\int_0^{+\infty} f_\rho(z; t, \mu) t^{\rho(1-\mu)} \exp(-t^\rho) dt = \int_{\gamma_0} \frac{w^{\rho(1-\mu)} \exp(w^\rho) dw}{w - z}.$$

Контур γ_0 является объединением двух лучей $w = t \exp\left(\pm\frac{\pi i}{\rho}\right)$, $0 < t < +\infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \frac{w^{\rho(1-\mu)} \exp(w^\rho) dw}{w - z} &= \int_{+\infty}^0 \frac{t^{\rho(1-\mu)} \exp(-\pi i(1-\mu)) dt \exp\left(-\frac{\pi i}{\rho}\right)}{t \exp\left(-\frac{\pi i}{\rho}\right) - z} + \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho(1-\mu)} \exp(\pi i(1-\mu)) dt \exp\left(\frac{\pi i}{\rho}\right)}{t \exp\left(\frac{\pi i}{\rho}\right) - z} = \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\rho(1-\mu)} \exp(-t^\rho) \left(\frac{e^{\pi i(1-\mu+1/\rho)}}{t \exp\left(\frac{\pi i}{\rho}\right) - z} - \frac{e^{\pi i(\mu-1-1/\rho)}}{t \exp\left(-\frac{\pi i}{\rho}\right) - z} \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\rho(1-\mu)} \exp(-t^\rho) \left(\frac{e^{-\pi i \mu}}{ze^{-\pi i/\rho} - t} - \frac{e^{\pi i \mu}}{ze^{\pi i/\rho} - t} \right) dt, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Теорема 1.1.2 полностью доказана. $\square$

Для детального исследования поведения функций Миттаг-Леффлера в некоторой окрестности отрицательной части действительной оси потребуется более специальная формула для $E_\rho(z; \mu)$. Она будет эффективно работать при $\rho \in [2/5, 2/3]$, но мы докажем ее для полноты при $\rho \in (1/3, 1)$.

Теорема 1.1.3. При любых $\rho \in (1/3, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq \rho\mu - 1$, в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} z > 0$) верно тождество

$$E_\rho(-z^{1/\rho}; \mu) = 2\rho z^{1-\mu} \exp(z \cos(\pi\rho)) \cos(z \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} z^{-k/\rho}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + \Omega_m(z; \rho, \mu), \quad (1.1.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_m(z; \rho, \mu) &= \frac{(-1)^m z^{1-\mu}}{\pi} \times \\ &\times \left[I_{1,m}(z; \rho, \mu) \sin\left(\pi\left(\mu - \frac{m+1}{\rho}\right)\right) + I_{2,m}(z; \rho, \mu) \sin\left(\pi\left(\mu - \frac{m}{\rho}\right)\right) \right], \quad (1.1.20) \end{aligned}$$

$$I_{1,m}(z; \rho, \mu) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{(m+1)/\rho-\mu} e^{-zt} dt}{t^{2/\rho} + 2t^{1/\rho} \cos(\pi/\rho) + 1},$$

$$I_{2,m}(z; \rho, \mu) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{(m+1)/\rho-\mu} e^{-zt} dt}{t^{1/\rho} + 2 \cos(\pi/\rho) + t^{-1/\rho}}.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что справедливость представления (1.1.19) достаточно установить только при $z = x > 0$. Действительно, обе части (1.1.19) являются функциями, голоморфными в открытой правой полуплоскости. Поэтому, согласно теореме единственности, они совпадают между собой при $\operatorname{Re} z > 0$ тогда и только тогда, когда совпадают на $(0, +\infty)$.

Представим функцию $E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu)$ по формуле (1.1.1), положив в ней $\alpha_1 = -\pi$, $\alpha_2 = \pi$. Получим равенство

$$E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, -\pi, \pi)} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}}, \quad x < \sigma.$$

Внутри петель Ханкеля $\gamma(\sigma, -\pi, \pi)$, $x < \sigma$, подынтегральная функция имеет ровно два простых полюса $\zeta_\pm = x \exp(\pm \pi i \rho)$. Все остальные полюсы, лежащие на римановой поверхности аргумента, а именно $\{x \exp(\pm(2k+1)\pi i \rho)\}_{k \in \mathbb{N}}$, не попадают ни внутрь нашей петли, ни на ее границу, поскольку $\rho > 1/3$. Сумма вычетов подынтегральной функции в точках $\zeta_\pm$ равна

$$\begin{aligned} & \lim_{\zeta \rightarrow x \exp(\pi i \rho)} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta (\zeta - x \exp(\pi i \rho))}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} + \lim_{\zeta \rightarrow x \exp(-\pi i \rho)} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta (\zeta - x \exp(-\pi i \rho))}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} = \\ & = \zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta|_{\zeta=x \exp(\pi i \rho)} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow x \exp(\pi i \rho)} \frac{\zeta - x \exp(\pi i \rho)}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} + \\ & + \zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta|_{\zeta=x \exp(-\pi i \rho)} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow x \exp(-\pi i \rho)} \frac{\zeta - x \exp(-\pi i \rho)}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} = \\ & = \rho \zeta^{1-\mu} e^\zeta|_{\zeta=x \exp(\pi i \rho)} + \rho \zeta^{1-\mu} e^\zeta|_{\zeta=x \exp(-\pi i \rho)} = 2\rho \operatorname{Re}(\zeta^{1-\mu} e^\zeta)|_{\zeta=x \exp(\pi i \rho)} = \\ & = 2\rho \operatorname{Re} \exp\left(x e^{\pi i \rho} + (1-\mu)(\ln x + \pi i \rho)\right) = \\ & = 2\rho x^{1-\mu} \exp(x \cos(\pi \rho)) \cos(x \sin(\pi \rho) + (1-\mu)\pi \rho). \quad (1.1.21) \end{aligned}$$

Перейдем к интегрированию по контуру $\gamma(\sigma', -\pi, \pi)$, $0 < \sigma' < x$, прибавив к интегралу функцию (1.1.21). Получим, что

$$E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu) = 2\rho x^{1-\mu} \exp(x \cos(\pi \rho)) \cos(x \sin(\pi \rho) + (1-\mu)\pi \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\pi, \pi)} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}}. \quad (1.1.22)$$

Преобразуем подынтегральную функцию в (1.1.22) с помощью тождества

$$\frac{q}{1+q} = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} q^k + \frac{(-1)^m q^{m+1}}{1+q}, \quad q \in \mathbb{C}, \quad q \neq -1, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (1.1.23)$$

Согласно ему дробь

$$\frac{\zeta^{1/\rho}}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} = \frac{(\zeta/x)^{1/\rho}}{1 + (\zeta/x)^{1/\rho}}$$

при любом $m \in \mathbb{N}$ может быть записана в виде

$$\frac{\zeta^{1/\rho}}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} \zeta^{k/\rho}}{x^{k/\rho}} + \frac{(-1)^m \zeta^{\frac{m+1}{\rho}}}{(1 + (\zeta/x)^{1/\rho}) x^{\frac{m+1}{\rho}}}. \quad (1.1.24)$$

В соответствии с (1.1.24) имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\pi, \pi)} \frac{\zeta^{1/\rho - \mu} e^{\zeta} d\zeta}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} x^{-k/\rho}}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\pi, \pi)} \zeta^{k/\rho - \mu} e^{\zeta} d\zeta + \Omega_m(x, \rho, \mu), \quad (1.1.25)$$

где

$$\Omega_m(x; \rho, \mu) = \frac{(-1)^m x^{-\frac{m+1}{\rho}}}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\pi, \pi)} \frac{\zeta^{\frac{m+1}{\rho} - \mu} e^{\zeta} d\zeta}{1 + (\zeta/x)^{1/\rho}}. \quad (1.1.26)$$

Показатель степени ζ в числителе дроби, стоящей в интеграле (1.1.26), неотрицателен ввиду наложенного в теореме ограничения $m \geq \rho\mu - 1$. Поэтому можно перейти к значению $\sigma' = 0$. Тогда петля Ханкеля становится отрицательной частью действительной оси, проходимой вначале от $-\infty$ до 0 по нижнему берегу разреза ($\zeta = re^{-\pi i}$), а потом от 0 до $-\infty$ по верхнему берегу ($\zeta = re^{\pi i}$). Сделав соответствующие замены переменной в интегралах по берегам разреза, находим, что

$$\begin{aligned} \Omega_m(x; \rho, \mu) &= \frac{(-1)^m x^{-\frac{m+1}{\rho}}}{2\pi i} \times \\ &\times \int_0^{+\infty} r^{\frac{m+1}{\rho} - \mu} e^{-r} \left(\frac{\exp\left(\pi i \left(\mu - \frac{m+1}{\rho}\right)\right)}{1 + \left(\frac{r}{x}\right)^{1/\rho} \exp\left(-\frac{\pi i}{\rho}\right)} - \frac{\exp\left(-\pi i \left(\mu - \frac{m+1}{\rho}\right)\right)}{1 + \left(\frac{r}{x}\right)^{1/\rho} \exp\left(\frac{\pi i}{\rho}\right)} \right) dr. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Далее, положив $r = xt$, получаем равенство

$$\Omega_m(x; \rho, \mu) = \frac{(-1)^m x^{1-\mu}}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{\rho} - \mu} e^{-tx} U_m(t; \rho, \mu) dt,$$

где

$$\begin{aligned} U_m(t; \rho, \mu) &= \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(1 + t^{1/\rho} \exp(\frac{\pi i}{\rho})) \exp\left(\pi i \left(\mu - \frac{m+1}{\rho}\right)\right) - (1 + t^{1/\rho} \exp(-\pi i \rho)) \exp\left(\pi i \left(\frac{m+1}{\rho} - \mu\right)\right)}{1 + 2t^{1/\rho} \cos(\pi/\rho) + t^{2/\rho}} = \\ &= \frac{\sin\left(\pi \left(\mu - \frac{m+1}{\rho}\right)\right) + t^{1/\rho} \sin\left(\pi \left(\mu - \frac{m}{\rho}\right)\right)}{1 + 2t^{1/\rho} \cos(\pi/\rho) + t^{2/\rho}}. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

Отсюда сразу же следует представление остаточного члена $\Omega_m(x; \rho, \mu)$ в том виде, в котором это утверждается в формулировке теоремы 1.1.3. Соотношения (1.1.22) и (1.1.25) вместе с леммой 1.1.1 дают вид главной части представления $E_\rho(-z^{1/\rho}; \mu)$. Теорема доказана. $\square$

1.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

В этом параграфе приводятся основные результаты об асимптотическом поведении $E_\rho(z; \mu)$ при $z \rightarrow \infty$. Доказательств пока не будет, поскольку все формулируемые утверждения являются следствием доказанных ниже в разделах 1.3–1.5.

Начнем с описания роста максимума модуля функций Миттаг-Леффлера в терминах порядка и типа. Напомним, что порядком целой функции $f(z)$ называется величина

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \left(\max_{|z| \leq R} |f(z)| \right)}{\ln R}. \quad (1.2.1)$$

Предложение 1.2.1. *Порядок функции $E_\rho(z; \mu)$ равен ρ , причем верхний предел в (1.2.1) может быть заменен на обычный предел.*

Более тонкой характеристикой роста является тип при порядке ρ , равный по определению

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\max_{|z| \leq R} |f(z)| \right)}{R^\rho}. \quad (1.2.2)$$

Предложение 1.2.2. Тип при порядке ρ функции $E_\rho(z; \mu)$ равен 1 при любом $\mu \in \mathbb{C}$, причем верхний предел в (1.2.2) может быть заменен на обычный предел.

Предложения 1.2.1 и 1.2.2 являются тривиальными следствиями формул, выражающих порядок и тип целой функции через коэффициенты ее ряда Тейлора (см. [9, гл. 7, § 12]).

Сформулируем менее очевидный результат.

Предложение 1.2.3. При любых $\rho > 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ справедлива асимптотика

$$\ln \left(\max_{|z| \leq R} |E_\rho(z; \mu)| \right) = R^\rho + O(\ln R).$$

Постоянная в O зависит от ρ и μ .

Поведение целой функции порядка ρ нормального типа¹ на лучах в комплексной плоскости характеризует индикатриса роста

$$H_\rho(f, \theta) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(Re^{i\theta})|}{R^\rho}, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Предложение 1.2.4. При любом $\mu \in \mathbb{C}$ имеют место равенства

$$H_\rho(E_\rho(z; \mu), \theta) = \cos(\rho\theta), \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad 0 < \rho \leq 1/2,$$

$$H_\rho(E_\rho(z; \mu), \theta) = \begin{cases} \cos(\rho\theta), & |\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \\ 0, & \frac{\pi}{2\rho} < |\theta| \leq \pi, \end{cases}, \quad \frac{1}{2} < \rho.$$

Исключение в последнем равенстве составляют пары параметров $\rho = 1$, $\mu \in \mathbb{Z}$, $\mu \leq 1$. Тогда $E_1(z; \mu) = z^{1-\mu}e^z$ и $H(\theta) = \cos \theta$, $-\pi < \theta \leq \pi$.

Предложения 1.2.3 и 1.2.4 легко выводятся из двух следующих теорем о полном асимптотическом разложении функций Миттаг-Леффлера. Всюду ниже при определении не целой степени z в комплексной плоскости (а не на римановой поверхности $\mathfrak{P}$) выбирается главная ветвь аргумента: $\arg(re^{i\theta}) = \theta$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $r > 0$.

Теорема 1.2.1. При любых $\rho > 1/2$, $\mu \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие асимптотики.

Если $|\arg z| \leq \min(\pi, \frac{\pi}{\rho})$, то при $z \rightarrow \infty$

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho) - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O(|z|^{-m-1}). \quad (1.2.3)$$

Если $\rho > 1$, $\frac{\pi}{\rho} \leq |\arg z| \leq \pi$, то при $z \rightarrow \infty$

$$E_\rho(z; \mu) = - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O(|z|^{-m-1}). \quad (1.2.4)$$

Замечание 2. При $\rho \in (1/2, 1]$ формула (1.2.3) верна при $|\arg z| \leq \pi$, т. е. во всей плоскости. Первое ее слагаемое терпит разрыв на луче $(-\infty, 0)$, но к противоречию это обстоятельство не приводит, поскольку в каждом угле $\alpha \leq |\arg z| \leq \pi$, $\alpha > \frac{\pi}{2\rho}$, модуль функции $\rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho)$ при $r \rightarrow +\infty$ стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени r . В частности, на отрицательной части действительной оси при любых $\rho > 1/2$ и $\mu \in \mathbb{C}$ имеем соотношение

$$E_\rho(z; \mu) = - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O(|z|^{-m-1}) \quad (z \in \mathbb{R}, \quad z \rightarrow -\infty). \quad (1.2.5)$$

¹Это означает — конечного и положительного типа при порядке ρ .

Теорема 1.2.2. При любых $\rho \leq 1/2$, $\mu \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ верна асимптотика

$$E_\rho(z; \mu) = \rho \sum_{|\arg z + 2\pi n| \leq \frac{3\pi}{4\rho}} (z^\rho e^{2\pi i n \rho})^{1-\mu} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}) - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O(|z|^{-m-1}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.2.6)$$

Прокомментируем содержание теорем 1.2.1 и 1.2.2.

Теорема 1.2.1 представляет собой усовершенствование известного результата Джрбашяна (см. [4, гл. 3, с. 134]). Джрбашян установил справедливость асимптотики (1.2.3) в углах $|\arg z| \leq \alpha$, где α — любое число из интервала $\left(\frac{\pi}{2\rho}, \min\left(\frac{\pi}{\rho}, \pi\right)\right)$, а на дополнении к этим углам верна асимптотика (1.2.4). Почему Джрбашян не рассмотрел значение $\alpha = \frac{\pi}{\rho}$ — осталось для нас загадкой. Мы положили

$$\alpha = \min\left(\pi, \frac{\pi}{\rho}\right) \quad (1.2.7)$$

и тем самым исключили из формулировки теоремы лишний параметр. Правда, вдумчивый читатель может задать вопрос: «Чем выбранное в (1.2.7) значение α лучше, чем, скажем, $\alpha_1 = \min(\pi, 3\pi/(4\rho))$?» От выбора α зависит только остаточный член асимптотики. В теоремах 1.4.1–1.5.1 мы даем его явную оценку (без символа O). Если кто-либо, взяв параметр α иным, получит лучшую — мы признаем его выбор α более удачным. Пока же мы придерживаемся мнения, что формула (1.2.7) является наиболее разумной.

Теорема 1.2.2 является исправлением ошибочного результата Нерсисяна [4, лемма 3.6, с. 137]. Этот результат таков: «Если $0 < \rho \leq 1/2$, то для любого целого $m \geq 1$ при $|z| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$E_\rho(z; \mu) = \rho \sum_{|\arg z + 2\pi n| \leq \frac{\pi}{2\rho}} (z^\rho e^{2\pi i n \rho})^{1-\mu} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}) - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O(|z|^{-m-1}), \quad (1.2.8)$$

где в первой сумме суммирование распространяется на те значения $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, для которых $|\arg z + 2\pi n| \leq \frac{\pi}{2\rho}$.

Ошибку в этом утверждении обнаружить непросто. Формулы (1.2.6) и (1.2.8) отличаются лишь небольшой деталью. В (1.2.6) суммирование распространяется на значения $n \in \mathbb{Z}$, для которых $|\arg z + 2\pi n| \leq \frac{3\pi}{4\rho}$ (а не $\pi/(2\rho)$). Таким образом, в (1.2.8) по сравнению с (1.2.6) не хватает некоторых слагаемых, и в результате асимптотика (1.2.8) справедлива на каждом луче в $\mathbb{C}$, выходящем из точки $z = 0$, но при $z \rightarrow \infty$ она все же не имеет места!

Убедимся в этом на простейшем примере. Рассмотрим функцию

$$E_{1/4}(w^4, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^4}{(4k)!} = \frac{1}{4}(e^w + e^{-w} + e^{iw} + e^{-iw}). \quad (1.2.9)$$

Если на момент поверить формуле (1.2.8), то, учитывая, что $\exp(\pi i n/2) = i^n$, получим, что

$$E_{1/4}(z, 1) = \frac{1}{4} \sum_{|\arg z + 2\pi n| \leq 2\pi} \exp(\sqrt[4]{z} i^n) + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.2.10)$$

Теперь рассмотрим кривую

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid z = (x - i)^4, \quad x \geq 3\}.$$

Элементарно проверяется, что кривая K целиком расположена в угле $-\pi/2 < \arg z < 0$. В соответствии с этим в (1.2.10) для $z \in K$ берутся значения $n = 0$ и $n = 1$. Следовательно, из (1.2.10)

находим¹, что

$$E_{1/4}((x-i)^4, 1) = \frac{1}{4}(e^{x-i} + e^{i(x-i)}) + O(x^{-4}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.2.11)$$

Вычитая из (1.2.9) асимптотику (1.2.11), при $w = x - i$ получим соотношение

$$\frac{1}{4}(e^{-x+i} + e^{-i(x-i)}) = O(x^{-4}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

откуда

$$e^{-1-ix} = O(x^{-4} + e^{-x}) = o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Последнее соотношение противоречиво. Это и означает, что формула (1.2.10) (а вместе с ней и (1.2.8)) неверна.

Неполным является освещение интересующего нас вопроса у Евграфова (см. [5, гл. 4, §4]). Он рассматривает только классическую функцию Миттаг-Леффлера ($\mu = 1$) и приводит аналог формулы (1.2.6) с условием $|\arg z + 2\pi n| \leq \frac{\pi}{2\rho} + \eta$ и ограничением области изменения индекса суммирования $|n| \leq [1/\rho]$. Однако, о числе η Евграфов ничего не пишет кроме того, что оно положительно, и доказательства полученной им асимптотики не дает. В силу наличия подобных недоработок в изложении асимптотик функций Миттаг-Леффлера порядка $\rho < 1/2$ даже у столь известных ученых, мы сочли себя обязанными привести верный результат с максимально подробным доказательством (см. ниже разделы 1.3 и 1.5) и явной оценкой остаточных членов без символа O .

В заключение этого параграфа отметим еще одну особенность нашего подхода. Теорему 1.2.1 мы докажем только при $\rho \geq 3/4$, а теорему 1.2.2 — при $\rho \leq 3/4$. Оказывается, теорема 1.2.2 верна не только при $\rho \leq 1/2$, и при $\rho \in (1/2, 3/4]$ теоремы 1.2.1 и 1.2.2 равносильны. Зачем это делается? Причина кроется в отсутствии равномерности по параметру ρ асимптотики (1.2.4) при $\rho \in (1/2, 3/4]$. Добавляя в асимптотику $E_\rho(z; \mu)$ в угле $|\arg(-z)| \leq \frac{3\pi}{4\rho} - \pi$ согласно формуле (1.2.6) еще одно слагаемое, мы восстанавливаем этим актом равномерность асимптотик по параметру ρ . Это усовершенствование сыграет решающую роль в исследовании количества вещественных нулей $E_\rho(z; \mu)$ при $\rho \in (1/2, 2/3]$, $\mu \in \mathbb{R}$.

1.3. ПОЛНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРАЛА

Этот параграф носит «технический» характер. В нем выводится асимптотика интеграла

$$J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)} \frac{\zeta^{1/\rho - \mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta^{1/\rho} - z}, \quad (1.3.1)$$

где $z, \mu \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, $0 < \sigma < |z|^\rho$, $\alpha_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Этот интеграл естественным образом возникает в теории функций Миттаг-Леффлера, поскольку отличается от представляющего их интеграла (см. теорему 1.1.1) значением параметра σ петли Ханкеля, по которой ведется интегрирование. Здесь σ — меньше (а не больше, как в (1.1.1)), чем $|z|^\rho$. Предполагается, что z не лежит на лучах

$$\ell_j = \{r \exp(i\alpha_j/\rho) \mid r \geq 0\}, \quad j = 1, 2, \quad (1.3.2)$$

и в этом случае интеграл (1.3.1) не зависит от выбора $\sigma \in (0, |z|^\rho)$. Функция $J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2)$ является аналитичной по переменной z в открытых углах, которые образуются после удаления из $\mathbb{C}$ лучей (1.3.2). Через $\ell(z)$ обозначим луч, выходящий из точки 0 и проходящий через точку z , а через $\delta(z)$ — величину наименьшего из углов между лучами $\ell(z)$ и ℓ_j . Наконец, положим

$$\kappa(z) = \begin{cases} \sin^{-1} \delta(z), & 0 < \delta(z) \leq \pi/2, \\ 1, & \pi/2 < \delta(z), \end{cases}$$

$$A = \max\left(\left|\frac{1}{\cos \alpha_1}\right|, \left|\frac{1}{\cos \alpha_2}\right|\right), \quad \alpha = \max(|\alpha_1|, \alpha_2).$$

¹В соответствии с выбором ветви аргумента в z -плоскости, сделанным перед формулировкой теоремы 1.2.1, имеем равенство $\sqrt[4]{z^4} = z$, если $|\arg z| < \pi/4$.

Следующая лемма о полном асимптотическом разложении интеграла J_ρ в области $\mathbb{C} \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$ является центральным результатом этого параграфа.

Лемма 1.3.1. При любых $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$ выполняется соотношение

$$J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2) = - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + R_m(z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2),$$

в котором остаточный член допускает оценку

$$|R_m(z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2)| \leq \frac{\varkappa(z) A^{b+1} \Gamma(b+1) (e^{\alpha_1 \operatorname{Im} \mu} + e^{\alpha_2 \operatorname{Im} \mu})}{2\pi |z|^{m+1}}, \quad (1.3.3)$$

если $b = \frac{m+1}{\rho} - \operatorname{Re} \mu \geq 0$. Если же $b < 0$, то при $|z| \geq 2$ имеем равенство

$$|R_m(z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2)| \leq \frac{(e^{\alpha_1 \operatorname{Im} \mu} + e^{\alpha_2 \operatorname{Im} \mu})}{\pi |z|^{m+1}} \left(\frac{\varkappa(z) A}{2} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{\cos \varphi} d\varphi \right). \quad (1.3.4)$$

Замечание 3. Обратим внимание на то, что оценка (1.3.3) верна и не только при «достаточно больших» $|z|$, а при всех $z \in \mathbb{C} \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$. Таким образом, получена не только асимптотика $J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2)$ при $z \rightarrow \infty$, но и выведены двусторонние оценки этих интегралов. Ясно, что эти оценки разумно применять при $|z| \geq 1$ и чем больше $|z|$, тем они точнее.

Замечание 4. Легко видеть, что при $\mu \in \mathbb{R}$ неравенства (1.3.3) и (1.3.4) упрощаются. Например,

$$|R_m(z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2)| \leq \frac{\varkappa(z) A^{b+1} \Gamma(b+1)}{\pi |z|^{m+1}}, \quad \text{если } b = \frac{m+1}{\rho} - \mu \geq 0. \quad (1.3.5)$$

Доказательство леммы 1.3.1. По аналогии с (1.1.23) имеем равенство

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=1}^m q^k + \frac{q^m}{1-q}, \quad q \in \mathbb{C}, \quad q \neq 1, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (1.3.6)$$

Положив в (1.3.6) $q = \zeta^{1/\rho}/z$ ($q \neq 1$ ввиду условия $z \notin (\ell_1 \cup \ell_2)$), получим, что

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \zeta^{1/\rho}/z} = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\zeta^{1/\rho}}{z} \right)^k + \frac{\zeta^{m/\rho}}{z^m (1 - \zeta^{1/\rho}/z)} \right)$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\zeta^{1/\rho} - z} = - \sum_{k=1}^m \frac{\zeta^{(k-1)/\rho}}{z^k} + \frac{\zeta^{m/\rho}}{z^m (\zeta^{1/\rho} - z)}. \quad (1.3.7)$$

Из (1.3.7) вытекает представление (контур $\gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)$ будем для краткости обозначать одной буквой γ)

$$\int_{\gamma} \frac{\zeta^{1/\rho - \mu} e^{\zeta}}{\zeta^{1/\rho} - z} d\zeta = - \sum_{k=1}^m z^{-k} \int_{\gamma} \zeta^{k/\rho - \mu} e^{\zeta} d\zeta + z^{-m} \int_{\gamma} \frac{\zeta^{\frac{m+1}{\rho} - \mu} e^{\zeta}}{\zeta^{1/\rho} - z} d\zeta.$$

Согласно лемме 1.1.1 имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \zeta^{k/\rho - \mu} e^{\zeta} d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\mu - k/\rho)}.$$

Отсюда и из (1.3.1) получаем следующее выражение для интеграла $J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2)$:

$$J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2) = - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + \frac{z^{-m}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\zeta^{\frac{m+1}{\rho} - \mu} e^{\zeta}}{\zeta^{1/\rho} - z} d\zeta. \quad (1.3.8)$$

Главная часть асимптотического разложения найдена. Перейдем к оценке остаточного члена

$$R_m(z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{z^{-m}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\zeta^{\frac{m+1}{\rho} - \mu} e^{\zeta}}{\zeta^{1/\rho} - z} d\zeta.$$

Оценим сверху модуль подынтегральной функции на трех участках контура $\gamma = \gamma(\sigma, \alpha_1, \alpha_2)$ — двух лучах и дуге. При любых $\zeta \in \mathfrak{P}$, $s \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$|\zeta^s| = |\zeta|^{\operatorname{Re} s} \exp(-(Arg \zeta) I \mu s).$$

В соответствии с этим, учитывая введенное в лемме обозначение $b = \frac{m+1}{\rho} - \operatorname{Re} \mu$, находим, что

$$\left| \zeta^{\frac{m+1}{\rho} - \mu} \right| = |\zeta|^b \exp(\varphi \operatorname{Im} \mu), \quad \varphi = Arg \zeta. \quad (1.3.9)$$

Несложно проверяется также, что при любом $x > 0$

$$\min_{r \geq 0} |re^{\pm i\delta} - x| = \begin{cases} \frac{x}{\sin \delta}, & 0 < \delta \leq \pi/2, \\ x, & \pi/2 < \delta \leq \pi. \end{cases}$$

Отсюда и из определения величины $\varkappa(z)$, данного перед формулировкой леммы, сразу же следует оценка

$$|\zeta^{1/\rho} - z|^{-1} \leq \frac{\varkappa(z)}{|z|}, \quad Arg \zeta = \alpha_1, \quad Arg \zeta = \alpha_2, \quad (1.3.10)$$

и совсем очевидно неравенство

$$|\zeta^{1/\rho} - z|^{-1} \leq (|z| - \sigma^{1/\rho})^{-1}, \quad |\zeta| = \sigma, \quad 0 < \sigma < |z|^\rho. \quad (1.3.11)$$

Из (1.3.9) и (1.3.11) видно, что при $\sigma > 0$ подынтегральная функция на дуге $\{\zeta \in \mathfrak{P} \mid |\zeta| = \sigma, \alpha_1 \leq Arg \zeta \leq \alpha_2\}$ есть $O(\sigma^b)$ при любом фиксированном $z \in \mathbb{C}(\ell_1 \cup \ell_2)$ (постоянная в O зависит от $z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2$). Следовательно, интеграл по этой дуге есть $O(\sigma^{b+1}) = o(1)$ ($\sigma \rightarrow 0$) при $b > -1$. Так что в силу произвольности $\sigma \in (0, |z|^\rho)$ мы имеем право в случае $b > -1$ перейти к предельному значению $\sigma = 0$ и в (1.3.1) интегрировать по объединению лучей $\{Arg \zeta = \alpha_1\} \cup \{Arg \zeta = \alpha_2\}$. Сделаем это при $b \geq 0$.

Итак, при $b \geq 0$ имеем равенство

$$R_m(z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{z^{-m}}{2\pi i} \int_{\gamma(0, \alpha_1, \alpha_2)} \frac{\zeta^{\frac{m+1}{\rho} - \mu} e^{\zeta}}{\zeta^{1/\rho} - z} d\zeta. \quad (1.3.12)$$

Из (1.3.12), (1.3.9) и (1.3.10) находим, что

$$\begin{aligned} |R_m(z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2)| &\leq \frac{|z|^{-m}}{2\pi} \int_{\gamma(0, \alpha_1, \alpha_2)} \frac{|\zeta^{\frac{m+1}{\rho} - \mu}| \exp(\operatorname{Re} \zeta) |d\zeta|}{|\zeta^{1/\rho} - z|} d\zeta \leq \\ &\leq \frac{\varkappa(z)}{2\pi |z|^{m+1}} \int_{\gamma(0, \alpha_1, \alpha_2)} |\zeta^{\frac{m+1}{\rho} - \mu}| \exp(\operatorname{Re} \zeta) |d\zeta| = \\ &= \frac{\varkappa(z)}{2\pi |z|^{m+1}} \left(\int_0^{+\infty} e^{\alpha_1 \operatorname{Im} \mu} r^b e^{r \cos \alpha_1} dr + \int_0^{+\infty} e^{\alpha_2 \operatorname{Im} \mu} r^b e^{r \cos \alpha_2} dr \right). \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Ввиду включений $\alpha_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ числа $\cos \alpha_1$ и $\cos \alpha_2$ отрицательны. Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} r^b e^{r \cos \alpha_j} dr = \frac{\Gamma(b+1)}{|\cos \alpha_j|^{b+1}} \leq A^{b+1} \Gamma(b+1), \quad j = 1, 2 \quad (1.3.14)$$

(напомним, что выше мы обозначали $A = \max(|\cos \alpha_1|^{-1}, |\cos \alpha_2|^{-1})$). Соотношения (1.3.13) и (1.3.14) приводят к оценке (1.3.3).

Теперь пусть $b < 0$. Мы рассматриваем в этом случае только значения $|z| \geq 2$ и полагаем $\sigma = 1$. На контуре $\gamma(1, \alpha_1, \alpha_2)$ параметр r на лучах $\zeta = re^{i\alpha_j}$, $j = 1, 2$, меняется от 1 до $+\infty$ и появляется еще интеграл по дуге $\zeta = e^{i\varphi}$, $\alpha_1 \leq \varphi_1 \leq \alpha_2$. В соответствии с этим, учитывая неравенства (1.3.9)–(1.3.11), получаем неравенство

$$|R_m(z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2)| \leq \frac{\varkappa(z)}{2\pi|z|^{m+1}} \left(e^{\alpha_1 \operatorname{Im} \mu} \int_1^{+\infty} r^b e^{r \cos \alpha_1} dr + e^{\alpha_2 \operatorname{Im} \mu} \int_1^{+\infty} r^b e^{r \cos \alpha_2} dr \right) + \frac{1}{2\pi(|z|-1)|z|^m} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{\varphi \operatorname{Im} \mu + \cos \varphi} d\varphi.$$

Так как $b < 0$, то при $r \geq 1$ оценим r^b сверху единицей и вычислим интегралы

$$\int_1^{+\infty} e^{r \cos \alpha_j} dr = \frac{e^{\cos \alpha_j}}{|\cos \alpha_j|} \leq A, \quad j = 1, 2.$$

В результате этого придем к неравенству

$$\begin{aligned} |R_m(z, \rho, \mu, \alpha_1, \alpha_2)| &\leq \frac{\varkappa(z)A(e^{\alpha_1 \operatorname{Im} \mu} + e^{\alpha_2 \operatorname{Im} \mu})}{2\pi|z|^{m+1}} + \frac{\max(e^{\alpha_1 \operatorname{Im} \mu}, e^{\alpha_2 \operatorname{Im} \mu}) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp(\cos \varphi) d\varphi}{\pi|z|^{m+1}} \leq \\ &\leq \frac{(e^{\alpha_1 \operatorname{Im} \mu} + e^{\alpha_2 \operatorname{Im} \mu})}{\pi|z|^{m+1}} \left(\frac{\varkappa(z)A}{2} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{\cos \varphi} d\varphi \right), \end{aligned}$$

которое и требовалось доказать. Лемма 1.3.1 полностью доказана. $\square$

Замечание 5. Случай $b \geq 0$, как правило, более интересен, чем $b < 0$, поскольку к нему всегда можно прийти, взяв $m \geq \rho\mu - 1$. Ввиду отмеченного обстоятельства оценка остаточного члена в случае $b \geq 0$ делалась нами более аккуратно, а при $b < 0$ были допущены небольшие огрубления, упростившие доказательство.

В заключение параграфа отметим, что интегралы $J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2)$ нужны нам постольку, поскольку они возникают в исследовании функций Миттаг-Леффлера. В дальнейшем, α_1 и α_2 будут выбираться специальным образом в зависимости от параметра ρ и аргумента переменной z . Что же касается «отвлеченно-теоретического» вопроса об асимптотическом разложении $J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2)$ при $z \rightarrow \infty$ в области $\mathbb{C} \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$, то по этому поводу на основании леммы 1.3.1 можно сказать следующее.

1. В любом замкнутом угле $\mathcal{L}$, лежащем внутри каждого из открытых углов, на которые объединение лучей $\ell_1 \cup \ell_2$ делит комплексную плоскость, функция $\delta(z)$ отлична от нуля, а значит

$$\sup_{z \in \mathcal{L}} \varkappa(z) = C(\mathcal{L}) < +\infty. \quad (1.3.15)$$

Из (1.41) и леммы 1.3.1 вытекает полное асимптотическое разложение

$$J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2) \sim - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)}, \quad z \in \mathcal{L}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.3.16)$$

которое понимается как справедливость формул

$$J_\rho(z, \mu, \alpha_1, \alpha_2) = - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O(|z|^{-m-1}), \quad z \in \mathcal{L}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.3.17)$$

при любом $m \in \mathbb{N}$.

2. В действительности лемма 1.3.1 позволяет доказать формулы (1.3.16), (1.3.17) для более широких областей, например, для «внутренностей» гипербола, асимптотами которых служат лучи ℓ_1 и ℓ_2 . Годится и любая область G , ограниченная кривыми, каждая точка z которых удалена от $\ell_1 \cup \ell_2$ не менее, чем на $C|z|^{-p}$ (C, p — фиксированные положительные постоянные). Тогда $\varkappa(z) = O(|z|^{p+1})$ ($z \rightarrow \infty, z \in G$) и, взяв в асимптотическом ряде $m + p + 1$ слагаемое, мы получим (1.3.17).

1.4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ПОРЯДКА $\rho \geq 3/4$

Через $\mathcal{L}_\rho$, $\rho > 1$, обозначим угол

$$\mathcal{L}_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \quad |\arg z| \leq \pi/\rho\}.$$

Теорема 1.4.1. При любых $\rho > 1$, $\mu \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие асимптотики:

1) Если $z \in \mathcal{L}_\rho$, то

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho) - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + R_m^{[1]}(z; \rho, \mu). \quad (1.4.1)$$

Остаток $R_m^{[1]}$ допускает оценку

$$|R_m^{[1]}(z; \rho, \mu)| \leq \begin{cases} \frac{2^{\frac{b+2}{2}} \Gamma(b+1) \rho \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right)}{\pi |z|^{m+1}}, & \text{если } b = \frac{m+1}{\rho} - \operatorname{Re} \mu \geq 0, \\ \frac{(6 + 2\rho/\pi) \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right)}{|z|^{m+1}}, & \text{если } b < 0. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Первая из оценок (1.4.2) верна при всех $z \in \mathcal{L}_\rho$, а вторая — при дополнительном условии $|z| \geq 2$.

2) Если $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\rho$, $z \neq 0$, то

$$E_\rho(z; \mu) = - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + R_m^{[2]}(z; \rho, \mu). \quad (1.4.3)$$

Остаток $R_m^{[2]}$ допускает оценку

$$|R_m^{[2]}(z; \rho, \mu)| \leq \begin{cases} \frac{2^{\frac{b+2}{2}} \Gamma(b+1) \rho \exp\left(\frac{3\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right)}{\pi |z|^{m+1}}, & \text{если } b \geq 0, \\ \frac{(6 + 2\rho/\pi) \exp\left(\frac{3\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right)}{|z|^{m+1}}, & \text{если } b < 0. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Первая из оценок (1.4.4) верна при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\rho$, а вторая — при дополнительном условии $|z| \geq 2$.

Доказательство. Рассмотрим сначала $z \in \mathcal{L}_\rho$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ (случай $\operatorname{Im} z < 0$ исследуется аналогично). Воспользуемся теоремой 1.1.1, положив в ней $\alpha_1 = -3\pi/4$, $\alpha_2 = 5\pi/4$. На римановой поверхности $\mathfrak{P}$ переменной ζ подынтегральная функция имеет в качестве особенностей только простые полюсы

$$\zeta_n = z^\rho \exp(2\pi i n \rho), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.4.5)$$

Вычеты функции $\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta (\zeta^{1/\rho} - z)^{-1}$ в этих точках равны

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta}{\zeta^{1/\rho} - z} \right) \Big|_{\zeta=\zeta_n} &= \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_n} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta (\zeta - \zeta_n)}{\zeta^{1/\rho} - z} = \zeta_n^{1/\rho-\mu} e^{\zeta_n} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_n} \frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta^{1/\rho} - z} = \\ &= \zeta_n^{1/\rho-\mu} e^{\zeta_n} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_n} \frac{1}{\frac{1}{\rho} \zeta^{1/\rho-1}} = \rho \zeta_n^{1-\mu} e^{\zeta_n}. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

В силу ограничения

$$0 \leq \arg z \leq \pi/\rho \Leftrightarrow 0 \leq \arg z^\rho \leq \pi \quad (1.4.7)$$

на часть римановой поверхности $\{\zeta \in \mathfrak{P} \mid -3\pi/4 \leq \operatorname{Arg} \zeta \leq 5\pi/4\}$, содержащей контур интегрирования $\gamma(\sigma, -3\pi/4, 5\pi/4)$, из полюсов (1.4.5) попадает лишь один полюс ζ_0 . Действительно, из (1.4.7) видно, что $\operatorname{Arg} \zeta_1 = 2\pi\rho + \arg z^\rho \geq 2\pi\rho \geq 2\pi$, $\operatorname{Arg} \zeta_{-1} = -2\pi\rho + \arg z^\rho \leq \pi - 2\pi\rho < \pi - 2\pi = -\pi$.

Поэтому по теореме 1.1.1 и теореме о вычетах имеем соотношение

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta^\rho - z} \operatorname{Res} \left(\frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta}{\zeta^{1/\rho} - z} \right) \Big|_{\zeta=z^\rho} + \quad (1.4.8)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta^{1/\rho} - z}, \quad 0 < \sigma' < |z|^\rho. \quad (1.4.9)$$

Из (1.4.8), (1.4.6) и (1.3.1) вытекает представление

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho) + J_\rho \left(z; \mu, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right).$$

Полученное равенство вместе с леммой 1.3.1 немедленно влекут за собой представление (1.4.1), в котором осталось только оценить остаточный член. Соответствующие оценки уже доказаны в лемме 1.3.1 в общем случае. Для того, чтобы применить их в данной конкретной ситуации, необходимо вычислить или оценить сверху постоянные A , $I = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp(\cos \varphi) d\varphi = \int_{-3\pi/4}^{5\pi/4} \exp(\cos \varphi) d\varphi$,

$\varkappa = \sup \{ \varkappa(z) \mid z \in \mathcal{L}_\rho, \operatorname{Im} z \geq 0 \}$. Имеем равенства

$$A = \max (|\cos^{-1}(-3\pi/4)|, |\cos^{-1}(5\pi/4)|) = \sqrt{2}, \quad (1.4.10)$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\cos \varphi) d\varphi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{ch}(\cos \varphi) d\varphi < 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos^2 \varphi) d\varphi = 3\pi. \quad (1.4.11)$$

Для вычисления постоянной $\varkappa$ найдем сначала наименьшее значение углового расстояния между $z \in \mathcal{L}_\rho$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ и лучами

$$\ell_1 = \left\{ r \exp\left(-\frac{3\pi i}{4\rho}\right), \quad r > 0 \right\}, \quad \ell_2 = \left\{ r \exp\left(\frac{5\pi i}{4\rho}\right), \quad r > 0 \right\}.$$

Среди точек пересечения угла $\mathcal{L}_\rho$ с верхней полуплоскостью ближайшими к лучу ℓ_1 в смысле углового расстояния могут быть либо точки $\mathbb{R}_+$ (угол равен $\frac{3\pi}{4\rho}$), либо точки луча $\left\{ r \exp\left(\frac{\pi i}{\rho}\right), \quad r > 0 \right\}$ (угол равен $\left(\pi - \frac{\pi}{\rho}\right) + \left(\pi - \frac{3\pi}{4\rho}\right) = 2\pi - \frac{7\pi}{4\rho} > \frac{\pi}{4}$). Аналогичные угловые расстояния для луча ℓ_2 равны соответственно $2\pi - \frac{5\pi}{4\rho} > 2\pi - \frac{5\pi}{4} \geq \frac{3\pi}{4\rho}$ и $\frac{5\pi}{4\rho} - \frac{\pi}{\rho} = \frac{\pi}{4\rho}$. Отсюда заключаем, что при всех $z \in \mathcal{L}_\rho \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ угол $\delta(z)$ — не меньше $\frac{\pi}{4\rho}$. Следовательно,

$$\varkappa \leq \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4\rho})} = \frac{4\rho}{\pi} \cdot \frac{t}{\sin t},$$

где $t = \frac{\pi}{4\rho}$. А так как функция $\frac{t}{\sin t}$ возрастает на $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ и в точке $t = \pi/4$ равна $\pi/\sqrt{8}$, то

$$\varkappa \leq \rho\sqrt{2}. \quad (1.4.12)$$

Из (1.4.10) и (1.4.12) и оценок остаточного члена, данных в лемме 1.1.1, сразу же вытекают неравенства (1.4.2). В исследовании случая $\operatorname{Im} z < 0$ надо положить $\alpha_1 = -\frac{5\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$ и провести те же самые рассуждения. Первая часть теоремы 1.4.1 доказана.

Приступим к доказательству второй части теоремы. Теперь

$$z = r e^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \frac{\pi}{\rho} \leq |\theta| \leq \pi.$$

Воспользуемся интегральным представлением (1.1.1), взяв в нем $\alpha_1 = -3\pi/4$, $\alpha_2 = 3\pi/4$. При рассматриваемых значениях z в угле

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} \zeta \leq \frac{3\pi}{4} \quad (1.4.13)$$

нет полюсов подынтегральной функции, поскольку при условии (1.4.13) переменная $\zeta^{1/\rho}$ принимает значения в угле $\mathcal{L}_{3\rho/4} \subset \mathcal{L}_\rho$. Ввиду сказанного мы имеем право в интеграле (1.1.1) изменить произвольным образом параметр σ петли Ханкеля $\gamma\left(\sigma, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$. Взяв $\sigma \in (0, |z|^\rho)$, придем к представлению

$$E_\rho(z; \mu) = J_\rho\left(z; \mu, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\rho, \quad z \neq 0.$$

Доказанная в лемме 1.3.1 асимптотическая формула для интеграла J_ρ дает разложение (1.4.3) и оценки (1.4.4) ввиду того, что здесь, как и в первой части теоремы $A = \sqrt{2}$, $\varkappa \leq \rho\sqrt{2}$. Последнее неравенство следует из того, что

$$\sup \{\delta(z) \mid z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}_\rho, \quad z \neq 0\} = \frac{\pi}{4\rho}$$

(определение $\delta(z)$ дано перед формулировкой леммы 1.3.1). Некоторое улучшение в неравенстве (1.4.4) по сравнению с (1.4.2) произошло от того, что в доказательстве первой части теоремы мы использовали оценку

$$\exp\left(-\frac{3\pi}{4} \operatorname{Im} \mu\right) + \exp\left(\frac{5\pi}{4} \operatorname{Im} \mu\right) \leq 2 \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right),$$

а здесь — точное равенство

$$\exp\left(-\frac{3\pi}{4} \operatorname{Im} \mu\right) + \exp\left(\frac{3\pi}{4} \operatorname{Im} \mu\right) = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{5\pi}{4} \operatorname{Im} \mu\right).$$

Теорема 1.4.1 полностью доказана. $\square$

Теорема 1.4.2. При любых $\rho \in [3/4, 1]$, $\mu \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ справедливо соотношение

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho) - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + R_m(z; \rho, \mu), \quad (1.4.14)$$

в котором остаточный член R_m допускает оценку

$$|R_m(z; \rho, \mu)| \leq \begin{cases} \frac{2^{\frac{b+2}{2}} \Gamma(b+1) \exp(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|)}{|z|^{m+1}}, & \text{если } b = \frac{m+1}{\rho} - \operatorname{Re} \mu \geq 0, \\ 8|z|^{-m-1} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right), & \text{если } b < 0. \end{cases} \quad (1.4.15)$$

Вторая из оценок (1.4.15) верна при дополнительном условии $|z| \geq 2$.

Замечание 6. Первое слагаемое асимптотики (1.4.14) терпит разрыв на луче $(-\infty, 0)$, но противоречия это не привносит, поскольку в угле $5\pi/6 \leq |\arg z| \leq \pi$ оно стремится к нулю при $|z| \rightarrow +\infty$ быстрее любой отрицательной степени $|z|$ и уходит в остаточный член.

Замечание 7. Представление (1.4.14) с остатком

$$R_m(z; \rho, \mu) \leq C(\rho, \mu, m)(|z|^{-m-1}), \quad |z| \rightarrow \infty,$$

верно при всех $\rho \in (1/2, 1]$. Это доказано Джрбашяном (см. [4]). Джрбашян зависимостью функции $C(\rho, \mu, m)$ от параметров ρ и μ не интересовался. Мы здесь ограничиваемся случаем $\rho \in [3/4, 1]$ потому, что не можем получить для величины $C(\rho, \mu, m)$ оценки сверху, лучшей $\exp\left(\frac{C_1}{\rho - 0.5}\right)$, $C_1 > 0$, при приближении ρ к $1/2$. При $\rho < 3/4$ лучше пользоваться другой асимптотикой. Она выводится в следующем параграфе.

Доказательство теоремы 1.4.2. проведем для z из верхней полуплоскости. Воспользуемся интегральным представлением (1.1.1) функции Миттаг-Леффлера, взяв $\alpha_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$. Если $\operatorname{Im} z < 0$, то берем $\alpha_1 = -\frac{5\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$, а в остальном следуем тем же путем с точностью до симметрии относительно $\mathbb{R}$.

Несложно проверить, что в угле, лежащем на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ и образуемом лучами выбранной петли, нет других полюсов подынтегральной функции, кроме $\zeta_0 = z^\rho$. Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \zeta_1 &= \operatorname{Arg} z^\rho + 2\pi\rho \geq 2\pi\rho \geq \frac{2\pi \cdot 3}{4} = \frac{3\pi}{2} > \frac{5\pi}{4}, \\ \operatorname{Arg} \zeta_{-1} &= \operatorname{Arg} z^\rho - 2\pi\rho \leq \pi\rho - 2\pi\rho = -\pi\rho \leq -\frac{3\pi}{4} < -\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Поэтому, прибавив вычет в точке ζ_0 (его вычисление приведено в доказательстве предыдущей теоремы), переходим к интегрированию по петлям $\gamma\left(\sigma, -\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right)$, где $0 < \sigma < |z|^\rho$. Тем самым получаем представление

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho) + J_\rho\left(z, \mu, -\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}\right). \quad (1.4.16)$$

Равенство (1.4.16) вместе с леммой 1.3.1 дает (1.4.14), а оценка (1.4.15) получится после вычисления величин A и $\varkappa = \sup\{\varkappa(z) \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$. В данном случае

$$A = \max(|\cos(-2\pi/3)|^{-1}, |\cos(5\pi/4)|^{-1}) = 2. \quad (1.4.17)$$

Наименьший угол между точками верхней полуплоскости и лучами

$$\left\{ r \exp\left(\frac{5\pi i}{4\rho}\right), r > 0 \right\}, \quad \left\{ r \exp\left(-\frac{2\pi i}{3\rho}\right), r > 0 \right\}$$

равен

$$\min\left(\frac{5\pi}{4\rho} - \pi, 2\pi - \frac{5\pi}{4\rho}, \pi - \frac{2\pi}{3\rho}\right). \quad (1.4.18)$$

Функция (1.4.18) на отрезке $3/4 \leq \rho \leq 1$ принимает наименьшее значение, равное $\pi/9$. Следовательно,

$$\varkappa \leq \frac{1}{\sin(\pi/9)} < \pi. \quad (1.4.19)$$

Из (1.4.19), (1.4.17), (1.3.3) и (1.3.4) вытекают неравенства (1.4.15). Теорема 1.4.2 доказана. $\square$

Особый интерес представляют функции Миттаг-Леффлера порядка $\rho = 1$:

$$E_1(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k)} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\mu)_k}, \quad (1.4.20)$$

где $(\mu)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (\mu + j)$, $k \in \mathbb{N}$, $(\mu)_0 = 1$. Они входят в число обобщенных гипергеометрических функций

$${}_pF_q(z; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{\prod_{j=1}^p (\alpha_j)_k}{\prod_{j=1}^q (\beta_j)_k}. \quad (1.4.21)$$

Действительно, из (1.4.20) и (1.4.21) видно, что

$$E_1(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} {}_1F_1(z; 1; \mu).$$

Функции Миттаг-Леффлера порядка 1 тесно связаны с неполной гамма-функцией $\gamma(\lambda, x) = \int_0^x t^{\lambda-1} e^{-t} dt$ ввиду тождества

$$E_1(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^1 (1-t)^{\mu-2} e^{zt} dt, \quad \operatorname{Re} \mu > 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.4.22)$$

справедливость которого легко проверяется:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^1 (1-t)^{\mu-2} e^{zt} dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\mu-1)} \int_0^1 (1-t)^{\mu-2} t^k dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\mu-1)} B(\mu-1, k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\mu-1)} \frac{\Gamma(\mu-1) \Gamma(k+1)}{\Gamma(\mu+k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k)} = E_1(z, \mu). \end{aligned}$$

Из (1.4.22) находим, что

$$\begin{aligned} E_1(z; \mu+1) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} e^{zt} dt = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 \tau^{\mu-1} e^{z(1-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{e^z}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 \tau^{\mu-1} e^{-\tau z} dz = \frac{e^z}{z^\mu \Gamma(\mu)} \int_0^z u^{\mu-1} e^{-u} du, \end{aligned}$$

т. е.

$$\gamma(\mu, z) = z^\mu \Gamma(\mu) e^{-z} E_1(z; \mu+1). \quad (1.4.23)$$

Таким образом, вопрос о нулях неполной гамма-функции в комплексной плоскости эквивалентен вопросу о нулях функции Миттаг-Леффлера порядка 1.

Заметим, что функции $E_1(z; m)$, $m \in \mathbb{Z}$, являются элементарными:

$$E_1(z; m) = z^{1-m} e^z, \quad m \leq 1, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (1.4.24)$$

$$E_1(z; m) = z^{1-m} e^z - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{z^{-k}}{\Gamma(m-k)}, \quad m \geq 2, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.4.25)$$

Формула (1.4.25) может вызвать недоверие в связи со следующей иллюзией. Кажется, что ее правая часть имеет особенность в точке $z = 0$. Однако, эта особенность — устранимая. Например,

$$E_1(z; 2) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad E_1(z; 3) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad E_1(z; 4) = \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^3}$$

и т. д. Тождества (1.4.24) и (1.4.25) доказываются вычислением коэффициентов разложения в степенной ряд обеих частей.

В следующей теореме приводится асимптотика $E_1(z; \mu)$ вне отрицательной части действительной оси с существенно более точной (вне небольшой окрестности $(-\infty, 0]$), нежели в (1.4.15) при $\rho = 1$ оценкой остаточного члена. Она особенно выигрышная, если параметр μ достаточно близок к целому числу. Ниже мы показываем, что эта оценка весьма близка к неулучшаемой и тем ближе к неулучшаемой, чем дальше точка z удалена от $(-\infty, 0]$. Через $d(z)$ обозначим расстояние от точки z до луча $(-\infty, 0]$:

$$d(z) = \begin{cases} |\operatorname{Im} z|, & \operatorname{Re} z \leq 0, \\ |z|, & \operatorname{Re} z > 0. \end{cases}$$

Теорема 1.4.3. При любых $\mu \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \operatorname{Re} \mu - 2$, $z \notin (-\infty, 0]$ справедливо представление

$$E_1(z; \mu) = z^{1-\mu} e^z - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k)} + R_m(z; \mu), \quad (1.4.26)$$

котором остаточный член имеет вид

$$R_m(z; \mu) = \frac{(-1)^m \sin(\pi \mu)}{\pi z^{m+1}} \left(\Gamma(m+2-\mu) - \int_0^{+\infty} \frac{r^{m+2-\mu} e^{-r}}{r+z} dr \right) \quad (1.4.27)$$

и допускает оценку

$$|R_m(z; \mu)| \leq \frac{|\sin \pi \mu| \Gamma(b+1)}{\pi |z|^{m+1}} \left(1 + \frac{b+1}{d(z)} \right), \quad (1.4.28)$$

где $b = m+1 - \operatorname{Re} \mu$.

Доказательство. Согласно теореме 1.1.1

$$E_1(z; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, -\pi, \pi)} \frac{\zeta^{1-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta - z}, \quad |z| < \sigma.$$

Здесь можно забыть о римановой поверхности $\mathfrak{P}$ и считать, что переменная интегрирования ζ принадлежит комплексной плоскости с разрезом $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. На $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ подынтегральная функция имеет единственную особенность (охватываемую контуром) — простой полюс в точке $\zeta = z$ с вычетом, равным $z^{1-\mu} e^z$. Поэтому мы можем обойти этот полюс, взяв интеграл по петле $\gamma(\sigma', -\pi, \pi)$ с параметром $\sigma' < |z|$ и, добавив вычет, получить представление

$$E_1(z; \mu) = z^{1-\mu} e^z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\pi, \pi)} \frac{\zeta^{1-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta - z} \quad (1.4.29)$$

(для определенности можно положить $\sigma' = |z|/2$). Далее используем тождество

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\zeta^{k-1}}{z^k} + \frac{\zeta^{m+1}}{z^{m+1}(\zeta - z)}. \quad (1.4.30)$$

Из (1.4.29) и (1.4.30) находим равенство

$$E_1(z; \mu) = z^{1-\mu} e^z - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{z^{-k}}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\pi, \pi)} \zeta^{k-\mu} e^\zeta d\zeta + \frac{z^{-m-1}}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\pi, \pi)} \frac{\zeta^{m+2-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta - z}.$$

Последнее соотношение вместе с леммой 1.1.1 дает равенство

$$E_1(z; \mu) = z^{1-\mu} e^z - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k)} + \frac{z^{-m-1}}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\pi, \pi)} \frac{\zeta^{m+2-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta - z},$$

которое, введя обозначение

$$R_m(z; \mu) = \frac{z^{-m-1}}{\Gamma(\mu - m - 1)} + \frac{z^{-m-1}}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\pi, \pi)} \frac{\zeta^{m+2-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta - z},$$

можно переписать в следующем виде:

$$E_1(z; \mu) = z^{1-\mu} e^z - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k)} + R_m(z; \mu).$$

Итак, представление (1.4.26) получено. Осталось доказать, что остаточный член $R_m(z; \mu)$ имеет вид (1.4.27) и допускает оценку (1.4.28).

Преобразуем $R_m(z; \mu)$. Применим тождество (1.1.5):

$$\frac{1}{\Gamma(\mu - m - 1)} = \frac{\sin \pi(\mu - m - 1)}{\pi} \Gamma(m + 2 - \mu).$$

Далее, перейдем от интегрирования по $\gamma(\sigma, -\pi, \pi)$ к интегрированию по $\gamma(0, -\pi, \pi)$, т. е. по объединению нижнего и верхнего берегов разреза $(-\infty, 0]$ (это возможно, поскольку $m + 2 - \operatorname{Re} \mu \geq 0$). Получим соотношение

$$\begin{aligned} R_m(z; \mu) &= \frac{(-1)^m \sin(\pi\mu) \Gamma(m + 2 - \mu)}{\pi z^{m+1}} + \\ &+ \frac{z^{-m-1}}{2\pi i} \left(\int_0^{+\infty} \frac{(-r)^{m+2} (re^{-\pi i})^{-\mu} e^{-r} d(-r)}{-r - z} + \int_0^{+\infty} \frac{(-r)^{m+2} (re^{\pi i})^{-\mu} e^{-r} d(-r)}{-r - z} \right) = \\ &= \frac{(-1)^m \sin(\pi\mu) \Gamma(m + 2 - \mu)}{\pi z^{m+1}} - \frac{z^{-m-1} (-1)^m}{2\pi i} \left(\int_0^{+\infty} \frac{r^{m+2-\mu} e^{\pi i \mu - r} dr}{r + z} - \frac{r^{m+2-\mu} e^{-\pi i \mu - r} dr}{r + z} \right) = \\ &= \frac{(-1)^m \sin(\pi\mu)}{\pi z^{m+1}} \left(\Gamma(m + 2) - \int_0^{+\infty} \frac{r^{m+2-\mu} e^{-r} dr}{r + z} \right). \quad (1.4.31) \end{aligned}$$

Равенство (1.4.27) доказано. Выведем оценку (1.4.28). Поскольку $|r + z| \geq d(z)$ ($\forall r > 0$), имеем равенство

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{r^{m+2-\mu} e^{-r} dr}{r + z} \right| \leq \frac{1}{d(z)} \int_0^{+\infty} r^{m+2-\operatorname{Re} \mu} e^{-r} dr = \frac{\Gamma(m + 3 - \operatorname{Re} \mu)}{d(z)}. \quad (1.4.32)$$

Из (1.4.31) и (1.4.32), вспомнив обозначение $b = m + 1 - \operatorname{Re} \mu$, получим¹, что

$$|R_m(z; \mu)| \leq \frac{|\sin(\pi\mu)|}{\pi |z|^{m+1}} \left(\Gamma(b + 1) + \frac{1}{d(z)} \Gamma(b + 2) \right) = \frac{|\sin(\pi\mu)| \Gamma(b + 1)}{\pi |z|^{m+1}} \left(1 + \frac{b + 1}{d(z)} \right).$$

Теорема доказана.

Оценка (1.4.28) является весьма точной. Покажем, что если она и может быть улучшена при вещественных μ , то только за счет множителя $1 + \frac{b + 1}{d(z)}$. Действительно, из доказанного в теореме 1.4.3 асимптотического разложения функции $E_1(z; \mu)$ при $z \rightarrow \infty$ вытекает, что

$$R_m(z; \mu) \sim \frac{1}{\Gamma(\mu - m - 1) z^{m+1}}.$$

Эта эквивалентность верна, если μ не является целым числом, не превосходящим $m + 1$. В противном случае, согласно (1.4.25), имеем равенство $R_m(z, \mu) = 0$. А так как

$$\frac{1}{\Gamma(\mu - m - 1)} = \frac{\sin(\pi\mu) (-1)^m \Gamma(m + 2 - \mu)}{\pi},$$

то при $\mu \in \mathbb{R}$ находим, что

$$R_m(z; \mu) \sim \frac{(-1)^m \sin(\pi\mu) \Gamma(b + 1)}{\pi z^{m+1}}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.4.33)$$

Таким образом, пожелав заменить эквивалентность (1.4.33) оценкой, верной при всех $z \notin (-\infty, 0]$, мы приобрели в оценке множитель $1 + \frac{b + 1}{d(z)}$. $\square$

¹ Для оценки сверху модуля Γ -функции, как и в (1.4.32), используется неравенство $|\Gamma(w)| \leq \Gamma(\operatorname{Re} w)$, $\operatorname{Re} w > 0$.

1.5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ПОРЯДКА $\rho \leq 3/4$

Теорема 1.5.1. При любых $\rho \leq 3/4$, $\mu \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ верно представление

$$E_\rho(z; \mu) = \rho \sum_{|\arg z + 2\pi n| \leq \frac{3\pi}{4\rho}} (z^\rho e^{2\pi i n \rho})^{1-\mu} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}) - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + R_m(z, \rho, \mu), \quad z \neq 0, \quad (1.5.1)$$

остаточный член в котором допускает оценку

$$|R_m(z; \rho, \mu)| \leq \begin{cases} \frac{2^{\frac{b+2}{2}} \Gamma(b+3/2) \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right)}{|z|^{m+1}}, & \text{если } b = \frac{m+1}{\rho} - \operatorname{Re} \mu \geq 0, \\ 7.1 |z|^{-m-1} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right), & \text{если } b < 0. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Первая из оценок (1.5.2) верна при всех $z \neq 0$, а вторая — при $|z| \geq 2$.

Доказательство. Выберем параметры α_1 и α_2 , определяющие петлю Ханкеля в интегральном представлении (1.1.1), в зависимости от $\theta = \arg z$. Задача состоит в нахождении чисел

$$\alpha_1 \in \left[-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{и} \quad \alpha_2 \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \quad (1.5.3)$$

таких, чтобы углы между лучами $\{r \exp(i\theta) \mid r > 0\}$ и $\{r \exp(i\alpha_1/\rho) \mid r > 0\}$, а также между лучами $\{r \exp(i\theta) \mid r > 0\}$ и $\{r \exp(i\alpha_2/\rho) \mid r > 0\}$ были как можно больше. Упомянутые углы равны

$$\min_{p \in \mathbb{Z}} |\theta + 2\pi p - \alpha_j/\rho|, \quad j = 1, 2. \quad (1.5.4)$$

Для решения этой задачи воспользуемся следующим простым соображением. Если переменная β пробегает какой-либо отрезок ℓ действительной оси $|\ell| \leq 2\pi$, то

$$\max_{\beta \in \ell} \min_{p \in \mathbb{Z}} |2\pi p - \beta| = \frac{|\ell|}{2} \quad (1.5.5)$$

(через $|\ell|$ обозначена длина отрезка ℓ). Обоснование соотношения (1.5.5) мы оставляем читателю. А так как в равенствах (1.5.4) переменная $\theta - \alpha_j/\rho$ ввиду (1.5.3) пробегает¹ отрезок длины $\frac{\pi}{2\rho} \geq \frac{2\pi}{3}$ при $0 < \rho \leq 3/4$, то получим существование чисел $\alpha_1(\theta)$ и $\alpha_2(\theta)$, удовлетворяющих включениям (1.5.3) и таких, что углы (1.5.4) — не меньше $\pi/3$. Отсюда заключаем, что при сделанном выборе петли Ханкеля $\gamma(\sigma, \alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta))$ для величины $\varkappa(z)$, определенной перед формулировкой леммы 1.3.1, справедливо неравенство

$$\varkappa(z) \leq \frac{1}{\sin(\pi/3)} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (1.5.6)$$

Из (1.5.3) находим также, что

$$A = \max(|\cos \alpha_1|^{-1}, |\cos \alpha_2|^{-1}) \leq \sqrt{2}. \quad (1.5.7)$$

Здесь уже подынтегральная функция в угле римановой поверхности аргумента $\alpha_1 \leq \operatorname{Arg} z \leq \alpha_2$ может иметь достаточно много полюсов $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, выписанных выше в (1.4.4). Через $\mathcal{A}(z, \rho)$ обозначим множество всех целых n , для которых выполняется включение $\operatorname{Arg} \zeta_n \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Очевидно, что это множество конечно и

$$n \in \mathcal{A}(z, \rho) \Leftrightarrow \frac{\alpha_1(\theta)}{\rho} \leq \theta + 2\pi n \leq \frac{\alpha_2(\theta)}{\rho}. \quad (1.5.8)$$

Преобразуем интеграл (1.1.1), передвинув контур за полюсы и прибавив сумму вычетов в них. Вычеты были вычислены в (1.4.6). Получим равенство

$$E_\rho(z; \mu) = \rho \sum_{n \in \mathcal{A}(z, \rho)} (z^\rho e^{2\pi i n \rho})^{1-\mu} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}) + J_\rho(z, \mu, \alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta)). \quad (1.5.9)$$

¹ Величины θ и ρ фиксированы, а α_j мы считаем меняющимися в пределах, указанных в (1.5.3).

Согласно лемме 1.3.1 и оценкам (1.5.3), (1.5.6) и (1.5.7), имеем равенство

$$J_\rho(z; \mu, \alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta)) = - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + U_m(z; \rho, \mu), \quad (1.5.10)$$

где

$$|U_m(z; \rho, \mu)| \leq \begin{cases} \frac{2^{\frac{b+2}{2}} \Gamma(b+1) \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right)}{\pi |z|^{m+1}}, & \text{если } b = \frac{m+1}{\rho} - \operatorname{Re} \mu \geq 0, \\ 6 |z|^{-m-1} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right), & \text{если } b < 0. \end{cases} \quad (1.5.11)$$

Разъясним происхождение постоянной «6» во второй оценке (1.5.11). Применим лемму 1.3.1 и воспользуемся неравенством

$$e^{\alpha_1 \operatorname{Im} \mu} + e^{\alpha_2 \operatorname{Im} \mu} \leq e^{\alpha |\operatorname{Im} \mu|}, \quad \alpha = \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|).$$

При $b < 0$ получается оценка

$$|U_m(z; \rho, \mu)| \leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{\varkappa(z)A}{2} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{\cos \theta} d\theta \right) |z|^{-m-1} e^{\alpha |\operatorname{Im} \mu|} \leq C |z|^{-m-1} e^{\alpha |\operatorname{Im} \mu|}. \quad (1.5.12)$$

В нашем случае $\alpha \leq 5\pi/4$, ввиду (1.5.6), (1.5.7) имеем неравенство $\varkappa(z)A/2 \leq \sqrt{2/3}$. Следовательно, неравенство (1.5.12) верно, если взять

$$C = \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \int_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} e^{\cos \theta} d\theta \right) < 6.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось от суммы $\sum_{n \in \mathcal{A}(z, \rho)}$ в (1.5.9) перейти к сумме

$\sum_{|\theta + 2\pi n| \leq \frac{3\pi}{4\rho}}$. Множество $\mathcal{A}(z, \rho)$, согласно (1.5.3) и (1.5.8), содержит все значения $n \in \mathbb{N}$, для которых $|\theta + 2\pi n| \leq \frac{3\pi}{4\rho}$, и может также содержать значения n , удовлетворяющие неравенству

$$\frac{3\pi}{4\rho} < |\theta + 2\pi n| \leq \frac{5\pi}{4\rho}. \quad (1.5.13)$$

Поэтому погрешность при переходе от одной суммы к другой не превосходит

$$V_m(z; \rho, \mu) = \rho \sum_{\frac{3\pi}{4\rho} < |\theta + 2\pi n| \leq \frac{5\pi}{4\rho}} |(z^\rho e^{2\pi i n \rho})^{1-\mu} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho})|, \quad (1.5.14)$$

и, тем самым, остаточный член $R_m(z; \rho, \mu)$ в (1.5.1) допускает оценку

$$|R_m(z; \rho, \mu)| \leq |U_m(z; \rho, \mu)| + V_m(z; \rho, \mu). \quad (1.5.15)$$

Оценим сверху $V_m R$. Количество слагаемых в сумме (1.5.14) (т. е. целых n , удовлетворяющих ограничению (1.5.13)) не превосходит

$$2 \left(\frac{1}{2\pi} \left[\frac{5\pi}{4\rho} - \frac{3\pi}{4\rho} \right] + 1 \right) \leq 2 \left(\frac{1}{4\rho} + 1 \right) \leq 2 + \frac{1}{2\rho}.$$

Таким образом, учитывая, что $z^\rho = |z|^\rho \exp(i\theta\rho)$, получаем неравенство

$$V_m \leq (0.5 + 2\rho) |z|^{\rho(1-\operatorname{Re} \mu)} \max_{\frac{3\pi}{4\rho} < |\theta + 2\pi n| \leq \frac{5\pi}{4\rho}} |\exp((2\pi n + \theta)i\rho(1-\mu) + |z|^\rho e^{(2\pi n + \theta)i\rho})|. \quad (1.5.16)$$

Используя очевидные соотношения

$$|\exp w| = \exp(\operatorname{Re} w), \quad w \in \mathbb{C}, \quad 0.5 + 2\rho \leq 2, \quad 0 < \rho \leq 0.75,$$

из (1.5.16) находим, что

$$V_m(z, \rho, \mu) \leq 2 |z|^{\rho(1-\operatorname{Re} \mu)} \max_{\frac{3\pi}{4\rho} < |\theta + 2\pi n| \leq \frac{5\pi}{4\rho}} |\exp((2\pi n + \theta)\rho \operatorname{Im} \mu + |z|^\rho \cos((2\pi n + \theta)\rho))|. \quad (1.5.17)$$

Вследствие (1.5.13) имеем неравенство

$$\cos(2\pi n + \theta)\rho \leq -1/\sqrt{2}, \quad (2\pi n + \theta)\rho \operatorname{Im} \mu \leq \frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|.$$

Поэтому из (1.5.17) получаем, что

$$\begin{aligned} V_m(z; \rho, \mu) &\leq 2|z|^{\rho(1-\operatorname{Re} \mu)} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu| - \frac{|z|^\rho}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= 2|z|^{-m-1} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right) \cdot |z|^\rho \left(|z|^{m+1-\rho \operatorname{Re} \mu} \exp\left(-\frac{|z|^\rho}{\sqrt{2}}\right)\right) = \\ &= 2|z|^{-m-1} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right) t^{b+1} \exp\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

где

$$t = |z|^\rho, \quad b = \frac{m+1}{\rho} - \operatorname{Re} \mu.$$

При $b \geq 0$ из (1.5.18) вытекает, что

$$V_m(z, \rho, \mu) \leq \frac{2M(b) \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right)}{|z|^{m+1}}, \quad (1.5.19)$$

где

$$M(b) = \max_{t \geq 0} t^{b+1} \exp\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 2^{\frac{b+1}{2}} (b+1)^{b+1} e^{-b-1}.$$

Вследствие неравенства¹

$$a^a e^{-a} \leq \frac{2\Gamma(a+0.5)}{\sqrt{\pi} e} < 0.45 \Gamma(a+0.5) \quad \forall a \geq 1$$

имеем неравенство

$$2M(b) \leq 0.9 \cdot 2^{\frac{b+1}{2}} \Gamma(b+3/2). \quad (1.5.20)$$

Из (1.5.19) и (1.5.20) окончательно получаем неравенство

$$V_m(z; \rho, \mu) \leq \frac{0.9\Gamma(b+3/2)2^{\frac{b+1}{2}} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right)}{|z|^{m+1}}, \quad b \geq 0. \quad (1.5.21)$$

При $b < 0$ мы рассматриваем только значения z , для которых $|z| \geq 2$, а значит, заведомо $t \geq 1$. Поэтому $t^b \leq 1$ и из (1.5.18) находим, что

$$\begin{aligned} V_m(z; \rho, \mu) &\leq 2|z|^{-m-1} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right) \cdot \max_{t \geq 1} t \exp\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{e} |z|^{-m-1} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right) < 1.1 |z|^{-m-1} \exp\left(\frac{5\pi}{4} |\operatorname{Im} \mu|\right). \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

Из (1.5.22), второго неравенства (1.5.11) и (1.5.15) немедленно следует второе неравенство (1.5.2).

Для вывода первого неравенства (1.5.2) из (1.5.15), (1.5.11) и (1.5.21) достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$\frac{\Gamma(b+1)}{\pi} + \frac{0.9\Gamma(b+3/2)}{\sqrt{2}} \leq \Gamma(b+3/2) \quad \forall b \geq 0,$$

которое можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+3/2)} \cdot \frac{1}{\pi} + \frac{0.9}{\sqrt{2}} \leq 1 \quad \forall b \geq 0. \quad (1.5.23)$$

¹Неравенство

$$a^a e^{-a} \sqrt{\pi} e \leq 2\Gamma(a+0.5) \iff H(a) \equiv a \ln a - a - \ln \Gamma(a+0.5) + \ln(\sqrt{\pi} e/2) \leq 0$$

доказывается так: $H(1) = 0$, $H'(a) = \ln a - \Psi(a+0.5) < 0$ (см. ниже гл. 3. п. 4).

Из возрастания логарифмической производной гамма-функции вытекает убывание отношения $\Gamma(b+1)/\Gamma(b+3/2)$, так что

$$\Gamma(b+1)/\Gamma(b+3/2) \leq \Gamma(1)/\Gamma(3/2) = 2/\sqrt{\pi}, \quad \forall b \geq 0.$$

Отсюда видно, что для доказательства (1.5.23) осталось проверить численное неравенство $2\pi^{-3/2} + 0.9 \cdot 2^{-1/2} < 1$. Оно верно, и это завершает доказательство теоремы 1.5.1. $\square$

В следующей теореме выводится существенно более точная, чем в теореме 1.5.1, оценка остаточного члена в асимптотическом представлении функции Миттаг-Леффлера в левой полуплоскости в случае, когда параметр «близок» к значению $1/2$, а отношение $|z/x|$ «мало отличается» от 1.

Теорема 1.5.2. При любых $\rho \in [2/5, 2/3]$, $\mu \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq \rho\mu - 1$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ справедливо представление

$$E_\rho(-z^{1/\rho}; \mu) = 2\rho z^{1-\mu} \exp(z \cos \pi\rho) \cos(z \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu-1)) + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1} z^{-k/\rho}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + \Omega_m(z; \rho, \mu), \quad (1.5.24)$$

в котором остаточный член допускает следующую оценку ($x = \operatorname{Re} z$):

$$|\Omega_m(z; \rho, \mu)| \leq \frac{(|z|/x)^{1-\mu} \Gamma(1-\mu + \frac{m+1}{\rho})}{\pi x^{\frac{m+1}{\rho}}} \left(\left| \sin\left(\pi\left(\mu - \frac{m+1}{\rho}\right)\right) \right| + \frac{|\sin(\pi(\mu - \frac{m}{\rho}))|}{4 \cos^2(\frac{\pi}{2\rho})} \right). \quad (1.5.25)$$

Если числа $\sin\left(\pi\left(\mu - \frac{m+1}{\rho}\right)\right)$ и $\sin\left(\pi\left(\mu - \frac{m}{\rho}\right)\right)$ имеют разные знаки, то при $z = x > 0$ выполняется неравенство

$$|\Omega_m(z; \rho, \mu)| \leq \frac{\Gamma(1-\mu + \frac{m+1}{\rho})}{\pi x^{\frac{m+1}{\rho}}} \max\left(\left| \sin\left(\pi\left(\mu - \frac{m+1}{\rho}\right)\right) \right|, \frac{|\sin(\pi(\mu - \frac{m}{\rho}))|}{4 \cos^2(\frac{\pi}{2\rho})}\right). \quad (1.5.26)$$

Доказательство. Представление (1.5.24) получено в теореме 1.1.3, где для остаточного члена Ω_m выведена формула, выражающая его через интегралы $I_{1,m}$ и $I_{2,m}$. Для оценки сверху абсолютных величин этих интегралов, оценим снизу знаменатели (они положительны) подынтегральных выражений.

Имеем неравенства

$$\begin{aligned} t^{1/\rho} + 2 \cos \frac{\pi}{\rho} + t^{-1/\rho} &\geq 2 + 2 \cos \frac{\pi}{\rho} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{2\rho}, \\ 1 + 2t^{1/\rho} \cos \frac{\pi}{\rho} + 2t^{2/\rho} &\geq 1. \end{aligned} \quad (1.5.27)$$

В последнем неравенстве была использована неотрицательность $\cos(\pi/\rho)$ при $\rho \in [2/5, 2/3]$. Из (1.5.27) находим, что

$$|I_{1,m}(z; \rho, \mu)| \leq \int_0^{+\infty} |t^{\frac{m+1}{\rho}-\mu} e^{zt}| dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{\rho}-\mu} e^{-xt} dt = x^{\mu-1-\frac{m+1}{\rho}} \Gamma\left(1-\mu + \frac{m+1}{\rho}\right), \quad (1.5.28)$$

$$\begin{aligned} |I_{2,m}(z; \rho, \mu)| &\leq \frac{1}{4} \cos^{-2}\left(\frac{\pi}{2\rho}\right) \int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{\rho}-\mu} e^{-xt} dt = \\ &= \frac{1}{4} \cos^{-2}\left(\frac{\pi}{2\rho}\right) x^{\mu-1-\frac{m+1}{\rho}} \Gamma\left(1-\mu + \frac{m+1}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (1.5.29)$$

Из (1.5.28), (1.5.29) и (1.1.20) сразу же получаем (1.5.25). Для доказательства неравенства (1.5.26) заметим, что интегралы $I_{j,m}(z, \rho, \mu)$ положительны при $x > 0$, а для суммы $as_1 + bs_2$, где $a > 0$, $b > 0$, $\operatorname{sgn} s_1 = -\operatorname{sgn} s_2$ верна оценка

$$|as_1 + bs_2| \leq \max(a|s_1|, b|s_2|). \quad (1.5.30)$$

Из (1.5.28)–(1.5.30) получаем (1.5.26). Теорема доказана. $\square$

Теорема 1.5.3. При любых $\rho \in [2/5, 2/3]$, $\mu \leq 1/\rho$, $x > 0$ справедливо представление

$$x^{\mu-1} E_{\rho}(-x^{1/\rho}; \mu) = 2\rho \exp(x \cos(\pi\rho)) \cos(z \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) + \omega(x; \rho, \mu), \quad (1.5.31)$$

в котором остаточный член ω допускает оценки

$$|\omega(x; \rho, \mu)| < 0.48 x^{-s} \Gamma(s), \quad s = 1 + \frac{1}{\rho} - \mu, \quad (1.5.32)$$

$$|\omega(x; \rho, 1)| < \frac{\Gamma(1/\rho)}{\pi x^{1/\rho}}, \quad \operatorname{sgn} \omega(x; \rho, 1) = \begin{cases} 1, & \frac{2}{5} \leq \rho < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < \rho \leq \frac{2}{3}, \end{cases} \quad (1.5.33)$$

$$|\omega(x; \rho, \mu)| < \left(\frac{3}{2} \min(\mu, 1 - \mu) + \frac{1}{\rho} - 2 \right) x^{-s} \Gamma(s), \quad 0 < \mu < 1, \frac{2}{5} \leq \rho < \frac{1}{2}, \quad (1.5.34)$$

$$|\omega(x; \rho, \mu)| < \left(\frac{1}{\rho} - 2 \right) x^{-2}, \quad x \geq \frac{1}{\rho}, \frac{2}{5} \leq \rho < \frac{1}{2}, \quad 1 < \mu \leq \frac{1}{\rho} - 1, \quad (1.5.35)$$

$$\left| \omega \left(x; \rho, \frac{1}{\rho} \right) \right| \leq \frac{|\sin(\pi/\rho)|}{2\pi x}. \quad (1.5.36)$$

Доказательство. Возьмем в теореме 1.5.2 значение $m = 0$ и воспользуемся тем, что $4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2\rho} \right) \geq 2$. Из (1.5.25) находим неравенство

$$|\omega(x; \rho, \mu)| < \frac{\Gamma(s)}{\pi x^s} \left(\left| \sin \pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right| + \frac{|\sin(\pi\mu)|}{2} \right). \quad (1.5.37)$$

Из (1.5.37) немедленно получаем (1.5.36), поскольку $s = 1$ в случае $\mu = 1/\rho$. Положив в (1.5.37) $\mu = 1$, приходим к (1.5.33). Из (1.1.20) видно также, что $\operatorname{sgn} \omega(x; \rho, 1) = \operatorname{sgn} \sin(\pi/\rho)$. Оценив сверху в (1.5.37) модули синусов единицей, получим неравенство

$$|\omega(x; \rho, \mu)| \leq (1.5/\pi) x^{-s} \Gamma(s) < 0.48 x^{-s} \Gamma(s),$$

что дает (1.5.32). Воспользовавшись неравенством

$$\left| \sin \pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right| \leq |\sin(\pi\mu)| + \left| \sin \left(\frac{\pi}{\rho} \right) \right|,$$

из (1.5.37) при $0 < \mu < 1$, $0.4 < \rho < 0.5$ выводим неравенство

$$|\omega(x; \rho, \mu)| < \frac{\Gamma(s)}{\pi x^s} \left(\frac{3}{2} \sin \pi\mu + \sin \frac{\pi}{\rho} \right) < \frac{\Gamma(s)}{x^s} \left(\frac{3}{2} \min(\mu, 1 - \mu) + \frac{1}{\rho} - 2 \right).$$

Неравенство (1.5.34) доказано.

В случае $\frac{2}{5} \leq \rho < \frac{1}{2}$, $1 < \mu \leq \frac{1}{\rho} - 1$ числа $\sin(\pi\mu)$ и $\sin \pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right)$ имеют разные знаки: $\sin(\pi\mu) < 0$, $-\frac{3}{2} \leq 1 - \frac{1}{\rho} < \mu - \frac{1}{\rho} \leq -1$ откуда $\sin \pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \geq 0$, а модуль каждого из этих синусов не превосходит $\sin \pi \left(\frac{1}{\rho} - 2 \right)$. Поэтому согласно (1.5.26) имеем неравенство

$$|\omega(x; \rho, \mu)| \leq \frac{\Gamma(s)}{\pi x^s} \sin \left(\pi \left(\frac{1}{\rho} - 2 \right) \right) < \left(\frac{1}{\rho} - 2 \right) x^{-s} \Gamma(s).$$

Теперь заметим, что $2 \leq s \leq 1/\rho$, и функция $g(s) = x^{-s} \Gamma(s)$ убывает на данном отрезке при $x \geq 1/\rho$, поскольку $(\ln g(s))' = \psi(s) - \ln x < 0$ (напомним, что $\psi(s) < \ln s$ при $s > 0$). Следовательно, $g(s) \leq g(2)$ и мы приходим к (1.5.35). Теорема полностью доказана. $\square$

В заключительной теореме главы 1 выводится оценка остатка в асимптотическом разложении (1.5.1) при $z \in \mathbb{R}$, $z < 0$, в одном весьма частном случае: $m = 0$, $0 < \rho \leq 2/5$, $0 < \mu \leq 1/\rho$. Получаемая оценка остатка асимптотически хуже, чем в теореме 1.5.1 при больших $|z|$, зато лучше при «небольших» значениях $|z|$, а это весьма удобно в дальнейших приложениях.

Теорема 1.5.4. При любых $\rho \in (0, 2/5]$, $\mu \in (0, 1/\rho]$ и $x > 0$ справедливо представление

$$E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu) = S_\rho(x, \mu) + \omega_\rho(x, \mu), \quad (1.5.38)$$

где

$$S_\rho(x, \mu) = 2\rho x^{1-\mu} \sum_{k=1}^{N(\rho)} \exp\left(x \cos((2k-1)\pi\rho)\right) \cos\left(x \sin((2k-1)\pi\rho) + (2k-1)\pi\rho(1-\mu)\right), \quad (1.5.39)$$

$$N(\rho) = \left\lfloor \frac{1}{2\rho} \right\rfloor, \quad |\omega_\rho(x, \mu)| \leq 0.74 x^{-\mu} \quad \forall x > 0.$$

Доказательство. Согласно (1.1.1) при $z = -x^{1/\rho}$ имеем равенство

$$E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, -\alpha, \alpha)} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}}, \quad (1.5.40)$$

где $\sigma > x$, α — произвольное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Возьмем

$$\alpha = \alpha(\rho) = \begin{cases} 2.5\pi\rho, & \frac{4}{15} \leq \rho < \frac{2}{5}, \\ \frac{8\pi\rho}{3}, & \frac{1}{4} < \rho < \frac{4}{15}, \\ 2\pi\rho N(\rho), & 0 < \rho \leq \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (1.5.41)$$

Тогда на лучах $\{\zeta = r \exp(\pm i\alpha) \mid r > 0\}$ подынтегральная функция

$$F_\rho(z, \zeta, \mu) = \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} \quad (1.5.42)$$

не имеет особенностей, а α попадает в полуинтервал $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Исходя из определения $N(\rho)$ и (1.5.41), нетрудно проверить справедливость двойного неравенства

$$(2N(\rho) - 1)\pi\rho < \alpha(\rho) < (2N(\rho) + 1)\pi\rho.$$

Следовательно, в угле $|\arg \zeta| < \alpha(\rho)$ функция $F(\zeta)$ имеет в качестве особенностей только простые полюсы, располагающиеся в точках

$$x_k = x \exp((2k-1)\pi i\rho), \quad \bar{x}_k = x \exp(-(2k-1)\pi i\rho), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \leq N(\rho). \quad (1.5.43)$$

Преобразуем интеграл (1.5.40), перейдя к интегрированию по петле $\gamma(\sigma', -\alpha, \alpha)$, $0 < \sigma' < x$, и добавив сумму вычетов в точках (1.5.43):

$$E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma, -\alpha, \alpha)} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta d\zeta}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} + \sum_{k=1}^{N(\rho)} \left(\operatorname{Res} F_\rho(x, \zeta, \mu)|_{\zeta=x_k} + \operatorname{Res} F_\rho(x, \zeta, \mu)|_{\zeta=\bar{x}_k} \right). \quad (1.5.44)$$

Поскольку функция F ввиду включения $\mu \in \mathbb{R}$ такова, что

$$F_\rho(x, \bar{\zeta}, \mu) = \bar{F}_\rho(x, \zeta, \mu) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad (1.5.45)$$

то сумма ее вычетов в двух комплексно сопряженных точках $x \exp(\pm(2k-1)\pi i\rho)$ равна удвоенной действительной части вычета в одной из них. В соответствии с этим находим (при вычислении

предела применяется правило Лопиталя—Бернулли), что

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} F(\zeta)|_{\zeta=x_k} + \operatorname{Res} F(\zeta)|_{\zeta=\bar{x}_k} &= 2 \operatorname{Re} \lim_{\zeta \rightarrow x_k} \frac{\zeta^{1/\rho-\mu} e^\zeta (\zeta - x \exp((2k-1)\pi i \rho))}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}} = \\ &= 3\rho \operatorname{Re}(\zeta^{1-\mu} e^\zeta)|_{\zeta=x \exp((2k-1)\pi i \rho)} = 2\rho \operatorname{Re} \left(x^{1-\mu} \exp((2k-1)\pi i \rho(1-\mu)) \exp(x \exp((2k-1)\pi i \rho)) \right) = \\ &= 2\rho x^{1-\mu} \operatorname{Re} \exp \left(x e^{(2k-1)\pi i \rho} + \pi i \rho(1-\mu)(2k-1) \right) = \\ &= 2\rho x^{1-\mu} \exp \left(x \cos((2k-1)\pi \rho) \right) \cos \left(x \sin((2k-1)\pi \rho) + (2k-1)\pi \rho(1-\mu) \right). \end{aligned} \quad (1.5.46)$$

Подставив значения сумм двух комплексно сопряженных вычетов (1.5.45) в (1.5.44), получим равенство

$$E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\alpha, \alpha)} F_\rho(x, \zeta, \mu) d\zeta + S_\rho(x, \mu),$$

где функция $S_\rho(x, \mu)$ определена в (1.5.39), а функция $F_\rho(x, \zeta, \mu)$ — в (1.5.42). Это и есть представление (1.5.38), в котором

$$\omega_\rho(x, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\sigma', -\alpha, \alpha)} F_\rho(x, \zeta, \mu) d\zeta, \quad 0 < \sigma' < x. \quad (1.5.47)$$

Ввиду ограниченности функции $F_\rho(x, \zeta, \mu)$ по переменной ζ в круге с разрезом $\left\{ \zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\zeta| < \frac{x}{2}, -\pi < \arg \zeta < \pi \right\}$ (здесь используется условие $0 < \mu \leq 1/\rho$) в (1.5.47) можно перейти к значению $\sigma' = 0$. Петля $\gamma(0, -\alpha, \alpha)$ является объединением лучей $\ell_{\pm\alpha}$ ($\ell_\theta = \{re^{i\theta} \mid r > 0\}$). Воспользовавшись этими соображениями и свойством (1.5.45), находим, что

$$|\omega_\rho(x, \mu)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\ell_\alpha} |F_\rho(x, \zeta, \mu)| |d\zeta| = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{r^{1/\rho-\mu} e^{r \cos \alpha} dr}{|r^{1/\rho} e^{i\alpha/\rho} + x^{1/\rho}|}.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $r = xt$, получим неравенство

$$|\omega_\rho(x, \mu)| \leq \frac{x^{1-\mu} I_\rho(x, \mu)}{\pi}, \quad (1.5.48)$$

где

$$I_\rho(x, \mu) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/\rho-\mu} \exp(xt \cos \alpha) dt}{|1 + t^{1/\rho} e^{i\alpha/\rho}|}.$$

В соответствии с (1.5.41) рассмотрим три промежутка значений ρ .

1) $4/15 \leq \rho < 2/5$. Тогда $\alpha = 2.5\pi\rho$, $\cos \alpha \leq -1/2$, $\exp(i\alpha/\rho) = i$. Следовательно,

$$I_\rho(x, \mu) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/\rho-\mu} \exp(xt \cos \alpha)}{|1 + it^{1/\rho}|} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/\rho-\mu} \exp(-xt/2)}{|1 + it^{1/\rho}|} dt. \quad (1.5.49)$$

Ввиду неравенства

$$\frac{1}{|1 + it^{1/\rho}|} \leq \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1, \\ t^{-1/\rho}, & 1 \leq t, \end{cases}$$

из (1.5.49) находим неравенство

$$I_\rho(x, \mu) \leq \int_0^1 t^{1/\rho-\mu} \exp(-xt/2) dt + \int_1^{+\infty} t^{-\mu} \exp(-xt/2) dt.$$

А так как $0 < \mu \leq 1/\rho$, то в каждом из интегралов степень t , стоящая перед экспонентой, не превосходит 1. Отсюда выводим оценку

$$I_\rho(x, \mu) \leq \int_0^1 \exp(-xt/2) dt + \int_1^{+\infty} \exp(-xt/2) dt = \int_1^{+\infty} \exp(-xt/2) dt = 2/x. \quad (1.5.50)$$

Из (1.5.50) и (1.5.48) получаем неравенство

$$|\omega_\rho(x, \mu)| \leq (2/\pi)x^{-\mu} < 0.65x^{-\mu} \quad \forall \rho \in [4/15, 2/5] \quad \forall x > 0. \quad (1.5.51)$$

2) $1/4 < \rho < 4/15$. В этом случае $\alpha = (8/3)\pi\rho$, $\cos \alpha \leq -1/2$, $\exp(i\alpha/\rho) = e^{2\pi i/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $|1 + t^{1/\rho} \exp(i\alpha/\rho)| = \sqrt{1 - t^{1/\rho} + t^{2/\rho}}$. Следовательно,

$$I_\rho(x, \mu) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/\rho-\mu} \exp(xt \cos \alpha) dt}{\sqrt{1 - t^{1/\rho} + t^{2/\rho}}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/\rho-\mu} \exp(-xt/2) dt}{\sqrt{1 - t^{1/\rho} + t^{2/\rho}}}. \quad (1.5.52)$$

Ввиду неравенства

$$1 - t^{1/\rho} + t^{2/\rho} \leq \begin{cases} 2/\sqrt{3}, & 0 < t < 1, \\ (2/\sqrt{3})t^{-1/\rho}, & t \geq 1, \end{cases}$$

из (1.5.52) находим неравенство

$$\begin{aligned} I_\rho(x, \mu) &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 t^{1/\rho-\mu} \exp(-xt/2) dt + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^{+\infty} t^{-\mu} \exp(-xt/2) dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \exp(-xt/2) dt + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^{+\infty} \exp(-xt/2) dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} \exp(-xt/2) dt = \frac{4}{x\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (1.5.53)$$

Из (1.5.53) и (1.5.48) получаем неравенство

$$|\omega_\rho(x, \mu)| \leq \frac{4x^{-\mu}}{\pi\sqrt{3}} < 0.74x^{-\mu}, \quad x > 0, \quad \rho \in (1/4, 4/15). \quad (1.5.54)$$

3) $0 < \rho \leq 1/4$. В этом случае $\alpha(\rho) = 2\pi\rho \left[\frac{1}{2\rho} \right] = \pi - 2\pi\rho \left\{ \frac{1}{2\rho} \right\} \in (2\pi/3, \pi]$, а значит $\cos \alpha < -1/2$ (несложно проверяется, что функция $t\{1/t\}$ при $t \in (0, 1/2]$ принимает значения на полуинтервале $[0, 1/3)$). В силу выбора $\alpha(\rho)$ имеем равенство $\exp(i\alpha/\rho) = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_\rho(x, \mu) &\leq \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/\rho-\mu} \exp(-xt/2) dt}{1 + t^{1/\rho}} \leq \int_0^1 t^{1/\rho-\mu} \exp(-xt/2) dt + \\ &\quad \int_1^{+\infty} t^{-\mu} \exp(-xt/2) dt \leq \int_0^{+\infty} \exp(-xt/2) dt = 2/x. \end{aligned} \quad (1.5.55)$$

Из (1.5.55) и (1.5.48) получаем неравенство

$$|\omega_\rho(x, \mu)| \leq (2/\pi)x^{-\mu}, \quad x > 0, \quad 0 < \rho \leq 1/4. \quad (1.5.56)$$

Из (1.5.51), (1.5.54), (1.5.56) заключаем, что во всех рассмотренных случаях выполняется оценка $|\omega_\rho(x, \mu)| < 0.74x^{-\mu}$, которую и требовалось доказать. Теорема доказана. $\square$

ГЛАВА 2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НУЛЕЙ ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

2.1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НУЛЕЙ

Из определения

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

функции $E_\rho(z; \mu)$ вытекают следующие формулы:

$$E_1(z; 1) = e^z, \quad E_1(z; -m) = z^{m+1}e^z, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.1.1)$$

$$E_{1/2}(z; 1) = \operatorname{ch}\sqrt{z}, \quad E_{1/2}(z; 2) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \quad E_{1/2}(z; 3) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{z} - 1}{\sqrt{z}}, \quad (2.1.2)$$

$$E_{1/2}(z; -2m) = z^{m+1/2}\operatorname{sh}\sqrt{z}, \quad m \in \mathbb{Z}_+; \quad E_{1/2}(z; -(2m-1)) = z^m\operatorname{ch}\sqrt{z}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.1.3)$$

Значит, функция $E_1(z; -m)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, имеет единственный нуль $z = 0$ кратности $m+1$, а функция $E_1(z; 1)$ вообще не имеет нулей. Мы увидим, что за исключением этих случаев, функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет бесконечное множество нулей, а нули функции $E_{1/2}(z; 3)$ описываются формулой

$$z_n = -(2\pi n)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1.4)$$

и все они двукратны. Окажется, что это — единственный случай бесконечного числа кратных нулей функции $E_\rho(z; \mu)$.

Введем следующие константы:

$$c_\mu = \frac{1}{\rho\Gamma(\mu - 1/\rho)}, \quad d_\mu = \frac{1}{\rho\Gamma(\mu - 2/\rho)}, \quad \tau_\mu = 1 + \rho(1 - \mu), \quad \text{если } \mu \neq \frac{1}{\rho} - l, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.1.5)$$

$$c_\mu = \frac{1}{\rho\Gamma(\mu - 2/\rho)}, \quad d_\mu = \frac{1}{\rho\Gamma(\mu - 3/\rho)}, \quad \tau_\mu = 2 + \rho(1 - \mu), \quad \text{если } \mu = \frac{1}{\rho} - l, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad \frac{1}{\rho} \notin \mathbb{N}. \quad (2.1.6)$$

По построению $c_\mu \neq 0$ для рассматриваемых значений ρ и μ . Пары параметров ρ, μ , не вошедшие в формулы (2.1.5), (2.1.6), назовем *исключительными*. Они таковы:

$$1/\rho \in \mathbb{N}, \quad \mu = 1/\rho - l, \quad l \in \mathbb{Z}_+.$$

Формулы (2.1.1)–(2.1.3) дают весь набор функций $E_\rho(z; \mu)$, отвечающих исключительным значениям параметров ρ, μ , когда $\rho = 1$ и $\rho = 1/2$. Так как нули функций (2.1.1) – 2.1.3 выписываются явно, то мы не будем рассматривать такие пары параметров.

Если нет дополнительной оговорки, то для степенной и логарифмической функций выбираем их главные значения в полуплоскости с разрезом по отрицательной вещественной полуоси.

В этом разделе мы получим асимптотические формулы для нулей z_n функции $E_\rho(z; \mu)$. Случаи

$$\rho > 1/2 \text{ и } \rho = 1/2, \operatorname{Re} \mu > 3; \quad \rho = 1/2, \operatorname{Re} \mu < 3; \quad \rho = 1/2, \operatorname{Re} \mu = 3; \quad \rho < 1/2$$

разбираются отдельно.

1. С учетом формул (2.1.1) при рассмотрении случая $\rho = 1$ мы исключаем значения $\mu = 1, 0, -1, -2, \dots$

Теорема 2.1.1. Пусть

- 1) $\rho > 1/2$, $\mu \in \mathbb{C}$, причем $\mu \neq 1, 0, -1, -2, \dots$ при $\rho = 1$, или
- 2) $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$.

Тогда все достаточно большие по модулю нули z_n функции $E_\rho(z; \mu)$ просты и имеет место следующая асимптотическая формула: при $n \rightarrow \pm\infty$

$$z_n^\rho = 2\pi in - \frac{\tau_\mu}{\rho} \ln 2\pi in + \ln c_\mu + \frac{d_\mu/c_\mu}{(2\pi in)^{1/\rho}} + \left(\frac{\tau_\mu}{\rho}\right)^2 \frac{\ln 2\pi in}{2\pi in} - \frac{\tau_\mu}{\rho} \frac{\ln c_\mu}{2\pi in} + \alpha_n, \quad (2.1.7)$$

где

$$\alpha_n = O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^{1+1/\rho}}\right) + O\left(\frac{1}{|n|^{2/\rho}}\right) + O\left(\frac{\ln^2 |n|}{n^2}\right), \quad \text{если } \rho > 1/2, \quad (2.1.8)$$

$$\alpha_n = \frac{e^{\pm i\pi\mu}}{c_\mu^2(2\pi in)^{-4\tau_\mu}} + O\left(\frac{1}{|n|^{-8\tau_\mu}}\right) + O\left(\frac{\ln|n|}{|n|^{1-4\tau_\mu}}\right) + O\left(\frac{\ln^2|n|}{n^2}\right), \quad \text{если } \rho = 1/2. \quad (2.1.9)$$

При фиксированных $\delta \in (0, \pi/2)$, $R > 0$ введем множества

$$Z = Z_{\delta,R} = (z : |\arg z| < \pi - \delta, |z| > R),$$

$$W = W_{\delta,R} = (w : |\arg w| < \pi - 2\delta, |w| > 2R).$$

Лемма 2.1.1. Пусть $A \in \mathbb{C}$, $\delta \in (0, \pi/2)$. Тогда, если $R > 0$ достаточно велико, то уравнение

$$z - A \ln z = w, \quad w \in W$$

на множестве Z имеет единственный корень $z = z(w)$. Он является простым и для него справедлива асимптотическая формула

$$z = w + A \ln w + A^2 \frac{\ln w}{w} + O\left(\frac{\ln^2 w}{w^2}\right), \quad w \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Сначала покажем, что функция

$$w = z - A \ln z \quad (2.1.10)$$

при всех достаточно больших R задает однолистное отображение «сектора»

$$S_R = (z : |z| > R, -\pi < \alpha < \arg z < \beta < \pi, \quad \beta - \alpha < \pi).$$

Предположим противное: найдутся сколь угодно большое R и точки $z_1, z_2 \in S_R$, такие, что

$$w_1 = w(z_1) = w(z_2) = w_2.$$

Так как R здесь может быть сколь угодно большим, то можем считать, что отрезок $[z_1, z_2]$ лежит в S_R . Тогда

$$z_2 - z_1 = A(\ln z_2 - \ln z_1) = A \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z},$$

$$|z_2 - z_1| \leq |A| |z_2 - z_1| \frac{1}{\min(|z_1|, |z_2|)} \leq \frac{A}{R} |z_2 - z_1|,$$

и, беря $R > |A|$, получаем противоречие. Мы доказали однолистность отображения «сектора».

Если $w_1 = w_2$, то в частности,

$$\arg w_1 = \arg w_2. \quad (2.1.11)$$

Пусть R таково, что

$$|A| \left| \frac{\ln z}{z} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{при } |z| > R.$$

Тогда

$$-\frac{\pi}{6} < \arg \left(1 - A \frac{\ln z}{z}\right) < \frac{\pi}{6},$$

и, значит, если $|z_1|, |z_2| > R$, то

$$\arg w_j = \arg z_j + \arg \left(1 - A \frac{\ln z_j}{z_j}\right) \in \left(\arg z_j - \frac{\pi}{6}, \arg z_j + \frac{\pi}{6}\right), \quad j = 1, 2.$$

Отсюда в силу (2.1.11) следует, что

$$|\arg z_1 - \arg z_2| < \frac{\pi}{3},$$

т. е. точки z_1, z_2 лежат в «секторе» раствора, меньшего $\pi/3$. Но, как мы доказали на первом шаге, отображение «сектора» однолистно, и равенство $w_1 = w_2$ невозможно.

Итак, нами доказано, что при достаточно большом $R > 0$ функция (2.1.10) задает однолистное отображение множества Z на его образ $w(Z)$. Следовательно, на $w(Z)$ определена обратная (по отношению к (2.1.10)) функция $z = z(w)$ со значениями на множестве Z , т. е. уравнение

$$z - A \ln z = w, \quad w \in w(Z),$$

имеет единственный корень $z = z(w)$ на множестве Z . Так как

$$w'(z) \neq 0 \quad \text{при } R > |A|,$$

то функция $z(w)$ дифференцируема на $w(Z)$ и

$$z'(w) = \frac{1}{w'(z)} \neq 0, \quad w \in w(Z).$$

Отсюда, в частности, следует, что упомянутый корень является простым.

Утверждение о единственности и простоте корня $z(w)$, естественно, сохранится, если мы (для удобства формулировки) заменим множество $w(Z)$ его подходящим подмножеством. Очевидно, $W \subset w(Z)$ при достаточно большом $R > 0$, и нам остается доказать асимптотическую формулу для $z(w)$.

В уравнение (2.1.10) подставим выражение

$$z = w + r(w),$$

отмечая попутно, что $r(w) = o(w)$, $w \rightarrow \infty$. Получим, что

$$r(w) = A \ln w + A \ln \left(1 + \frac{r(w)}{w} \right).$$

Отсюда

$$r(w) = O(\ln w), \quad w \rightarrow \infty,$$

и с помощью формулы Тейлора находим, что

$$r(w) = \left(A \ln w + O\left(\frac{\ln^2 w}{w^2}\right) \right) \left(1 - \frac{A}{w} \right)^{-1}.$$

Если теперь мы разложим функцию $(1 - A/w)^{-1}$ в ряд по отрицательным степеням w , то получим требуемую асимптотику. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.1.1. В случае 1) оно опирается на теорему 1.2.1, по которой:

- если $\rho > 1/2$, то при любом $s \in \mathbb{N}$

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp z^\rho - \sum_{k=1}^s \frac{1}{z^k \Gamma(\mu - k/\rho)} + O\left(\frac{1}{z^{s+1}}\right), \quad |\arg z| \leq \min\left(\pi, \frac{\pi}{\rho}\right), \quad (2.1.12)$$

- если $\rho > 1$, то при любом $s \in \mathbb{N}$

$$E_\rho(z; \mu) = - \sum_{k=1}^s \frac{1}{z^k \Gamma(\mu - k/\rho)} + O\left(\frac{1}{z^{s+1}}\right), \quad \frac{\pi}{\rho} \leq |\arg z| \leq \pi. \quad (2.1.13)$$

В формулах (2.1.12), (2.1.13) полагаем $s = 1$, если значение μ — такое, как в формуле (2.1.5), и $s = 2$ для значений μ из формулы (2.1.6). Тогда $c_\mu \neq 0$, и из (2.1.12), (2.1.13) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ все достаточно большие по модулю нули z_n функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат в угле $|\arg z| < \pi/2\rho + \varepsilon$. Для точек этого угла формула (2.1.12) принимает вид

$$(1/\rho)z^s E_\rho(z; \mu) = z^{\tau_\mu} \exp z^\rho - c_\mu - d_\mu/z + O(1/z^2), \quad |\arg z| < \pi/(2\rho) + \varepsilon.$$

Значит, все нули функции $E_\rho(z; \mu)$ при $|z| > r_0$ мы находим из уравнения

$$\exp(z^\rho + \tau_\mu \ln z) = c_\mu + \frac{d_\mu}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (2.1.14)$$

Положим

$$w = z^\rho + \frac{\tau_\mu}{\rho} \ln z^\rho. \quad (2.1.15)$$

Тогда левая часть в (2.1.14) есть e^w , и чтобы переписать уравнение (2.1.14) относительно переменной w , нам надлежит выразить из (2.1.15) z^ρ через w . По лемме 2.1.1 (применяется ее огрубленный вариант)

$$z^\rho = w + O(\ln w).$$

Отсюда

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w^{1/\rho}} \left(1 + O\left(\frac{\ln w}{w}\right) \right) = \frac{1}{w^{1/\rho}} + O\left(\frac{\ln w}{w^{1+1/\rho}}\right).$$

Подставляя это в (2.1.14), получаем уравнение

$$e^w = c_\mu + \frac{d_\mu}{w^{1/\rho}} + O\left(\frac{\ln w}{w^{1+1/\rho}}\right) + O\left(\frac{1}{w^{2/\rho}}\right). \quad (2.1.16)$$

В частности,

$$e^w = c_\mu + o(1), \quad w \rightarrow \infty. \quad (2.1.17)$$

Так как корни функции $e^w - c$ просты и описываются формулой $2\pi in + \ln c$, $n \in \mathbb{Z}$, то по теореме Руше достаточно большие по модулю корни w_n уравнения (2.1.17) просты и описываются формулой

$$w_n = 2\pi in + \ln c_\mu + \epsilon_n, \quad \epsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (2.1.18)$$

Значит,

$$\frac{1}{w_n} = \frac{1}{2\pi in} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad \ln w_n = \ln |n| + O(1), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (2.1.19)$$

Теперь полагая в (2.1.16) $w = w_n$ и используя формулы (2.1.18) и (2.1.19), получаем, что

$$c_\mu e^{\epsilon_n} = c_\mu + \frac{d_\mu}{(2\pi in)^{1/\rho}} + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^{1+1/\rho}}\right) + O\left(\frac{1}{|n|^{2/\rho}}\right).$$

Левая часть есть $c_\mu + c_\mu \epsilon_n + O(\epsilon_n^2)$. Поэтому $\epsilon_n = O(1/n^{1/\rho})$ и, следовательно,

$$\epsilon_n = \frac{d_\mu/c_\mu}{(2\pi in)^{1/\rho}} + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^{1+1/\rho}}\right) + O\left(\frac{1}{|n|^{2/\rho}}\right).$$

Подставим это в (2.1.18). Будем иметь соотношение

$$w_n = 2\pi in + \ln c_\mu + \frac{d_\mu/c_\mu}{(2\pi in)^{1/\rho}} + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^{1+1/\rho}}\right) + O\left(\frac{1}{|n|^{2/\rho}}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad (2.1.20)$$

$$\ln w_n = \ln 2\pi in + \frac{\ln c_\mu}{2\pi in} + O\left(\frac{1}{|n|^{1+1/\rho}}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (2.1.21)$$

Теперь надо вернуться к точкам z_n — прообразам точек w_n при отображении (2.1.15). Так как $|\arg z_n| < \pi/2\rho + \varepsilon =: \alpha$, а $\alpha\rho < \pi$, то для достаточно больших $|w|$ условие леммы 2.1.1 выполнено. По этой лемме из (2.1.15) следует, что

$$z_n^\rho = w_n - \frac{\tau_\mu}{\rho} \ln w_n + \left(\frac{\tau_\mu}{\rho}\right)^2 \frac{\ln w_n}{w_n} + O\left(\frac{\ln^2 w_n}{w_n^2}\right). \quad (2.1.22)$$

Подставляя в правую часть этой формулы выражения для w_n и $\ln w_n$ из (2.1.20) и (2.1.21), получаем требуемые формулы (2.1.7), (2.1.8).

По лемме 2.1.1 из простоты достаточно больших по модулю нулей w_n уравнения (2.1.16) следует простота всех нулей z_n функции $E_\rho(z; \mu)$, начиная с некоторого. Для случая 1) теорема доказана.

В случае 2) отправляемся от следующей формулы, вытекающей из теоремы 1.2.2 и верной для всех $\mu \in \mathbb{C}$: при любом $s \in \mathbb{N}$

$$E_{1/2}(z; \mu) = \frac{1}{2} z^{(1-\mu)/2} (e^{\sqrt{z}} + e^{\mp i\pi(1-\mu)} e^{-\sqrt{z}}) - \sum_{k=1}^s \frac{1}{z^k \Gamma(\mu - 2k)} + O\left(\frac{1}{z^{s+1}}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.1.23)$$

соответственно при $0 \leq \arg z \leq \pi$ и $-\pi \leq \arg z \leq 0$. Полагая в этой формуле $s = 1$, получаем следующее уравнение для достаточно больших по модулю нулей z_n :

$$e^{\sqrt{z} + \tau_\mu \ln z} = c_\mu + \frac{d_\mu}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) + e^{\pm i\pi\mu} e^{-\sqrt{z}} z^{\tau_\mu}. \quad (2.1.24)$$

А оно только дополнительным членом

$$e^{\pm i\pi\mu} e^{-\sqrt{z}} z^{\tau_\mu}$$

отличается от уравнения (2.1.14) при $\rho = 1/2$. Поэтому поступаем так же, как и в случае (2.1.14), т. е. переписываем полученное уравнение с помощью замены (2.1.15), полагая $\rho = 1/2$. Дополнительный член примет вид

$$e^{\pm i\pi\mu} e^{-w} w^{4\tau_\mu} \left(1 + O\left(\frac{\ln w}{w}\right)\right),$$

и взамен (2.1.16) мы получим уравнение

$$e^w = c_\mu + \frac{d_\mu}{w^2} + O\left(\frac{\ln w}{w^3}\right) + e^{\pm i\pi\mu} e^{-w} w^{4\tau_\mu} + O\left(\frac{\ln w}{w^{1-4\tau_\mu}} e^{-w}\right). \quad (2.1.25)$$

Так как $\operatorname{Re} \tau_\mu < 0$, $\operatorname{Re} \sqrt{z} \geq 0$, то последнее слагаемое в (2.1.24) есть $o(1)$, $z \rightarrow \infty$. Значит, и сумма двух последних слагаемых в (2.1.25) есть $o(1)$, $w \rightarrow \infty$, т. е. уравнение (2.1.25) имеет вид (2.1.14). Следовательно, верны формулы (2.1.18), (2.1.19). Подставляя их в формулу (2.1.25), получаем соотношение

$$c_\mu \epsilon_n (1 + O(\epsilon_n)) = \frac{d_\mu}{(2\pi i n)^2} + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^3}\right) + \frac{e^{\pm i\pi\mu}}{c_\mu (2\pi i n)^{-4\tau_\mu}} (1 - \epsilon_n (1 + O(\epsilon_n))) + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^{1-4\tau_\mu}}\right),$$

т. е.

$$c_\mu \epsilon_n \left(1 + O\left(\frac{1}{|n|^{-4\tau_\mu}}\right)\right) + O(\epsilon_n^2) = \frac{d_\mu}{(2\pi i n)^2} + \frac{e^{\pm i\pi\mu}}{c_\mu (2\pi i n)^{-4\tau_\mu}} + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^3}\right) + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^{1-4\tau_\mu}}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\epsilon_n = O\left(\frac{1}{|n|^2}\right) + O\left(\frac{1}{|n|^{-4\tau_\mu}}\right),$$

и потому предыдущая формула дает:

$$\epsilon_n = \frac{d_\mu/c_\mu}{(2\pi i n)^2} + \frac{e^{\pm i\pi\mu}}{c_\mu^2 (2\pi i n)^{-4\tau_\mu}} + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^3}\right) + O\left(\frac{1}{|n|^{-8\tau_\mu}}\right) + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^{1-4\tau_\mu}}\right).$$

Подставим это в (2.1.18). Получим соотношение

$$w_n = 2\pi i n + \ln c_\mu + \frac{d_\mu/c_\mu}{(2\pi i n)^2} + \frac{e^{\pm i\pi\mu}}{c_\mu^2 (2\pi i n)^{-4\tau_\mu}} + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^3}\right) + O\left(\frac{1}{|n|^{-8\tau_\mu}}\right) + O\left(\frac{\ln |n|}{|n|^{1-4\tau_\mu}}\right), \quad (2.1.26)$$

$$\ln w_n = \ln 2\pi i n + \frac{\ln c_\mu}{2\pi i n} + O\left(\frac{1}{|n|^3}\right) + O\left(\frac{1}{|n|^{1-4\tau_\mu}}\right). \quad (2.1.27)$$

Теперь полагая в (2.1.22) $\rho = 1/2$, $w = w_n$, $z = z_n$ и применяя формулы (2.1.26), (2.1.27), приходим к требуемым формулам (2.1.7), (2.1.9). Простота всех достаточно больших по модулю нулей следует из тех же соображений, что и в случае $\rho > 1/2$. Теорема доказана. $\square$

Переходим к случаю $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu < 3$, наиболее простому, с точки зрения доказательства.

Теорема 2.1.2. Пусть $\operatorname{Re} \mu < 3$, $\mu \neq 2 - l$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда все достаточно большие по модулю нули z_n функции $E_{1/2}(z; \mu)$ просты и имеет место асимптотическая формула

$$\sqrt{z_n} = i\pi \left(n - 1 + \frac{\mu}{2}\right) + (-1)^n \frac{c_\mu e^{-i(\pi/2)\mu}}{2(i\pi n)^{2\tau_\mu}} + O\left(\frac{1}{n^{6\operatorname{Re} \tau_\mu}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{1+2\operatorname{Re} \tau_\mu}}\right), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (2.1.28)$$

где ветвь функции $\sqrt{z}$ выбрана под условием $0 \leq \arg z < 2\pi$. Если μ вещественно, то все достаточно большие по модулю нули вещественны.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что функция

$$z^{(1-\mu)/2} (e^{\sqrt{z}} + e^{-i\pi(1-\mu)} e^{-\sqrt{z}}), \quad 0 < \arg z < 2\pi,$$

при $\pi \leq \arg z < 2\pi$ совпадает с функцией

$$z^{(1-\mu)/2} (e^{\sqrt{z}} + e^{i\pi(1-\mu)} e^{-\sqrt{z}}), \quad -\pi \leq \arg z < 0.$$

Поэтому формула (2.1.23) записывается в виде

$$E_{1/2}(z; \mu) = \frac{1}{2} z^{(1-\mu)/2} (e^{\sqrt{z}} - e^{i\pi\mu} e^{-\sqrt{z}}) - \sum_{k=1}^s \frac{1}{z^k \Gamma(\mu - 2k)} + O\left(\frac{1}{z^{s+1}}\right), \quad |z| \rightarrow \infty,$$

где $0 \leq \arg z < 2\pi$. Полагая здесь $s = 1$, имеем соотношение

$$e^{-i\pi\mu/2} z^{-(1-\mu)/2} E_{1/2}(z; \mu) = \operatorname{sh}(\sqrt{z} - i\frac{\pi}{2}\mu) - \frac{c_\mu e^{-i\pi\mu/2}}{2z^{\tau_\mu}} + O\left(\frac{1}{z^{1+\operatorname{Re}\tau_\mu}}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.1.29)$$

где $0 \leq \arg z < 2\pi$. Так как $\operatorname{Re}\tau_\mu > 0$ и $0 \leq \arg \sqrt{z} < \pi$, то отсюда по теореме Руше следует, что все достаточно большие по модулю нули функции $E_{1/2}(z; \mu)$ просты и

$$\sqrt{z_n} - i\frac{\pi}{2}\mu = i\pi(n-1) + \epsilon_n, \quad \epsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2.1.30)$$

Пожалуй, эта формула выглядела бы более естественно, если бы было написано n вместо $n-1$. Но присутствие -1 делает в пункте 2.2 более единообразной нумерацию всех нулей при $\rho \leq 1/2$. Подставляя (2.1.30) в правую часть (2.1.29), получаем, что

$$(-1)^n \operatorname{sh} \epsilon_n = \frac{c_\mu e^{-i\pi\mu/2}}{2(\pi i n)^{2\tau_\mu}} + O\left(\frac{1}{n^{1+2\operatorname{Re}\tau_\mu}}\right). \quad (2.1.31)$$

Отсюда

$$\epsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{2\operatorname{Re}\tau_\mu}}\right),$$

и так как $\operatorname{sh} \epsilon_n = \epsilon_n + O(\epsilon_n^3)$, то из (2.1.31) следует, что

$$\epsilon_n = (-1)^n \frac{c_\mu e^{-i\pi\mu/2}}{2(\pi i n)^{2\tau_\mu}} + O\left(\frac{1}{n^{1+2\operatorname{Re}\tau_\mu}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{6\operatorname{Re}\tau_\mu}}\right).$$

Вместе с (2.1.30) это дает требуемую формулу (2.1.28).

Остается доказать утверждение о вещественности нулей. По доказанному в круге K_n радиуса $c/n^{2\operatorname{Re}\tau_\mu}$ с центром в точке $i\pi(n + \mu/2)$ при $n > n_1$ находится одна и только одна точка вида $\sqrt{z_n}$. Если μ вещественно, то нули функции $E_{1/2}(z; \mu)$ — как степенного ряда с вещественными коэффициентами — симметричны относительно вещественной оси. Поэтому если бы точка z_k была невещественной, то в круг K_n попали бы по крайней мере две точки вида $\sqrt{z_k}$. Полученное противоречие дает требуемое утверждение. Теорема 2.1.2 доказана. $\square$

2. Наибольшим своеобразием отличается случай $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re}\mu = 3$. Нули функции $E_{1/2}(z; 3)$ задаются явной формулой (2.1.4). Поэтому надлежит исследовать поведение нулей функции

$$E_{1/2}(z; 3 + i\beta), \quad 0 \neq \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.1.32)$$

Для формулировки результата необходимо остановиться на обратной функции Жуковского

$$w = w(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}. \quad (2.1.33)$$

В области $G = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ функция (2.1.33) распадается на две однозначные аналитические ветви $w^\pm(z)$, конформно отображающие G соответственно на верхнюю и нижнюю полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$. При $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$ полагаем $w^+(x) = w^+(x + i0)$.

Ветвь логарифма $\ln w$ характеризуем условием $-\pi < \arg w \leq \pi$. И так как $w^+ w^- = 1$, то

$$\ln w^-(z) = -\ln w^+(z). \quad (2.1.34)$$

Если $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$, то $w^+(x + i0)w^+(x - i0) = 1$ и, следовательно,

$$\ln w^+(x) = \ln^+(x + i0) = -\ln w^+(x - i0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad |x| > 1. \quad (2.1.35)$$

Рассмотрим функцию, обратную к гиперболическому косинусу:

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \operatorname{Log} w(z), \quad z \in G.$$

В соответствии с (2.1.34) любое значение многозначной функции $\operatorname{Arch} z$ в G имеет вид

$$\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})^+ + 2\pi i s^+ \quad \text{или} \quad -\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})^+ + 2\pi i s^-, \quad (2.1.36)$$

где $s^\pm \in \mathbb{Z}$. Здесь и в дальнейшем

$$(z + \sqrt{z^2 - 1})^+ = w^+(z).$$

Для сокращения записи при $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$ вводим обозначения

$$\gamma = \gamma(\beta) = \frac{1}{\Gamma(1+i\beta)}, \quad \rho_1 = \rho_1(\beta) = |\gamma| + \sqrt{|\gamma|^2 - 1}, \quad \rho_2 = \rho_2(\beta) = |\gamma| + \sqrt{|\gamma|^2 + 1}, \quad (2.1.37)$$

$$\delta_n = \delta_n(\beta) = \ln(\gamma e^{i\beta \ln 2\pi n} + \sqrt{(\gamma e^{i\beta \ln 2\pi n})^2 - 1})^+, \quad (2.1.38)$$

подразумевая в (2.1.37) арифметическое значение корня. По формуле дополнения

$$|\gamma|^2 = \frac{1}{\Gamma(1+i\beta)\Gamma(1-i\beta)} = \frac{1}{i\beta\Gamma(i\beta)\Gamma(1-i\beta)} = \frac{\sin \pi i\beta}{\pi i\beta} = \frac{\operatorname{sh} \pi\beta}{\pi\beta} > 1; \quad (2.1.39)$$

отсюда, в частности, следует, что $\rho_2 > \rho_1 > 1$. Далее, так как δ_n есть значение функции $\ln w^+$ в некоторой точке, то

$$0 \leq \operatorname{Im} \delta_n \leq \pi.$$

Скажем, что последовательность ζ_n *асимптотически распределена в полуполосе* $a \leq \operatorname{Re} \zeta \leq b$, $\operatorname{Im} \zeta > 0$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $R > 0$, такое, что

$$\operatorname{Im} \zeta_n > R \Rightarrow a - \epsilon \leq \operatorname{Re} \zeta_n \leq b + \epsilon.$$

В теореме 2.1.3 однозначная ветвь функции $\sqrt{z}$ выбирается так же, как в теореме 2.1.2.

Теорема 2.1.3.

- 1) Множество кратных нулей функции (2.1.32) не более чем конечно.
- 2) Нули z_n функции (2.1.32) образуют две последовательности z_n^+ , $n > n^+$ и z_n^- , $n > n^-$, такие, что

$$\sqrt{z_n^\pm} = 2\pi i n - \frac{\pi\beta}{2} \pm \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2.1.40)$$

- 3) Точки $\zeta_n = \sqrt{z_n}$ асимптотически распределены в полуполосах

$$\ln \rho_1 \leq \left| \operatorname{Re} \zeta + \frac{\pi\beta}{2} \right| \leq \ln \rho_2, \quad \operatorname{Im} \zeta > 0. \quad (2.1.41)$$

- 4) Каждая точка отрезка $[0, \pi]$ является предельной для последовательности $\operatorname{Im} \delta_n$, и каждая точка отрезков

$$[\ln \rho_1, \ln \rho_2], [\ln(1/\rho_2), \ln(1/\rho_1)]$$

является предельной для последовательности $\operatorname{Re} \delta_n$.

- 5) Существуют $R = R(\beta) > 0$ и $N = N(\beta) \in \mathbb{N}$, такие, что в кругах

$$|\zeta - i\pi n| < R, \quad n > N,$$

нет точек $\zeta_k = \sqrt{z_k}$.

Лемма 2.1.2 ([22], § 2.3). Пусть функция $g(z)$ аналитична в некотором открытом прямоугольнике π , непрерывна на его замыкании и не обращается в нуль. Пусть

$$0 < m \leq |g(z)| \leq M < +\infty, \quad z \in \partial\pi.$$

Тогда если $z_i \in \pi$, $\operatorname{dist}(z_i, \partial\pi) \geq \delta > 0$, $i = 1, 2$, то

$$|\arg g(z_1) - \arg g(z_2)| \leq C(\delta, m, M).$$

Лемма 2.1.3 ([22], § 2.3). Пусть функция $F(\zeta)$ аналитична и ограничена в полуполосе $|\operatorname{Re} \zeta| \leq H$, $\operatorname{Im} \zeta > 0$ и пусть $|F(\zeta)|$ ограничен от нуля на некоторой полупрямой $\operatorname{Re} \zeta = h \in (0, H)$, $\operatorname{Im} \zeta > 0$. Тогда:

- 1) число нулей функции $F(\zeta)$ (с учетом кратностей) в прямоугольнике $|\operatorname{Re} \zeta| \leq h$, $t \leq \operatorname{Im} \zeta \leq t+1$ ограничено при $t > 1$,
- 2) $|F(\zeta)|$ ограничен от нуля вне кружков одинакового радиуса с центрами в нулях $F(\zeta)$, $|\operatorname{Re} \zeta| \leq h$, $\operatorname{Im} \zeta > 1$.

Доказательство теоремы 2.1.3. Сначала докажем следующее свойство нулей z_n функции (2.1.32):

$$\sqrt{z_n} = i\pi n + \Delta_n, \quad \Delta_n = O(1), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2.1.42)$$

При этом последовательность $\sqrt{z_n}$ считается простой, т. е. возможному кратному корню функции $E_{1/2}(z; \mu)$ отвечают элементы последовательности (2.1.42) с разными номерами.

Так как $\operatorname{Re} \mu = 3$, то $\operatorname{Re} \tau_\mu = 0$ и потому $|z_n^{\tau_\mu}| \asymp 1$. Теперь формула (2.1.29) показывает, что обозначив $\zeta = \sqrt{z}$, нам надлежит исследовать корни $\zeta_n = \sqrt{z_n}$ уравнения

$$F(\zeta) := \operatorname{sh}(\zeta - i(\pi/2)\mu) + O(1), \quad \operatorname{Im} \zeta > 0.$$

Очевидно, что при достаточно большом $h > 0$ для функции $F(\zeta)$ выполнены условия леммы 2.1.3 с $H = h + 1$ и что все нули ζ_n функции $F(\zeta)$ из верхней полуплоскости лежат в полуполосе $|\operatorname{Re} \zeta| < h$, $\operatorname{Im} \zeta > 0$. Фиксируем $a > 0$ так, чтобы на горизонтали $\operatorname{Im} \zeta = a$ не было нулей функции $F(\zeta)$ и обозначим через $n(r)$ число нулей функции $F(\zeta)$ в прямоугольнике

$$\pi(r) = (\zeta : |\operatorname{Re} \zeta| < h, a < \operatorname{Im} \zeta < r).$$

Тогда по лемме 2.1.3 существуют последовательность $r_k \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow +\infty$, и число $\epsilon > 0$, такие, что:

- 1) $r_{k+1} - r_k = O(1)$,
- 2) $n(r_{k+1}) - n(r_k) = O(1)$,
- 3) $0 < m \leq |F(\zeta)| \leq M < +\infty$ в прямоугольнике $|\operatorname{Re} \zeta| \leq h + 1$, $|\operatorname{Im} \zeta - r_k| \leq \epsilon$, где m, M от k не зависят.

По лемме 2.1.2 из 3) следует, что на отрезке $|\operatorname{Re} \zeta| \leq h$, $\operatorname{Im} \zeta = r_k$ приращение аргумента $\Delta \arg F(\zeta) = O(1)$ равномерно по k . Покажем, что при обходе прямоугольника $\pi(r_k)$

$$\Delta \arg F(\zeta) = 2r_k + O(1), \quad k \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \partial \pi(r_k). \quad (2.1.43)$$

Обозначив $d = -i\pi\mu/2$, имеем при $\operatorname{Re} \zeta > 0$ соотношение

$$2F(\zeta) = e^{\zeta+d}(1 + \epsilon(\zeta)), \quad \epsilon(\zeta) = O(e^{-\xi}), \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

откуда видно, что $|\epsilon(\zeta)| < 1/2$ на прямой $\operatorname{Re} \zeta = h$ при достаточно большом $h > 0$. Значит, на отрезке $\operatorname{Re} \zeta = h$, $a \leq \operatorname{Im} \zeta \leq r_k$

$$\Delta \arg F(\zeta) = \Delta \arg e^{i\eta+d+h} + O(1) = r_k + O(1).$$

Аналогично это соотношение устанавливается для приращения аргумента $F(\zeta)$ на отрезке $\operatorname{Re} \zeta = -h$, $a \leq \operatorname{Im} \zeta \leq r_k$, проходимом сверху вниз. Так как $\Delta \arg F(\zeta)$ на отрезке $|\operatorname{Re} \zeta| \leq h$, $\operatorname{Im} \zeta = a$ есть константа, а на отрезке $|\operatorname{Re} \zeta| \leq h$, $\operatorname{Im} \zeta = r_k$ по доказанному есть $O(1)$, то (2.1.43) доказано.

По принципу аргумента из (2.1.43) следует, что

$$n(r_k) = r_k/\pi + O(1), \quad r_k \rightarrow \infty.$$

Вместе со свойствами 1), 2) это дает соотношение

$$n(r) = \frac{r}{\pi} + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.1.44)$$

Пусть n — достаточно большой номер. Положив $r = \operatorname{Im} \zeta_n$, из (2.1.44) имеем, что

$$n = (\operatorname{Im} \zeta_n)/\pi + O(1) \implies \operatorname{Im} \zeta_n = \pi n + O(1).$$

И так как $|\operatorname{Re} \zeta_n| \leq h < +\infty$, а $\zeta_n = \sqrt{z_n}$, то отсюда получаем требуемое соотношение (2.1.42).

1) Воспользуемся формулой (2.1.29). Так как теперь $\mu = 3 + i\beta$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$, то по формулам (2.1.5), (2.1.6)

$$c_\mu = 2\gamma, \quad \tau_\mu = -i\beta/2,$$

и для больших по модулю нулей функции (2.1.32) мы имеем уравнение

$$\operatorname{ch} \left(\sqrt{z} + \frac{\pi\beta}{2} \right) = \gamma z^{i\beta/2} e^{\pi\beta/2} + O \left(\frac{1}{z} \right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.1.45)$$

Подставим сюда $z = z_n$. Так как в силу (2.1.42)

$$z_n^{i\beta/2} = (i\pi n + \Delta_n)^{i\beta} = e^{i\beta \ln(i\pi n + \Delta_n)} = e^{i\beta \ln i\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e^{-\pi\beta/2} e^{i\beta \ln \pi n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.1.46)$$

то получим, что

$$\operatorname{ch}\left(\sqrt{z_n} + \frac{\pi\beta}{2}\right) = \gamma e^{i\beta \ln \pi n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2.1.47)$$

Из формулы

$$\rho E_\rho(z; \mu - 1) = \rho(\mu - 1) E_\rho(z; \mu) + z E'_\rho(z; \mu) \quad (2.1.48)$$

следует, что кратный нуль функции (2.1.32) является нулем функции $E_{1/2}(z; 2 + i\beta)$. По теореме 2.1.2 нули последней функции имеют асимптотику

$$\sqrt{z_n} = i\pi \left(n + \frac{2 + i\beta}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = i\pi(n + 1) - \frac{\pi\beta}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2.1.49)$$

Значит, если бы у функции (2.1.32) было бесконечное число кратных нулей, то для некоторой последовательности индексов должно было бы выполняться свойство (2.1.49). Тогда соответствующий частичный предел модуля левой части в (2.1.47) был бы равен $\cos 0 = 1$, в то время как предел модуля правой части есть $|\gamma| > 1$ (см. (2.1.39)). Противоречие. Утверждение 1) доказано.

2) Учитывая формулу (2.1.42), будем записывать последовательность нулей функции (2.1.32) в виде объединения двух последовательностей z_n^+ , $n > n^+$, и z_n^- , $n > n^-$, так, что

$$\sqrt{z_n^\pm} = 2\pi i n + \Delta_n^\pm, \quad n > n^\pm, \quad (2.1.50)$$

и $\Delta_n^\pm = O(1)$. При этом, как и в случае (2.1.42), считаем последовательности $\sqrt{z_n^\pm}$ простыми, т. е. возможному кратному корню отвечают элементы (2.1.50) либо с разными номерами, либо с разными знаками. Подставим выражение для $\sqrt{z} = \sqrt{z_n^\pm}$ из (2.1.50) в формулу (2.1.45), учитывая, что теперь (подобно (2.1.46))

$$(z_n^\pm)^{i\beta/2} = e^{-\pi\beta/2} e^{i\beta \ln 2\pi n} + O(1/n).$$

Получим, что

$$\operatorname{ch}(\Delta_n^\pm + \pi\beta/2) = \gamma e^{i\beta \ln 2\pi n} + O(1/n), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Значит,

$$\Delta_n^\pm + \frac{\pi\beta}{2} = \operatorname{Arch}\left(\gamma e^{i\beta \ln 2\pi n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \operatorname{Log} w(\gamma e^{i\beta \ln 2\pi n}) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из всех значений многозначной функции в правой части при фиксированном n нас устраивают только два. В силу (2.1.36) мы вправе записать соотношение

$$\Delta_n^\pm = -\frac{\pi\beta}{2} \pm \ln w^+(\gamma e^{i\beta \ln 2\pi n}) + 2\pi i s_n^\pm + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.1.51)$$

где s_n^+ и s_n^- — некоторые целые числа. Остается показать, что $s_n^\pm = 0$.

Будем писать

$$z_n^\pm = z_n^\pm(\beta), \quad \Delta_n^\pm = \Delta_n^\pm(\beta), \quad s_n^\pm = s_n^\pm(\beta),$$

чтобы подчеркнуть зависимость данных величин от β .

Зададим $\varepsilon \in (0, \pi)$. Величины $O(1/z)$ и $O(1/n)$ в формулах (2.1.29) и (2.1.46) равномерны соответственно по параметрам μ и β из ограниченных множеств. Поэтому если фиксировать $a > 0$, то существует $N_1 \in \mathbb{N}$, такое, что последнее слагаемое в формуле (2.1.51) удовлетворяет оценке

$$|O(1/n)| < \varepsilon/2, \quad n > N_1, \quad \beta \in [-a, a]. \quad (2.1.52)$$

Фиксируем такое N_1 .

Фиксируем достаточно большое $N_2 \in \mathbb{N}$ и вводим обозначения

$$K(z_0; r) = (z : |z - z_0| < r), \quad P = (z : 2\pi N_1 + \pi < |z| < 2\pi N_2 - \pi, \operatorname{Im} z > 0).$$

Тогда

$$E_{1/2}(z^2; 3 + i\beta) \rightarrow E_{1/2}(z^2; 3) = (\operatorname{ch} z - 1)/z, \quad \beta \rightarrow 0,$$

равномерно на P . Нули правой части, лежащие в полукольце P , имеют вид $2\pi in$, $N_1 < n < N_2$, и все они двукратны. По теореме Гурвица существует $\delta_1 > 0$, такое, что в круге $K(2\pi in; \varepsilon)$ находятся ровно два нуля функции $E_{1/2}(z^2; 3 + i\beta)$, как только

$$\beta \in U_{\delta_1}(0) = (\beta : 0 < |\beta| < \delta_1), \quad N_1 < n < N_2.$$

Но нули последней функции — это точки (2.1.50).

Так как $\ln w^+(z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow 1$, то существует $\delta_2 \in (0, \delta_1]$, такое, что

$$\left| -\frac{\pi\beta}{2} \pm \ln w^+(\gamma(\beta)e^{i\beta \ln 2\pi n}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \beta \in U_{\delta_2}(0), \quad N_1 < n < N_2. \quad (2.1.53)$$

Значит, если в (2.1.51) положить $s_n^\pm(\beta) = 0$ для $\beta \in U_{\delta_2}(0)$, то в силу (2.1.50) – (2.1.53) будем иметь

$$\sqrt{z_n^\pm(\beta)} \in K(2\pi in; \varepsilon), \quad N_1 < n < N_2.$$

Это означает, что для $\beta \in U_{\delta_2}(0)$, $N_1 < n < N_2$ формула (2.1.51) верна с $s_n^\pm = 0$.

Из сходимости

$$E_\rho(z; \mu) \rightarrow E_\rho(z; \mu_0), \quad \mu \rightarrow \mu_0,$$

равномерной в каждом круге, по теореме Гурвица следует непрерывная зависимость $\sqrt{z_n^\pm(\beta)}$ от β . В силу (2.1.50) такова же и зависимость $\Delta_n^\pm(\beta)$ от β . Оба первых слагаемых в правой части (2.1.51) — непрерывные функции β . Значит, и сумма последних слагаемых в (2.1.51)

$$2\pi i s_n^\pm(\beta) + O(1/n) =: A_n^\pm(\beta)$$

есть непрерывная функция β при фиксированном n . По доказанному и благодаря (2.1.52), существует $\delta \in (0, \delta_2]$, такое, что

$$|A_n^\pm| < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad \beta \in U_\delta(0), \quad N_1 < n < N_2. \quad (2.1.54)$$

Но как только $s_n^\pm(\beta) \neq 0$, т. е. $|s_n^\pm(\beta)| \geq 1$, то

$$|A_n^\pm(\beta)| > 2\pi - \varepsilon/2 > (3/2)\pi.$$

А это противоречит (2.1.54) и непрерывности функции $A_n^\pm(\beta)$. Следовательно, $s_n^\pm(\beta) = 0$, $-a \leq \beta \leq a$, $N_1 < n < N_2$.

Однако на вещественных полупрямых $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ функция $\ln w^+(z)$ непрерывна только по множеству $\operatorname{Im} z \geq 0$. Поэтому в наши рассуждения, связанные с непрерывностью, необходимо внести уточнения, если при некоторых $0 \neq \beta_0 \in [-a, a]$, $N_1 < n < N_2$ точка $t_n(\beta_0)$, где

$$t_n(\beta) = \gamma(\beta)e^{i\beta \ln 2\pi n}, \quad (2.1.55)$$

попадает на одну из этих полупрямых.

Введем множества $U^\pm$ условиями $\beta \in U^+(U^-) \Leftrightarrow \operatorname{Im} t_n(\beta) \geq 0 (< 0)$. Тогда функция, равная

$$\ln w^+(t_n(\beta)), \quad \beta \in U^+, \quad -\ln w^+(t_n(\beta)), \quad \beta \in U^-,$$

благодаря формуле (2.1.35) окажется непрерывной в точке β_0 . Значит (см. (2.1.51)), если для $\beta \in U^-$ мы поменяем ролями Δ_n^+ и Δ_n^- , (и соответственно s_n^+ и s_n^-), то все предыдущие рассуждения, основанные на непрерывности, сохраняют силу.

Так как N_2 мы можем фиксировать сколь угодно большим, то $s_n^\pm(\beta) = 0$, $n > N_1$, $\beta \in [-a, a]$. Но и $a > 0$ в наших рассуждениях произвольно. Следовательно, формула (2.1.51) с $s_n^\pm = 0$ верна для всех $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$. С учетом обозначения (2.1.38) и формулы (2.1.50) это означает, что утверждение 2) доказано.

3) Будем рассматривать эллипсы, симметричные относительно осей. Условимся, что точки эллипса, лежащие на вещественной оси, принадлежат верхнему полуэллипсу.

Пусть $\rho > 1$ и пусть

$$a_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad b_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right). \quad (2.1.56)$$

Функция $w^+(z)$ отображает верхний (нижний) полуэллипс с полуосями a_ρ , b_ρ на полуокружность $|w| = \rho$, $\operatorname{Im} w \geq 0$ ($|w| = 1/\rho$, $\operatorname{Im} w > 0$).

Пусть C_β — окружность $|z| = |\gamma(\beta)| > 1$, а C_β^+ и C_β^- — ее верхняя и нижняя полуокружности. Пусть l_β и L_β — эллипсы с полуосями (2.1.56), первый из которых вписан в C_β , а второй описан около C_β . Пусть l_β^+ и l_β^- (L_β^+ и L_β^-) — верхний и нижний полуэллипсы эллипса l_β (L_β). Пусть a — первая полуось эллипса l_β , а b — вторая полуось эллипса L_β , т. е. $a = b = |\gamma(\beta)|$. Тогда учитывая (2.1.56), делаем вывод, что образом верхнего полуэллипса l_β^+ (L_β^+) при отображении $w^+(z)$ является верхняя полуокружность $|w| = \rho_1 > 1$, $\operatorname{Im} w \geq 0$ ($|w| = \rho_2 > 1$, $\operatorname{Im} w \geq 0$), где

$$\frac{1}{2} \left(\rho_1 + \frac{1}{\rho_1} \right) = |\gamma(\beta)| = \frac{1}{2} \left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Разрешая эти квадратные уравнения и учитывая, что $\rho_1, \rho_2 > 1$, для ρ_1, ρ_2 получаем формулы (2.1.37). Итак, образ полуокружности C_β^+ есть кривая, лежащая в полукольце $\rho_1 \leq |w| \leq \rho_2$, $\operatorname{Im} w \geq 0$, т. е.

$$z \in C_\beta^+ \Rightarrow \rho_1 \leq |w^+(z)| \leq \rho_2, \quad \operatorname{Im} w^+(z) \geq 0. \quad (2.1.57)$$

Рассуждая точно так же в отношении нижних полуэллипсов l_β^- и L_β^- , находим, что

$$z \in C_\beta^- \Rightarrow \frac{1}{\rho_2} \leq |w^+(z)| \leq \frac{1}{\rho_1}, \quad \operatorname{Im} w^+(z) > 0. \quad (2.1.58)$$

Согласно формуле (2.1.38), $\delta_n = \ln w^+(z)$, где $z \in C_\beta$. Значит, применяя факты (2.1.57), (2.1.58), имеем соотношение

$$|\operatorname{Re} \delta_n| = |\operatorname{Re} \ln w^+(z)| = |\ln |w^+(z)|| \in [\ln \rho_1, \ln \rho_2],$$

что вместе с формулой (2.1.40) доказывает утверждение 3).

4) Обозначим через K_β^+ образ полуокружности C_β^+ при отображении $w^+(z)$. Мы знаем, что кривая K_β^+ лежит в полукольце $\rho_1 \leq |w| \leq \rho_2$, $\operatorname{Im} w \geq 0$, начинается в точке ρ_1 , проходит через точку $i\rho_2$ и заканчивается в точке $-\rho_1$. Значит,

- 1) для любого $\theta \in (0, \pi)$ существует точка $w = Re^{i\theta} \in K_\beta^+$;
- 2) для любого $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ существует точка $w = \rho e^{i\varphi} \in K_\beta^+$.

Пусть $z \in C_\beta^+$ — прообраз точки $w \in K_\beta^+$, $\operatorname{Im} w > 0$, пусть $U(w)$ — круговая окрестность точки w , пусть $U(z)$ — прообраз $U(w)$, т. е. $U(z)$ — окрестность точки z . Считаем окрестность $U(w)$ столь малой, что она лежит в открытой верхней полуплоскости. Тогда тем же свойством обладает и окрестность $U(z)$.

Так как $\ln 2\pi n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, то точка $t_n \in C_\beta^+$ (см. (2.1.55)) совершает бесконечное число полуоборотов. А так как $\ln 2\pi(n+1) - \ln 2\pi n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то в $U(z)$ попадает бесконечно много попарно различных точек t_n полуокружности C_β^+ . Значит, в $U(w)$ попадает бесконечно много попарно различных точек $w_n^+ = w^+(t_n)$, $n \in T \subset \mathbb{N}$. С этого места последовательности $\operatorname{Im} \delta_n$, $\operatorname{Re} \delta_n$ рассматриваем отдельно.

Пусть $\theta \in (0, \pi)$ фиксировано. Пусть $w = Re^{i\theta}$ — соответствующая точка на K_β^+ (см. 1)). Утверждается, что точки $\arg w_n^+$, $n \in T$, попарно различны. Действительно, если бы у точек w_n^+ , w_m^+ аргументы совпадали, то они лежали бы на луче в верхней полуплоскости, исходящем из начала. При отображении функцией Жуковского такой луч переходит либо в луч $\arg z = \pi/2$ (если $\theta = \pi/2$), либо в одну из ветвей (левую или правую) гиперболы, симметричной относительно осей. Но на полуокружности C_β^+ нет ни одной пары точек, принадлежащих какому-нибудь из этих множеств. Мы доказали попарное несовпадение точек $\arg w_n^+$. А так как точки w_n^+ лежат в $U(w)$, то в соответствующей (вещественной) окрестности точки θ найдется бесконечное множество точек $\arg w_n^+$. В силу произвольности $U(w)$ это означает, что точка θ является предельной для последовательности

$$\arg w_n^+ = \operatorname{Im} \ln w_n^+ = \operatorname{Im} \delta_n.$$

Остается вспомнить, что θ — произвольная точка из $(0, \pi)$ и что множество предельных точек замкнуто. Утверждение 4) для последовательности $\operatorname{Im} \delta_n$ доказано.

Пусть $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ фиксировано, пусть $w = \rho e^{i\varphi}$ — соответствующая точка на K_β^+ (см. 2)). Утверждается, что любая тройка точек $|w_n^+|$, $n \in T$, содержит пару несовпадающих. Действительно, если бы у трех точек w_n^+ модули совпадали, то эти точки лежали бы на верхней полуокружности

с центром в точке 0. При отображении функцией Жуковского такая полуокружность переходит в верхний полуэллипс (не совпадающий с полуокружностью). Но на C_β^+ только две точки могут принадлежать такому полуэллипсу, т. е. наше предположение неверно. Значит, в соответствующей (вещественной) окрестности точки ρ находится бесконечное множество точек $|w_n^+|$ и в любой окрестности точки $\ln \rho$ находится бесконечно много точек

$$\ln |w_n^+| = \operatorname{Re} \ln w_n^+ = \operatorname{Re} \delta_n.$$

Так как $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ произвольно, а множество предельных точек замкнуто, то мы доказали, что каждая точка отрезка $[\ln \rho_1, \ln \rho_2]$ является предельной для последовательности $\operatorname{Re} \delta_n$. При этом мы оперировали верхней полуокружностью C_β^+ и ее образом K_β^+ . Проводя аналогичные рассуждения для нижней полуокружности C_β^- и ее образа K_β^- и учитывая (2.1.58), получаем, что и каждая точка отрезка $[\ln(1/\rho_2), \ln(1/\rho_1)]$ является предельной для последовательности $\operatorname{Re} \delta_n$. Утверждение 4) доказано полностью.

5) Надо доказать отграниченность от нуля последовательности Δ_n (см. (2.1.42)). Предположим противное: $\Delta_n \rightarrow 0$ по некоторой последовательности индексов $n = n_k \rightarrow \infty$. Тогда переходя к пределу при $n = n_k \rightarrow \infty$ в равенстве модулей в (2.1.47) и используя (2.1.39), получаем, что

$$\operatorname{ch} \frac{\pi \beta}{2} = |\gamma(\beta)| = \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \pi \beta}{\pi \beta}}.$$

Но для $\beta \neq 0$ это невозможно, так как при $t \neq 0$ справедливо соотношение

$$\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2} = \frac{1 + \operatorname{cht}}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2(2n)!} > 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sh} t}{t}.$$

Мы доказали утверждение 5), а с ним и всю теорему 2.1.3. □

3. Нам осталось рассмотреть случай $0 < \rho < 1/2$.

Лемма 2.1.4. Пусть $\rho = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Тогда

$$E_\rho(z; m) = E_{1/m}(z; m) = \rho z^{\rho-1} \sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i n \rho} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}).$$

Доказательство. Так как

$$mE^{1/m}(z; m) = \sum_{n=0}^{m-1} E_1(z^{1/m} e^{2\pi i n/m}; m)$$

(см. [4]), а

$$E_1(w; m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{(k+m-1)!} = \frac{1}{w^{m-1}} \left(e^w - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{w^k}{k!} \right),$$

то

$$mE_{1/m}(z; m) = z^{1/m-1} \sum_{n=0}^{m-1} \left(e^{2\pi i n(1/m-1)} \exp(z^{1/m} e^{2\pi i n/m}) - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^{k/m} e^{2\pi i n(k+1-m)/m}}{k!} \right).$$

Но выражение

$$\sum_{n=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^{k/m}}{k!} e^{2\pi i n(k+1-m)/m} = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^{k/m}}{k!} \sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i n(k+1)/m}$$

равно нулю, так как последняя сумма есть нуль. Подставляя это в предыдущую формулу, получаем утверждение леммы. □

Лемма 2.1.5. Пусть $\rho = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$E_\rho(z; m-s) = \rho z^{\rho-1+s\rho} \sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i n \rho(1+s)} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}). \quad (2.1.59)$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. При $s = 0$ формула (2.1.59) есть утверждение леммы 2.1.4. Покажем, что из ее справедливости для индекса s следует ее справедливость для индекса $s + 1$.

Из (2.1.59) следует, что

$$\begin{aligned} zE'_\rho(z; m-s) &= \rho(\rho-1+s\rho)z^{\rho-1+s\rho} \sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i n \rho(1+s)} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}) + \\ &\quad + \rho^2 z^{2\rho-1+s\rho} \sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i n \rho(2+s)} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}). \end{aligned}$$

Подставим это и (2.1.59) в правую часть формулы

$$\rho E_\rho(z; \mu-1) = \rho(\mu-1)E_\rho(z; \mu) + zE'_\rho(z; \mu)$$

(см. [4]), полагая в ней $\mu = m-s$. С учетом того, что $\rho = 1/m$, получим требуемое. $\square$

Замечание 2.1.1. Формула (2.1.59) может быть записана в виде

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i n \rho(1-\mu)} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}), \quad \rho = \frac{1}{m}, \quad \mu = m-s, \quad (2.1.60)$$

и справедлива для любой ветви функции z^ρ , так как правая часть в (2.1.60) не меняется при замене $\arg z$ на $\arg z + 2\pi$.

Теорема 2.1.4. Пусть $0 < \rho < 1/2$. Тогда все достаточно большие по модулю нули z_n функции $E_\rho(z; \mu)$ просты и описываются асимптотической формулой

$$z_n = - \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} \left(n - \frac{1}{2} + \rho(\mu-1) \right) + \alpha_n \right)^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (2.1.61)$$

где:

1) в случае исключительных пар ρ, μ

$$\alpha_n = O(e^{-\pi n(\cos \pi \rho - \cos 3\pi \rho)/\sin \pi \rho}),$$

2) если $1/4 < \rho < 1/2$, то

$$\alpha_n = O(n^{-\operatorname{Re} \tau_\mu / \rho} e^{-\pi n \operatorname{ctg} \pi \rho}),$$

3) если $\rho \leq 1/4$, то

$$\alpha_n = e^{-\pi n \operatorname{ctg} \pi \rho} (O(e^{\pi n \cos 3\pi \rho / \sin \pi \rho}) + O(n^{-\operatorname{Re} \tau_\mu / \rho})).$$

Если μ вещественно, то все достаточно большие по модулю нули вещественны.

Доказательство. Сначала рассмотрим исключительные пары ρ, μ , т. е.

$$\rho = 1/m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 3, \quad \mu = m-s, \quad s \in \mathbb{Z}_+.$$

Положим $w = z^\rho e^{-i\pi\rho}$; тогда плоскости $0 \leq \arg z < 2\pi$ отвечает сектор $-\pi\rho \leq \arg w < \pi\rho$, где в силу (2.1.60) мы должны исследовать асимптотику нулей квазиполинома

$$P(w) = \sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i n \rho(1-\mu)} \exp(w e^{(2n+1)\pi i \rho}).$$

Выделим в этой сумме слагаемые с индексами $n = 0, m-1$ (в указанном секторе именно они играют определяющую роль):

$$P(w) = \exp(w e^{i\pi\rho}) + e^{-i(1-\mu)2\pi\rho} \exp(w e^{-i\pi\rho}) + \alpha(w), \quad (2.1.62)$$

$$\alpha(w) = \sum_{n=1}^{m-2} d_n \exp(\lambda_n w), \quad \lambda_n = e^{(2n+1)i\pi\rho}.$$

Имеем соотношение

$$|\alpha(w)| = \left| \sum_{n=1}^{m-2} d_n \exp(we^{i\pi\rho(2n+1)}) \right| = O(\exp(\operatorname{Re} w \cos 3\pi\rho - \operatorname{Im} w \sin 3\pi\rho)) \quad (2.1.63)$$

в секторе $|\arg w| \leq \pi\rho$, ибо в этом секторе рост квазиполинома $\alpha(w)$ определяется самыми правыми из точек $\exp(i\pi\rho(2n+1))$, т. е. точками с индексами $n = 1, m-2$, а для них

$$|\exp(we^{i\pi\rho(2n+1)})| = O(\exp(\operatorname{Re} w \cos 3\pi\rho - \operatorname{Im} w \sin 3\pi\rho)).$$

На множестве $0 < \varepsilon \leq \arg w \leq \pi\rho$ ($-\pi\rho \leq \arg w \leq -\varepsilon$) в формуле (2.1.62) доминирует второе (первое) слагаемое. Оно растет на этом множестве экспоненциально, поэтому и квазиполином $P(w)$ растет в этих секторах экспоненциально. Значит, сколь бы малым ни было $\varepsilon > 0$, все нули функции $E_\rho(z; \mu)$, лежащие на множестве $|\arg w| \leq \pi\rho$, за исключением, быть может, конечного числа, расположены в секторе

$$|\arg w| < \varepsilon. \quad (2.1.64)$$

Из (2.1.62), (2.1.63) следует, что если $\theta = \arg w \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, то

$$\begin{aligned} P(w) &= \exp(we^{i\pi\rho}) + e^{-i(1-\mu)2\pi\rho} \exp(we^{-i\pi\rho}) + O(e^{\operatorname{Re} w(\cos 3\pi\rho - \operatorname{tg} \theta \sin 3\pi\rho)}) = \\ &= 2e^{w \cos \pi\rho - i\pi\rho(1-\mu)} \cos(w \sin \pi\rho + \pi\rho(1-\mu)) + O(e^{\operatorname{Re} w(\cos 3\pi\rho - \operatorname{tg} \theta \sin 3\pi\rho)}). \end{aligned}$$

Если ε достаточно мало, то

$$\cos \pi\rho - \cos 3\pi\rho - \operatorname{tg} \varepsilon |\sin 3\pi\rho| > 0,$$

поэтому для отыскания нулей w_n квазиполинома $P(w)$ в секторе (2.1.64) мы имеем уравнение

$$\cos(w \sin \pi\rho + \pi\rho(1-\mu)) = o(1), \quad \operatorname{Re} w \rightarrow +\infty, \quad (2.1.65)$$

где величина $o(1)$ есть

$$O(\exp(-\operatorname{Re} w(\cos \pi\rho - \cos 3\pi\rho + \operatorname{tg} \theta \sin 3\pi\rho))).$$

Уравнение (2.1.65) показывает, что $|\operatorname{Im} w_n| \leq h < +\infty$ для всех n . Но тогда $\operatorname{Re} w \operatorname{tg} \theta = O(1)$ для $w = w_n$, и значит, величина $o(1)$ в (3.7.4) есть

$$O(\exp(-\operatorname{Re} w(\cos \pi\rho - \cos 3\pi\rho))). \quad (2.1.66)$$

Положив $t = w \sin \pi\rho + \pi\rho(1-\mu)$, запишем уравнение (2.1.65) в виде

$$\cos t = O\left(\exp\left(-\frac{\cos \pi\rho - \cos 3\pi\rho}{\sin \pi\rho} \operatorname{Re} t\right)\right).$$

Очевидно, что все достаточно большие по модулю корни t_n этого уравнения в правой полуплоскости просты и описываются асимптотической формулой

$$t_n = \pi n + \frac{\pi}{2} + O\left(\exp\left(-\pi n \frac{\cos \pi\rho - \cos 3\pi\rho}{\sin \pi\rho}\right)\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Нули z_n функции $E_\rho(z; \mu)$ являются прообразами точек t_n при отображении

$$t = z^\rho e^{-i\pi\rho} \sin \pi\rho + \pi\rho(1-\mu).$$

Вместе с предыдущей формулой это в случае исключительных пар ρ, μ дает формулу (2.1.61) и содержащуюся в утверждении 1) оценку остатка.

Теперь рассмотрим общий (т. е. неисключительный) случай. Воспользуемся теоремой 1.2.2: если $0 < \rho \leq 1/2$, то

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \sum_{|\arg z + 2\pi n| \leq 3\pi/4\rho} e^{2\pi i n \rho(1-\mu)} \exp(z^\rho e^{2\pi i n \rho}) + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2.1.67)$$

Формула (2.1.67) верна для любой однозначной ветви степенной функции, так как замене в ней $\theta = \arg z$ на $\theta + 2\pi$ отвечает уменьшение на единицу входящих в нее индексов n , т. е. происходит просто перенумерация индексов. В данном случае удобно считать, что $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Снова положим $w = z^\rho e^{-i\pi\rho}$ и пусть w_n — образы нулей z_n функции $E_\rho(z; \mu)$ при таком отображении. Тогда (2.1.67) показывает, что w_n — это нули функции

$$P(w) + O\left(\frac{1}{w^{\operatorname{Re} \tau_\mu / \rho}}\right) \quad (2.1.68)$$

в секторе $-\pi\rho \leq \arg w < \pi\rho$, где

$$P(w) = \sum_{|\arg w + (2n+1)\pi\rho| \leq 3\pi/4} e^{2\pi i n \rho(1-\mu)} \exp(we^{(2n+1)\pi i \rho}). \quad (2.1.69)$$

Рассмотрим сектор (2.1.64), считая ε достаточно малым. Так как $\rho < 1/2$, то для точек w из этого сектора в формуле (2.1.69) обязательно присутствуют индексы $n = 0$ и $n = -1$.

Обозначим через N наибольший индекс, присутствующий в формуле (2.1.69). Имеем неравенства

$$\begin{aligned} 3\pi/4 &\geq |(2N+1)\pi\rho - \arg w| > (2N+1)\pi\rho - \varepsilon, \\ (2N+1)\pi\rho &< \frac{3\pi}{4} + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.1.70)$$

Значит, точки

$$\lambda_n = e^{(2n+1)i\pi\rho}$$

с неотрицательными индексами располагаются на дуге $|w| = 1$, $0 \leq \arg w < 3\pi/4 + \varepsilon$. Аналогично, точки λ_n с отрицательными индексами лежат на дуге $|w| = 1$, $-3\pi/4 - \varepsilon < \arg w \leq 0$. Таким образом, среди показателей λ_n квазиполинома

$$P(w) = \sum_n h_n e^{\lambda_n w}, \quad h_n = e^{2\pi i n \rho(1-\mu)} \neq 0, \quad \lambda_n = e^{(2n+1)i\pi\rho},$$

наибольшие вещественные части имеют точки

$$\lambda_0 = e^{i\pi\rho}, \quad \lambda_{-1} = e^{-i\pi\rho}.$$

Из (2.1.70) следует, что если $\rho > 1/4$, а ε достаточно мало, то $N = 0$. По аналогии наименьший индекс n в формуле (2.1.69) есть $n = -1$. Т. е. если $\rho > 1/4$, то в формуле (2.1.69) присутствуют только индексы $n = 0$, $n = -1$.

Мы не случайно обозначили функцию (2.1.69) так же, как функцию (2.1.62). В (2.1.69), в отличие от (2.1.62), множество индексов n меняется в зависимости от w , но множество наборов таких индексов конечно, когда $|\arg w| \leq \pi\rho$, поэтому эти функции ведут себя схожим образом.

Действительно, если $0 < \varepsilon \leq \arg w \leq \pi\rho$ ($-\pi\rho \leq \arg w \leq -\varepsilon$), то в (2.1.69) доминирует слагаемое с индексом $n = -1$ ($n = 0$). Значит, на этом множестве функция (2.1.69), а следовательно, и (2.1.68), растет экспоненциально. Поэтому нули функции (2.1.68), лежащие в секторе $|\arg w| \leq \pi\rho$, за исключением, быть может, конечного числа, в действительности расположены на множестве (2.1.64).

После этого повторяются рассуждения исключительного случая. Единственное изменение состоит в том, что если теперь записать $P(w)$ в виде (2.1.62), то $\alpha(w)$ будет слагаться из последнего выражения в (2.1.68) и слагаемых в (2.1.69), соответствующих самым правым из оставшихся точек $e^{\lambda_n w}$, т. е. (возможным) точкам с индексами $n = 1$ и $n = -2$. Следовательно, в уравнении (2.1.65) несколько изменится вид правой части $o(1)$ по сравнению с (2.1.66). Но формула (2.1.61) будет верна во всех случаях, и наша задача только в том, чтобы проследить, как это изменение повлияет на поведение остатка α_n .

Пусть $1/4 < \rho < 1/2$. Тогда, как мы видели, в (2.1.69) присутствуют только точки $n = 0$, $n = -1$. Значит, $\alpha(w)$ сводится к последнему выражению в (2.1.68), и потому правая часть в (2.1.65) имеет вид

$$O(|w|^{-\operatorname{Re} \tau_\mu / \rho} e^{-\operatorname{Re} w \cos \pi\rho}).$$

В итоге мы получим требуемую в утверждении 2) оценку остатка.

Если же $\rho \leq 1/4$, то мы должны учитывать точки λ_n , $n = 1$, $n = -2$. Значит, правая часть в (2.1.65) будет суммой выражения (2.1.66) и величины

$$e^{-w \cos \pi\rho} O(w^{-\operatorname{Re} \tau_\mu / \rho}),$$

после чего мы получим оценку остатка, содержащуюся в утверждении 3).

Во всех случаях простота достаточно больших по модулю нулей функции $E_\rho(z; \mu)$ следует из простоты корней уравнения (2.1.65) при $\operatorname{Re} w > R_0$.

Вещественность всех достаточно больших по модулю нулей при вещественном μ доказывается так же, как в теореме 2.1.2. Теорема 2.1.4 полностью доказана. $\square$

Асимптотику нулей функций Миттаг-Леффлера первыми, по-видимому, стали изучать Джр-башян и Нерсесян (см. об этом [4]), результаты которых содержат различные ограничения на входящие параметры ρ, μ , например, $\rho \geq 1/2$. В статье [18] при всех $\rho > 0, \mu \in \mathbb{C}$, кроме случая $\rho = 1/2, \operatorname{Re} \mu \neq 3$, для нулей получены асимптотические формулы с точностью до бесконечно малой величины, порядок которой оценен; в частности, в [18] содержится теорема 2.1.4. Уточненные формулы, содержащиеся в теоремах 2.1.1, 2.1.2, в которых предъявлены первые члены асимптотики, стремящиеся к нулю, публикуются здесь впервые. Теорема 2.1.3, относящаяся к исключительному случаю $\rho = 1/2, \operatorname{Re} \mu = 3$, доказана в [24].

2.2. СОГЛАСОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ И НУМЕРАЦИИ НУЛЕЙ

Полученные в предыдущем пункте формулы для нулей z_n функции $E_\rho(z; \mu)$ — асимптотические; они описывают поведение нулей вне круга достаточно большого радиуса и не дают информации о числе нулей внутри указанного круга. Очевидно, вопрос о числе таких нулей равносителен вопросу о согласовании асимптотики с нумерацией всех нулей.

Определение. Пусть $Z = (z_n)$ — множество всех нулей целой функции $F(z)$ и пусть имеет место асимптотическая формула

$$z_n = \varphi(n) + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty \text{ (или } n \rightarrow +\infty), \quad (2.2.1)$$

где $\varphi(n) \rightarrow \infty$. Скажем, что *асимптотика* (2.2.1) *согласована с нумерацией* всех нулей функции $F(z)$ при помощи множества индексов T , если существует биекция $T \leftrightarrow Z$, сохраняющая асимптотику (2.2.1).

При этом мы должны считать, что нулю λ кратности m в Z отвечают элементы $z_{s+1} = \dots = z_{s+m} = \lambda$ с различными номерами.

Поясним определение на примерах функций $F(z) = \sin z$ и $F(z) = (\sin z)/z$. Их нули имеют одинаковую асимптотику

$$z_n = \pi n + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

Но в первом случае она согласована с нумерацией всех нулей при помощи множества индексов $\mathbb{Z}$, а во втором — при помощи множества $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

В этом пункте мы находим множества индексов T , при помощи которых асимптотические формулы теорем 2.1.1, 2.1.2, 2.1.4 согласованы с нумерацией всех нулей функции $E_\rho(z; \mu)$. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.2.1.

1) Если

$$\rho > 1/2, \mu \neq 1/\rho - l, l \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{или} \quad \rho = 1/2, \operatorname{Re} \mu > 3,$$

то асимптотическая формула (2.1.7) согласована с нумерацией всех нулей функции $E_\rho(z, \mu)$ при помощи множества индексов $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2) Если

$$\rho > 1/2, \rho \neq 1, \mu = 1/\rho - l, l \in \mathbb{Z}_+,$$

то асимптотическая формула (2.1.7) согласована с нумерацией всех нулей функции $E_\rho(z, \mu)$ при помощи множества индексов $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \setminus \{1\}$.

Теорема 2.2.2.

1) Если

$$\rho = 1/2, \operatorname{Re} \mu < 3, \mu \neq 2 - l, l \in \mathbb{Z}_+,$$

то асимптотическая формула (2.1.28) согласована с нумерацией всех нулей функции $E_\rho(z; \mu)$ при помощи множества индексов $\mathbb{N}$.

2) Если

$$\rho < 1/2,$$

то асимптотическая формула (2.1.61) согласована с нумерацией всех нулей функции $E_\rho(z; \mu)$ при помощи множества индексов $\mathbb{N}$.

Для иллюстрации рассмотрим функцию

$$E_1(z; 2) = (e^z - 1)/z.$$

Здесь $c_\mu = 1$, $\tau_\mu = 0$, и по теореме 2.1.1 асимптотика нулей этой функции имеет вид

$$z_n = 2\pi ni + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

Теорема 2.2.1 утверждает, что асимптотика согласована с нумерацией всех нулей при помощи множества индексов $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. С другой стороны, в силу явного задания функции имеем точные формулы

$$z_n = 2\pi ni, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Доказательство. Если точка $z = 0$ является корнем функции $E_\rho(z, \mu)$ кратности m , то перейдем к функции

$$F(z) = ((z - 1)/z)^m E_\rho(z; \mu), \quad F(0) \neq 0.$$

Доказательство теорем 2.2.1, 2.2.2 основано на применении формулы Иенсена

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |F(re^{i\theta})| d\theta - \ln |F(0)|, \quad (2.2.2)$$

где $n(t)$ — число нулей функции $F(z)$ в круге $|z| < r$, очевидно, совпадающее при $r > 1$ с числом нулей функции $E_\rho(z; \mu)$.

2.2.1. Оценка интеграла от логарифма модуля. *Случай $\rho > 1/2$.* Мы будем пользоваться формулами (2.1.12), (2.1.13), равномерными в соответствующих секторах относительно $\theta = \arg z$. Положим в этих формулах $s = 1$ при $\mu \neq 1/\rho - l$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $s = 2$ при $\mu = 1/\rho - l$.

Пусть r_0 достаточно велико. Тогда множество точек, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \ln z) - \ln |c_\mu| = 1, \quad |z| \geq r_0,$$

состоит из двух бесконечных кривых, начинающихся в некоторых точках M_+, N_+ окружности $|z| = r_0$, а объединение этого множества с правой дугой $M_+ N_+$ окружности $|z| = r_0$ есть бесконечная кривая, которую обозначим через γ_+ . Аналогично через γ_- обозначаем кривую, полученную объединением точек, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \ln z) - \ln |c_\mu| = -1, \quad |z| \geq r_0,$$

с некоторой левой дугой $M_- N_-$ окружности $|z| = r_0$. Обе кривые $\gamma_\pm$ асимптотически располагаются вдоль лучей $\arg z = \pm\pi/(2\rho)$.

Обозначим через P_+ множество точек, лежащих правее γ_+ , а через P_- — множество точек, лежащих левее γ_- . Пусть P — замыкание множества точек, лежащих между γ_+ и γ_- , из которого удален круг $|z| \leq r_0$. Множество $P_+(P_-)$ есть правая (левая) криволинейная полуплоскость, а P есть заключенная между ними криволинейная полоса, из которой удален круг $|z| \leq r_0$. Имеем соотношения $\mathbb{C} \setminus (z : |z| \leq r_0) = P_+ \cup P_- \cup P$ и

$$P_- = (z : r = |z| > r_0, \operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \ln z) - \ln |c_\mu| < -1),$$

$$P_+ = (z : r > r_0, \operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \ln z) - \ln |c_\mu| > 1),$$

$$P = (z : r > r_0, -1 \leq \operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \ln z) - \ln |c_\mu| \leq 1).$$

Пусть $\rho > 1$. Тогда, если $z \in P_-$ и $\pi/\rho \leq |\arg z| \leq \pi$, то по формуле (2.1.13)

$$z^s E_\rho(z; \mu) \rightrightarrows -\rho c_\mu, \quad r \rightarrow \infty, \quad \pi/\rho \leq |\arg z| \leq \pi. \quad (2.2.3)$$

Если же $z \in P_-$ и $|\arg z| \leq \pi/\rho$, то из определения множества P_- и из формулы (2.1.12) следует, что

$$\left| \frac{1}{\rho} z^s E_\rho(z; \mu) \right| \leq \frac{|c_\mu|}{e} + |c_\mu| + O\left(\frac{1}{r}\right) \leq M < \infty, \quad r > r_0, \quad (2.2.4)$$

$$\left| \frac{1}{\rho} z^s E_\rho(z; \mu) \right| \geq |c_\mu| - \frac{|c_\mu|}{e} + O\left(\frac{1}{r}\right) \geq m > 0, \quad r > r_0. \quad (2.2.5)$$

Объединяя (2.2.3) с (2.2.4) и (2.2.5), получаем, что

$$|z^s E_\rho(z; \mu)| \asymp 1, \quad r > r_0, \quad z \in P_-. \quad (2.2.6)$$

Если $1/2 < \rho \leq 1$, то рассуждения, связанные с формулой (2.2.3), отпадают, а формулы (2.2.4), (2.2.5) верны для $|\arg z| \leq \pi$, и мы снова приходим к оценке (2.2.6).

Пусть $z \in P_+$. Тогда по формуле (2.1.12)

$$\begin{aligned} \exp(\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \ln z)) - |c_\mu| + O\left(\frac{1}{r}\right) &\leq \\ &\leq \left| \frac{1}{\rho} z^s E_\rho(z; \mu) \right| \leq \exp(\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \ln z)) + |c_\mu| + O\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Но по определению множества P_+

$$|c_\mu| \leq (1/e) \exp(\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \ln z)), \quad z \in P_+. \quad (2.2.8)$$

Подставляя (2.2.8) в (2.2.7), получаем оценку

$$|z^s E_\rho(z; \mu)| \asymp \exp(\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \ln z)), \quad r > r_0, \quad z \in P_+. \quad (2.2.9)$$

Осталось рассмотреть множество P . При отображении (2.1.15) оно перейдет в множество, совпадающее при больших $|w|$ с вертикальной полосой

$$\gamma_- \leq \operatorname{Re} w \leq \gamma_+, \quad \gamma_\pm = \ln |c_\mu| \pm 1.$$

Очевидно, при достаточно больших $|z|$ отображение (2.1.15) однолистно. Рассмотрим образ $e(w)$ функции $(1/\rho)z^s E_\rho(z; \mu)$ при этом отображении. По формуле (2.1.12)

$$e(w) = e^w - c_\mu + o(1) =: \varphi(w) + o(1), \quad \gamma_- \leq \operatorname{Re} w \leq \gamma_+, \quad |\operatorname{Im} w| \rightarrow \infty. \quad (2.2.10)$$

Функция $\varphi(w)$ периодична с периодом $2\pi i$ и непрерывна. Поэтому

$$0 < c(\delta) \leq |\varphi(w)| \leq M < \infty$$

при $\gamma_- \leq \operatorname{Re} w \leq \gamma_+$, $|\operatorname{Im} w| > r_0$ и вне кружков радиуса δ с центрами в нулях функции $\varphi(w)$. Отсюда и из (2.2.10) вытекает оценка

$$0 < m \leq |e(w)| \leq M < \infty, \quad \gamma_- \leq \operatorname{Re} w \leq \gamma_+, \quad |\operatorname{Im} w| > r_0, \quad (2.2.11)$$

вне кружков радиуса δ с центрами в нулях w_n функции $e(w)$, имеющих вид $w_n = 2\pi ni + \ln c_\mu + o(1)$. Беря δ достаточно малым и возвращаясь к переменной z , на основании (2.2.11) делаем вывод, что найдутся окружности $|z| = r_k \rightarrow \infty$ такие, что на их пересечении с множеством P верна оценка (2.2.6), т. е.

$$|z^s E_\rho(z; \mu)| \asymp 1, \quad z \in P, \quad |z| = r_k \rightarrow \infty. \quad (2.2.12)$$

Оценки (2.2.6), (2.2.9), (2.2.12) показывают, что на подходящих окружностях справедливы оценки

$$\ln |E_\rho(z; \mu)| = \operatorname{Re} z^\rho + (\operatorname{Re} \tau_\mu - s) \ln r + O(1), \quad z \in P_+, \quad |z| = r_k \rightarrow \infty, \quad (2.2.13)$$

$$\ln |E_\rho(z; \mu)| = -s \ln r + O(1), \quad z \in P_- \cup P, \quad |z| = r_k \rightarrow \infty. \quad (2.2.14)$$

С помощью этих оценок выясним поведение интеграла

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |E_\rho(re^{i\theta}; \mu)| d\theta, \quad r = r_k \rightarrow \infty.$$

Обозначим через $\alpha_\pm(r)$ аргументы точек, которые ограничивают дугу окружности $|z| = r$, попавшую на множество P_+ , $\alpha_-(r) < 0 < \alpha_+(r)$. Из определения множества P_+ следует, что обе величины $\pm\alpha_\pm(r)$ имеют вид

$$\frac{\pi}{2\rho} + O\left(\frac{\ln r}{r^\rho}\right) =: \alpha(r). \quad (2.2.15)$$

Интеграл $I(r)$ запишем в виде суммы интегралов I_j , $j = 1, 2, 3, 4$, которые берутся соответственно по интервалам

$$(0, \alpha_+(r)), (\alpha_-(r), 0), (\alpha_+(r), \pi), (-\pi, \alpha_-(r)).$$

Для оценки I_1, I_2 применяем формулу (2.2.13), а для оценки I_3, I_4 — формулу (2.2.14). С учетом (2.2.15) имеем соотношение

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha(r)}^{\pi} (O(1) - s \ln r) d\theta = O(1) - \frac{s}{2\pi} (\pi - \alpha(r)) \ln r = s \left(\frac{1}{4\rho} - \frac{1}{2} \right) \ln r + O(1).$$

Аналогичная оценка верна для I_4 . Далее, так как в силу (2.2.15)

$$\sin \rho \alpha(r) = \cos \left(O \left(\frac{\ln r}{r^\rho} \right) \right) = 1 + O \left(\frac{\ln^2 r}{r^{2\rho}} \right),$$

то

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha(r)} (r^\rho \cos \rho \theta + (\operatorname{Re} \tau_\mu - s) \ln r + O(1)) d\theta = \\ &= \frac{r^\rho}{2\pi\rho} \sin \rho \alpha(r) + \frac{\alpha(r)}{2\pi} (\operatorname{Re} \tau_\mu - s) \ln r + O(1) = \\ &= \frac{r^\rho}{2\pi\rho} + \frac{1}{4\rho} (\operatorname{Re} \tau_\mu - s) \ln r + O(1) \end{aligned}$$

и аналогичная оценка верна для I_2 . Объединяя оценки для I_j , получаем промежуточный итог для случая $\rho > 1/2$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |E_\rho(re^{i\theta}; \mu)| d\theta = \frac{r^\rho}{\pi\rho} + \left(\frac{\operatorname{Re} \tau_\mu}{2\rho} - s \right) \ln r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (2.2.16)$$

Случай $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$. Константы c_μ , τ_μ вычисляются по формулам (2.1.5); имеем неравенство $\operatorname{Re} \tau_\mu < 0$. Пусть r_0 достаточно велико. Рассмотрим множества

$$P_+ = (z : r > r_0, \operatorname{Re}(\sqrt{z} + \tau_\mu \ln z) - \ln |c_\mu| \geq 1).$$

$$P = (z : r > r_0, \operatorname{Re}(\sqrt{z} + \tau_\mu \ln z) - \ln |c_\mu| < 1).$$

Ясно, что $\mathbb{C} \setminus (z : |z| \leq r_0) = P_+ \cup P$.

Пусть $0 \leq \arg z \leq \pi$. По формуле (2.1.23)

$$\begin{aligned} 2zE_{1/2}(z; \mu) &= \exp(\sqrt{z} + \tau_\mu \ln z) + e^{-i\pi(1-\mu)} z^{\tau_\mu} e^{-\sqrt{z}} - c_\mu + O\left(\frac{1}{r}\right) = \\ &= \exp(\sqrt{z} + \tau_\mu \ln z) - c_\mu + o(1), \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Если $0 \leq \arg z \leq \pi$, $z \in P_+$, то имеет место неравенство (2.2.8) с $\rho = 1/2$, $s = 1$. Из него и из (2.2.17) вытекает оценка (2.2.9) с $\rho = 1/2$, $s = 1$.

Рассмотрим отображение (2.1.15) с $\rho = 1/2$. При этом отображении образ области $P \cap (z : \operatorname{Im} z > 0)$ для достаточно больших $|\operatorname{Im} w|$ совпадает с расширяющейся криволинейной полусой (обозначим ее через V), которая ограничена: справа — вертикальной прямой

$$\operatorname{Re} w = 1 + \ln |c_\mu| =: b,$$

а слева — кривой

$$w = i(\sqrt{r} + (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln r) + (\operatorname{Re} \tau_\mu) \ln r + c, \quad r > r_0.$$

Из (2.2.17) следует, что образ $e(w)$ функции $2zE_\rho(z; \mu)$ при рассматриваемом отображении имеет вид (2.2.10). Фиксируем $a < 0$ так, чтобы

$$|e^w| = \exp(\operatorname{Re} w) \leq |c_\mu|/2 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} w < a.$$

Введем полуполосу

$$V_+ = w : a < \operatorname{Re} w < b, \operatorname{Im} w > r_0$$

и пусть $V_- = V \setminus V_+$. В силу выбора a и из (2.2.10) следует, что

$$|e(w)| \geq |c_\mu|/2 + o(1) \geq m > 0, \quad w \in V_-, \quad \operatorname{Im} w > r_0.$$

Если же $w \in V_+$, то используя периодичность функции e^w , заключаем, что оценка снизу $|e(w)| \geq m > 0$ верна и для точек $w \in V_+$, лежащих вне кружков $K_n(\delta)$ радиуса δ с центрами в нулях функции $e(w)$. Итак,

$$|e(w)| \geq c(\delta) > 0, \quad w \in V, \quad w \notin \cup K_n(\delta), \quad r > r_0.$$

Оценка сверху $|e(w)| \leq M < \infty$ для $w \in V$ сразу следует из (2.2.10) и из определения множества V . Значит,

$$|e(w)| \asymp 1, \quad w \in V, \quad w \notin \cup K_n(\delta), \quad r > r_0.$$

Беря δ достаточно малым и возвращаясь на плоскость z , заключаем, что найдется последовательность $r_k \rightarrow \infty$, такая, что выполняется оценка (2.2.12) с $\rho = 1/2$, $s = 1$.

Оценки (2.2.9) и (2.2.12) (с $\rho = 1/2$, $s = 1$) установлены нами для $0 \leq \arg z \leq \pi$. Аналогично они доказываются и для $-\pi \leq \arg z \leq 0$. Значит, эти оценки с $s = 1$ верны для случая $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$ без ограничений на $\arg z$. В итоге для случая $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$ мы приходим к оценкам (2.2.13) и (2.2.14), причем в (2.2.14) множество P_- теперь отсутствует. После чего повторяются рассуждения, следующие за (2.2.14), с формальной заменой ρ на $1/2$ и s на 1. В результате получаем оценку типа (2.2.16):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |E_{1/2}(re^{i\theta}; \mu)| d\theta = \frac{2}{\pi} \sqrt{r} + (\operatorname{Re} \tau_\mu - 1) \ln r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (2.2.18)$$

Случаи $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu < 3$ и $\rho < 1/2$. На этот раз применяем формулу (2.1.67) и нижеследующую лемму 2.2.1, в которой собраны необходимые факты о поведении квазиполинома

$$R(w) = \sum_{j=1}^m h_j e^{\gamma_j w}, \quad h_j \neq 0, \quad (2.2.19)$$

где γ_j — вершины некоторого выпуклого многоугольника G , занумерованные в порядке его положительного обхода. Положим $\gamma_{m+1} = \gamma_1$. Обозначим через $k(\varphi)$ опорную функцию многоугольника G , т. е.

$$k(\varphi) = \sup(\operatorname{Re}(we^{-i\varphi}) : w \in G).$$

Лемма 2.2.1 ([17]).

- 1) Последовательность Λ нулей квазиполинома (2.2.19) имеет вид $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$, где последовательность Λ_j асимптотически распределена вдоль луча $\arg w = \pi/2 - \arg(\gamma_{j+1} - \gamma_j)$ по закону арифметической прогрессии, $j = 1, \dots, m$.
- 2) Вне кружков одинакового радиуса с центрами в нулях функции $R(w)$ верна оценка

$$|R(w)| \asymp \exp(k(-\arg w)|w|).$$

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $|\arg z| \leq \pi$. Тогда в сумме (2.1.67) обязательно присутствует индекс $n = 0$. Полагая $w = z^\rho$, $|\arg w| \leq \pi\rho$, запишем эту сумму в виде

$$Q(w) = \sum_{|\arg w + 2\pi n\rho| \leq 3\pi/4} h_n \exp(we^{2\pi i n \rho}), \quad h_n = e^{2\pi i n \rho(1-\mu)}. \quad (2.2.20)$$

В соответствии с суммированием в (2.2.20) сектор $|\arg w| \leq \pi\rho$ разбивается на конечное число секторов S_j без общих внутренних точек так, что каждому сектору S_j в (2.2.20) отвечает свое множество индексов I_j . При любом j точки $\exp(2\pi i n \rho)$, $n \in I_j$, являются вершинами некоторого выпуклого многоугольника G_j , (который может вырождаться в отрезок), одной из вершин которого служит точка 1. Пусть Q_j — соответствующий ему квазиполином, т. е. часть суммы в (2.2.20), отвечающая индексам $n \in I_j$. Пусть $k_j(\varphi)$ — опорная функция многоугольника G_j . Тогда по лемме 2.2.1

$$|Q_j(w)| \asymp \exp(k_j(-\arg w)|w|), \quad w \in S_j, \quad w \notin D_j(\delta), \quad (2.2.21)$$

где D_j есть объединение кружков радиуса δ с центрами в нулях функции $Q_j(w)$. Но $Q_j(w) = Q(w)$ в секторе S_j . Далее, точка 1 является одной из вершин многоугольника G_j , поэтому его опорная

функция $k_j(\varphi)$ в секторе $|\arg w| \leq \pi\rho$ совпадает с опорной функцией точки 1, т. е. $k_j(\varphi) = \cos \varphi$, $|\varphi| \leq \pi\rho$, при всех j . Так как набор чисел j конечен, то из (2.2.21) следует, что вне $\cup D_j(\delta)$

$$|Q(w)| \asymp \exp(|w| \cos \varphi), \quad |\varphi| = |\arg w| \leq \pi\rho. \quad (2.2.22)$$

По лемме 2.2.1 в сектор $|\arg w| \leq \pi\rho$ могут попасть части только тех кружков из $\cup D_j$, центры которых асимптотически распределены вдоль конечного числа лучей по закону арифметической прогрессии. Отсюда следует, что взяв δ достаточно малым, мы можем быть уверены в оценке (2.2.22) на частях подходящих окружностей $|w| = R_k \rightarrow \infty$, попавших в сектор $|\arg w| \leq \pi\rho$. Значит, если $|\theta| = |\arg z| \leq \pi$, то

$$|Q(z^\rho)| \asymp \exp(|z|^\rho \cos \rho\theta), \quad |z| = r_k = R_k^{1/\rho} \rightarrow \infty. \quad (2.2.23)$$

Запишем формулу (2.1.67) в виде

$$z^{\rho(\mu-1)} E_\rho(z; \mu) = \rho Q(z^\rho) + O\left(\frac{1}{r^{1+\rho(1-\operatorname{Re} \mu)}}\right). \quad (2.2.24)$$

Если $\rho < 1/2$, то $\cos \rho\theta \geq \cos \pi\rho > 0$ и из (2.2.23) следует, что в правой части (2.2.24) доминирует первое слагаемое. Если $\rho = 1/2$, то $\cos \rho\theta \geq 0$ и $|Q(z^\rho)| \geq m > 0$. Но $\operatorname{Re} \mu < 3$ и потому последнее слагаемое в (2.2.24) есть $o(1)$ при $r \rightarrow \infty$; значит, и в случае $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu < 3$ первое слагаемое в правой части (2.2.24) является доминирующим. В итоге имеем соотношение

$$|E_\rho(z; \mu)| \asymp r^{\rho(1-\operatorname{Re} \mu)} \exp(r^\rho \cos \rho\theta), \quad |z| = r = r_k \rightarrow \infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |E_\rho(re^{i\theta}; \mu)| d\theta = \frac{r^\rho}{\pi\rho} \sin \pi\rho + \rho(1 - \operatorname{Re} \mu) \ln r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (2.2.25)$$

2.2.2. Оценка усредненной плотности положительной последовательности.

Лемма 2.2.2. Пусть положительная последовательность $(z_n)_{n=m}^{+\infty}$ имеет вид

$$z_n = (an + b \ln n + d + o(1))^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (2.2.26)$$

где $a, \rho > 0$, $b, d \in \mathbb{R}$, и пусть $n(t)$ обозначает число точек этой последовательности в интервале $(0, t)$. Тогда при $r \rightarrow +\infty$ справедливо соотношение

$$N(r) := \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{r^\rho}{a\rho} - \frac{b\rho}{2a} \ln^2 r + \left(\frac{1}{2} - m - \frac{d}{a} + \frac{b}{a} \ln a\right) \ln r + o(\ln r).$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Введем последовательности x_n^+ и x_n^- формулами

$$x_n^\pm = an + b \ln n + d \pm \varepsilon, \quad n = k, k+1, \dots,$$

где $k \in \mathbb{N}$ выбрано столь большим, чтобы входящая в (2.2.26) величина $o(1)$ удовлетворяла неравенству $|o(1)| < \varepsilon$, $n \geq k$, и чтобы последовательность x_n^- была положительной и возрастающей. Пусть $n_\pm(t)$ — число точек $x_n^\pm$ в интервале $(0, t)$. Так как число точек z_n в интервале $(0, t)$ равно числу точек z_n^ρ в интервале $(0, t^\rho)$, то

$$k - m + n_+(t^\rho) \leq n(t) \leq k - m + n_-(t^\rho), \quad t > x_k^+,$$

и значит, при всех достаточно больших r справедливо неравенство

$$M_1 + (k - m) \ln r + \int_{x_k^+}^r \frac{n_+(t^\rho)}{t} dt \leq N(r) \leq M_2 + (k - m) \ln r + \int_{x_k^-}^r \frac{n_-(t^\rho)}{t} dt. \quad (2.2.27)$$

Далее, так как

$$n_\pm(t) = n - k + 1, \quad t \in (x_n^\pm, x_{n+1}^\pm),$$

то при

$$N = \max(n : (x_n^-)^{1/\rho} \leq r)$$

имеем соотношение

$$\begin{aligned}
 \rho \int_{x_k^\pm}^r \frac{n_\pm(t^\rho)}{t} dt &= \rho \sum_{n=k}^N (n-k+1) \int_{(x_n^\pm)^{1/\rho}}^{(x_{n+1}^\pm)^{1/\rho}} \frac{dt}{t} + O(1) = \\
 &= \sum_{n=k}^N (n-k+1) \ln \frac{x_{n+1}^\pm}{x_n^\pm} + O(1) = \\
 &= \sum_{n=k}^N (n-k+1) \ln \left(1 + \frac{a + b \ln(1 + 1/n)}{an + b \ln n + d \pm \varepsilon} \right) + O(1) = \\
 &= \sum_{n=k}^N (n-k+1) \left(\frac{a + b \ln(1 + 1/n)}{an + b \ln n + d \pm \varepsilon} - \frac{1}{2} \left(\frac{a + b \ln(1 + 1/n)}{an + b \ln n + d \pm \varepsilon} \right)^2 \right) + O(1).
 \end{aligned}$$

В правой части заменим $\ln(1 + 1/n)$ на $1/n$ и 0 соответственно в первой и второй дроби. Формула Тейлора показывает, что при этом мы изменим правую часть на ограниченную по N величину. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \rho \int_{x_k^\pm}^r \frac{n_\pm(t^\rho)}{t} dt &= \sum_{n=k}^N \left(\frac{an - a(k-1) + b}{an + b \ln n + d \pm \varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{a^2 n}{(an + b \ln n + d \pm \varepsilon)^2} \right) + O(1) = \\
 &= \sum_{n=k}^N \left(1 - \frac{b \ln n}{an + b \ln n + d \pm \varepsilon} + \frac{b - a(k-1) - d \mp \varepsilon}{an + b \ln n + d \pm \varepsilon} \right) - \frac{1}{2} \ln N + O(1) = \\
 &= N - \frac{b}{2a} \ln^2 N + \left(\frac{b - a(k-1) - d \mp \varepsilon}{a} - \frac{1}{2} \right) \ln N + O(1). \quad (2.2.28)
 \end{aligned}$$

Теперь выразим N через r , пользуясь определением N и явным видом последовательности x_n^- : N есть наибольший из индексов n , для которых $an + b \ln n + d - \varepsilon \leq r^\rho$. Очевидно,

$$N = \frac{r^\rho}{a} - \frac{b\rho}{a} \ln r + O(1),$$

и значит,

$$\begin{aligned}
 \ln N &= \rho \ln r - \ln a + o(1), \\
 \ln^2 N &= \rho^2 \ln^2 r - 2\rho \ln a \ln r + o(\ln r).
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения для N , $\ln N$, $\ln^2 N$ сначала в (2.2.28), а затем полученное — в (2.2.27), видим, что интеграл $N(r)$ заключен между величинами

$$\frac{r^\rho}{a\rho} - \frac{b\rho}{2a} \ln^2 r + \left(\frac{1}{2} - m + \frac{\pm\varepsilon - d}{a} + \frac{b}{a} \ln a \right) \ln r + o(\ln r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Так как ε можно взять произвольно малым, то отсюда следует требуемая асимптотика. Лемма 2.2.2 доказана. $\square$

Пусть мы находимся в условиях теоремы 2.2.1. По теореме 2.1.1 последовательность Z нулей z_n функции $F(z)$, определенной в начале доказательства, представима в виде

$$Z = Z_+ \cup Z_-, \quad Z_+ \cap Z_- = \emptyset, \quad Z_+ = (z_n)_{n=m}^{+\infty}, \quad Z_- = (z_n)_{n=-1}^{-\infty},$$

где m — некоторое целое число. При этом если $|n|$ достаточно велик, то $\operatorname{Im} z_n \geq 0$ соответственно для $z_n \in Z_\pm$. Обе последовательности

$$|Z_+| = (|z_n|)_{n=m}^{+\infty}, \quad |Z_-| = (|z_n|)_{n=-1}^{-\infty}$$

положительны.

В силу (2.1.7)

$$\operatorname{Im} z_n^\rho = 2\pi n - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln 2\pi |n| - \frac{\pi}{2\rho} (\operatorname{Re} \tau_\mu) \operatorname{sign} n + \arg c_\mu + o(1),$$

$$\operatorname{Re} z_n = a_1 \ln 2\pi |n| + a_2 \operatorname{sign} n + a_3 + o(1),$$

где a_j — некоторые постоянные. Поэтому

$$|z_n^\rho| = |\operatorname{Im} z_n^\rho| + o(1),$$

и значит,

$$|z_n|^\rho = \left| 2\pi n - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln |n| + \arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} (\operatorname{Re} \tau_\mu) \operatorname{sign} n - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln 2\pi + o(1) \right|.$$

Таким образом, если $z_n \in Z_+$, то

$$|z_n| = \left(2\pi n - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln n + \arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} \operatorname{Re} \tau_\mu - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln 2\pi + o(1) \right)^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

и если $z_n \in Z_-$, то

$$|z_{-n}| = \left(2\pi n + \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln n - \arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} \operatorname{Re} \tau_\mu + \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln 2\pi + o(1) \right)^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, для последовательностей $|Z_+|$ и $|Z_-|$ выполнены условия леммы 2.2.2, где в обоих случаях $a = 2\pi$ и

$$b = -\frac{1}{\rho} \operatorname{Im} \tau_\mu, \quad d = \arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} \operatorname{Re} \tau_\mu - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln 2\pi,$$

$$b = \frac{1}{\rho} \operatorname{Im} \tau_\mu, \quad d = -\arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} \operatorname{Re} \tau_\mu + \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \ln 2\pi$$

соответственно в случаях последовательностей $|Z_+|$ и $|Z_-|$. При этом во втором случае следует считать $m = 1$. Значит, если обозначить через $n_\pm(t)$ число точек последовательности $|Z_\pm|$ в интервале $(0, t)$, то по лемме 2.2.2

$$\int_0^r \frac{n_+(t) + n_-(t)}{t} dt = \frac{r^\rho}{\pi\rho} + \left(\frac{\operatorname{Re} \tau_\mu}{2\rho} - m \right) \ln r + o(\ln r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.2.29)$$

Но $n_+(t) + n_-(t)$ есть число нулей функции $F(z)$ в круге $|z| < t$. Поэтому в формуле Иенсена (2.2.2) $n(t) = n_+(t) + n_-(t)$. Сопоставляя с этой формулой оценки (2.2.29) и (2.2.16), видим, что если $\rho > 1/2$, то $m = s$. Остается вспомнить, что

$$s = 1 \quad \text{при } \mu \neq 1/\rho - l; \quad s = 2 \quad \text{при } \mu = 1/\rho - l, \quad l \in \mathbb{Z}_+.$$

Значит, $m = 1$ и $m = 2$ соответственно, и случай $\rho > 1/2$ разобран.

Если $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$, то вместо формулы (3.9.5) применяется формула (2.2.18). Но (2.2.18) совпадает с (2.2.16) при $\rho = 1/2$, $s = 1$, и случай $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$ также разобран. Теорема 2.2.1 доказана.

Докажем теорему 2.2.2. По теоремам 2.1.2 и 2.1.4 последовательность Z нулей z_n функции $F(z)$ имеет вид $Z = (z_n)_{n=m}^{+\infty}$, где m — некоторое целое число, и

$$|z_n| = \left(\frac{\pi}{\sin \pi\rho} \left(n - \frac{1}{2} + \rho(\operatorname{Re} \mu - 1) + o(1) \right) \right)^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (2.2.30)$$

Пусть $n(t)$ есть число точек z_n в круге $|z| < t$ или (что то же) число точек $|z_n|$ в интервале $(0, t)$. Формула (2.2.30) показывает, что для последовательности $|Z|$ выполнены условия леммы 2.2.2 с

$$a = \frac{\pi}{\sin \pi\rho}, \quad b = 0, \quad d = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \left(\rho(\operatorname{Re} \mu - 1) - \frac{1}{2} \right).$$

По лемме 2.2.2

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{\sin \pi\rho}{\pi\rho} r^\rho - (m - 1 + \rho(\operatorname{Re} \mu - 1)) \ln r + o(\ln r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.2.31)$$

С другой стороны, в силу формулы Иенсена (2.2.2) и оценки (2.2.25) имеем соотношение

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{\sin \pi \rho}{\pi \rho} r^\rho - \rho(\operatorname{Re} \mu - 1) \ln r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow \infty.$$

Сравнивая это с (2.2.31), видим, что $m = 1$. Теорема 2.2.2 доказана. $\square$

Материал этого пункта взят из статьи [19].

ГЛАВА 3

ЗАДАЧА О ВЕЩЕСТВЕННОСТИ ВСЕХ КОРНЕЙ ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ПОРЯДКА, МЕНЬШЕГО 1/2

3.1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ГЛАВЫ

В этой главе обсуждается следующий интересный с теоретической точки зрения и важный в некоторых приложениях вопрос: «Все ли корни функции Миттаг-Леффлера порядка, меньшего 1/2, вещественны?» Из результатов главы 2 видно, что в случае $\rho \in (0, 1/2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, все корни $E_\rho(z; \mu)$ за исключением, может быть, конечного числа, вещественны, отрицательны и просты. Так есть ли исключительное множество из не вещественных корней или оно отсутствует?

История этого вопроса имеет более чем столетнюю давность. Она началась с работы Вимана [45], в которой утверждалось, что все корни «классической» функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(z; 1)$ порядка $\rho < 1/2$ вещественны, отрицательны, просты и, будучи расположены в последовательность $\{z_n = z_n(\rho, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяют неравенствам

$$-\left(\frac{\pi n}{\sin(\pi \rho)}\right)^{1/\rho} < z_n < -\left(\frac{\pi(n-1)}{\sin(\pi \rho)}\right)^{1/\rho} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.1.1)$$

Однако, доказательство этого утверждения в [45] отсутствовало. Виман лишь ограничился рассуждениями, похожими на правдоподобные и вселяющими уверенность в справедливость его результата.

Вероятно, отсутствие доказательства в [45] побудило Пойа через полтора десятка лет опубликовать статью [42], в которой уже строго доказывалась отрицательность и простота всех корней $E_\rho(z; 1)$, но только в случае $\rho = 1/N$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Последнее обстоятельство свидетельствует о сложности проблемы. Если уж столь авторитетный аналитик не смог справиться с задачей в полном объеме, то, вероятно, ее решение требует совершенно нетривиального подхода. Вопрос локализации корней Пойа не рассматривал.

В [38] сформулирована теорема о перемежаемости корней функций

$$E_{1/N}(z; p) \text{ и } E_{1/N}(z; q), \quad 1 \leq p < q \leq N, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (3.1.2)$$

Однако, как это ни странно, Микусинский обошел молчанием вопрос о том, все ли корни $E_{1/N}(z; p)$ вещественны. Таким образом, неясно, распространил ли он теорему Пойа на функции (3.1.2), или пытался доказать (по нашему мнению, его доказательство содержит пробелы) перемежаемость только вещественных корней.

Затем в течении долгого времени вопрос о вещественности всех нулей функций Миттаг-Леффлера порядка, меньшего 1/2, насколько нам известно, не обсуждался в математической печати. Но относительно недавно к нему вернулись Островский и Переселкова. В их совместной работе [40] доказана отрицательность и простота всех корней функций $E_\rho(z; 1)$, $E_\rho(z; 2)$ ($\forall \rho \in (0, 1/2]$). Может возникнуть впечатление, что загадка Вимана разгадана в [40], но оно обманчиво: задача локализации корней и неравенства (3.1.1) в [40] даже не упоминались.

К достоинствам статьи [40], несомненно, относится постановка следующей задачи (здесь и в ряде других случаев мы цитируем чужие работы не дословно, а приводим утверждения в эквивалентной, но более удобной форме).

Задача 1. Для любого $\rho \in (0, 1/2]$ требуется найти множество $\mathcal{W}_\rho$ всех положительных значений параметра μ таких, что функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет в $\mathbb{C}$ только отрицательные и простые корни.

Авторы статьи [40] почему-то ограничились положительными значениями μ . Но как скоро увидит читатель, если определить множество $\mathcal{W}_\rho^-$, заменив в определении $\mathcal{W}_\rho$ слово «положительных» на «отрицательных», то при любом $\rho < 1/2$ это множество оказывается непустым! Разумеется, можно ставить и иные задачи.

Задача 2. Для любого $\rho \in (0, 1/2]$ найти множество $\widetilde{\mathcal{W}}_\rho$ всех значений параметра $\mu \in \mathbb{R}$ таких, что все корни $E_\rho(z; \mu)$ лежат на $\mathbb{R}$.

Задача 3. Для любых $\rho \in (0, 1/2]$ и $t \in \mathbb{N}$ найти множество $\widetilde{\mathcal{W}}_\rho(t)$ всех $\mu \in \mathbb{R}$ таких, что количество невещественных корней функции $E_\rho(z; \mu)$ не превосходит $2t$.

Исследуя задачу 1, Островский и Пересёлкова доказали, что в случае $\rho = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, интервал $(0, 1 + 1/\rho)$ лежит в $\mathcal{W}_\rho$. И сразу же выдвинули весьма поспешную гипотезу, что $\mathcal{W}_\rho = (0, 1 + 1/\rho)$ при любом $\rho \in (0, 1/2]$. Это действительно верно при $\rho = 1/2$ (доказано в [40]), но при $\rho < 1/2$ ошибочно: $\mathcal{W}_\rho$ шире интервала $(0, 1 + 1/\rho)$. Сформулируем основной результат этой главы.

Теорема 3.1.1. При любых $\rho \in (0, 1/2)$, $\mu \in (0, 2/\rho - 1]$ все корни в $\mathbb{C}$ функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат на $(-\infty, 0)$, просты, и, будучи расположены в последовательность $\{z_n(\rho, \mu)\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяют неравенствам

$$-\xi_1^{1/\rho}(\rho, \mu) < z_1(\rho, \mu) < -\frac{\Gamma(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)}, \quad (3.1.3)$$

$$-\xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu) < z_n(\rho, \mu) < -\xi_{n-1}^{1/\rho}(\rho, \mu), \quad n \geq 2, \quad \text{где} \\ \xi_n(\rho, \mu) = \frac{\pi(n + \rho(\mu - 1))}{\sin(\pi\rho)}. \quad (3.1.4)$$

При $0 < \rho \leq 1/4$ отрицательность и простота всех корней $E_\rho(z, \mu)$ и неравенства (3.1.3) имеют место при $0 < \mu \leq 2/\rho$.

Таким образом, доказаны не только более сильные включения

$$(0, 2/\rho - 1] \subset \mathcal{W}_\rho \quad \forall \rho \in (1/4, 1/2), \quad (0, 2/\rho] \subset \mathcal{W}_\rho \quad \forall \rho \in (0, 1/4],$$

нежели предполагаемые в [40] (очевидно, что $1 + \frac{1}{\rho} < \frac{2}{\rho} - 1 \Leftrightarrow 0 < \rho < 1/2$), но и получены двусторонние оценки корней, переходящие в (3.1.1) при $\mu = 1$. Добавлена также нетривиальная оценка сверху первого корня, которой у Вимана не было даже в рассмотренном им случае $\mu = 1$.

В случае $\rho \in (0, 1/6]$ для нескольких первых нулей выводятся более точные оценки. Положим

$$R_n(\rho, \mu) = \frac{\Gamma(\mu + n/\rho)}{\Gamma(\mu + (n-1)/\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.1.5)$$

Теорема 3.1.2. Пусть $0 < \rho \leq 1/6$, $0 < \mu \leq 2/\rho$. Тогда при $1 \leq n \leq [1/(3\rho)] - 1$ имеем неравенство

$$-\sqrt{2}R_n(\rho, \mu) < z_n(\rho, \mu) < -R_n(\rho, \mu). \quad (3.1.6)$$

Доказанная ниже лемма 3.1.1 демонстрирует, что неравенства теоремы 3.1.2 при рассматриваемых в ней значениях n действительно сильнее, чем (3.1.3).

Лемма 3.1.1. При $0 < \rho \leq 1/6$, $0 < \mu \leq 2/\rho$, $1 \leq n \leq [1/(3\rho)] - 1$ выполняются неравенства

$$\xi_{n-1}^{1/\rho}(\rho, \mu) < R_n(\rho, \mu) < \sqrt{2}R_n(\rho, \mu) < \xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu). \quad (3.1.7)$$

Если $0 < \mu \leq 1/\rho$, то $2R_n(\rho, \mu) < \xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu)$.

Разумеется, неравенства (3.1.3) и (3.1.6) могут быть усилены. По нашему мнению, работа в этом направлении полезна в тех случаях, когда таким результатам находят приложения в других разделах математики. Именно поэтому (см. предисловие) наш интерес вызвали функции Миттаг-Леффлера со значениями параметров $\rho = 1/N$, $N \in \mathbb{N}$, $\mu = 1 + 1/\rho = N + 1$. В этом случае в [13] выведены более точные, чем (3.1.3), (3.1.6) двусторонние оценки корней.

Обозначим $z_n(N) = z_n(1/N, N+1)$ корни $E_{1/N}(z; N+1)$, $n \in \mathbb{N}$, и введем обозначения

$$R_n(N) = \frac{((n+1)N)!}{(nN)!}, \quad q_n(N) = \frac{3R_n(N)}{2R_{n+1}(N)} \min(1, Nn^{-2}). \quad (3.1.8)$$

Из теоремы 3.1.1 мы уже знаем, что $z_n(N) \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.1.3. *При любом $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, верны соотношения*

$$z_n(N) = - \left[\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \alpha_n(N) \right) / \sin \left(\frac{\pi}{N} \right) \right]^N, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq [N/3], \quad (3.1.9)$$

где $\alpha_n(N) \in \mathbb{R}$, $|\alpha_n(N)| \leq x_n(N)$,

$$x_n(N) = \begin{cases} \exp(-\pi n \operatorname{ctg}(\pi/N)), & 3 \leq N \leq 6, \\ \exp(-2\pi n \sin(2\pi/N)), & 7 \leq N \leq 1400, \\ 1.01 \exp(-2\pi n \sin(2\pi/N)), & N > 1400. \end{cases} \quad (3.1.10)$$

При $N \geq 6$, $1 \leq n \leq [N/3] - 1$, верны неравенства

$$-R_n(N)(1 + q_n(N)) < z_n(N) < -R_n(N). \quad (3.1.11)$$

Неравенства (3.1.11) весьма точны: из (3.1.8) следует, что

$$\max\{q_n(N) | 1 \leq n \leq [N/3] - 1, N \geq 6\} = q_1(6) < 1/15, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \max\{q_n(N) | 1 \leq n \leq [N/3] - 1\} = 0.$$

Что же касается двусторонних оценок корней $z_n(N)$, $n \geq [N/3]$, даваемых соотношениями (3.1.9), (3.1.10), то отношение нижней оценки к верхней равно

$$\Delta_n(N) = \left(\frac{1 + \frac{x_n(N)}{\pi(n+1/2)}}{1 - \frac{x_n(N)}{\pi(n+1/2)}} \right)^N \leq \left(\Delta_{[N/3]} \right)^N \leq 1.01 \quad \forall N \geq 3.$$

Было бы интересно получить при всех значениях параметров $0 < \rho < 1/2$, $0 < \mu < 2/\rho - 1$ двусторонние оценки корней функции $E_\rho(z; \mu)$, у которых максимум отношения нижней оценки к верхней, взятый по всем корням фиксированной функции, стремился бы к 1 как при $\rho \rightarrow 0+$, так и при $\rho \rightarrow 1/2 - 0$.

Заметим, наконец, что оценка

$$\alpha_n(N) = \begin{cases} O\left(\exp(-\pi n \operatorname{ctg}(\pi/N))\right), & 3 \leq N \leq 6, \\ O\left(\exp(-2\pi n \sin(2\pi/N))\right), & 7 \leq N. \end{cases}$$

при $n \geq n_0(N)$ следует из теоремы 2.1.4. Нетривиально то, что в данном случае удалось получить значения постоянной в O , равные 1 или 1.01, а также взять $n_0(N) = [N/3]$.

Завершим обсуждение проблемы вещественности всех корней функции Миттаг-Леффлера порядка $< 1/2$. Согласно теореме 3.1.1 при любом $\mu \in [0, 2/\rho - 1]$ все корни $E_\rho(z; \mu)$, $0 < \rho < 1/2$, вещественны (если $\mu = 0$, то один корень $E_\rho(z; 0)$ — точка $z = 0$, а все остальные отрицательны и просты; это видно из тождества $E_\rho(z; 0) = zE_\rho(z; 1/\rho)$). А при больших значениях μ ? Вопрос до конца не выяснен. Удовлетворительные результаты получаются при ρ , близких к $1/2$, а при «малых» ρ они далеки от окончательных.

Теорема 3.1.4. *При $0 < \rho < 1/2$, $\mu \geq 0.9 + (\rho^2 \ln 2)^{-1} - 1/\rho$ функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет нули в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Теорема 3.1.5. *При любых $\rho \in (1/3, 1/2)$, $\mu \in (1 - 1/\rho, -1)$, а также при $\rho \in (0, 1/3]$, $\mu \in (-2, -1)$ все корни функции $E_\rho(z; \mu)$ отрицательны и просты.*

3.2. ИДЕЙНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ 3.1.1–3.1.3

Доказательства теорем 3.1.1–3.1.3 являются достаточно длинными и содержат очень много выкладок. Поэтому эти доказательства без объяснения их идейного содержания и указания основных препятствий, которые необходимо преодолевать, могут стать труднодоступными даже для специалиста в теории функций.

Основой доказательства теоремы 3.1.1 является следующее простое соображение. Берется последовательность точек $w_n = -\xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu)$ (см. выше (3.1.4)) и доказывается, что в этих точках функция Миттаг-Леффлера меняет знак:

$$\operatorname{sgn} E_\rho(w_n; \mu) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2.1)$$

А так как в случае $\mu \in \mathbb{R}$ функция $E_\rho(z; \mu)$ действительнoзначна на $\mathbb{R}$ и

$$E_\rho(0; \mu) = 1/\Gamma(\mu) > 0 \quad \forall \mu > 0,$$

то заключаем, что каково бы ни было натуральное число n , на интервале $(w_n, 0) \subset \mathbb{R}$ исследуемая функция имеет не менее n различных корней. С другой стороны, по теоремам 2.1.4 и 2.2.2 при всех достаточно больших n в круге $|z| \leq \xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu)$ у функции $E_\rho(z; \mu)$ всех корней с учетом кратности имеется ровно n . Сказанное означает, что других корней, кроме вещественных, простых и лежащих на интервалах (w_n, w_{n-1}) , $n \geq 2$, $(w_1, 0)$ (на каждом интервале ровно по одному корню) не имеется. Наконец, следствие из леммы 3.3.1 в разделе 3.3 показывает отсутствие корней $E_\rho(z; \mu)$, $\mu > 0$, на луче $[-\Gamma(\mu + 1/\rho)/\Gamma(\mu), +\infty)$. Таким образом, после того, как доказаны равенства (3.2.1) и не очень сложная лемма 3.3.1, теорема 3.1.1 полностью доказана.

Примерно похожим образом рассуждал и Виман в [45]. Но неясно, располагал ли он теоремой о количестве корней функции Миттаг-Леффлера в достаточно большом круге (хотя бы в рассмотренном случае $\mu = 1$). А главное — неясно, каким образом он собирался доказывать равенства (3.2.1). А ведь в их доказательстве запрятана основная трудность. При достаточно больших n эти равенства сразу же следуют из асимптотических формул (1.5.24) и (1.5.39) (см. также замечание после теоремы 1.5.3. При $x \rightarrow +\infty$ имеем соотношение

$$\begin{aligned} E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu) &= 2\rho x^{1-\mu} \exp(x \cos \pi\rho) \cos(x \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) + \\ &\quad + O\left(x^{1-\mu} \exp(x \cos(3\pi\rho))\right), \quad 0 < \rho < 1/6, \\ E_{1/6}(-x^{-6}; \mu) &= \frac{1}{3} x^{1-\mu} \exp\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\rho(\mu - 1)\right) + O(x^{1-\mu} + x^{-6}), \\ E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu) &= 2\rho x^{1-\mu} \exp(x \cos \pi\rho) \cos(x \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) + O(x^{-1/\rho}), \quad 1/6 < \rho < 1/2. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Точки ξ_n специально выбраны в (3.1.4) так, что

$$\cos(\xi_n \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2.3)$$

Из (3.2.2), (3.2.3) находим, что

$$E_\rho(w_n; \mu) = 2\rho \xi_n^{1-\mu} \exp(\xi_n \cos \pi\rho) [(-1)^n + o(1)], \quad n \rightarrow \infty.$$

Это соотношение немедленно влечет за собой (3.2.1) при всех достаточно больших n .

Но, как видно из предыдущих рассуждений, равенства (3.2.1) необходимо доказать именно при всех $n \in \mathbb{N}$, и труднее всего это оказывается сделать при $n = 1$. Для этого необходимо получить явную оценку остаточных членов в (3.2.2) без символа O при всех x и, что особенно важно, в определенном смысле равномерную по параметрам ρ, μ во всей области их изменения. Соответствующие результаты имеются в главе 1 и здесь будут использованы.

Отметим еще одно существенное обстоятельство. Из (3.2.2) видно, что остаточный член в асимптотике функций Миттаг-Леффлера на отрицательной части $\mathbb{R}$ ведет себя по-разному при $0 < \rho < 1/6$ и $1/6 < \rho < 1/2$. Поэтому в доказательстве теоремы 3.1.1 эти случаи логично разобрать отдельно. «Пограничное» значение $\rho = 1/6$ можно отнести к любому из них; в рассматриваемой задаче это не существенно. Но по мере приближения ρ к $1/2$ возникает неожиданная трудность. Ввиду того, что $\cos(\pi\rho) \approx 0$, главный член асимптотики (3.2.2) $2\rho x^{1-\mu} \exp(\cos(\pi\rho)) \cos(x \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1))$ в точках $\xi_n = \xi_n(\rho, \mu)$ при небольших значениях n

близок к $(-1)^n \xi_n^{1-\mu}$ и сразу не видно, превалирует ли он над остатком. По этой причине порядки $\rho \in [0.4, 0.5]$ рассмотрены в особом параграфе.

Еще одно существенное препятствие возникает при ρ , близких к нулю. Оно даже заставляет немного изменить схему доказательства, изложенную в начале параграфа. Согласно теореме 1.5.4 главы 1, первая часть остаточного члена равна произведению $2\rho x^{1-\mu}$ и суммы многих слагаемых

$$\sum_{k=2}^{[1/\rho]} \exp(x \cos(\pi(2k-1)\rho)) \cos(x \sin(\pi(2k-1)\rho) - \pi(2k-1)(\mu-1)).$$

Казалось бы, это не страшно: мажоранты модулей этих слагаемых

$$\exp(x \cos(\pi(2k-1)\rho)) \quad (3.2.4)$$

при фиксированном $x > 0$ с увеличением номера k убывают примерно как геометрическая прогрессия. Действительно, отношение функций с номерами $k+1$ и k в (3.2.4) равно

$$\Delta_{k,\rho}(x) = \exp[-2x \sin(\pi\rho) \sin(2\pi k\rho)]. \quad (3.2.5)$$

Но если параметр ρ близок к нулю, то при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \Delta_{k,\rho}(x) = 1 \text{ равномерно по } 0 \leq x \leq o(\rho^{-2}),$$

и требуемая оценка не получается. Словом, равенства (3.2.1) в случае $0 < \rho \leq 1/6$, $0 < \mu \leq 2/\rho$, удастся доказать лишь для значений $n \geq N_1(\rho) = [1/(3\rho)]$. А что делать, когда n меньше $N_1(\rho)$? Выход был найден. Оказалось возможным доказать перемены знака $E_\rho(z; \mu)$ при всех $\rho \in (0, 1/6]$, $\mu \in (0, 2/\rho]$, в другой последовательности точек и совершенно иным способом. А именно, установлена справедливость соотношений (последовательность $R_n(\rho, \mu)$ определена в (3.1.5))

$$\operatorname{sgn} E_\rho(-R_n(\rho, \mu); \mu) = (-1)^{n-1}, \quad 1 \leq n \leq N_1(\rho), \quad (3.2.6)$$

$$\operatorname{sgn} E_\rho(-\sqrt{2}R_n(\rho, \mu); \mu) = (-1)^n, \quad 1 \leq n < N_1(\rho). \quad (3.2.7)$$

Эти соотношения вместе с неравенствами (3.1.7) доказывают, что на отрезке $[-\xi_{N_1(\rho)}^{1/\rho}(\rho, \mu), 0]$ функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет не менее $N_1(\rho)$ корней. Важно, что знаки функций в точках $-R_{N_1(\rho)}$ и $-\xi_{N_1(\rho)}^{1/\rho}$ различны и $\xi_{N_1(\rho)-1} < R_{N_1(\rho)} < \xi_{N_1(\rho)}$ согласно лемме 3.1.1. Поэтому для полноты доказательства теорем 3.1.1, 3.1.2 необходимо установить справедливость равенства (3.2.6) при $n = N_1(\rho)$, а равенство (3.2.7) при $n = N_1(\rho)$ уже можно не доказывать.

Воспользовавшись цитированным выше результатом о количестве корней $E_\rho(z; \mu)$ в круге $|z| \leq \xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu)$ и равенствами (3.2.1), доказанными при любом $n \geq N_1(\rho)$, получаем, что других корней, кроме вещественных, простых и лежащих в интервалах

$$\left(-\xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu), -\xi_{n-1}^{1/\rho}(\rho, \mu)\right), \quad n \geq N_1(\rho),$$

$$\left(-\sqrt{2}R_n(\rho, \mu), -R_n(\rho, \mu)\right) \subset \left(-\xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu), -\xi_{n-1}^{1/\rho}(\rho, \mu)\right), \quad 1 \leq n < N_1(\rho),$$

не имеется (здесь считается, что $\xi_0 = 0$). Этим доказательство теоремы 3.1.1 при $0 < \rho \leq 1/6$ завершено и заодно доказана теорема 3.1.2.

Осветим еще один вопрос. Существенно ли упростились бы доказательства равенств (3.2.1), (3.2.6), (3.2.7) в случае $\mu = 1$, которым ограничился Виман? При $1/6 < \rho < 1/2$ упрощения значительны. Мы почти не сомневаемся в том, что при этих значениях ρ Виман располагал полным доказательством теоремы о вещественности и простоте корней $E_\rho(z; 1)$, а также неравенств (3.1.1). Более сложным здесь является «объять» широкий промежуток значений параметра μ . При $0 < \rho \leq 1/6$ восполнение пробелов доказательства, допущенных Виманом, потребовало принципиально новых идей. Поэтому упрощения в случае $\mu = 1$ тоже есть, но они носят более «технический», чем принципиальный характер: просто в этом частном случае требуется меньше выкладок.

Доказательство теоремы 3.1.3 основано на тех же идеях. В силу специфики значений параметров удастся дать существенно более точные, чем в теоремах 3.1.1 и 3.1.2, двусторонние оценки всех корней.

3.3. ОТСУТСТВИЕ КОРНЕЙ ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ μ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ $z = 0$. АСИМПТОТИКА ПЕРВОГО КОРНЯ $E_\rho(z; \mu)$ ПО ПАРАМЕТРУ $\rho \rightarrow 0+$, РАВНОМЕРНАЯ ПО $\mu \in (0, 2/\rho]$

Лемма 3.3.1. Пусть $\{A_k\}_{k=0}^\infty$ — произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая следующему условию: величины

$$R_k = A_{k-1}/A_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{не убывают.}$$

Тогда функция $F(z) = \sum_{k=0}^\infty A_k z^k$ голоморфна в круге $|z| < R = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k$ (если $R = +\infty$, то F — целая) и положительна на интервале $(-R_1, R)$. Если последовательность $\{R_k\}_{k=1}^\infty$ не постоянна, то и $F(-R_1) > 0$.

Доказательство. Предел (конечный или бесконечный) последовательности R_k существует в силу ее монотонности. По признаку сходимости Д'Аламбера радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^\infty A_k z^k$ равен R . Положительность функции $F(x)$ на интервале $-R_1 < x < 0$ следует из убывания последовательности $A_k |x|^k$, поскольку

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n u_n > 0, \quad u_n \searrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Убывание $A_k |x|^k$ видно из неравенств

$$A_k |x|^k < A_{k-1} |x|^{k-1} \Leftrightarrow |x| < R_k, \quad R_1 \leq R_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Наконец, если $R > R_1$, то ряд $F(-R_1) = \sum_{k=2}^\infty (-1)^k A_k R_1^k$ сходится, модули его слагаемых убывают. Первое слагаемое положительно, а значит такова и его сумма. Лемма доказана. $\square$

Следствие 3.3.1. При любых $\mu > 0$, $\rho > 0$ функция $E_\rho(z; \mu)$ положительна на луче $[-\Gamma(\mu + \frac{1}{\rho})/\Gamma(\mu), +\infty)$.

Для вывода следствия из леммы 3.3.1 достаточно доказать возрастание последовательности отношений $\left\{ \Gamma\left(\mu + \frac{k-1}{\rho}\right) / \Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right) \right\}_{k=1}^\infty$ или, что то же самое, положительность второй разности

$$l_k(\rho, \mu) = \ln \Gamma\left(\mu + \frac{k-1}{\rho}\right) - 2 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right) + \ln \Gamma\left(\mu + \frac{k+1}{\rho}\right) \quad (3.3.1)$$

при любом $k \in \mathbb{N}$. Требуемое следует из возрастания $\psi(x) = (\ln \Gamma(x))'$ на луче $0 < x < \infty$.

Таким образом, если доказана вещественность всех корней $E_\rho(z; \mu)$, следствие из леммы 3.3.1 (в случае $\mu > 0$) дает нетривиальную оценку сверху первого корня. Верно ли, что у функции Миттаг-Леффлера с произвольными положительными параметрами (ρ, μ) нет корней в круге $|z| \leq R_1(\rho, \mu) = \Gamma\left(\mu + \frac{1}{\rho}\right) / \Gamma(\mu)$? По всей вероятности, это так; но доказать данное утверждение при всех значениях параметров $\rho > 0$, $\mu > 0$ мы не умеем. Приведем один из результатов (разумеется, допускающий усиление).

Всюду далее через ψ обозначается логарифмическая производная Γ -функции и используется следующее ее разложение в ряд:

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (3.3.2)$$

γ — постоянная Эйлера. Из (3.3.2) следует тождество

$$\psi'(z) = \sum_{k=0}^\infty (k+z)^{-2}. \quad (3.3.3)$$

Лемма 3.3.2. При любых $\rho \in (0, 1]$, $\mu \in (0, 2/\rho]$ и произвольных z , лежащих в круге $|z| \leq R_1(\rho, \mu)$, вещественная часть функции $E_\rho(z; \mu)$ положительна:

$$\operatorname{Re} E_\rho(z; \mu) \geq \frac{\Gamma^2(\mu + 1/\rho)}{2\Gamma^2(\mu)\Gamma(\mu + 2/\rho)}. \quad (3.3.4)$$

Доказательство. Поскольку максимум и минимум в замыкании области $\mathcal{D}$ функции, гармонической в $\mathcal{D}$, достигается на $\partial\mathcal{D}$, а вещественная часть аналитической функции является гармонической, неравенство (3.3.4) достаточно доказать для значений $z = e^{i\theta}R_1(\rho, \mu)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Имеем равенство

$$\operatorname{Re} E_\rho(R_1 e^{i\theta}; \mu)\Gamma(\mu) = 1 + \cos \theta + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma^k(\mu + 1/\rho)}{\Gamma^{k-1}(\mu)\Gamma(\mu + k/\rho)} \cos k\theta. \quad (3.3.5)$$

Воспользуемся представлением суммы ряда по косинусам [1, с. 100]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}) \sum_{m=0}^{k-1} D_m(\theta) \right]. \quad (3.3.6)$$

Здесь $D_m(\theta) = 1/2 + \sum_{\nu=0}^m \cos(\nu\theta)$, $m \in \mathbb{N}$ — ядро Дирихле, $D_0(\theta) \equiv 1/2$. Можно указывать различные ограничения на последовательность коэффициентов ряда $\{a_k\}$, достаточные для того, чтобы оба ряда в (3.3.6) сходились при тех или иных значениях θ и суммы бы совпадали. Для ряда (3.3.5) проблем не возникает; при условии $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k| < +\infty$, которое в нашем случае выполняется, оба ряда в (3.3.6) абсолютно сходятся ($\forall \theta \in \mathbb{R}$) и их суммы тождественно равны. Как известно, $\sum_{m=0}^{k-1} D_m(\theta) = \frac{1}{2} (\sin(k\theta/2) \operatorname{cosec}(\theta/2))^2 \geq 0$. Поэтому для выпуклой последовательности $\{a_k\}$ имеем соотношение

$$a_{k-1} - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta \geq \frac{a_0}{2} - a_1 + \frac{a_2}{2}. \quad (3.3.7)$$

В ряде (3.3.5)

$$\frac{a_0}{2} = a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{\Gamma^2(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + 2/\rho)}. \quad (3.3.8)$$

Поэтому неравенство леммы сразу же следует из (3.3.7), (3.3.8), если при любом $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\frac{\Gamma^k(\mu + 1/\rho)}{\Gamma^{k-1}(\mu)\Gamma(\mu + k/\rho)} - 2 \frac{\Gamma^{k+1}(\mu + 1/\rho)}{\Gamma^k(\mu)\Gamma(\mu + (k+1)/\rho)} + \frac{\Gamma^{k+2}(\mu + 1/\rho)}{\Gamma^{k+1}(\mu)\Gamma(\mu + (k+2)/\rho)} \geq 0. \quad (3.3.9)$$

В случае $k \geq 2$ верно даже более сильное неравенство

$$\frac{\Gamma^k(\mu + 1/\rho)}{\Gamma^{k-1}(\mu)\Gamma(\mu + k/\rho)} \geq 2 \frac{\Gamma^{k+1}(\mu + 1/\rho)}{\Gamma^k(\mu)\Gamma(\mu + (k+1)/\rho)}, \quad (3.3.10)$$

равносильное следующему:

$$\ln 2 \leq \left[\ln \Gamma\left(\mu + \frac{k+1}{\rho}\right) - \ln \Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right) \right] - \left[\ln \Gamma\left(\mu + \frac{1}{\rho}\right) - \ln \Gamma(\mu) \right]. \quad (3.3.11)$$

Докажем его. Производная правой части (3.3.11) по параметру μ равна

$$\left[\psi\left(\mu + \frac{k+1}{\rho}\right) - \psi\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right) \right] - \left[\psi\left(\mu + \frac{1}{\rho}\right) - \psi(\mu) \right] = \frac{1}{\rho} (\psi'(\xi_k) - \psi'(\xi_0)),$$

где $\xi_k \in \left(\mu + \frac{k}{\rho}, \mu + \frac{k+1}{\rho}\right)$. В силу убывания $\psi'(t)$ на луче $0 < t < +\infty$ последнее выражение отрицательно. Следовательно, правая часть (3.3.11) убывает с увеличением параметра μ , и это неравенство достаточно доказать в крайней точке $\mu = 2/\rho$:

$$\ln 2 \leq \left[\ln \Gamma\left(\frac{k+3}{\rho}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{k+2}{\rho}\right) \right] - \left[\ln \Gamma\left(\frac{3}{\rho}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{2}{\rho}\right) \right]. \quad (3.3.12)$$

Из возрастания функции ψ следует, что правая часть (3.3.12) растет с увеличением k . Поэтому достаточно доказать (3.3.12) при $k = 2$, т. е. вывести неравенство

$$\ln 2 \leq \ln \Gamma(5h) - \ln \Gamma(4h) - \ln \Gamma(3h) + \ln \Gamma(2h) \quad \forall h \geq 1. \quad (3.3.13)$$

При $h = 1$ в (3.3.13) имеет место равенство. Производная правой части (3.3.13) вследствие (3.3.2) равна

$$\begin{aligned} 5\psi(5h) - 4\psi(4h) - 3\psi(3h) + 2\psi(2h) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k+4h} + \frac{3}{k+3h} - \frac{5}{k+5h} - \frac{2}{k+2h} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kh(2k+7h)}{(k+2h)(k+3h)(k+4h)(k+5h)} > 0. \end{aligned}$$

Этим неравенство (3.3.13) доказано, а вместе с ним — неравенство (3.3.11).

Осталось доказать неравенство (3.3.9) в случае $k = 1$, а именно

$$1 - \frac{2\Gamma^2(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + 2/\rho)} + \frac{\Gamma^3(\mu + 1/\rho)}{\Gamma^2(\mu)\Gamma(\mu + 3/\rho)} \geq 0. \quad (3.3.14)$$

Введем следующие обозначения:

$$h = \frac{1}{\rho}, \quad u(\mu, h) = \frac{\Gamma^2(\mu + h)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + 2h)}, \quad v(\mu, h) = \frac{\Gamma^3(\mu + h)}{\Gamma^2(\mu)\Gamma(\mu + 3h)}.$$

Производная левой части (3.3.14) по параметру μ равна

$$\begin{aligned} -2u(\mu, h) \frac{\partial \ln u(\mu, h)}{\partial \mu} + v(\mu, h) \frac{\partial \ln v(\mu, h)}{\partial \mu} &= \\ &= -2u(\mu, h) [-\psi(\mu) + 2\psi(\mu + h) - \psi(\mu + 2h)] + v(\mu, h) [3\psi(\mu + h) - 2\psi(\mu) - \psi(\mu + 3h)]. \end{aligned}$$

Наша ближайшая цель доказать отрицательность последнего выражения, т. е. вывести неравенство

$$v(\mu, h) [3\psi(\mu + h) - 2\psi(\mu) - \psi(\mu + 3h)] < 2u(\mu, h) [-\psi(\mu) + 2\psi(\mu + h) - \psi(\mu + 2h)]. \quad (3.3.15)$$

Согласно доказанному выше неравенству (3.3.10) ($k = 2$) имеем неравенство

$$0 < v(\mu, h) \leq u(\mu, h)/2. \quad (3.3.16)$$

Оба множителя, стоящие в квадратных скобках в (3.3.15), положительны. Положительность $\psi(\mu + h) - \psi(\mu) - \psi(\mu + 2h)$ сразу же видна из вогнутости ψ на $(0, +\infty)$, а положительность функции $3\psi(\mu + h) - 2\psi(\mu) - \psi(\mu + 3h)$ доказывается так:

$$\begin{aligned} 0 < 3\psi(\mu + h) - 2\psi(\mu) - \psi(\mu + 3h) &\Leftrightarrow \psi(\mu + 3h) - \psi(\mu + h) < 2\psi(\mu + h) - 2\psi(\mu) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2h\psi'(\eta_1) < 2h\psi'(\eta_2), \quad \eta_1 \in (\mu + h, \mu + 3h), \quad \eta_2 \in (\mu, \mu + h). \end{aligned}$$

Последнее неравенство очевидно ввиду убывания $\psi'(t)$ на луче $0 < t < +\infty$.

Отсюда заключаем, что (3.3.15) следует из неравенства

$$\begin{aligned} 3\psi(\mu + h) - 2\psi(\mu) - \psi(\mu + 3h) &< 4(-\psi(\mu) + 2\psi(\mu + h) - \psi(\mu + 2h)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < \psi(\mu + 3h) - 4\psi(\mu + 2h) + 5\psi(\mu + h) - 2\psi(\mu), \quad h \geq 1, \quad 0 < \mu \leq 2h, \end{aligned}$$

которое, в свою очередь вытекает из разложения в ряд

$$\begin{aligned} \psi(\mu + 3h) - 4\psi(\mu + 2h) + 5\psi(\mu + h) - 2\psi(\mu) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\mu + 2h + n} + \frac{2}{\mu + n} - \frac{5}{\mu + h + n} - \frac{1}{\mu + 3h + n} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2h^2(\mu + 3h + n)}{(\mu + n)(\mu + n + h)(\mu + n + 2h)(\mu + n + 3h)}. \end{aligned}$$

Таким образом, производная левой части (3.3.14) по параметру μ отрицательна. Следовательно, неравенство (3.3.14) достаточно доказать при максимальном значении $\mu = 2/\rho = 2h$.

Итак, доказываем, что

$$1 - \frac{2\Gamma^2(3h)}{\Gamma(2h)\Gamma(4h)} + \frac{\Gamma^3(3h)}{\Gamma^2(2h)\Gamma(5h)} \geq 0 \quad \forall h \geq 1. \quad (3.3.17)$$

При $h = 1$ достигается равенство. Поэтому достаточно проверить положительность производной левой части (3.3.17) на луче $1 < h < +\infty$. Введем обозначения $u(h) = \frac{\Gamma^2(3h)}{\Gamma(2h)\Gamma(4h)}$, $v(h) = \frac{\Gamma^3(3h)}{\Gamma^2(2h)\Gamma(5h)}$. Искомая производная равна

$$\begin{aligned} -2u(h)\frac{d \ln u(h)}{dh} + v(h)\frac{d \ln v(h)}{dh} = \\ -2u(h)[6\psi(3h) - 2\psi(2h) - 4\psi(4h)] + v(h)[9\psi(3h) - 4\psi(2h) - 5\psi(5h)]. \end{aligned}$$

Следовательно, требуется доказать неравенство

$$v(h)[9\psi(3h) - 4\psi(2h) - 5\psi(5h)] > 2u(h)[6\psi(3h) - 2\psi(2h) - 4\psi(4h)]. \quad (3.3.18)$$

Имеем равенства

$$\begin{aligned} 6\psi(3h) - 2\psi(2h) - 4\psi(4h) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2h+n} + \frac{4}{4h+n} - \frac{6}{3h+n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2nh}{(2h+n)(3h+n)(4h+n)}, \\ 9\psi(3h) - 4\psi(2h) - 5\psi(5h) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{2h+n} + \frac{5}{5h+n} - \frac{9}{3h+n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6nh}{(2h+n)(3h+n)(5h+n)}. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство (3.3.18) принимает вид

$$\begin{aligned} v(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6nh}{(2h+n)(3h+n)(5h+n)} &> u(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4nh}{(2h+n)(3h+n)(4h+n)} \Leftrightarrow \\ 3v(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2h+n)(3h+n)(5h+n)} &< 2u(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2h+n)(3h+n)(4h+n)}. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что $3v(h) < 2u(h)$ или, что то же самое,

$$\frac{3}{2} < \frac{\Gamma(2h)\Gamma(5h)}{\Gamma(3h)\Gamma(4h)} \quad \forall h \geq 1. \quad (3.3.19)$$

При $h = 1$ (3.3.19) выполняется. Следовательно, достаточно проверить возрастание правой части (3.3.19) или возрастание ее логарифма. Имеем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} [\ln \Gamma(5h) - \ln \Gamma(4h) - \ln \Gamma(3h) + \ln \Gamma(2h)] &= 5\psi(5h) - 4\psi(4h) - 3\psi(3h) + 2\psi(2h) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-5}{5h+n} + \frac{4}{4h+n} + \frac{3}{3h+n} - \frac{2}{2h+n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nh(2n+7h)}{(2h+n)(3h+n)(4h+n)(5h+n)} > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма полностью доказана. $\square$

Интересно, что при «малых» значениях ρ лемма 3.3.2 почти неулучшаема в том смысле, что в круге радиуса, чуть большего, чем $R_1(\rho, \mu)$, функция $E_\rho(z; \mu)$ уже имеет корень при любом $\mu \in (0, 2/\rho]$.

Предложение 3.3.1. При любых $\rho \in (0, 1/6]$, $\mu \in (0, 2/\rho]$ функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет корень, лежащий на интервале

$$\left(- \left(1 + 2 \exp \left(-\frac{1}{3\rho} \right) \right) R_1(\rho, \mu), -R_1(\rho, \mu) \right).$$

Из теоремы 3.1.1, леммы 3.1.1 и данного предложения следует весьма точная асимптотика ближайшего к нулю корня функция Миттаг-Леффлера

$$z_1(\rho, \mu) = -\frac{\Gamma(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)} \left[1 + O \left(\exp \left(-\frac{1}{3\rho} \right) \right) \right], \quad \rho \rightarrow 0+,$$

равномерная по $\mu \in (0, 2/\rho]$ (постоянная в O не превосходит 2).

Лемма 3.3.3. *Рассмотрим функцию F из леммы 3.3.1. Если $\varepsilon > 0$, $\frac{R_1}{R_2} \leq \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$, то $F(-(1+\varepsilon)R_1) < 0$.*

Доказательство.

$$F(-(1+\varepsilon)R_1) = A_0 - (1+\varepsilon)A_1R_1 + (1+\varepsilon)^2A_2R_1^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} (-1)^k A_k (1+\varepsilon)^k R_1^k.$$

В сумме $\sum_{k=3}^{\infty}$ модули слагаемых убывают, поскольку отношение последующего к предыдущему равно $(1+\varepsilon)R_1/R_k \leq (1+\varepsilon)R_1/R_2 \leq \varepsilon/(1+\varepsilon) < 1$. Следовательно, эта знакопеременная сумма отрицательна и

$$F(-(1+\varepsilon)R_1) < A_0 - (1+\varepsilon)A_1R_1 + (1+\varepsilon)^2A_2R_1^2 = A_0 \left(1 - (1+\varepsilon)\frac{A_1R_1}{A_0} + (1+\varepsilon)^2\frac{A_2R_1^2}{A_0} \right). \quad (3.3.20)$$

По определению величин R_k имеем равенства $A_0/A_1 = R_1$, $A_0/A_2 = R_1R_2$. Отсюда и из (3.3.20) находим, что $A_0^{-1}F(-(1+\varepsilon)R_1) < -\varepsilon + (1+\varepsilon)^2R_1/R_2 \leq 0$, что и требовалось. Лемма доказана. $\square$

Доказательство предложения. Согласно лемме 3.3.3 достаточно проверить, что если взять $\varepsilon = 2 \exp\left(-\frac{1}{3\rho}\right)$, то при $0 < \rho \leq 1/6$, $0 < \mu \leq 2/\rho$ выполняется неравенство $R_1/R_2 < \varepsilon(1+\varepsilon)^{-2}$. Согласно лемме 3.9.1 (см. ниже раздел 3.8) верно неравенство $R_1/R_2 < \varepsilon/2$, $0 < \mu \leq 2/\rho$. А так как при $\rho \leq 1/6$ имеем неравенство $\varepsilon \leq 2e^{-2} < 1/3$, то $(1+\varepsilon)^{-2} > 1/2$ и требуемое неравенство выполняется. Предложение доказано. $\square$

3.4. НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ГАММА-ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Лемма 3.4.1. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right)' > \gamma, \quad 0 < x < 1, \quad \left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right)' < \gamma, \quad x > 1.$$

Замечание. Верно равенство $(1/\Gamma(x))'|_{x=1} = \gamma$, но производная $(1/\Gamma(x))'$ не является монотонной на $(0, +\infty)$; график $y = 1/\Gamma(x)$ имеет две точки перегиба.

Доказательство леммы. Согласно (3.3.2) имеем соотношения

$$\begin{aligned} \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= \gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) = \gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x} \right) = \gamma + 1 - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x-1}{(k+1)(k+x)} = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x-1}{(k+1)(k+x)}. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right)' = -\frac{\psi(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x)} \left(\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-x}{(k+1)(k+x)} \right).$$

Следовательно, необходимо доказать неравенства

$$\begin{aligned} \gamma &< \frac{1}{\Gamma(x)} \left(\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-x}{(k+1)(k+x)} \right), \quad 0 < x < 1, \\ \frac{1}{\Gamma(x)} \left(\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-x}{(k+1)(k+x)} \right) &< \gamma, \quad x > 1, \end{aligned}$$

которые после простых равносильных преобразований принимают вид

$$\begin{aligned} \gamma(\Gamma(x) - 1) &< \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-x}{(k+1)(k+x)}, \quad 0 < x < 1, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-x}{(k+1)(k+x)} &< \gamma(\Gamma(x) - 1), \quad x > 1. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Разделив оба неравенства (3.4.1) на $1-x$ и сменив знак неравенства у второго из них, получим, что требуется доказать неравенство

$$\gamma \frac{\Gamma(x) - 1}{1-x} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+x)}, \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty). \quad (3.4.2)$$

При $x > 2$ левая часть (3.4.2) отрицательна, и неравенство очевидно. При $1 < x \leq 2$ левая часть (3.4.2) равна $-\gamma\Gamma'(\xi) = \gamma\psi(\xi)\Gamma(\xi)$, где ξ — некоторая точка интервала $(1, 2)$. А так как $0 < \Gamma(\xi) < 1$ при $1 < \xi < 2$ и в силу возрастания ψ на $\mathbb{R}_+$ имеем неравенство $-\gamma\psi(\xi) \leq -\gamma\psi(1) = \gamma^2$, то заключаем, что при $x \in (1, 2]$ левая часть (3.4.2) не превосходит γ^2 , тогда как правая — не меньше $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right) = 1$. Неравенство (3.4.2) при $x > 1$ доказано. При $x \in (0, 1)$ умножим на x обе части (3.4.2) и получим равносильное неравенство

$$\gamma \frac{\Gamma(x+1) - x}{1-x} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(k+1)(k+x)}. \quad (3.4.3)$$

Ясно, что правая часть (3.4.3) превосходит слагаемое ряда с номером $k=0$, равное 1. В то же время, ввиду неравенства $\Gamma(t) < 1$, $1 < t < 2$, левая часть (3.4.3) не превосходит γ . Неравенство (3.4.2) доказано при $x \in (0, 1)$ и доказательство леммы завершено. $\square$

Лемма 3.4.2. Для логарифмической производной Γ -функции верны оценки

$$-(2t-1)^{-1} + \ln t < \psi(t) < \ln t \quad \forall t > 1/2, \quad (3.4.4)$$

$$\ln t < \psi(t+0.5) \quad \forall t > 0. \quad (3.4.5)$$

Доказательство. Наряду с (3.3.2) в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ справедливо разложение (см. [2, т. 1, гл. 1, п. 1.7])

$$\psi(z) = \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{k+z} \right) - \frac{1}{k+z} \right], \quad (3.4.6)$$

в котором под $\ln$ понимается главная ветвь логарифма. Из (3.4.6) и известного соотношения $0 < u - \ln(1+u) < u^2/2$ ($\forall u > 0$) находим, что

$$\ln t - 0.5 \sum_{k=0}^{\infty} (k+t)^{-2} < \psi(t) < \ln t \quad \forall t > 0.$$

Поскольку

$$a^{-2} < \int_{a-0.5}^{a+0.5} u^{-2} du \quad \forall a > 0.5, \quad (3.4.7)$$

то $\sum_{k=0}^{\infty} (k+t)^{-2} < \int_{t-0.5}^{+\infty} u^{-2} du$. Следовательно,

$$\psi(t) > \ln t - 0.5 \int_{t-0.5}^{+\infty} u^{-2} du = \ln t - 0.5/(t-0.5) = \ln t - (2t-1)^{-1}, \quad t > 0.5.$$

Неравенство (3.4.4) доказано. Из него следует, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) - \ln t = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t+0.5) - \ln t = 0$. Поэтому для доказательства (3.4.5) достаточно проверить убывание разности $g(t) = \psi(t+0.5) - \ln t$. Согласно (3.3.3) имеем равенство

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+t+0.5)^2} - \frac{1}{t}.$$

Неравенство (3.4.7), примененное к каждому слагаемому ряда, дает оценку сверху

$$g'(t) < \int_{-0.5}^{+\infty} \frac{du}{(u+t+0.5)^2} - \frac{1}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+t)^2} - \frac{1}{t} = 0,$$

что и требовалось. Лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 3.4.3. При любом фиксированном $x > 0$ функция $\Gamma(t)x^{-t}$ убывает по переменной t на интервале $0 < t < x$.

Доказательство. Имеем равенство

$$\frac{d}{dt} \left[\ln(\Gamma(t)x^{-t}) \right] = \frac{d}{dt} [\ln \Gamma(t) - t \ln x] = \psi(t) - \ln x.$$

По лемме 3.4.1 $\psi(t) - \ln x < \ln t - \ln x < 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.4.4. При любых $a, b > 0$, $a < b$ справедливы неравенства

$$\psi''(a) \frac{(b-a)^3}{24} + (b-a) \psi \left(\frac{a+b}{2} \right) < \ln \Gamma(b) - \ln \Gamma(a) < (b-a) \psi \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

Доказательство. Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, для любой функции $f \in C^3[x-h, x+h]$, $x, h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, найдутся точки $\xi_1 \in (x-h, x)$ и $\xi_2 \in (x, x+h)$ такие, что

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + (h^2/2)f''(x) + (h^3/6)f'''(\xi_2), \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + (h^2/2)f''(x) - (h^3/6)f'''(\xi_1). \end{aligned}$$

Вычитая второе равенство из первого, получим равенство

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + (h^3/6)(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)). \quad (3.4.8)$$

Отсюда для $f(z) = \ln \Gamma(z)$ с учетом тождеств $(\ln \Gamma(z))' = \psi(z)$, $\psi''(z) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+z)^{-3}$, влекущих за собой возрастание и отрицательность $(\ln \Gamma(z))'''$ на луче $(0, +\infty)$, находим неравенства

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x+h) - \ln \Gamma(x-h) &< 2h\psi(x), \\ \ln \Gamma(x+h) - \ln \Gamma(x-h) &> 2h\psi(x) + (h^3/6)\psi''(x-h), \quad 0 < h < x. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Применяя (3.4.9) для $x = (a+b)/2$, $h = (b-a)/2$, выводим утверждение леммы. $\square$

Лемма 3.4.5. При любых $a, b > 0$, $a < b$ имеем неравенство

$$\frac{\ln \Gamma(b) - \ln \Gamma(a)}{b-a} < \ln \left(\frac{a+b}{2} \right), \quad (3.4.10)$$

а если, кроме того, $2 \leq a < b \leq 2a$, то

$$-\frac{2(b-a)^2}{3(a+b)^2} + \psi \left(\frac{a+b}{2} \right) < \frac{\ln \Gamma(b) - \ln \Gamma(a)}{b-a}. \quad (3.4.11)$$

Доказательство. Неравенство (3.4.10) сразу следует из оценок сверху разности $\ln \Gamma(b) - \ln \Gamma(a)$ и функции ψ , доказанных в леммах 3.4.4 и 3.4.2. Для доказательства (3.4.11), как видно из леммы 3.4.4, достаточно проверить справедливость оценки

$$\psi''(a) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^3} > -\frac{16}{(a+b)^2}, \quad 2 \leq a < b \leq 2a,$$

которая выводится из неравенства $\sum_{k=0}^{\infty} (k+a)^{-3} < (8/9)a^{-2}$. Докажем его. Имеем неравенство

$$\frac{1}{p^3} < \int_{p-1/2}^{p+1/2} \frac{du}{u^3} \quad (\forall p > 1/2).$$

Применив эти неравенства при $p = k + a$, $k \in \mathbb{N}$, и сложив их, получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+a)^{-3} < \int_{a-1/2}^{+\infty} u^{-3} du = 0.5(a-0.5)^{-2} \leq (8/9)a^{-2} \quad a \geq 2.$$

Лемма доказана. $\square$

3.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1.1

Неравенства (3.1.7) в развернутом виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \right) + \ln \left(\frac{n-1+\rho(\mu-1)}{\rho} \right) &< \rho \left(\ln \Gamma \left(\mu + \frac{n}{\rho} \right) - \ln \Gamma \left(\mu + \frac{n-1}{\rho} \right) \right), \quad 2 \leq n \leq \left[\frac{1}{3\rho} \right], \\ \delta \rho \ln 2 + \rho \left(\ln \Gamma \left(\mu + \frac{n}{\rho} \right) - \ln \Gamma \left(\mu + \frac{n-1}{\rho} \right) \right) &< \ln \left(\frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \right) + \ln \left(\frac{n+\rho(\mu-1)}{\rho} \right), \quad 1 \leq n \leq \left[\frac{1}{3\rho} \right], \end{aligned}$$

где $\delta = 1$ при $0 < \mu \leq 1/\rho$, $\delta = 0.5$ при $1/\rho < \mu \leq 2/\rho$. Упростим их, заменив на более сильные с помощью оценки

$$0 < \ln \left(\frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \right) < 2\rho^2, \quad 0 < \rho \leq 1/2,$$

и леммы 3.4.5, взяв $a = \mu + \frac{n-1}{\rho}$, $b = \mu + \frac{n}{\rho}$. Условие леммы $2 \leq a \leq b \leq 2a$, возникающее при оценке снизу разности $\ln \Gamma(b) - \ln \Gamma(a)$, выполняется ввиду ограничения $n \geq 2$ в первом неравенстве.

Придем к задаче доказательства неравенств

$$\begin{aligned} 2\rho^2 + \ln \left(\frac{n-1+\rho(\mu-1)}{\rho} \right) &< \frac{-1}{6\rho^2(\mu+(n-0.5)/\rho)^2} + \psi \left(\mu + \frac{n-0.5}{\rho} \right), \quad 2 \leq n \leq \left[\frac{1}{3\rho} \right], \\ \delta \rho \ln 2 + \ln \left(\mu + \frac{n-0.5}{\rho} \right) &< \ln \left(\frac{n+\rho(\mu-1)}{\rho} \right), \quad 1 \leq n \leq \left[\frac{1}{3\rho} \right]. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Применив в (3.5.1) оценку снизу функции из леммы 3.4.2 и перенеся логарифмы в правые части неравенств, заменяем неравенства (3.5.1) на еще более сильные неравенства

$$\begin{aligned} 2\rho^2 + \frac{1}{6(\rho\mu+n-0.5)^2} + \frac{1}{2(\mu+(n-0.5)/\rho)-1} &< \ln \left(\frac{\rho\mu+n-0.5}{\rho\mu+n-1-\rho} \right), \quad 2 \leq n \leq \left[\frac{1}{3\rho} \right], \\ 0.7\delta\rho &< \ln \left(\frac{\rho\mu+n-\rho}{\rho\mu+n-0.5} \right), \quad 1 \leq n \leq \left[\frac{1}{3\rho} \right], \end{aligned}$$

и будем доказывать именно их.

Перепишем эти неравенства в компактном виде, обозначив $y = \rho\mu+n-0.5$. Получим неравенства

$$2\rho^2 + \frac{1}{6y^2} + \frac{\rho}{2y-\rho} < \ln \left(\frac{y}{y-0.5-\rho} \right), \quad 2 \leq n \leq \left[\frac{1}{3\rho} \right], \quad (3.5.2)$$

$$0.7\delta\rho < \ln \left(\frac{y+0.5-\rho}{y} \right), \quad 1 \leq n \leq \left[\frac{1}{3\rho} \right]. \quad (3.5.3)$$

Ввиду убывания функции $(y + 0.5 - \rho)/y$ на луче $0 < y < +\infty$ неравенство (3.5.3) достаточно доказать при максимально возможном значении y , т. е. при

$$\begin{aligned} 0.35\rho &< \ln\left(1 + \frac{0.5 - \rho}{n + 1.5}\right), \quad n = \left\lfloor \frac{1}{3\rho} \right\rfloor, \\ 0.7\rho &< \ln\left(1 + \frac{0.5 - \rho}{n + 0.5}\right), \quad n = \left\lfloor \frac{1}{3\rho} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Имеем неравенства $0.35n\rho \leq 0.35/3 < 0.12$, $0.7n\rho < 0.7/3 < 0.24$. С другой стороны (используем, что $\ln(1+t) > 0.9t$ при $0 < t \leq 0.2$),

$$\begin{aligned} n \ln\left(1 + \frac{0.5 - \rho}{n + 1.5}\right) &> \frac{0.9n(0.5 - \rho)}{n + 1.5} \geq \frac{0.3n}{n + 1.5} \geq \frac{0.6}{3.5} > 0.16 > 0.35n\rho, \\ n \ln\left(1 + \frac{0.5 - \rho}{n + 0.5}\right) &> \frac{0.9n(0.5 - \rho)}{n + 0.5} \geq \frac{0.3n}{n + 0.5} \geq \frac{0.6}{2.5} > 0.24 > 0.7n\rho. \end{aligned}$$

Неравенство доказано.

Для доказательства (3.5.2) используем оценку снизу $\ln\left(\frac{y}{y-2h}\right) > \frac{2h}{y-h}$, $0 < h < y/2$, которая следует из (3.4.8) и положительности третьей производной логарифма:

$$\ln\left(\frac{y}{y-0.5-\rho}\right) > \frac{0.5+\rho}{y-0.25-\rho/2} = \frac{1+2\rho}{2y-0.5-\rho} > \frac{1+2\rho}{2y-\rho}.$$

После этого остается доказать неравенство

$$2\rho^2 + \frac{1}{6y^2} < \frac{1+\rho}{2y-\rho} \iff 2\rho(\rho y) + \frac{1}{6y} < \frac{1+\rho}{2-\rho/y}.$$

А так как $\rho y \leq \rho\left(\frac{1}{3\rho} + 1.5\right) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$, $y \geq 1.5$, то остается проверить, что $7\rho/6 + 1/9 < (1+\rho)/2$ при $0 < \rho \leq 1/6$. Это верно, и доказательство неравенства (3.5.2) завершено. Лемма 3.1.1 доказана.

3.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.1 В СЛУЧАЕ $0.4 \leq \rho < 0.5$

Сперва рассмотрим значения параметра $\mu \in (0, 1/\rho]$. Рассуждения, проведенные в разделе 3.2, показывают, что задача сводится к доказательству равенств

$$E_\rho(-\xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu); \mu) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.6.1)$$

А из теоремы 1.5.3 и (3.2.3) видно, что эти равенства следуют из неравенств (аргументы ρ, μ у величин ξ_n будем иногда опускать)

$$1.5\xi_n^{-1/\rho} < 2\rho\xi_n^{1-\mu} \exp(\xi_n \cos \pi\rho) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что при $0.4 \leq \rho < 0.5$, $x \geq \xi_1$, функция $g(\rho) = 2\rho \exp(x \cos \pi\rho)$ превосходит 1. Действительно, $g(0.5) = 1$,

$$\begin{aligned} (\ln g(\rho))' &= 1/\rho - \pi x \sin \pi\rho \leq 1/\rho - \pi\xi_1 \sin \pi\rho = 1/\rho - \pi^2(1 - \rho(\mu - 1)) < \\ &< 1/\rho - \pi^2(1 - \rho) < 2.5 - \pi^2/2 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $2\rho \exp(\xi_n \cos \pi\rho) > 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и достаточно установить справедливость неравенства

$$1.5\xi_n^{-1/\rho} < \xi_n^{1-\mu} \iff 1.5 < \xi_n^{1+1/\rho-\mu}.$$

А так как $\mu \leq 1/\rho$, то требуется проверить, что $\xi_1 > 1.5$. Имеем неравенства

$$\xi_1 = \frac{\pi(1 + \rho(\mu - 1))}{\sin \pi\rho} > \frac{\pi(1 - \rho)}{\sin \pi\rho} > \pi(1 - \rho) > \frac{\pi}{2} > 1.5,$$

что и требовалось доказать.

В случае $\frac{1}{\rho} < \mu \leq \frac{2}{\rho}$ воспользуемся тождествами ($\mu = \lambda + 1/\rho$)

$$\begin{aligned} E_\rho\left(z; \lambda + \frac{1}{\rho}\right) &= \frac{1}{z} \left(E_\rho(z; \lambda) - \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \right), \\ \xi_n\left(\rho, \lambda + \frac{1}{\rho}\right) &= \xi_{n+1}(\rho, \lambda). \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Соотношения (3.6.2), (3.6.1) убеждают нас в том, что при $\mu \in \left(\frac{1}{\rho}, \frac{2}{\rho} - 1\right]$ задача сводится к доказательству равенств

$$\operatorname{sgn} \left[E_\rho(-\xi_m)^{1/\rho}(\rho, \lambda); \lambda \right] - \frac{1}{\Gamma(\lambda)} = (-1)^m, \quad \forall m \geq 2 \quad \forall \lambda \in \left(0, \frac{1}{\rho} - 1\right] \quad \forall \rho \in [0.4, 0.5).$$

Снова обратясь к теореме 1.5.3, мы видим, что для этого достаточно вывести неравенства

$$|\omega_\rho(\xi_m, \lambda)| + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 2\rho \xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho). \quad (3.6.3)$$

Начнем со значений $\lambda \in (0, 1]$. Подставив в (3.6.3) оценку модуля остаточного члена из теоремы 1.5.3 главы 1, сводим задачу к доказательству неравенства

$$\Gamma(3.5) \xi_m^{-1/\rho} \left(\frac{3}{2} \min(\lambda, 1 - \lambda) + \frac{1}{\rho} - 2 \right) + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 2\rho \xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho). \quad (3.6.4)$$

Напишем более сильное неравенство, заменив левую часть (3.6.4) большим выражением, а правую — меньшим, используя оценки

$$\Gamma(3.5) < 4, \quad \xi_m^{-1/\rho} < \xi_2^{-2}, \quad \xi_m^{1-\lambda} \geq 1, \quad \xi_2 > \pi(2 - \rho) \operatorname{cosec} \pi \rho.$$

А именно, докажем, что

$$6\xi_2^{-2}(1 - \lambda) + 4\xi_2^{-2} \left(\frac{1}{\rho} - 2 \right) + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 2\rho \exp(\pi(2 - \rho) \operatorname{ctg} \pi \rho).$$

Снова заменим неравенство более сильным, воспользовавшись оценками $\xi_2 \geq 1.5\pi \Rightarrow \xi_2^{-2} < 1/20$, $e^t > 1 + t$ ($t > 0$). Получим, что достаточно доказать неравенство

$$0.3(1 - \lambda) + 0.2 \left(\frac{1}{\rho} - 2 \right) + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 2\rho(1 + 1.5\pi \operatorname{ctg} \pi \rho). \quad (3.6.5)$$

Из леммы 3.3.3 следует, что $\gamma(1 - \lambda) + 1/\Gamma(\lambda) \leq 1$ при $0 < \lambda \leq 1$ и, тем более,

$$0.3(1 - \lambda) + 1/\Gamma(\lambda) \leq 1, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (3.6.6)$$

Сделав замену $\varepsilon = 1/2 - \rho$, $0 < \varepsilon \leq 0.1$, получим оценки

$$0.2 \left(\frac{1}{\rho} - 2 \right) = \frac{0.8\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \leq \varepsilon, \quad (3.6.7)$$

$$\begin{aligned} 2\rho(1 + 1.5\pi \operatorname{ctg} \pi \rho) &= (1 - 2\varepsilon)(1 + 1.5\pi \operatorname{tg} \pi \varepsilon) > (1 - 2\varepsilon)(1 + 1.5\pi^2 \varepsilon) > \\ &> (1 - 2\varepsilon)(1 + 14\varepsilon) = 1 + 12\varepsilon - 28\varepsilon^2 > 1 + 9\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Из (3.6.6) и (3.6.8) выводим (3.6.5). Неравенства (3.6.3) в случае $0 < \lambda \leq 1$ доказаны.

При $1 < \lambda \leq \frac{1}{\rho} - 1$ в соответствии с теоремой 1.5.3 главы 1 задача сводится к доказательству неравенства

$$\left(\frac{1}{\rho} - 2 \right) \Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) \xi_m^{-1/\rho} + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 2\rho \xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho). \quad (3.6.9)$$

При рассматриваемых значениях параметра λ имеем неравенство

$$\xi_m(\rho, \lambda) \geq \xi_2(\rho, \lambda) = \frac{\pi(2 + \rho(\lambda - 1))}{\sin \pi \rho} > \frac{2\pi}{\sin \pi \rho} > 2\pi. \quad (3.6.10)$$

Следовательно, пользуясь леммами 3.4.1, 3.4.2 находим ($\delta = \frac{1}{\rho} - 2$) неравенства

$$\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)\xi_m^{-1/\rho} \leq \Gamma(2)\xi_m^{-2} \leq \xi_2^{-2}, \quad \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 1 + \gamma(\lambda - 1) \leq 1 + \gamma\left(\frac{1}{\rho} - 2\right) = 1 + \delta\gamma.$$

Поэтому неравенство (3.6.9) можно заменить следующим более сильным:

$$\delta(2\pi)^{-2} + 1 + \gamma\delta < 2\rho\xi_m^{-\delta} \exp(\xi_m \cos \pi\rho). \quad (3.6.11)$$

Функция $x^{-\delta} \exp(x \cos \pi\rho) \equiv \exp(-\delta \ln x + x \sin \pi\varepsilon)$ возрастает на луче $x > 2$, поскольку (из (3.6.7) видно, что $\delta \leq 5\varepsilon$)

$$\frac{d}{dx}(-\delta \ln x + x \sin \pi\varepsilon) = -\frac{\delta}{x} + \sin \pi\varepsilon > -\frac{\delta}{2} + 3\varepsilon > 0.$$

Поэтому (см. (3.6.10)) имеем неравенство

$$\begin{aligned} 2\rho\xi_m^{-\delta} \exp(\xi_m \cos \pi\rho) &\geq 2\rho \exp(-\delta \ln 6 + 6 \sin \pi\varepsilon) > 2\rho \exp(-1.8\delta + 18\varepsilon) \geq \\ &\geq 2\rho e^{9\varepsilon} = (1 - 2\varepsilon)e^{9\varepsilon} > (1 - 2\varepsilon)(1 + 9\varepsilon) = 1 + 7\varepsilon - 18\varepsilon^2 \geq 1 + 5.2\varepsilon. \end{aligned}$$

В то же время, левая часть (3.6.11) не превышает $1 + 0.62\delta \leq 1 + \frac{0.62 \cdot 4\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \leq 1 + 3.1\varepsilon$. Неравенство (3.6.11) доказано, и доказательство теоремы 3.1.1 в случае $0.4 \leq \rho < 0.5$ завершено.

3.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.1 В СЛУЧАЕ $0.25 < \rho < 0.4$

Рассуждая так же, как в предыдущем пункте, и используя теорему 1.5.4, убеждаемся в том, что для доказательства соотношений (3.6.1) в рассматриваемом случае достаточно установить справедливость неравенств

$$0.74\xi_n^{-\mu} < 2\rho\xi_n^{1-\mu} \exp(\xi_n \cos \pi\rho), \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}, \quad n \geq 1, \quad (3.7.1)$$

$$0.74\xi_n^{-\lambda} + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 2\rho\xi_n^{1-\lambda} \exp(\xi_n \cos \pi\rho), \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{\rho} - 1, \quad n \geq 2. \quad (3.7.2)$$

Начнем с доказательства неравенств (3.7.1). Разделив их на $2\rho\xi_n^{1-\mu}$, получим равносильные неравенства

$$\frac{0.74}{2\rho\xi_n} < \exp(\xi_n \cos \pi\rho), \quad (3.7.3)$$

которые в силу возрастания по n правой части и убывания левой достаточно доказать лишь при $n = 1$. Поскольку

$$\xi_1 = \xi_1(\rho, \mu) = \pi(1 + \rho(\mu - 1)) \operatorname{cosec}(\pi\rho) > \pi(1 - \rho),$$

то $2\rho\xi_1 > 2\pi\rho(1 - \rho) > 3\pi/8$, при $0.25 < \rho < 0.4$. Следовательно, левая часть (3.7.3) меньше 1. А так как правая часть (3.7.3) заведомо превосходит 1, то неравенство верно.

Перейдем к доказательству неравенств (3.7.2). В случае $0 < \lambda \leq 1$ левая часть (3.7.2) меньше 1.74, а правая превосходит

$$\begin{aligned} 0.5 \exp(\xi_2 \cos \pi\rho) &= 0.5 \exp(\pi(2 + \rho(\lambda - 1)) \operatorname{ctg} \pi\rho) > \\ &> 0.5 \exp(\pi(2 - \rho) \operatorname{ctg} \pi\rho) > 0.5 \exp(1.6\pi \operatorname{ctg}(0.4\pi)) > 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим значения $a = \lambda - 1 \in \left(0, \frac{1}{\rho} - 2\right]$. Заметим, что функция $x^{-a}e^{\tau x}$, $\tau > 0$, возрастает на луче $a/\tau < x < +\infty$. У нас $\tau = \cos \pi\rho$ и неравенство

$$\frac{a}{\cos \pi\rho} < \xi_2(\rho, \lambda) \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} - 2 < 2\pi \operatorname{ctg} \pi\rho$$

выполняется, поскольку

$$\frac{1}{\rho} - 2 < \frac{1}{2\rho}, \quad \frac{1}{4} < \frac{\pi\rho}{\operatorname{tg} \pi\rho} \quad \text{при} \quad 0.25 < \rho < 0.4.$$

Отсюда следует, что неравенство (3.7.2) нуждается в доказательстве только при $n = 2$. Оно принимает вид

$$0.74\Gamma(\lambda)\xi_2^{-\lambda} + 1 < 2\rho\Gamma(\lambda)\xi_2^{1-\lambda}\exp(\xi_2\cos\pi\rho), \quad 1 < \lambda \leq \frac{1}{\rho} - 1. \quad (3.7.4)$$

Поскольку

$$\xi_2 = \xi_2(\rho, \lambda) = \pi(2 + \rho a) \operatorname{cosec}(\pi\rho), \quad (3.7.5)$$

то $\xi_2 > 2\pi$ и левая часть (3.7.4) меньше $1 + 0.74\Gamma(\lambda)(2\pi)^{-\lambda}$, а эта функция согласно лемме 3.6 убывает по λ (у нас $1 < \lambda \leq 3$). Следовательно, левая часть (3.7.4) меньше $1 + 0.7/(2\pi) < 1.12$.

Для оценки снизу правой части (3.7.4) докажем ее убывание по параметру λ или, что то же самое, убывание функции $g(a) = \ln \Gamma(a+1) - a \ln(\pi(2 + \rho a) \operatorname{cosec} \pi\rho) + \pi(2 + \rho a) \operatorname{ctg} \pi\rho$ по переменной a на отрезке $0 \leq a \leq \frac{1}{\rho} - 2 < 2$. Имеем равенство

$$g'(a) = \psi(a+1) - \ln(\pi(2 + \rho a) \operatorname{cosec} \pi\rho) - \frac{\rho a}{2 + \rho a} + \pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho.$$

Поскольку

$$\psi(a+1) \leq \psi\left(\frac{1}{\rho} - 1\right) < \psi(3) = 1.5 - \gamma < 0.93, \quad \pi\rho \operatorname{ctg}(\pi\rho) < \pi/4 \quad \text{при} \quad 0.25 < \rho < 0.4,$$

то

$$g'(a) < 1.72 - \ln(\pi(2 + \rho a) \operatorname{cosec} \pi\rho) < 1.72 - \ln(2\pi) < 0.$$

Таким образом, правая часть (3.7.4) не меньше своего значения в точке $\lambda = \frac{1}{\rho} - 1$. Подставив в (3.7.4) выражение для ξ_2 (3.7.5), в котором $a = \frac{1}{\rho} - 2$, получим, что остается доказать неравенство

$$1.12 < 2\rho\Gamma\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\left(\frac{\pi(3 - 2\rho)}{\sin \pi\rho}\right)^{2 - \frac{1}{\rho}} \exp(\pi(3 - 2\rho) \operatorname{ctg} \pi\rho), \quad 0.25 < \rho < 0.4.$$

Рассмотрим функцию

$$F(\rho) = \rho\Gamma\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\left(\frac{\pi(3 - 2\rho)}{\sin \pi\rho}\right)^{2 - \frac{1}{\rho}} \exp(\pi(3 - 2\rho) \operatorname{ctg} \pi\rho).$$

Требуется доказать, что $F(\rho) > 0.56$ при $0.25 < \rho < 0.4$. Для этого установим убывание $F(\rho)$ на данном интервале, после чего в силу непрерывности этой функции на отрезке $0.25 \leq \rho \leq 0.4$ задача сведется к проверке численного неравенства $F(0.4) > 0.56$. Оно верно ($F(0.4) > 1.2$), и доказательство теоремы 3.1.1 в случае $0.25 < \rho < 0.4$ на этом завершается.

Обозначим $F_1(\rho) = \ln F(\rho)$. Имеем соотношение

$$F_1'(\rho) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\psi\left(\frac{1}{\rho} - 1\right) + \frac{1}{\rho^2}\ln\left(\frac{\pi(3 - 2\rho)}{\sin \pi\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho} - 2\right)\left(\pi \operatorname{ctg} \pi\rho + \frac{1}{1.5 - \rho}\right) - \frac{\pi^2(3 - 2\rho)}{\sin^2 \pi\rho} - 2\pi \operatorname{ctg} \pi\rho.$$

Отсюда для функции $\Phi(\rho) = \rho^2 F_1'(\rho)$ получаем представление

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) = \rho(1 - 2\pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho) - \psi\left(\frac{1}{\rho} - 1\right) + \ln\left(\frac{\pi(3 - 2\rho)}{\sin \pi\rho}\right) + \\ + (1 - 2\rho)\left(\pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho + \frac{\rho}{1.5 - \rho}\right) - (3 - 2\rho)\left(\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}\right)^2. \end{aligned}$$

Функция $\pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho$ убывает на $(0, 1/2)$, а $\rho/(1.5 - \rho)$ возрастает. Поэтому верны оценки

$$\rho(1 - 2\pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho) < \rho(1 - 0.8\pi \operatorname{ctg}(0.4\pi)) < 0.19\rho,$$

$$(1 - 2\rho)(\pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho + \rho/(1.5 - \rho)) < \begin{cases} 0.5(\pi/4 + 2/7) < 0.536, & 1/4 < \rho \leq 1/3, \\ \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 4/11\right) < 0.324, & 1/3 < \rho < 0.4. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\Phi(\rho) < A + \ln\left(\frac{\pi(3-2\rho)}{\sin \pi\rho}\right) - \psi\left(\frac{1}{\rho} - 1\right) - (3-2\rho)\left(\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}\right)^2, \quad (3.7.6)$$

где $A = 0.6$ в случае $1/4 < \rho \leq 1/3$, $A = 0.4$ в случае $1/3 < \rho < 0.4$. При $1/4 < \rho \leq 1/3$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\pi(3-2\rho)}{\sin \pi\rho}\right) &< \ln(2.5\pi\sqrt{2}) < 2.41, \quad \psi\left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \geq \psi(2) = 1 - \gamma > 0.42, \\ (3-2\rho)\left(\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}\right)^2 &> \left(2 + \frac{1}{3}\right)\frac{\pi^2}{8} > 2.76. \end{aligned}$$

Из этих численных оценок и (3.7.6) следует отрицательность $\Phi(\rho)$ на полуинтервале $(1/4, 1/3]$. При $1/3 < \rho < 0.4$ имеем неравенства

$$\ln\left(\frac{\pi(3-2\rho)}{\sin \pi\rho}\right) < \ln\left(2 + \frac{1}{3}\right) + \ln \pi + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 2.14, \quad (3-2\rho)\left(\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}\right)^2 > 2.2 \cdot \frac{4\pi^2}{27} > 3$$

и неравенство $\Phi(\rho) < 0$ выполняется. Убывание функции F доказано.

3.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.1 В СЛУЧАЕ $1/6 < \rho \leq 1/4$

Если $\rho \in (1/6, 1/4]$, то согласно теореме 1.5.4 «главная часть» функции $E_\rho(-x^{1/\rho}, \mu)$ содержит два слагаемых:

$$2\rho x^{1-\mu} \left[\exp(x \cos \pi\rho) \cos(x \sin \pi\rho - \pi\rho(\mu-1)) + \exp(x \cos 3\pi\rho) \cos(x \sin 3\pi\rho - 3\pi\rho(\mu-1)) \right].$$

Следовательно, для доказательства соотношений (3.2.1) достаточно вывести неравенства

$$\begin{aligned} 0.74\xi_n^{-\mu} &< 2\rho\xi_n^{1-\mu} \left[\exp(\xi_n \cos \pi\rho) - \exp(\xi_n \cos 3\pi\rho) \right], \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}, \quad n \geq 1, \\ 0.74\xi_n^{-\lambda} + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} &< 2\rho\xi_n^{1-\lambda} \left[\exp(\xi_n \cos \pi\rho) - \exp(\xi_n \cos 3\pi\rho) \right], \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{\rho}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\exp(\xi_n \cos 3\pi\rho)}{\exp(\xi_n \cos \pi\rho)} &= \exp\left(\pi(n + \rho(\mu-1)) \frac{\cos 3\pi\rho - \cos \pi\rho}{\sin \pi\rho}\right) = \\ &= \exp\left(-2\pi(n + \rho(\mu-1)) \sin 2\pi\rho\right) \leq \exp(-2\pi(1-\rho) \sin 2\pi\rho) \leq \exp(-\pi(1-\rho)\sqrt{3}) < \\ &< \exp(-0.75\pi\sqrt{3}) < 0.02, \end{aligned}$$

неравенства (3.8.1) можно заменить следующими более сильными:

$$\frac{0.74}{2\rho\xi_n} < 0.98 \exp(\xi_n \cos \pi\rho), \quad (3.8.2)$$

$$0.74\xi_n^{-\lambda} + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 1.96\rho\xi_n^{1-\lambda} \exp(\xi_n \cos \pi\rho). \quad (3.8.3)$$

Из оценок $2\rho\xi_n \geq 2\rho\xi_1 \geq 2\rho\pi(1-\rho)\operatorname{cosec}(\pi\rho) > 2(1-\rho) \geq 1.5$ находим, что $0.74/(2\rho\xi_n) < 0.74/1.5 < 0.5$, а правая часть (3.8.2) превосходит 0.98. Это показывает, что неравенство (3.8.2) выполняется.

Докажем неравенства (3.8.3). При $0 < \lambda \leq 1$ трудностей, как и в предыдущем параграфе, не возникает: левая часть меньше 1.74, а правая превосходит $1.9\rho \exp(\xi_2 \cos \pi\rho)$. Но $\xi_2 \cos \pi\rho \geq \pi(2-\rho) \operatorname{ctg} \pi\rho \geq \pi(2-\rho) \geq 1.75\pi$, а значит $\rho \exp(\xi_2 \cos \pi\rho) > (1/6) \exp(1.75\pi) > 30$ и неравенство (3.8.3) верно.

Рассмотрим значения $a = \lambda - 1 \in \left(0, \frac{1}{\rho} - 1\right]$. Неравенство (3.8.3), которое требуется доказать, перепишем в виде

$$0.74\Gamma(\lambda)\xi_n^{-\lambda} + 1 < 1.96\rho\Gamma(a+1)\xi_n^{-a} \exp(\xi_n \cos \pi\rho). \quad (3.8.4)$$

Из возрастания функции $x^{-1} \exp(x \cos \pi \rho)$ на луче $x > a \sec(\pi \rho)$ и неравенств $a \leq 5$, $\xi_n \geq \xi_2 > 2\pi \operatorname{cosec}(\pi \rho) > 5 \sec(\pi \rho)$, справедливых в случае $1/6 < \rho \leq 1/4$, следует, что неравенства (3.8.4) достаточно доказать при $n = 2$. Функция $\Gamma(\lambda) \xi_2^{-\lambda}$ согласно лемме 3.4.2 убывает по переменной λ на отрезке $1 \leq \lambda \leq 6$, поскольку при $\lambda \geq 1$, $\rho \leq 1/4$ имеем неравенство $\xi_2 \geq 2\pi \operatorname{cosec}(\pi \rho) \geq 2\pi\sqrt{2}$. Следовательно, левая часть (3.8.4) превосходит $1 + 0.74/(2\pi\sqrt{2}) < 1.1$. Правая часть (3.8.4) при любом фиксированном $\rho \in (1/6, 1/4]$ по переменной a на отрезке $0 \leq a \leq 5$ также убывает. Для того, чтобы убедиться в этом, исходя из явной формулы для ξ_2 , достаточно доказать убывание функции

$$g(a) = \ln \Gamma(a+1) - a \ln \left(\frac{\pi(2+\rho a)}{\sin \pi \rho} \right) + \pi(2+\rho a) \operatorname{ctg}(\pi \rho).$$

Имеем равенство

$$g'(a) = \psi(a+1) - \ln \left(\frac{\pi(2+\rho a)}{\sin \pi \rho} \right) - \frac{a\rho}{2+\rho a} + \pi \rho \operatorname{ctg}(\pi \rho). \quad (3.8.5)$$

Доказательство отрицательности производной (3.8.5) начнем с численной оценки сверху функции $t \operatorname{ctg} t + \ln \sin t$, $t = \pi \rho \in (\pi/6, \pi/4]$. Эта функция возрастает на $(0, \pi/4]$ и, следовательно, не превосходит своего значения в точке $\pi/4$, равного $\pi/4 - 0.5 \ln 2 < 0.44$. Таким образом,

$$g'(a) < 0.44 + \psi(a+1) - \ln(\pi(2+\rho a)) - \rho a/(2+\rho a).$$

При $0 < a \leq 3$ имеем неравенство

$$g'(a) < 0.44 + \psi(4) - \ln(2\pi) = 0.44 + 11/6 - \gamma - \ln(2\pi) < 0.$$

При $3 < a \leq 5$ в силу возрастания по a и ρ функции $\rho a/(2+\rho a)$ и оценки $\psi(t) < \ln t$ имеем неравенство

$$g'(a) < 0.44 + \psi(a+1) - \ln(\pi(2+3\rho)) - \frac{3\rho}{(2+3\rho)} < 0.44 + \psi(6) - \ln(2.5\pi) - 0.2 < 0.24 + \ln \left(\frac{6}{2.5\pi} \right) < 0.$$

Отсюда заключаем, что правая часть (3.8.4) не меньше своего значения в точке $a = \frac{1}{\rho} - 1$, и остается доказать неравенство

$$1.1 < 1.96\rho \Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{\pi(3-\rho)}{\sin \pi \rho} \right)^{1-1/\rho} \exp\left(\pi(3-\rho) \operatorname{ctg} \pi \rho\right), \quad \frac{1}{6} < \rho \leq \frac{1}{4}. \quad (3.8.6)$$

Прологарифмировав его, придем к задаче доказательства неравенства $\ln 1.1 < 0.1 < F(\rho)$, где

$$F(\rho) = \ln 1.96 + \ln \rho + \ln \Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \ln \left(\frac{\pi(3-\rho)}{\sin \pi \rho} \right) + \pi(3-\rho) \operatorname{ctg} \pi \rho.$$

Имеем соотношение

$$F(1/4) = \ln(0.49) + \ln 6 - 3 \ln(2.75\pi\sqrt{2}) + 2.75\pi > 1,$$

и остается доказать убывание $F(\rho)$ на полуинтервале $(1/6, 1/4]$. Вычислим производную:

$$F'(\rho) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \psi\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \ln \left(\frac{\pi(3-\rho)}{\sin \pi \rho} \right) + \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \left(\frac{1}{3-\rho} + \pi \operatorname{ctg} \pi \rho \right) - \pi \operatorname{ctg} \pi \rho - (3-\rho) \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \rho}.$$

Положим $\Phi(\rho) = \rho^2 f(\rho)$. Тогда

$$\Phi(\rho) = \rho - \psi\left(\frac{1}{\rho}\right) + \ln \left(\frac{\pi(3-\rho)}{\sin \pi \rho} \right) + \frac{\rho(1-\rho)}{3-\rho} + (1-2\rho)\pi \rho \operatorname{ctg} \pi \rho - (3-\rho) \left(\frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \right)^2.$$

Заменив в формуле для $\Phi(\rho)$ функции $\pi \rho \operatorname{ctg} \pi \rho$ и $(1-\rho)/(3-\rho)$ их верхней оценкой (тождественной единицей), получим неравенство

$$\Phi(\rho) < 1 - \psi\left(\frac{1}{\rho}\right) + \ln \left(\frac{\pi(3-\rho)}{\sin \pi \rho} \right) - (3-\rho) \left(\frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \right)^2. \quad (3.8.7)$$

В силу возрастания функции $t/\sin t$ на интервале $(0, \pi/2)$ при $1/6 < \rho < 1/2$ верна оценка $(\pi\rho/\sin \pi\rho)^2 > \pi^2/9$. Следовательно, выполняются неравенства

$$\left(\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}\right)(3-\rho) > \frac{2.75\pi^2}{9} > 30, \quad \ln\left(\frac{\pi(3-\rho)}{\sin \pi\rho}\right) < \ln\left(2\pi\left(3-\frac{1}{6}\right)\right) < \ln 18 < 2.9. \quad (3.8.8)$$

Из (3.8.7) и (3.8.8) находим, что

$$\Phi(\rho) < 0.9 - \psi\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq 0.9 - \psi(4) < 0,$$

что и требовалось доказать. Неравенство (3.8.6) доказано, и доказательство вещественности всех корней $E_\rho(z, \mu)$ при $1/6 < \rho \leq 1/4$, $0 < \mu \leq 2/\rho$ завершено.

3.9. ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3.1.1 (СЛУЧАЙ $0 < \rho \leq 1/6$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.2

Согласно изложенному в разделе 3.2 для одновременного доказательства теорем 3.1.1 и 3.1.2 при $\rho \in (0, 1/6]$ требуется установить справедливость соотношений (3.2.1), (3.2.6), (3.2.7).

Начнем с доказательства соотношений (3.2.1). В свете теоремы 1.5.4 задача сводится к выводу неравенств

$$0.74\xi_n^{-\mu} < 2\rho\xi_n^{1-\mu} \left[\exp(\xi_n \cos \pi\rho) - \sum_{k=2}^{\left[\frac{1}{2\rho}\right]} \exp\left(\xi_n \cos(\pi(2k-1)\rho)\right) \right], \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}, \quad n \geq N_1(\rho),$$

$$0.74\xi_n^{-\lambda} + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 2\rho\xi_n^{1-\lambda} \left[\exp(\xi_n \cos \pi\rho) - \sum_{k=2}^{\left[\frac{1}{2\rho}\right]} \exp\left(\xi_n \cos(\pi(2k-1)\rho)\right) \right], \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{\rho}, \quad n \geq 1 + N_1(\rho).$$

Оценим сверху сумму экспонент $S_n = \sum_{k=2}^{\left[\frac{1}{2\rho}\right]} \exp\left(\xi_n \cos(\pi(2k-1)\rho)\right)$. Отношение (3.2.5) функций (3.2.4) с номерами $k+1$ и k равно ($x \geq \xi_{N_1}$)

$$\begin{aligned} \Delta_{k,\rho}(x) &= \exp(-2x \sin \pi\rho \sin 2\pi k\rho) \leq \exp(-2\xi_{N_1(\rho)} \sin \pi\rho \sin 2\pi k\rho) \leq \\ &\leq \exp(-2\pi(N_1(\rho) - \rho) \sin(2\pi k\rho)) \leq \exp(-2\pi(N_1(\rho) - \rho) \sin 2\pi\rho) \leq \\ &\leq \exp(-8\pi\rho(N_1(\rho) - \rho)) \leq \exp\left[-8\pi\rho\left(\frac{1}{3\rho} - 1 - \rho\right)\right] \leq \exp\left(-8\pi\left(\frac{1}{3} - \rho - \rho^2\right)\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-8\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{36}\right)\right) = \exp(-10\pi/9) < \frac{1}{26}. \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

При выводе (3.9.1) использовались следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \xi_n \sin \pi\rho &= \pi(n + \rho(\mu - 1)) > \pi(n - \rho), \\ \sin(2\pi k\rho) &\geq \min\left[\sin 2\pi\rho, \sin\left(2\pi\left(\frac{1}{2\rho} - 1\right)\rho\right)\right] = \sin 2\pi\rho, \quad 1 \leq k \leq \frac{1}{2\rho} - 1, \\ \sin(\pi t) &\geq 2t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2\pi\rho) \geq 4\rho, \quad 0 < \rho \leq 1/4. \end{aligned}$$

Из (3.9.1) видно, что при $x \geq \xi_{N_1}$ каждая последующая функция $\exp\left[x \cos(\pi(2k-1)\rho)\right]$ меньше предыдущей по крайней мере в 26 раз. Это соображение приводит к оценке

$$S_n < (1/25) \exp(\xi_n \cos \pi\rho)$$

и позволяет перейти к доказательству более простых неравенств

$$0.74\xi_n^{-\mu} < 1.92\rho\xi_n^{1-\mu} \exp(\xi_n \cos \pi\rho), \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}, \quad n \geq N_1(\rho), \quad (3.9.2)$$

$$0.74\xi_n^{-\lambda} + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} < 1.92\rho\xi_n^{1-\lambda} \exp(\xi_n \cos \pi\rho), \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{\rho}, \quad n \geq 1 + N_1(\rho). \quad (3.9.3)$$

Неравенство (3.9.2) эквивалентно следующему:

$$\frac{0.74}{1.92\rho\xi_n} < \exp(\xi_n \cos \pi\rho). \quad (3.9.4)$$

Имеем неравенство

$$\rho\xi_n = \frac{\pi\rho(n + \rho(\mu - 1))}{\sin \pi\rho} > n + \rho(\mu - 1) > n - \rho \geq 2 - \rho > 1, \quad (3.9.5)$$

поскольку $n \geq N_1(\rho) \geq 2$. Следовательно, левая часть (3.9.4) меньше 1, а правая заведомо превосходит 1. Неравенство (3.9.2) доказано.

Докажем неравенство (3.9.3). При $0 < \lambda \leq 1$ трудностей не возникает: левая часть (3.9.3) меньше 1.74, а правая превосходит

$$1.92\rho \exp(\xi_n \cos \pi\rho) > 1.92\rho\xi_n \cos(\pi\rho) > 1.92(n - \rho) \cos \pi\rho \geq 1.92(2 - \rho) \cos(\pi/6) > 2$$

и требуемое доказано (использовались оценки $e^t > t$ и (3.9.5)).

При $1 < \lambda \leq 1/\rho$ перепишем (3.9.3) в равносильной форме

$$0.74\Gamma(\lambda)\xi_n^{-\lambda} + 1 < 1.92\rho\Gamma(\lambda)\xi_n^{1-\lambda} \exp(\xi_n \cos \pi\rho).$$

По лемме 3.4.2 функция $\Gamma(\lambda)\xi^{-\lambda}$ убывает на отрезке $1 \leq \lambda \leq 1/\rho$, если $\xi > 1/\rho$. В нашей ситуации $\xi_n \geq 1/\rho$ (см. (3.9.5)) и, следовательно, $\Gamma(\lambda)\xi_n^{-\lambda} \leq \Gamma(1)\xi_n^{-1} \leq \frac{\rho}{2-\rho} \leq \frac{1/6}{2-1/6} < 0.1$. Таким образом, надо доказать, что

$$0.1 < \ln 1.92 + \ln \rho + \ln \Gamma(\lambda) + (1 - \lambda) \ln \xi_n + \xi_n \cos \pi\rho,$$

или (в более подробной записи с учетом неравенства $\ln 1.92 > 0.6$)

$$\begin{aligned} 0 &< 0.5 + \ln \rho + \ln \Gamma(a + 1) - a \ln \left(\frac{\pi(n + a\rho)}{\sin \pi\rho} \right) + \pi(n + a\rho) \operatorname{ctg} \pi\rho, \\ 0 &< a \leq \frac{1}{\rho} - 1, \quad n \geq 1 + \left[\frac{1}{3\rho} \right], \quad 0 < \rho \leq \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

Убедимся в том, что минимум правой части (3.9.6) по переменной a достигается при $a = \frac{1}{\rho} - 1$. Для этого достаточно проверить отрицательность производной

$$\begin{aligned} \psi(a + 1) - \ln \left(\frac{\pi(n + a\rho)}{\sin \pi\rho} \right) - \frac{a\rho}{n + a\rho} + \pi\rho \operatorname{ctg} \pi\rho &< 1 + \psi(a + 1) - \ln \left(\frac{\pi(n + a\rho)}{\sin \pi\rho} \right) < \\ &< 1 + \ln \frac{1}{\rho} - \ln \frac{\pi n}{\sin \pi\rho} = 1 + \ln \left(\frac{\sin \pi\rho}{\pi\rho} \right) - \ln n < 1 - \ln n < 0 \end{aligned}$$

(были использованы неравенства $t \operatorname{ctg} t < 1$, $0 < t < \pi/2$, $\psi(t) < \ln t$, $t > 0$, $n \geq 1 + \left[\frac{1}{3\rho} \right] \geq 3$).

Итак, осталось доказать (3.9.6) при $a = \frac{1}{\rho} - 1$, т. е.

$$0 < 0.5 + \ln \rho + \ln \Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \ln \left(\frac{\pi(n + 1 - \rho)}{\sin \pi\rho} \right) + \pi(n + 1 - \rho) \operatorname{ctg} \pi\rho. \quad (3.9.7)$$

Ясно, что $n + 1 - \rho > n > \frac{1}{3\rho}$. Покажем, что правая часть (3.9.7) уменьшится, если $n + 1 - \rho$ заменить меньшей величиной $\frac{1}{3\rho}$. Для этого проверим возрастание функции

$$u(t) = \pi t \operatorname{ctg} \pi\rho - \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \ln \left(\frac{\pi t}{\sin \pi\rho} \right)$$

на луче $2 \leq t < +\infty$ (содержащем луч $\left[\frac{1}{3\rho}, +\infty\right)$). Имеем неравенство

$$\begin{aligned} u'(t) &= \pi \operatorname{ctg} \pi \rho - \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \frac{1}{t} > \pi \operatorname{ctg} \pi \rho - \frac{1}{\rho t} = \frac{1}{\rho t} (t\pi \operatorname{ctg} \pi \rho - 1) > \\ &> \frac{1}{\rho t} \left(\frac{\pi t}{4} - 1\right) \geq \frac{1}{\rho t} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, (3.9.7) можно заменить следующим более сильным неравенством и доказывать именно его:

$$0 < 0.5 + \ln \rho + \ln \Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \ln\left(\frac{\pi}{3\rho \sin \pi \rho}\right) + \frac{\pi}{3\rho} \operatorname{ctg} \pi \rho, \quad 0 < \rho \leq \frac{1}{6}. \quad (3.9.8)$$

При $\rho = 1/6$ неравенство (3.9.8) выполняется — это проверяется непосредственно вычислением. Поэтому достаточно доказать убывание функции, стоящей в правой части (3.9.8). Производная этой функции равна

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \psi\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \ln\left(\frac{\pi}{3\rho \sin \pi \rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi \rho}\right) - \frac{\pi}{3} \left(\frac{\operatorname{ctg} \pi \rho}{\rho^2} + \frac{\pi}{\rho \sin^2 \pi \rho}\right).$$

Следовательно, надо проверить отрицательность функции

$$g(\rho) = \rho - \psi\left(\frac{1}{\rho}\right) + \ln\left(\frac{\pi}{3\rho \sin \pi \rho}\right) + (1 - \rho) \left(1 + \pi \rho \operatorname{ctg} \pi \rho\right) - \frac{\pi}{3} \left(\operatorname{ctg} \pi \rho + \frac{\pi \rho}{\sin^2 \pi \rho}\right).$$

Для ее оценки воспользуемся неравенствами $\psi(t) > \ln t - (2t - 1)^{-1}$ (лемма 3.4.1), $\pi \rho \operatorname{ctg} \pi \rho < 1$ и обозначим $h(\rho) = \pi / (3 \sin \pi \rho)$. Получим, что

$$g(\rho) < 2 - \rho + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)^{-1} + \ln h(\rho) - \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \pi \rho - \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} h(\rho). \quad (3.9.9)$$

Далее, воспользовавшись неравенствами $\pi \rho / \sin \pi \rho > 1$, $h(\rho) > 1$, $\ln h(\rho) < h(\rho) - 1$, из (3.9.9) находим, что

$$g(\rho) < 1 - \rho + \frac{\rho}{2 - \rho} - \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \pi \rho < 1 - \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \pi \rho < 0, \quad 0 < \rho \leq \frac{1}{6}.$$

Доказательство соотношений (3.2.1) при $n \geq \left[\frac{1}{3\rho}\right]$ завершено.

Приступим к доказательству соотношений (3.2.6), (3.2.7).

Лемма 3.9.1. При любых $\rho > 0$ и $\mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $n + \rho\mu > 1$, выполняется неравенство

$$\frac{R_n(\rho, \mu)}{R_{n+1}(\rho, \mu)} < \exp\left(-\frac{1}{\rho(n + \rho\mu)}\right).$$

Доказательство. Согласно определению величин $R_n(\rho, \mu)$ имеем равенство

$$\ln\left(\frac{R_{n+1}(\rho, \mu)}{R_n(\rho, \mu)}\right) = \ln \Gamma\left(\mu + \frac{n-1}{\rho}\right) - 2 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right) + \ln \Gamma\left(\mu + \frac{n+1}{\rho}\right). \quad (3.9.10)$$

Заметим, что если действительная функция f непрерывна на отрезке $[x - h, x + h]$ ($x \in \mathbb{R}$, $h > 0$), имеет на интервале $(x - h, x + h)$ производные до 4-й включительно и $f^{(4)}(t) > 0$ ($\forall t \in (x - h, x + h)$), то

$$f(x + h) - 2f(x) + f(x - h) > h^2 f''(x). \quad (3.9.11)$$

Действительно, применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x + h) = f(x) + hf(x) + (1/2)h^2 f''(x) + (1/6)h^3 f'''(x) + (1/24)h^4 f^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x, x + h),$$

$$f(x - h) = f(x) - hf(x) + (1/2)h^2 f''(x) - (1/6)h^3 f'''(x) + (1/24)h^4 f^{(4)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x - h, x).$$

Сложив оба эти равенства и вычтя из них $2f(x)$, получим равенство

$$f(x + h) - 2f(x) + f(x - h) = h^2 f''(x) + (1/24)h^4 (f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)). \quad (3.9.12)$$

Из (3.9.12) и положительности $f^{(4)}$ сразу же следует (3.9.11). В нашей ситуации $x = n/\rho$, $h = 1/\rho$, $f(t) = f_\mu(t) = \ln \Gamma(\mu + t) \in C^\infty(0, +\infty)$. Имеем соотношения

$$f_\mu''(t) = \psi'(\mu + t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu + t)^{-2}, \quad f_\mu^{(4)}(t) = 6 \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu + t)^{-4} > 0 \quad \forall t > 0. \quad (3.9.13)$$

Из (3.9.10), (3.9.11) и (3.9.13) находим, что $\ln(R_{n+1}(\rho, \mu)/R_n(\rho, \mu)) > \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu + n/\rho)^{-2}$. Это соотношение вместе с оценкой $\sum_{k=0}^{\infty} (k + a)^{-2} > \int_0^{+\infty} (u + a)^{-2} du = a^{-1}$ приводит к неравенству

$$\ln(R_{n+1}(\rho, \mu)/R_n(\rho, \mu)) > \rho^{-2}(\mu + n/\rho)^{-1} = \rho^{-1}(\rho\mu + n)^{-1},$$

которое после потенцирования дает утверждение леммы 3.9.1. $\square$

При $n = 1$ соотношение (3.2.6) доказано в лемме 3.3.1. Докажем (3.2.7). До конца этого параграфа будет иметь силу обозначение $A_k = \frac{1}{\Gamma(\mu + k/\rho)}$, в соответствии с чем

$$R_n = A_{n-1}/A_n, \quad E_\rho(-x; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k x^k. \quad (3.9.14)$$

Аргументы ρ, μ у величин A_k и R_n ставить не будем.

Имеем равенство

$$E_\rho(-\sqrt{2}R_1; \mu) = A_0 - A_1\sqrt{2}R_1 + 2A_1R_1^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k A_k (\sqrt{2}R_1)^k. \quad (3.9.15)$$

Последнее слагаемое в правой части (3.9.15) отрицательно: это следует из убывания последовательности $\{A_k(\sqrt{2}R_1)^k\}_{k=3}^{\infty}$, которое равносильно справедливости неравенства $\sqrt{2}R_1 < R_k$, $k \geq 3$. Докажем его. Из леммы 3.9.1, учитывая возрастание $\{R_k\}$, выводим неравенство $\frac{R_1}{R_k} < \frac{R_1}{R_2} < \exp(-(\rho(1 + \rho\mu))^{-1})s$. Но у нас $\rho\mu \leq 2$, $\rho \leq 1/6$, следовательно,

$$R_1/R_2 < \exp(-(3\rho)^{-1}) \leq e^{-2} < 0.14, \quad (3.9.16)$$

и требуемое неравенство доказано.

Отрицательность суммы $\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k A_k (\sqrt{2}R_1)^k$ влечет за собой оценку

$$E_\rho(-\sqrt{2}R_1, \mu) < A_0 - A_1\sqrt{2}R_1 + 2A_2R_1^2 = A_0 - \sqrt{2}A_0 + 2A_2(A_0/A_1)^2. \quad (3.9.17)$$

Умножив обе части (3.9.17) на $A_0^{-1} = \Gamma(\mu)$ и учитывая (3.9.16), находим, что

$$\Gamma(\mu)E_\rho(-\sqrt{2}R_1, \mu) < 1 - \sqrt{2} + 2A_0A_2A_1^{-2} = 1 - \sqrt{2} + 2(R_1/R_2) < 1 - \sqrt{2} + 0.28 < 0,$$

а это и требовалось доказать.

Докажем (3.2.6) при $n = 2$. Имеем соотношение

$$E_\rho(-R_2, \mu) = A_0 - A_1R_2 + A_2R_2^2 - A_3R_2^3 + A_4R_2^4 + \sum_{k=5}^{\infty} (-1)^k A_k R_2^k.$$

Ввиду убывания последовательности $\{A_k R_2^k\}_{k=5}^{\infty}$ сумма $\sum_{k=5}^{\infty} (-1)^k A_k R_2^k$ отрицательна, а так как $R_2 = A_1/A_2$, то $A_2R_2^2 - A_1R_2 = 0$. Следовательно,

$$E_\rho(-R_2, \mu) < A_0 - A_3R_2^3 + A_4R_2^4. \quad (3.9.18)$$

Разделив обе части неравенства (3.9.18) на $A_3R_2^3$, перепишем его в эквивалентной форме

$$A_3^{-1}R_2^{-3}E_\rho(-R_2, \mu) < -1 + (A_0/A_3)R_2^{-3} + (A_4/A_3)R_2.$$

Обозначим $B = (A_0/A_3)R_2^{-3} = A_0A_1^{-3}A_2^3A_3^{-1}$. Последнее равенство следует из определения величин A_k , откуда также видно, что $A_3/A_4 = R_4$. В соответствии со сказанным имеем соотношения

$$\begin{aligned} A_3^{-1}R_2^{-3}E_\rho(-R_2, \mu) &< -1 + B + R_2/R_4, \\ \ln B &= \ln \Gamma\left(\mu + \frac{3}{\rho}\right) - 3 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{2}{\rho}\right) + 3 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{1}{\rho}\right) - \ln \Gamma(\mu). \end{aligned} \quad (3.9.19)$$

По теореме о промежуточном значении, примененной к третьей разности функции $\ln \Gamma(z)$, взятой в точке μ с шагом $1/\rho$, при некотором $\xi \in (\mu, \mu + 3/\rho)$ выполняется равенство

$$\ln B = \rho^{-3}\psi''(\xi) = -2\rho^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \xi)^{-3}.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \ln B &< -2\rho^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu + 3/\rho)^{-3} < -2\rho^{-3} \int_0^{+\infty} (t + \mu + 3/\rho)^{-3} dt = \\ &= -\rho^{-3}(\mu + 3/\rho)^{-2} = -\rho^{-1}(\rho\mu + 3)^{-2}. \end{aligned} \quad (3.9.20)$$

Ввиду ограничений $\rho\mu \leq 2$ и $\rho \leq 1/6$ из (3.9.20) выводим оценку

$$B < \exp(-1/(25\rho)) \leq \exp(-6/25) < 0.8. \quad (3.9.21)$$

Согласно лемме 3.9.1 имеем неравенства

$$\begin{aligned} R_2/R_3 &< \exp(-(\rho(2 + \rho\mu))^{-1}) \leq \exp(-1/(4\rho)) \leq \exp(-1.5), \\ R_3/R_4 &< \exp(-(\rho(3 + \rho\mu))^{-1}) \leq \exp(-1/(5\rho)) \leq \exp(-1.2). \end{aligned} \quad (3.9.22)$$

Следовательно, $R_2/R_4 = (R_2/R_3)(R_3/R_4) < \exp(-1.5 - 1.2) = \exp(-2.7) < 0.1$. Отсюда и из (3.9.19), (3.9.21) получаем неравенство $A_3^{-1}R_2^{-3}E_\rho(-R_2, \mu) < -1 + 0.8 + 0.1 < 0$, т. е. $E_\rho(-R_2; \mu) < 0$, что и требовалось доказать.

Далее имеем равенство

$$E_\rho(-\sqrt{2}R_2; \mu) = A_0 - \sqrt{2}A_1R_2 + 2A_2R_2^2 - 2\sqrt{2}A_3R_2^3 + \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k A_k (\sqrt{2}R_2)^k.$$

Последовательность $\{A_k(\sqrt{2}R_2)^k\}_{k=4}^{\infty}$ убывает, поскольку отношение ее элементов с номерами k и $k+1$ равно $\sqrt{2}R_2/R_k \leq \sqrt{2}R_2/R_4$ и ввиду (3.9.22) меньше 1. Следовательно, сумма $\sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k A_k (\sqrt{2}R_2)^k$ положительна, и мы приходим к неравенству

$$E_\rho(-\sqrt{2}R_2; \mu) > -\sqrt{2}A_1R_2 + 2A_2R_2^2 - 2\sqrt{2}A_3R_2^3. \quad (3.9.23)$$

Разделив обе части (3.9.23) на $2A_2R_2^2$ и воспользовавшись тем, что $A_1/A_2 = R_2$, $A_2/A_3 = R_3$, получим неравенство

$$0.5A_2^{-1}R_2^{-2}E_\rho(-\sqrt{2}R_2; \mu) > 1 - 1/\sqrt{2} - \sqrt{2}R_2/R_3.$$

В этом случае ввиду ограничения $n \leq \left[\frac{1}{3\rho}\right] - 1$ выполняется неравенство $\rho \leq 1/9$. Поэтому по лемме 3.9.1 с учетом (3.9.22) имеем неравенство

$$R_2/R_3 \leq \exp(-1/(4\rho)) \leq \exp(-9/4) < 0.11.$$

Следовательно,

$$0.5A_2^{-1}R_2^{-2}E_\rho(-\sqrt{2}R_2; \mu) > 1 - 0.61\sqrt{2} > 0.$$

В случае $n = 2$ соотношения (3.2.6), (3.2.7) доказаны.

Докажем (3.2.7) при $n \geq 3$. В этом случае $\rho \leq 1/9$, так как только при таких значениях ρ возможно неравенство $n \leq N_1(\rho) = [1/(3\rho)]$. Отметим (это используется ниже), что при $0 < \rho \leq 1/9$, $0 < \mu \leq 2/\rho$, $3 \leq n \leq N_1(\rho)$ выполняется неравенство

$$R_n/R_{n+1} < 1/6. \quad (3.9.24)$$

Действительно, по лемме 3.9.1 имеем неравенство

$$R_n/R_{n+1} < \exp(-(\rho(n + \rho\mu))^{-1}) \leq \exp(-(\rho(n + 2))^{-1}) = \exp(-(2\rho + n\rho)^{-1}).$$

А так как $n\rho \leq 1/3$, $2\rho \leq 2/9$, то $R_n/R_{n+1} < \exp(-(1/3 + 2/9)^{-1}) = \exp(-1.8) < 1/6$. Соотношение (3.9.24) доказано.

Из разложения в степенной ряд функции Миттаг-Леффлера находим равенство

$$(-1)^n E_\rho(-\sqrt{2}R_n, \mu) = S_{n,0} - A_{n-1}(\sqrt{2}R_n)^{n-1} + A_n(\sqrt{2}R_n)^n - A_{n+1}(\sqrt{2}R_n)^{n+1} + S_{n,1},$$

$$\text{где } S_{n,0} = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k-n} A_k(\sqrt{2}R_n)^k, \quad S_{n,1} = \sum_{k=n+2}^{\infty} (-1)^{k-n} A_k(\sqrt{2}R_n)^k.$$

Докажем положительность сумм $S_{n,0}$ и $S_{n,1}$. Поскольку они являются знакопеременными и слагаемые с номерами $k = n \pm 2$ положительны, то достаточно установить возрастание последовательности $A_k(\sqrt{2}R_n)^k$ на участке $0 \leq k \leq n-2$ и ее убывание при $k \geq n+2$. Отношение элементов этой последовательности с номерами $k+1$ и k равно

$$d_k = A_{k+1}(\sqrt{2}R_n)^{k+1}/A_k(\sqrt{2}R_n)^k = \sqrt{2}R_n A_{k+1}/A_k = \sqrt{2}R_n/R_{k+1}. \quad (3.9.25)$$

Равенство (3.9.25) вместе с (3.9.24) и доказанным выше возрастанием величин R_k влечет за собой оценки

$$d_k > \sqrt{2} > 1, \quad 0 \leq k \leq n-2, \quad d_k \leq \sqrt{2}R_n/R_{n+1} < \sqrt{2}/6 < 1, \quad k \geq n+2,$$

которые и доказывают требуемое. Вследствие положительности сумм $S_{n,0}$ и $S_{n,1}$ имеем неравенство

$$(-1)^n E_\rho(-\sqrt{2}R_n, \mu) > -A_{n-1}(\sqrt{2}R_n)^{n-1} + A_n(\sqrt{2}R_n)^n - A_{n+1}(\sqrt{2}R_n)^{n+1}. \quad (3.9.26)$$

Разделив обе части (3.9.26) на $A_n(\sqrt{2}R_n)^n$ и учитывая, что $A_{n-1}/A_n = R_n$, $A_n/A_{n+1} = R_{n+1}$, $R_n/R_{n+1} < 1/6$, находим, что

$$(-1)^n A_n^{-1}(\sqrt{2}R_n)^{-n} E_\rho(-\sqrt{2}R_n, \mu) > 1 - 1/\sqrt{2} - \sqrt{2}R_n/R_{n+1} > 1 - 1/\sqrt{2} - \sqrt{2}/6 > 0.$$

Соотношения (3.2.7) полностью доказаны.

В дальнейшем потребуются еще одна лемма. Введем следующие обозначения:

$$u_{n,j} = R_{n+j}R_n^{-2}R_{n-j}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad u_n = u_{n,1}. \quad (3.9.27)$$

Отметим, что в силу вогнутости последовательности $\ln R_n = \ln \Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right) - \ln \Gamma\left(\mu + \frac{n-1}{\rho}\right)$ (это следует из отрицательности ψ'') выполняются неравенства

$$u_{n,j} < 1. \quad (3.9.28)$$

Лемма 3.9.2. При любых $\rho \leq 1/9$, $0 < \mu \leq 2/\rho$, $m \geq 5$ верно неравенство

$$u_{m+1}^3 < u_m.$$

Доказательство. По определению величин u_n и R_n имеет место представление

$$\frac{u_{m+1}^3}{u_m} = \left(\frac{R_{m+2}R_m}{R_{m+1}^2}\right)^3 \frac{R_m^2}{R_{m-1}R_{m+1}} = \left(\frac{A_{m+1}}{A_{m+2}}\right)^3 \left(\frac{A_m}{A_{m+1}}\right)^{-7} \left(\frac{A_{m-1}}{A_m}\right)^5 \left(\frac{A_{m-2}}{A_{m-1}}\right)^{-1}, \quad (3.9.29)$$

где $A_k = 1/\Gamma(\mu + k/\rho)$. Логарифмируя (3.9.29), находим, что

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{m+1}^3}{u_m}\right) &= 3 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{m+2}{\rho}\right) - 10 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{m+1}{\rho}\right) + \\ &\quad + 12 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{m}{\rho}\right) - 6 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{m-1}{\rho}\right) + \ln \Gamma\left(\mu + \frac{m-2}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (3.9.30)$$

Убедимся в справедливости следующего утверждения. Пусть $h, x \in \mathbb{R}$, $h > 0$, g — действительно-значная и четырежды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[x - 2h, x + 2h]$, $g^{(4)}$ положительна и убывает на этом отрезке. Тогда выполняется неравенство

$$3g(x + 2h) - 10g(x + h) + 12g(x) - 6g(x - h) + g(x - 2h) < 2h^3 g'''(x) + h^4 \left(\frac{4}{3} g^{(4)}(x) + \frac{2}{3} g^{(4)}(x - 2h) \right). \quad (3.9.31)$$

Действительно, согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа существуют числа $\xi_1, \eta_1 \in (x, x + 2h)$, $\xi_2, \eta_2 \in (x - 2h, x)$ такие, что верны равенства

$$\begin{aligned} g(x + 2h) &= g(x) + 2hg'(x) + 2h^2 g''(x) + (4/3)h^3 g'''(x) + (2/3)h^4 g^{(4)}(\eta_1), \\ g(x + h) &= g(x) + hg'(x) + (1/2)h^2 g''(x) + (1/6)h^3 g'''(x) + (1/24)h^4 g^{(4)}(\xi_1), \\ g(x - h) &= g(x) - hg'(x) + (1/2)h^2 g''(x) - (1/6)h^3 g'''(x) + (1/24)h^4 g^{(4)}(\xi_2), \\ g(x - 2h) &= g(x) - 2hg'(x) + 2h^2 g''(x) - (4/3)h^3 g'''(x) + (2/3)h^4 g^{(4)}(\eta_2). \end{aligned} \quad (3.9.32)$$

Из (3.9.32) находим равенство

$$\begin{aligned} 3g(x + 2h) - 10g(x + h) + 12g(x) - 6g(x - h) + g(x - 2h) &= \\ &= 2h^3 g'''(x) + h^4 (2g^{(4)}(\eta_1) - (5/12)g^{(4)}(\xi_1) - (1/4)g^{(4)}(\xi_2) + (2/3)g^{(4)}(\eta_2)). \end{aligned} \quad (3.9.33)$$

Оценив сверху множитель при h^4 в (3.9.33) с помощью неравенств

$$g^{(4)}(\eta_1), g^{(4)}(\xi_1) < g^{(4)}(x), \quad g^{(4)}(\eta_2), g^{(4)}(\xi_2) < g^{(4)}(x + 2h),$$

вытекающих из убывания $g^{(4)}$, приходим к (3.9.31).

Возьмем $g(t) = \ln \Gamma(t)$, $x = \mu + m/\rho$, $h = 1/\rho$. Поскольку $g'(t) = \psi(t)$, то четвертая производная $g^{(4)}(t) = \psi'''(t) = 6 \sum_{k=0}^{\infty} (k+t)^{-4}$ положительна и убывает. Поэтому из (3.9.30) и (3.9.31) находим, что

$$\ln \left(\frac{u_{m+1}^3}{u_m} \right) < \frac{2\psi''(x)}{\rho^3} + \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{4}{3}\psi'''(x) + \frac{2}{3}\psi''' \left(x - \frac{2}{\rho} \right) \right).$$

Используя неоднократно примененный выше стандартный метод оценки суммы ряда соответствующим интегралом, получаем неравенства

$$\psi''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(k+x)^3} < -\frac{1}{x^2} \quad \forall x > 0, \quad \psi'''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{(k+x)^4} < \frac{2}{(x-0.5)^3} \quad \forall x > 0.5,$$

$$\ln \left(\frac{u_{m+1}^3}{u_m} \right) < -\frac{2}{\rho^3 x^2} + \frac{4}{3\rho^4} \left(\frac{2}{(x-0.5)^3} + \frac{1}{(x-2/\rho-0.5)^3} \right).$$

Для завершения доказательства леммы осталось проверить отрицательность последнего выражения, т. е. установить справедливость неравенства

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x-0.5)^3} + \frac{1}{(x-2/\rho-0.5)^3} &< \frac{3\rho}{2x^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\rho(x-0.5)} \left(\frac{x}{x-0.5} \right)^2 + \frac{1}{\rho(x-2/\rho-0.5)} \left(\frac{x}{x-2/\rho-0.5} \right)^2 &< \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (3.9.34)$$

Функция $t/(t-a)$, $a > 0$, является убывающей на луче $t > a$, а ввиду условия $m \geq 5$ выполняется неравенство $x > 5/\rho \geq 45$. Следовательно, верны оценки $\rho(x-0.5) \geq 5 - 1/18$, $\rho(x-2/\rho-0.5) \geq 3 - 1/18$,

$$\frac{x}{x-0.5} < \frac{90}{89}, \quad \frac{x}{x-2/\rho-0.5} < \frac{5/\rho}{3/\rho-0.5} = \frac{5}{3-0.5\rho} \leq \frac{5}{3-1/18} = \frac{90}{53}.$$

Отсюда видно, что левая часть (3.9.34) не превосходит

$$\frac{2}{5-1/18} \left(\frac{90}{89} \right)^2 + \frac{1}{3-1/18} \left(\frac{90}{53} \right)^2 = \frac{146197013400}{104953669813} < \frac{3}{2}.$$

Лемма доказана. $\square$

Перейдем к финальной части доказательства теорем 3.1.1 и 3.1.2 — выводу равенств (3.2.6) при $3 \leq n \leq \left\lfloor \frac{1}{3\rho} \right\rfloor$.

Из разложения в степенной ряд функции Миттаг-Леффлера находим, что

$$E_\rho(-R_n, \mu) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k A_k R_n^k + (-1)^{n-1} (A_{n-1} R_n^{n-1} - A_n R_n^n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k A_k R_n^k. \quad (3.9.35)$$

Сгруппировав в (3.9.35) слагаемые с номерами $k = n - \nu - 1$ и $k = n + \nu$, $1 \leq \nu \leq n - 1$, и заметив, что согласно (3.9.14) верно равенство $A_{n-1} R_n^{n-1} - A_n R_n^n = A_n R_n^{n-1} (A_{n-1}/A_n - R_n) = 0$, приходим к представлению

$$E_\rho(-R_n, \mu) = (-1)^{n+1} \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} v_\nu(R_n) + \sum_{k=2n}^{\infty} (-1)^k A_k R_n^k, \quad (3.9.36)$$

где $v_\nu(x) = A_{n+\nu} x^{n+\nu} - A_{n-\nu-1} x^{n-\nu-1}$. Из (3.9.36) видно, что соотношение (3.2.6) означает положительность сумм

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} v_\nu(R_n) + (-1)^{n+1} \sum_{k=2n}^{\infty} (-1)^k A_k R_n^k. \quad (3.9.37)$$

Убедимся в том, что положительность сумм (3.9.37) следует из неравенств

$$0 < v_{\nu+1}(R_n) < v_\nu(R_n), \quad 1 \leq \nu \leq n-2, \quad 3 \leq n \leq N_1(\rho), \quad (3.9.38)$$

$$A_{2n} R_n^{2n} < v_{n-1}(R_n), \quad 3 \leq n \leq N_1(\rho). \quad (3.9.39)$$

Действительно, в силу (3.9.38) слагаемые в знакопеременной сумме $\sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} v_\nu(R_n)$ убывают по модулю, а первое — положительно. Поэтому $\sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} v_\nu(R_n) > 0$ при любых $n \in [3, N_1(\rho)]$.

Отсюда при нечетном n требуемое утверждение следует немедленно, так как $\sum_{k=2n}^{\infty} (-1)^k A_k R_n^k$ также является знакопеременным рядом с убывающими по модулю слагаемыми, первое из которых положительно. Если же n четно, то

$$\sum_{\nu=1}^{n-2} (-1)^{\nu-1} v_\nu(R_n) > 0, \quad (-1)^{n+1} \sum_{k=2n+1}^{\infty} (-1)^k A_k R_n^k > 0$$

в силу высказанных выше соображений. Затем ввиду (3.9.39)

$$(-1)^{n-2} v_{n-1}(R_n) + (-1)^{3n+1} A_{2n} R_n^{2n} = v_{n-1}(R_n) - A_{2n} R_n^{2n} > 0,$$

и снова получаем положительность суммы (3.9.37).

Итак, для завершения доказательства осталось вывести неравенства (3.9.38) и (3.9.39). Исходя из определения величин A_k, R_n и функций $v_\nu(x)$ видно, что положительность значений $v_\nu(R_n)$ при любых $n \in \mathbb{R}$ и $1 \leq \nu \leq n-1$ равносильна вогнутости последовательности $\{\ln R_n\}_{n=1}^{\infty}$. Действительно,

$$0 < v_\nu(R_n) \Leftrightarrow A_{n-\nu-1} R_n^{n-\nu-1} < A_{n+\nu} R_n^{n+\nu} \Leftrightarrow A_{n-\nu-1}/A_{n+\nu} < R_n^{2\nu+1}. \quad (3.9.40)$$

Из (3.9.14) вытекает представление

$$A_{n-\nu-1}/A_{n+\nu} = \prod_{p=n-\nu}^{n+\nu} R_p = R_n \prod_{j=1}^{\nu} (R_{n-j} R_{n+j}). \quad (3.9.41)$$

Ввиду (3.9.40) и (3.9.41) имеем неравенства

$$0 < v_\nu(R_n) \Leftrightarrow \prod_{j=1}^{\nu} (R_{n-j} R_{n+j}) < R_n^{2\nu} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\nu} (\ln R_{n+j} - 2 \ln R_n + \ln R_{n-j}) < 0; \quad (3.9.42)$$

последнее неравенство следует из вогнутости последовательности $\{\ln R_n\}$, а ее вогнутость была уже отмечена выше.

Докажем неравенства $v_{\nu+1}(R_n) < v_\nu(R_n)$, которые согласно определению функций v_ν равносильны следующим:

$$A_{n-\nu-1}R_N^{n-\nu-1} - A_{n-\nu-2}R_n^{n-\nu-2} < A_{n+\nu}R_n^{n+\nu} - A_{n+\nu+1}R_n^{n+\nu+1}. \quad (3.9.43)$$

Разделим обе части (3.9.43) на $A_{n+\nu}R_n^{n+\nu}$. Получившиеся неравенства после применения формул (3.9.41) переписываются в виде

$$(1 - R_{n-\nu-1}/R_n) \prod_{j=1}^{\nu} (R_{n+j}R_{n-j}R_n^{-2}) < 1 - R_n/R_{n+\nu+1}. \quad (3.9.44)$$

Введем обозначения

$$a_{n,\nu} = R_{n-\nu-1}/R_n, \quad b_{n,\nu} = R_n/R_{n+\nu+1}, \quad u_{n,p} = R_{n+p}R_n^{-2}R_{n-p}. \quad (3.9.45)$$

В соответствии с (3.9.45) неравенства (3.9.44) принимают вид

$$(1 - a_{n,\nu}) \prod_{j=1}^{\nu} u_{n,j} < 1 - b_{n,\nu}. \quad (3.9.46)$$

Разделим обе части (3.9.46) на $1 - b_{n,\nu}$ и, воспользовавшись тождеством

$$(1 - a)(1 - b)^{-1} = 1 + b(1 - b)^{-1}(1 - a/b)$$

(заметим, что $a_{n,\nu}/b_{n,\nu} = u_{n,\nu+1}$), придем к эквивалентным (3.9.44) неравенствам

$$(1 + b_{n,\nu}(1 - b_{n,\nu})^{-1}(1 - u_{n,\nu+1})) \prod_{j=1}^{\nu} u_{n,j} < 1, \quad (3.9.47)$$

которые и будем доказывать.

Установим сперва справедливость (3.9.47) при $3 \leq n \leq 12$ ($\forall \nu \in [1, n-2]$), а также при $\nu \geq 0.5n - 1$ ($\forall n \geq 12$). Покажем, что в этих случаях верны даже более сильные¹ неравенства, нежели (3.9.47):

$$(1 + b_{n,\nu}(1 - b_{n,\nu})^{-1})u_{n,1} < 1. \quad (3.9.48)$$

Оценим сверху при любых $n \in \mathbb{N}$ величины $u_{n,1} = R_{n+1}R_n^{-2}R_{n-1} = A_{n+1}^{-1}A_n^3A_{n-1}^{-3}A_{n-2}$, где, как и выше, $A_n = 1/\Gamma(\mu + n/\rho)$. Имеем равенство

$$\ln u_{n,1} = \ln \Gamma\left(\mu + \frac{n+1}{\rho}\right) - 3 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right) + 3 \ln \Gamma\left(\mu + \frac{n-1}{\rho}\right) - \ln \Gamma\left(\mu + \frac{n-2}{\rho}\right). \quad (3.9.49)$$

Применив формулу конечных приращений к 3-й разности (3.9.49), получим, что при некотором $\xi \in ((n-2)/\rho, (n+1)/\rho)$ выполняется равенство

$$\ln u_{n,1} = \rho^{-3} (\ln \Gamma(\mu + z))'''_{|z=\xi} = \rho^{-3} \psi'''(\mu + \xi) = -2\rho^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu + \xi)^{-3}.$$

Отсюда выводим оценку

$$\begin{aligned} \ln u_{n,1} &< -2\rho^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu + (n+1)/\rho)^{-3} < -2\rho^{-3} \int_0^{+\infty} (t + \mu + (n+1)/\rho)^{-3} dt = \\ &= -\rho^{-3} (\mu + (n+1)/\rho)^{-2} = -\rho^{-1} (\rho\mu + n + 1)^{-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.9.50)$$

Из (3.9.50) и ограничений $\rho\mu \leq 2$ и $\rho \leq 1/9$, при $n \leq 12$ получаем неравенство

$$u_{n,1} < \exp(-\rho^{-1}/225) \leq \exp(-9/225) = \exp(-1/25). \quad (3.9.51)$$

¹Согласно доказанному выше (см. (3.9.28)) $u_{n,j} < 1$, $1 \leq j \leq n-1$.

По лемме 3.9.1 при всех $n, \nu \in \mathbb{N}$ имеем неравенство

$$b_{n,\nu} = R_n/R_{n+\nu+1} \leq R_n/R_{n+2} = (R_n/R_{n+1})(R_{n+1}/R_{n+2}) < \\ < \exp\left(-\frac{1}{\rho(n+\rho\mu)} - \frac{1}{\rho(n+1+\rho\mu)}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{\rho(n+2)} - \frac{1}{\rho(n+3)}\right).$$

А так как $\rho n \leq \rho N_1(\rho) \leq 1/3$, $\rho \leq 1/9$, то

$$b_{n,\nu} < \exp\left(-\frac{1}{1/3+2/9} - \frac{1}{1/3+1/3}\right) = \exp(-1.8 - 1.5) = \exp(-3.3) < 1/26.$$

Отсюда находим, что

$$b_{n,\nu}(1 - b_{n,\nu})^{-1} < 1/25, \quad n \leq N_1(\rho), \quad 0 < \rho \leq 1/9, \quad 1 \leq \nu \leq n-2. \quad (3.9.52)$$

Из (3.9.52) и (3.9.51) заключаем, что левая часть (3.9.48) при $3 \leq n \leq 12$ не превосходит $(26/25)\exp(-1/25) < 1$, что и требовалось доказать.

Теперь пусть $\nu \geq 0.5n - 1$. Тогда согласно лемме 3.9.1, учитывая, что $\nu \leq n - 2$, получим неравенства

$$b_{n,\nu} = \prod_{j=0}^{\nu} (R_{n+j}/R_{n+j+1}) < \exp\left(-\frac{1}{\rho} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{n+j+\rho\mu}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\nu+1}{n+\nu+\rho\mu}\right) \leq \\ \leq \exp\left(-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\nu+1}{n+\nu+2}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{0.5n}{2n}\right) = \exp\left(-\frac{1}{4\rho}\right).$$

Таким образом, при $0.5n - 1 \leq \nu \leq n - 2$, верна оценка

$$b_{n,\nu}(1 - b_{n,\nu})^{-1} < 2\exp(-1/(4\rho)) < 2\rho \quad (3.9.53)$$

(при любом $t \geq 9$ имеем неравенство $t < \exp(t/4)$, откуда $\exp(-1/(4\rho)) < \rho$).

Оценим сверху $u_{n,1}$ немного иначе, чем в (3.9.51). Из (3.9.50) находим, что

$$u_{n,1} < \exp\left(-\frac{1}{\rho(n+3)^2}\right) = \exp\left(-\frac{\rho}{(n\rho+3\rho)^2}\right).$$

Вспоминая, что $n\rho \leq 1/3$ и $\rho \leq 1/9$, получаем, что $(n\rho+3\rho)^2 \leq 4/9$, а значит $u_{n,1} < \exp(-2\rho)$. Отсюда и из (3.9.53) выводим неравенство

$$(1 + b_{n,\nu}(1 - b_{n,\nu})^{-1})u_{n,1} < (1 + 2\rho)\exp(-2\rho) < 1,$$

что и доказывает (3.9.48) в рассматриваемом случае.

Итак, осталось доказать (3.9.47) в случае $n \geq 13$, $1 \leq \nu < 0.5n - 1$. В соответствии с (3.9.52) заменим неравенства (3.9.47) более сильными неравенствами

$$(1 + (1/25)(1 - u_{n,\nu+1})) \prod_{j=1}^{\nu} u_{n,j} < 1, \quad (3.9.54)$$

которые и будем доказывать. Начнем с вывода оценки

$$u_{n,\nu}^6 < u_{n,\nu+1} \quad 1 \leq \nu < 0.5n - 1, \quad n \geq 13. \quad (3.9.55)$$

Если $\nu = 1$, то $u_{n,2} = u_{n-1,1}u_{n,1}^2u_{n+1,1}$, $n-1 \geq 12$, и по лемме 3.9.2 (в этой лемме величины $u_{n,1}$ обозначены u_n), а также ввиду возрастания последовательности $\{u_{p,1}\}_{p=2}^{\infty}$ находим неравенство

$$u_{n,1}^6 < u_{n-1,1}u_{n,1}^3 < u_{n-1,1}u_{n,1}^2 \cdot u_{n+1,1} = u_{n,2}.$$

При $\nu = 1$ неравенство (3.9.55) доказано.

Если $\nu \geq 2$, то, воспользовавшись представлением

$$u_{n,\nu} = u_{n,1}^{\nu} \prod_{k=1}^{\nu-1} (u_{n-k,1}u_{n+k,1})^{\nu-k} \quad (3.9.56)$$

и леммой 3.9.2, получаем оценки¹

¹Здесь и далее постоянно имеем ввиду неравенства $u_{n,k} < 1$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$.

$$\begin{aligned}
u_{n,\nu}^6 &= u_{n,1}^{6\nu} \prod_{k=1}^{\nu-1} (u_{n-k,1} u_{n+k,1})^{6(\nu-k)} < u_{n,1}^{2\nu} \prod_{k=1}^{\nu-1} (u_{n-k,1} u_{n+k,1})^{2(\nu-k)} \cdot u_{n-\nu+1,1}^3 \cdot u_{n+\nu-1,1}^3 < \\
&< u_{n,1}^{2\nu} \prod_{k=1}^{\nu-1} (u_{n-k,1} u_{n+k,1})^{2(\nu-k)} \cdot (u_{n-\nu,1} u_{n+\nu,1}) \leq u_{n,1}^{\nu+1} \prod_{k=1}^{\nu} (u_{n-k,1} u_{n+k,1})^{\nu+1-k} = u_{n,\nu+1}.
\end{aligned}$$

В последнем переходе было использовано очевидное неравенство $\nu+1-k \leq 2(\nu-k)$, $0 \leq k \leq \nu-1$, $\nu \in \mathbb{N}$, а возможность применения леммы 3.9.2 обусловлена неравенством $n-\nu \geq 8$ (при $n=13$ это видно сразу, так как $\nu \leq 0.5n-1 \leq 6.5-1$, а значит $\nu \leq 5$, а при $n \geq 14$ в силу ограничения $\nu < 0.5n-1$ имеем неравенство $n-\nu \geq 0.5n+1 \geq 8$). Итак, неравенство (3.9.55) доказано. Оно дает возможность заменить неравенства (3.9.54) еще более сильными неравенствами

$$(1 + (1/25)(1 - u_{n,\nu}^6)) u_{n,\nu} < 1 \quad (3.9.57)$$

и доказывать именно их.

Рассмотрим функцию $f(t) = (1 + (1/25)(1 - t^6))t = (26/25)t - t^7/25$ на отрезке $0 \leq t \leq 1$. Ее производная $f'(t) = 26/25 - 7t^6/25$ при $t \in [0, 1]$ положительна. Следовательно, $f(t)$ возрастает на $[0, 1]$, а так как $f(1) = 1$, то $f(t) < 1$ ($\forall t \in (0, 1)$). Отсюда и из доказанных выше включений $u_{n,\nu} \in (0, 1)$ получаем (3.9.57). Доказательство соотношений (3.9.38) завершено.

Перейдем к доказательству неравенств (3.9.39), которые имеют вид

$$A_{2n}R_n^{2n} < A_{2n-1}R_n^{2n-1} - A_0. \quad (3.9.58)$$

Перенеся A_0 в левую часть и разделив (3.9.58) на $A_{2n-1}R_n^{2n-1}$, получим равносильные (3.9.58) неравенства $(A_0/A_{2n-1})R_n^{1-2n} + (A_{2n}/A_{2n-1})R_n < 1$, которые с учетом (3.9.14), (3.9.41), (3.9.45) записываются в следующей форме:

$$\prod_{j=1}^{n-1} u_{n,j} + R_n/R_{2n} < 1. \quad (3.9.59)$$

Представив $u_{n,j}$ по формуле (3.9.56) и отбросив множители, меньшие 1, а также учитывая возрастание $\{R_k\}$, усилим неравенство (3.9.59):

$$u_{n,1}^{\frac{n(n-1)}{2}} + R_n/R_{n+1} < 1. \quad (3.9.60)$$

Для оценки сверху левой части (3.9.60) (обозначим ее U_n) воспользуемся неравенствами (3.9.24) и (3.9.50). Получим, что

$$U_n < \frac{1}{6} + \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2\rho(n+1+\rho\mu)^2}\right) < \frac{1}{6} + \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2\rho(n+3)^2}\right).$$

А так как при $n \geq 3$ имеем $n(n-1)(n+3)^{-2} \geq 1/6$ и $\rho \leq 1/9$, то $U_n < 1/6 + e^{-\frac{9}{12}} < 1/6 + 1/2 < 1$, что и требовалось доказать. Равенства (3.2.6) полностью доказаны, и доказательство теорем 3.1.1 и 3.1.2 завершено.

3.10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.3

Вещественность, отрицательность и простота всех корней функции $E_{1/N}(z, N+1)$ следует из теоремы 3.1.1. Требуемые оценки сверху первых $\left[\frac{N}{3}\right] - 1$ корней при $N \geq 6$ доказаны в теореме 3.1.2, оценка сверху первого корня (при любом N) — следствие леммы 3.3.1. Осталось вывести

- 1) более точные, чем в теореме 3.1.2, оценки снизу первых $\left[\frac{N}{3}\right] - 1$ корней в случае $N \geq 6$,
- 2) более точные, чем в теореме 3.1.1 двусторонние оценки корней с номерами $n \geq [N/3]$.

Начнем с более просто решаемой задачи 2. Справедливо тождество

$$\frac{N}{2} E_{1/N}(-w^N; 1) = \sum_{k=1}^{[N/2]} \exp\left[w \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{N}\right)\right] \cos\left[w \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{N}\right)\right] + \delta_N e^{-w}, \quad (3.10.1)$$

где $\delta_N = 1/2$, если N нечетно, и $\delta_N = 0$, если N четно. Тождество (3.10.1) доказывается так. Если $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ — произвольная целая функция, $N \in \mathbb{N}$, то

$$N \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu N} w^{\nu N} = \sum_{k=1}^N f\left(w \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)\right). \quad (3.10.2)$$

Применив (3.10.2) к равенству

$$f(z) = \exp\left(z e^{-\pi i/N}\right) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \exp\left(-\frac{\pi i m}{N}\right),$$

получим следующее представление классической функции Миттаг-Леффлера порядка $1/N$:

$$N E_{1/N}(-w^N; 1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} w^{\nu N}}{(\nu N)!} = \sum_{k=1}^N \exp\left[w \exp\left(\frac{\pi i(2k-1)}{N}\right)\right].$$

Выделив в последней сумме комплексно сопряженные пары чисел $\exp\left(\frac{\pi i(2k-1)}{N}\right)$ и используя тождество $\exp(w e^{i\varphi}) + \exp(w e^{-i\varphi}) = 2 \exp(w \cos \varphi) \cos(w \sin \varphi)$, придем к (3.10.1).

Из теоремы 3.1.1 следует, что на каждом из интервалов

$$I_{N,n} = \left(-\left(\frac{\pi(n+1)}{\sin(\pi/N)}\right)^N, -\left(\frac{\pi n}{\sin(\pi/N)}\right)^N \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

функция $E_{1/N}(z; N+1)$ имеет ровно один корень. Здесь же требуется доказать, что при $n \geq [N/3]$ корень попадает на меньший интервал

$$I'_{N,n} = \left(-\left(\frac{\pi n + \pi/2 + x_n(N)}{\sin(\pi/N)}\right)^N, -\left(\frac{\pi n + \pi/2 - x_n(N)}{\sin(\pi/N)}\right)^N \right)$$

(величины $x_n(N)$ определены в формулировке теоремы 3.1.3). Заметим, что при каждом $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, последовательность $x_n(N)$ убывает и стремится к нулю. Ее максимальное значение, равное $x_{[N/3]}(N)$, обозначим y_N . Имеем оценку

$$y_N \leq y_3 = \exp(-\pi/\sqrt{3}) < 0.164, \quad 3 \leq N \leq 11. \quad (3.10.3)$$

При $N \geq 12$ вследствие неравенства $\sin(2\pi/N) \geq 6/N$ верна оценка

$$\begin{aligned} y_N &\leq 1.01 \exp\left(-2\pi \left[\frac{N}{3}\right] \frac{6}{N}\right) \leq 1.01 \exp\left(\frac{-12\pi(N-2)}{3N}\right) = \\ &= 1.01 \exp\left(\frac{-4\pi(N-2)}{N}\right) \leq 1.01 \exp\left(\frac{-40\pi}{12}\right) < 1.01 e^{-10.47} < e^{-10.46}. \end{aligned} \quad (3.10.4)$$

Из (3.10.3), (3.10.4) видно, что наибольшее значение $x_n(N)$ при $N \geq 3, n \geq \left[\frac{N}{3}\right]$ равно $e^{-\pi/\sqrt{3}} < 0.164$. Отсюда следует включение

$$I'_{N,n} \subset I_{N,n} \quad \forall N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, N \geq 3, n \geq [N/3].$$

Немного отвлечемся от доказательства теоремы, чтобы сравнить длины интервалов $I_{N,n}$ и $I'_{N,n}$. Нетрудно убедиться в справедливости асимптотик

$$|I_{N,n}| \sim (Nn)^N \left(\exp\left(\frac{N}{n}\right) - 1 \right), \quad N \rightarrow \infty, \quad n \geq N/3,$$

$$|I'_{N,n}| \sim N^{N+1} n^{N-1} \exp\left(-\frac{4\pi^2 n}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{N} \rightarrow \infty.$$

Отсюда видно, что длина $I_{N,n}$ стремится к ∞ , тогда как длина $I'_{N,n}$ стремится к нулю, если $n \geq (N \ln N)^2$, $N \rightarrow \infty$.

Продолжим доказательство теоремы. Введем обозначение

$$w_n^\pm(N) = \left(\pi n + \frac{\pi}{2} \pm x_n(N) \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{N} \right).$$

Для доказательства существования корня функции $E_{1/N}(z; N+1) \equiv (E_{1/N}(z, 1) - 1)/z$ на каждом из интервалов $I'_{N,n}$, достаточно проверить, что функция

$$F_N(w) = \frac{N}{2} (E_{1/N}(-w^N; 1) - 1)$$

имеет разные знаки в точках $w_n^-(N)$ и $w_n^+(N)$ при $n \geq [N/3]$. Имеем соотношения

$$\cos \left(w_n^\pm(N) \sin \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) = \mp (-1)^n \sin(x_n(N)). \quad (3.10.5)$$

Сначала рассмотрим значения $N \in [3, 6]$. Оценивая модули произведения экспонент с отрицательными показателями на косинусы единицей, получаем, что

$$\Delta_N(w) \equiv \left| F_N(w) - \exp \left(w \cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) \cos \left(w \sin \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) \right| < N - 1. \quad (3.10.6)$$

Соотношения (3.10.5), (3.10.6) и представление (3.10.1) убеждают нас в том, что различие знаков чисел $F_N(w_n^\pm(N))$ следует из неравенства

$$N - 1 \leq \sin(x_n(N)) \exp \left(w_n^\pm(N) \cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right).$$

Поскольку $w_n^-(N) < w_n^+(N)$, то достаточно доказать, что

$$(N - 1) \exp \left(-w_n^-(N) \cos \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) < \sin x_n(N).$$

Воспользовавшись оценкой $x_n(N) < 0.17$, получаем неравенства $\sin(x_n(N)) > (3/\pi)x_n(N)$, $w_n^-(N) \cos \left(\frac{\pi}{N} \right) > \left(\pi n + \frac{\pi}{2} - 0.17 \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{N} \right) > (\pi n + 1.4) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{N} \right)$. Поэтому задача сводится к доказательству неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} (N - 1) \exp \left(-\pi n \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) \exp \left(-1.4 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{N} \right) \right) < x_n(N) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\pi(N - 1)}{3} < \exp \left(1.4 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{N} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.10.7)$$

Справедливость (3.10.7) при $N = 3, 4, 5, 6$ проверяется непосредственными вычислениями. Двусторонние оценки корней при $3 \leq N \leq 6$ доказаны.

При $N > 6$ оценка $\Delta_N(w)$ делается иначе. Имеем неравенства

$$|\delta_N e^{-w} - N/2| \leq N/2, \quad (3.10.8)$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=2}^{[N/2]} \exp \left(w \cos \left(\frac{\pi(2k-1)}{N} \right) \right) \cos \left(w \sin \left(\frac{\pi(2k-1)}{N} \right) \right) \right| &\leq \\ &\leq \sum_{k=2}^{[N/2]} \exp \left(w \cos \left(\frac{\pi(2k-1)}{N} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.10.9)$$

Отношение слагаемых с номерами $k+1$ и k в последней сумме экспонент равно

$$\begin{aligned} \omega_{N,k}(w) &= \exp \left[w \left(\cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{N} \right) - \cos \left(\frac{\pi(2k-1)}{N} \right) \right) \right] = \\ &= \exp \left(-2w \sin \left(\frac{\pi}{N} \right) \sin \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.10.10)$$

Имеем неравенства

$$w_n^\pm \sin \left(\frac{\pi}{N} \right) > \pi n + 1.4. \quad (3.10.11)$$

Следовательно, при $w \geq w_{[N/3]}^-(N)$, $1 \leq k \leq [N/2] - 1$, верно неравенство

$$\begin{aligned} \omega_{N,k}(w) &< \exp\left(-2\pi \left[\frac{N}{3}\right] \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-2\pi \left[\frac{N}{3}\right] \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{8\pi}{N} \left[\frac{N}{3}\right]\right). \end{aligned} \quad (3.10.12)$$

Были использованы неравенства $\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \geq \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$, $1 \leq k \leq \left[\frac{N}{3}\right] - 1$, $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Поскольку $n \geq \left[\frac{N}{3}\right]$, а при $N \geq 7$ имеем $\frac{8}{N} \left[\frac{N}{3}\right] \geq 2$, то из (3.10.12) находим, что

$$\omega_{N,k}(w) < \exp(-2\pi) < \frac{1}{535}, \quad w \geq w_{[N/3]}^-(N). \quad (3.10.13)$$

Из (3.10.13), (3.10.10) вытекает следующая оценка суммы (3.10.9):

$$\sum_{k=2}^{[N/2]} \exp\left(w \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{N}\right)\right) < \left(1 + \frac{1}{534}\right) \exp\left(w \cos\left(\frac{3\pi}{N}\right)\right), \quad w \geq w_{[N/3]}^-(N). \quad (3.10.14)$$

Из (3.10.1), (3.10.8), (3.10.14) выводим оценку

$$\Delta_N(w) \leq \frac{N}{2} + \left(1 + \frac{1}{534}\right) \exp\left(w \cos\left(\frac{3\pi}{N}\right)\right), \quad N \geq 7, w \geq w_{[N/3]}^-(N). \quad (3.10.15)$$

Теперь требуется получить оценку вида $N/2 < c_N \exp(w \cos(3\pi/N))$, в которой постоянная c_N «невелика». Случай $N = 7$ рассмотрим отдельно. Ясно, что можно взять $c_7 = 3.5 \exp\left(-w_2^-(7) \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right)$. Ввиду (3.10.11) имеем соотношение

$$c_7 < 3.5 \exp\left[-\frac{(2\pi + 1.4) \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right] = 3.5 \exp\left(-\frac{\pi + 0.7}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}\right) < 0.098.$$

Отсюда и из (3.10.15) находим, что

$$\Delta_7(w) < 1.1 \exp\left(w \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right), \quad w \geq w_2^-(7). \quad (3.10.16)$$

Из (3.10.16), (3.10.5), (3.10.6) заключаем, что различие знаков чисел $F_7(w_n^\pm(7))$ при $n \geq 2$ следует из неравенства

$$\begin{aligned} 1.1 \exp\left(w_n^\pm(7) \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right) &\leq \sin(x_n(7)) \exp\left(w_n^\pm(7) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right), \quad n \geq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1.1 \exp\left(-2w_n^\pm(7) \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) \leq \sin(x_n(7)), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Применив оценку снизу (3.10.11), приходим к задаче доказательства неравенства

$$\begin{aligned} 1.1 \exp\left(-(2\pi n + 2.8) \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) &\leq \sin(x_n(7)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1.1 x_n(7) \exp\left(-2.8 \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) \leq \sin(x_n(7)), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Поскольку $\sin(2\pi/7) > 4/7$, то остается доказать, что

$$1.1 e^{-1.6} < \frac{\sin x_n(7)}{x_n(7)}. \quad (3.10.17)$$

При $N \geq 7$, $n \geq [N/3]$, имеем оценку

$$x_n(N) \leq 1.01 \exp\left(-2\pi \left[\frac{N}{3}\right] \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right) \leq 1.01 \exp\left(-\frac{8\pi}{N} \left[\frac{N}{3}\right]\right) \leq 1.01 e^{-2\pi} < \frac{1}{500}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\sin x_n(N)}{x_n(N)} \geq 1 - \frac{x_n^2(N)}{6} > 1 - \frac{4 \cdot 10^{-6}}{6} > 1 - 10^{-6}, \quad N \geq 7, \quad n \geq [N/3]. \quad (3.10.18)$$

Из (3.10.18) видно, что неравенство (3.10.17) верно. Двусторонние оценки корней в случае $N = 7, n \geq 2$, доказаны.

Далее $N \geq 8$. В качестве c_N можно взять

$$c_N = \frac{N}{2} \exp \left(-w_{[N/3]}^-(N) \cos \left(\frac{3\pi}{N} \right) \right) < \frac{N}{2} \exp \left(-\frac{\pi [N/3] \cos(3\pi/N)}{\sin(\pi/N)} \right).$$

Поскольку $\cos \left(\frac{3\pi}{N} \right) / \sin \left(\frac{\pi}{N} \right) \geq 1$ при $N \geq 8$, справедливо неравенство

$$c_N \leq \frac{N}{2} \exp \left(-\pi \left[\frac{N}{3} \right] \right) \leq 4e^{-2\pi} < \frac{4}{535}.$$

Отсюда и из (3.10.15) находим неравенство

$$\Delta_N(w) < \left(1 + \frac{1}{106} \right) \exp \left(w \cos \left(\frac{3\pi}{N} \right) \right), \quad N \geq 8, \quad w \geq w_{[N/3]}^-(N). \quad (3.10.19)$$

Таким образом, для доказательства различия знаков чисел $F_N(w_n^\pm(N))$ достаточно вывести неравенство

$$\begin{aligned} 1.01 \exp \left(w_n^\pm(N) \cos \left(\frac{3\pi}{N} \right) \right) &< \sin(x_n(N)) \exp(w_n^\pm(N) \cos(\frac{\pi}{N})) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1.01 \exp \left(-2w_n^\pm(N) \sin \left(\frac{\pi}{N} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) < \sin(x_n(N)). \end{aligned}$$

Применив оценку снизу (3.10.11), приходим к задаче доказательства неравенства

$$1.01 \exp \left(-(2\pi n + 2.8) \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) < \sin(x_n(N)).$$

Используя определение величины $x_n(N)$, при $8 \leq N \leq 1400$ заменяем это неравенство следующим:

$$1.01 \exp \left(-2.8 \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) < \frac{\sin x_n(N)}{x_n(N)}. \quad (3.10.20)$$

Поскольку $\sin(2\pi/N) > 4/N$, $N > 4$, то левая часть (3.10.20) при $8 \leq N \leq 560$ меньше $1.01 \exp(-0.02) < \exp(-0.01) < 0.991$, а правая часть (3.10.20) согласно (3.10.18) превосходит 0.999. Требуемое неравенство доказано. При $560 < N \leq 1400$, воспользовавшись более точной оценкой $\sin(2\pi/N) > \frac{6}{N}$, $N > 12$, получаем, что левая часть (3.10.20) меньше $1.01 \exp(-0.012) < \exp(-0.02)$, что опять-таки меньше правой части. Таким образом, при $8 \leq N \leq 1400$ двусторонние оценки корней функции $E_{1/N}(z; N+1)$ с порядковыми номерами $n \geq [N/3]$ доказаны.

В случае $N > 1400$ не огрубляем оценку (3.10.19) и приходим к задаче доказательства неравенства

$$\left(1 + \frac{1}{106} \right) \exp \left(-(2\pi n + 2.8) \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) \leq \sin(x_n(N)).$$

Используя определение величины $x_n(N)$, переходим к равносильному неравенству

$$\frac{107}{106 \cdot 1.01} \exp \left(-2.8 \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \right) < \frac{\sin x_n(N)}{x_n(N)}. \quad (3.10.21)$$

Левая часть (3.10.21) меньше $\frac{107}{107.06} < 1 - 10^{-4}$, что меньше правой части — см. (3.10.18). Вывод двусторонних оценок корней $E_{1/N}(z; N+1)$ с номерами $n \geq [N/3]$ завершен.

Перейдем к выводу оценок снизу первых $[N/3] - 1$ корней при $N \geq 6$. Требуемая оценка снизу первого корня сразу же следует из леммы 3.3.3, если взять $\varepsilon = 1.5R_1/R_2$. Надо только проверить справедливость неравенства

$$\frac{R_1}{R_2} < \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} \Leftrightarrow (1+\varepsilon)^2 < 1.5 \Leftrightarrow 2\varepsilon + \varepsilon^2 < 0.5. \quad (3.10.22)$$

Имеем оценку

$$\frac{R_1(N)}{R_2(N)} = \prod_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2N-k}{3N-k} \right) < \left(\frac{2}{3} \right)^N \leq \left(\frac{2}{3} \right)^6 < 0.1, \quad N \geq 6.$$

Следовательно, $\varepsilon < 0.15$, $2\varepsilon + \varepsilon^2 < 0.4$, и неравенство (3.10.22) выполняется. Оценка снизу первого корня доказана.

Выведем оценку снизу второго корня (тогда $N \geq 9$). Если F — функция из леммы 3.3.1,

$$\varepsilon > 0, \quad R_2(1+\varepsilon) < R_5, \quad (3.10.23)$$

то

$$F(-R_2(1+\varepsilon)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k R_2^k (1+\varepsilon)^k > -A_1 R_2(1+\varepsilon) + A_2 R_2^2 (1+\varepsilon)^2 - A_3 R_2^3 (1+\varepsilon)^3,$$

поскольку модули слагаемых знакопеременной суммы $\sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k A_k R_2^k (1+\varepsilon)^k$ убывают, а значит сумма положительна (отношение слагаемых с номерами $k+1$ и k равно $\frac{R_2(1+\varepsilon)}{R_{k+1}} \leq \frac{R_2(1+\varepsilon)}{R_5} < 1$ в силу (3.10.23)). Если взять $\varepsilon = 1.5 \frac{R_2}{R_3}$, то получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{F(-R_2(1+\varepsilon))}{A_2 R_2^2} &> -\frac{A_1(1+\varepsilon)}{A_2 R_2} + (1+\varepsilon)^2 - \frac{A_3}{A_2} R_2(1+\varepsilon)^3 = -(1+\varepsilon) + (1+\varepsilon)^2 - \\ &- \frac{R_2}{R_3} (1+\varepsilon)^3 = \varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{2}{3} \varepsilon (1+\varepsilon)^3 = \varepsilon \left(\frac{1}{3} - \varepsilon - 2\varepsilon^2 - \frac{2}{3} \varepsilon^3 \right). \end{aligned} \quad (3.10.24)$$

Наложим на ε ограничение

$$\varepsilon \leq 0.2 \Leftrightarrow 7.5R_2 \leq R_3. \quad (3.10.25)$$

Ввиду монотонности R_n это условие сильнее, чем в (3.10.23). Из (3.10.24), (3.10.25) сразу же следует положительность $F(-R_2(1+\varepsilon))$.

Проверим, что для величин $R_n(N)$, определенных перед формулировкой теоремы 3.1.3, неравенство $7.5R_2(N) \leq R_3(N)$ выполняется при $N \geq 9$, а значит,

$$E_{1/N} \left(-R_2 \left(1 + \frac{3R_2}{2R_3} \right); N+1 \right) > 0.$$

Имеем неравенство

$$\frac{R_2(N)}{R_3(N)} = \prod_{k=0}^{N-1} \left(\frac{3N-k}{4N-k} \right) < \left(\frac{3}{4} \right)^N \leq \left(\frac{3}{4} \right)^9 < 0.1.$$

Оценка снизу второго корня этим доказана, так как согласно (3.2.6)

$$E_{1/N}(-R_2; N+1) < 0.$$

Далее $3 \leq n \leq [N/3] - 1$ (n — порядковый номер корня) и, естественно, $N \geq 12$. До конца этого параграфа число N считаем фиксированным и зависимость от него различных величин подчеркивать не будем. Положим

$$E_{1/N}(z; N+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(kN+N)!} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k.$$

Ясно, что $R_k = A_{k-1}/A_k$, $k \in \mathbb{N}$. Введем также обозначение

$$v_{n,k}(x) = A_{n+k} x^{n+k} - A_{n-k-1} x^{n-k-1}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Лемма 3.10.1. При любом $x \in [R_n, R_{n+1})$, $n \geq 3$, последовательность $v_{n,k}(x)$ убывает, когда индекс k меняется от 1 до $n-1$. Кроме того, верно неравенство

$$A_{2n}x^{2n} < v_{n,n-1}(x). \quad (3.10.26)$$

Доказательство начнем с вывода неравенства

$$\begin{aligned} v_{n,k+1}(x) < v_{n,k}(x), \quad 1 \leq k \leq n-2, \quad R_n \leq x < R_{n+1} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_{n-k-1}x^{n-k-1} - A_{n-k-2}x^{n-k-2} < A_{n+k}x^{n+k} - A_{n+k+1}x^{n+k+1}. \end{aligned} \quad (3.10.27)$$

Введем еще одно обозначение:

$$u_{n,k} = R_{n-k}R_n^{-2}R_{n+k} = \prod_{j=1}^N \frac{(N(n-k)+j)(N(n+k)+j)}{(Nn+j)^2} = \prod_{j=1}^N \left[1 - \left(\frac{kN}{Nn+j} \right)^2 \right]. \quad (3.10.28)$$

Тогда

$$\frac{A_{n-k-1}}{A_{n+k}R_n^{2k+1}} = R_n^{-2k-1} \prod_{m=n-k}^{n+k} R_m = \prod_{j=1}^k (R_{n-j}R_n^{-2}R_{n+j}) = \prod_{j=1}^k u_{n,j}. \quad (3.10.29)$$

Из (3.10.29) следует, что неравенство (3.10.27) после деления обеих его частей на $A_{n+k}x^{n+k}$ записывается в следующей равносильной форме:

$$\begin{aligned} \frac{A_{n-k-1}}{A_{n+k}x^{2k+1}} - \frac{A_{n-k-2}}{A_{n+k}x^{2k+2}} < 1 - \frac{x A_{n+k+1}}{A_{n+k}} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{R_n}{x} \right)^{2k+1} \frac{A_{n-k-1}}{A_{n+k}R_n^{2k+1}} \left(1 - \frac{A_{n-k-2}}{A_{n-k-1}x} \right) < 1 - \frac{x}{R_{n+k+1}} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{R_{n-k-1}}{x} \right) \prod_{j=1}^k u_{n,j} < \left(1 - \frac{x}{R_{n+k+1}} \right) < \left(1 - \frac{x}{R_{n+k+1}} \right) \left(\frac{x}{R_n} \right)^{2k+1}. \end{aligned}$$

Обозначив $\delta_{n,k}(x) = (1 - R_{n-k-1}/x)(1 - x/R_{n+k+1})^{-1}$, убеждаемся в том, что надлежит доказать неравенство

$$\delta_{n,k}(x) \prod_{j=1}^k u_{n,j} < \left(\frac{x}{R_n} \right)^{2k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-2, \quad R_n \leq x < R_{n+1}. \quad (3.10.30)$$

Оценим сверху функцию $\delta_{n,k}(x)$. Имеем соотношения

$$\begin{aligned} \delta_{n,k}(x) - 1 &= \frac{1 - R_{n-k-1}/x}{1 - x/R_{n+k+1}} - 1 = \frac{x/R_{n+k+1} - R_{n-k-1}/x}{1 - x/R_{n+k+1}} = \\ &= \frac{1 - R_{n-k-1}x^{-2}R_{n+k+1}}{R_{n+k+1}/x - 1} = \frac{1 - (R_n/x)^2 u_{n,k+1}}{R_{n+k+1}/x - 1} < \frac{1 - (R_n/x)^2 u_{n,k+1}}{R_{n+2}/R_{n+1} - 1}. \end{aligned} \quad (3.10.31)$$

Имеем далее ($n \leq [N/3] - 1$, $N \geq 12$)

$$\begin{aligned} \frac{R_{n+2}}{R_{n+1}} &= \prod_{j=0}^{N-1} \left(\frac{(n+3)N-j}{(n+2)N-j} \right) > \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^N > \left(\frac{N/3+2}{N/3+1} \right)^N = \\ &= \left(\frac{N+6}{N+3} \right)^N \geq \left(\frac{18}{15} \right)^{12} > 8 \end{aligned} \quad (3.10.32)$$

(было использовано убывание функций $(t+1)/t$ и $((t+6)/(t+3))^t$ на луче $0 < t < +\infty$). Введем переменную $y = x/R_n \geq 1$ и согласно (3.10.31), (3.10.32) заменим неравенство (3.10.30) следующим более сильным:

$$\left(1 + \frac{1 - y^{-2}u_{n,k+1}}{7} \right) \prod_{j=1}^k u_{n,j} \leq y^{2k+1}. \quad (3.10.33)$$

Заметим, что неравенство (3.10.33) достаточно доказать лишь при $y = 1$, поскольку производная его правой части $(2k+1)y^2k$ больше производной левой части, равной

$$\frac{2y^{-3}u_{n,k+1}}{7} \prod_{j=1}^k u_{n,j} < \frac{2y^{-3}}{7} \leq \frac{2}{7}.$$

Из (3.10.33) следует оценка

$$u_{n,k} < \left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2\right)^N < \exp\left(-\frac{k^2N}{(n+1)^2}\right), \quad (3.10.34)$$

откуда сразу же видно, что $u_{n,k} < 1$. Таким образом, приходим к задаче доказательства неравенства

$$\left(1 + \frac{1 - u_{n,k+1}}{7}\right) \prod_{j=1}^k u_{n,j} \leq 1. \quad (3.10.35)$$

Если $k \geq n/4$, $n \geq 3$, то из (3.10.34) находим, что $(n \geq 12 \Rightarrow N/6 \geq 2)$, что

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k u_{n,j} &< \exp\left(-\frac{N}{(n+1)^2} \sum_{j=1}^k j^2\right) = \exp\left(-\frac{N(2k+1)k(k+1)}{6(n+1)^2}\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{(n/2+1)(n/2)(n/4+1)}{(n+1)^2}\right) = \exp\left(-\frac{(n+2)(n+4)n}{16(n+1)^2}\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{n+2}{16}\right) \leq \exp\left(-\frac{5}{16}\right). \end{aligned} \quad (3.10.36)$$

Следовательно, левая часть (3.10.35) меньше $\left(1 + \frac{1}{7}\right) \exp\left(-\frac{5}{16}\right) < \exp\left(\frac{1}{7} - \frac{5}{16}\right) < 1$ и требуемое доказано.

Если $1 \leq k < n/4$, то неравенство (3.10.35) заменяем более сильным, но более простым неравенством

$$\left(1 + \frac{1 - u_{n,k+1}}{7}\right) u_{n,k} \leq 1, \quad (3.10.37)$$

и выводим оценку

$$u_{n,k}^5 < u_{n,k+1}, \quad 1 \leq k < n/4. \quad (3.10.38)$$

Из (3.10.38) сразу же получаем (3.10.37), поскольку функция $u^{1/5} \left(1 + \frac{1-u}{7}\right)$ на отрезке $[0, 1]$ не превосходит 1.

Итак, для завершения доказательства первой части леммы осталось вывести оценку (3.10.38). Из (3.10.28) находим равенство

$$\frac{u_{n,k}^5}{u_{n,k+1}} = \prod_{j=1}^N \frac{(N(n-k)+j)^5 (N(n+k)+j)^5}{(N(n-k-1)+j) (Nn+j)^8 (N(n+k+1)+j)}. \quad (3.10.39)$$

Докажем, что каждый сомножитель произведения в (3.10.39) меньше 1, т. е.

$$\frac{(N(n-k)+j)^5 (N(n+k)+j)^5}{(N(n-k-1)+j) (Nn+j)^8 (N(n+k+1)+j)} < 1, \quad 1 \leq j \leq N, 1 \leq k < n/4.$$

Тогда все произведение меньше 1, что и означает справедливость неравенства (3.10.38). Обозначив $Nn+j$ через t , а Nk — через τ , убеждаемся в том, что достаточно проверить неравенство

$$(t^2 - \tau^2)^5 < t^8(t - \tau - N)(t + \tau + N), \quad N \leq \tau \leq t/4. \quad (3.10.40)$$

Правая часть (3.10.40) равна $t^8(t^2 - (\tau + N)^2) \geq t^8(t^2 - 4\tau^2)$. Поэтому достаточно доказать более сильное неравенство

$$\begin{aligned} t^{10} - 5t^8\tau^2 + 10t^6\tau^4 - 10t^4\tau^6 + 5t^2\tau^8 - \tau^{10} &< t^{10} - 4t^8\tau^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10t^6\tau^4 - 10t^4\tau^6 + 5t^2\tau^8 - \tau^{10} < t^8\tau^2. \end{aligned} \quad (3.10.41)$$

Отбросив в левой части (3.10.41) отрицательное слагаемое $-\tau^{10}$ и разделив обе части (3.10.41) на $t^2\tau^2$, придем к более сильному, но более простому неравенству

$$10t^4\tau^2 - 10t^2\tau^4 + 5\tau^6 < t^6. \quad (3.10.42)$$

Поскольку $\tau \leq t/4$, то левая часть (3.10.42) меньше $10t^4\tau^2 = t^6 \cdot 10(\tau/t)^4 \leq (10/16)t^6 < t^6$, что и требовалось доказать. Первая часть леммы доказана.

Докажем неравенство (3.10.26), которое согласно определению $v_{n,n-1}(x)$ записывается в виде

$$A_0 + A_{2n}x^{2n} < A_{2n-1}x^{2n-1} \Leftrightarrow \frac{A_0}{A_{2n-1}}x^{1-2n} + \frac{A_{2n}x}{A_{2n-1}} < 1.$$

Усилим последнее неравенство, учитывая включение $x \in [R_n, R_{n+1})$:

$$\frac{A_0}{A_{2n-1}}R_n^{1-2n} + \frac{A_{2n}}{A_{2n-1}}R_{n+1} < 1 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} u_{n,k} + \frac{R_{n+1}}{R_{2n}} < 1. \quad (3.10.43)$$

Из оценок (3.10.32) и (3.10.36) сразу же видно, что неравенство (3.10.43) выполняется. Лемма полностью доказана.

Вследствие уже доказанных соотношений (3.2.6) достаточно вывести равенства

$$\operatorname{sgn} E_{1/N}(-R_n(1+q_n); N+1) = (-1)^n, \quad 3 \leq n \leq [N/3] - 1. \quad (3.10.44)$$

Введем следующее обозначение: $\sigma_m(x) = \sum_{\nu=m}^{\infty} (-1)^\nu A_\nu x^\nu$ — m -й остаток степенного ряда для $E_{1/N}(-x, N+1)$. Имеем соотношение

$$\begin{aligned} E_{1/N}(-x, N+1) &= \sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu A_\nu x^\nu + \sigma_{2n}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k} (A_{n+k}x^{n+k} - A_{n-k-1}x^{n-k-1}) + \sigma_{2n}(x) = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \nu_{n,k}(x) + \sigma_{2n}(x). \end{aligned} \quad (3.10.45)$$

Согласно (3.10.44) и (3.10.45) требуется доказать, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \nu_{n,k}(x) + \sigma_{2n}(x) &> 0 \quad \text{при четном } n, \\ \sigma_{2n}(x) &< \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \nu_{n,k}(x) \quad \text{при нечетном } n, \quad x = (1+q_n)R_n. \end{aligned} \quad (3.10.46)$$

Начнем с доказательства неравенства

$$v_{n,1}((1+q_n)R_n) < v_{n,0}((1+q_n)R_n), \quad 3 \leq n \leq [N/3] - 1, \quad (3.10.47)$$

вне зависимости от четности n . Имеем равенства

$$\begin{aligned} v_{n,0}(x) &= A_n x^n - A_{n-1} x^{n-1} = A_{n-1} x^{n-1} \left(\frac{x A_n}{A_{n-1}} - 1 \right) = A_{n-1} x^{n-1} \left(\frac{x}{R_n} - 1 \right), \\ v_{n,1}(x) &= A_{n+1} x^{n+1} - A_{n-2} x^{n-2} = A_{n-2} x^{n-2} \left(\frac{x^3 A_{n+1}}{A_{n-2}} - 1 \right) = A_{n-2} x^{n-2} \left(\frac{x^3}{R_{n-1} R_n R_{n+1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Поэтому неравенство $v_{n,1}(x) < v_{n,0}(x)$ переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{n-2}x^{n-2} \left(\frac{x^3}{R_{n-1}R_nR_{n+1}} - 1 \right) &< A_{n-1}x^{n-1} \left(\frac{x}{R_n} - 1 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^3}{R_{n-1}R_nR_{n+1}} - 1 < \frac{x}{R_{n-1}} \left(\frac{x}{R_n} - 1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что неравенство (3.10.47) равносильно следующему неравенству:

$$(1 + q_n)^3 \frac{R_n^2}{R_{n-1}R_{n+1}} - 1 < q_n(1 + q_n) \frac{R_n}{R_{n-1}}. \quad (3.10.48)$$

Подставив в (3.10.48) значение $q_n = 1.5R_n/R_{n+1}$ и обозначив $t_n = (1 + q_n)R_n^2R_{n-1}^{-1}R_{n+1}^{-1}$, перепишем (3.10.48) в следующем виде:

$$(1 + q_n)^2 t_n < 1 + 1.5t_n \Leftrightarrow (2q_n + q_n^2)t_n < 1 + 0.5t_n.$$

Легко видеть, что последнее неравенство выполняется, если $q_n < 0.2$, т. е.

$$R_n/R_{n+1} < 2/15, \quad 3 \leq n \leq [N/3] - 1.$$

Из (3.1.8) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{R_{n+1}}{R_n} &= \prod_{k=1}^N \left(\frac{nN + N + k}{nN + k} \right) = \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{N}{nN + k} \right) = \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{1}{n + k/N} \right) > \\ &> \left(1 + \frac{1}{n + 1} \right)^N \geq \left(1 + \frac{1}{[N/3]} \right)^N \geq \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{3p}, \quad p = \left[\frac{N}{3} \right] \geq 4. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая возрастание последовательности $\left(1 + \frac{1}{p} \right)^p$, получаем оценку

$$\frac{R_n}{R_{n+1}} \leq \left(\frac{4}{5} \right)^{12} < \frac{1}{12},$$

что и требовалось.

В соответствии с (3.10.47) неравенства (3.10.46) можно заменить более сильными неравенствами

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k v_{n,k}(x) + \sigma_{2n}(x) &> 0 \quad \text{при четном } n, \\ \sigma_{2n}(x) &< \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k v_{n,k}(x) \quad \text{при нечетном } n, \quad x = (1 + q_n)R_n, \end{aligned}$$

и доказывать именно их. При четном n ситуация проста: последовательность $v_{n,k}(x)$ согласно лемме 3.10.1 убывает и все ее элементы положительны. Поэтому $\sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k v_{n,k}(x) > 0$. Положительность знакопеременной суммы $\sigma_{2n}(x)$ вытекает из аналогичных соображений: первое слагаемое больше 0, а модули слагаемых убывают, когда $0 < x < R_{2n}$. А так как $x < R_{n+1} < R_{2n}$, то получаем требуемое неравенство. При нечетном n надо отбросить в правой части сумму $\sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k v_{n,k}(x)$ (при $n \geq 5$ она, как показано выше, положительна, а при $n = 3$ — пуста), а в левой части оставить $A_{2n}x^{2n} > \sigma_{2n}(x)$. Таким образом, задача сведется к доказательству неравенства $A_{2n}x^{2n} < (-1)^{n-1}v_{n,n-1}(x) \equiv v_{n,n-1}(x)$, а оно уже было доказано в лемме 3.10.1. Тем самым соотношения (3.10.44) полностью доказаны и доказательство теоремы 3.1.3 завершено.

3.11. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.4

Если целая функция $F(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k$ порядка меньшего 1 имеет только действительные отрицательные нули (не обязательно простые), то она представима в виде $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/r_n)$, где $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1} < +\infty$. Через r_n обозначены все взятые с обратным знаком нули $F(z)$, упорядоченные в порядке возрастания модулей. Каждый нуль стоит в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Тогда

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1}, \quad B_2 = \sum_{1 \leq p < q < +\infty} (r_p r_q)^{-1}.$$

Отсюда находим, что $2B_2 < B_1^2$. Из сказанного заключаем, что если функция $E_\rho(z, \mu)$ при некотором положительном значении параметра μ имеет только вещественные отрицательные нули (в этом случае порядок функции $E_\rho(z, \mu)$, равный ρ , заведомо не превосходит $1/2$), то вследствие представления

$$\Gamma(\mu)E_\rho(z, \mu) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\Gamma(\mu)/\Gamma(\mu + k/\rho)) z^k$$

выполняется неравенство $2\Gamma(\mu)/\Gamma(\mu + 2/\rho) < (\Gamma(\mu)/\Gamma(\mu + 1/\rho))^2$. Перепишем его в эквивалентной форме:

$$\ln 2 < \ln \Gamma(\mu) - 2 \ln \Gamma(\mu + 1/\rho) + \ln \Gamma(\mu + 2/\rho). \quad (3.11.1)$$

Докажем, что при $\mu \geq 0.9 + (\rho^2 \ln 2)^{-1} - \rho^{-1}$ неравенство (3.11.1) не выполняется и, следовательно, не все нули $E_\rho(z, \mu)$ вещественны. Для этого оценим сверху вторую разность, стоящую в правой части неравенства (3.11.1). Из разложения в степенной ряд $F(x \pm h) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(x) h^k (\pm 1)^k / k!$, справедливого для любой функции F , аналитической в некоторой окрестности круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - x| \leq h\}$, следует тождество

$$F(x + h) - 2F(x) + F(x - h) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} F^{(2\ell)}(x) h^{2\ell} / (2\ell)!. \quad (3.11.2)$$

Из (3.11.2) и разложений в ряды

$$(\ln \Gamma(z))^{(k)} = \psi^{(k-1)}(z) = (-1)^k (k-1)! \sum_{m=0}^{\infty} (m+z)^{-k}$$

находим, что

$$\ln \Gamma(x + h) - 2 \ln \Gamma(x) + \ln \Gamma(x - h) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (m+x)^{-2\ell} h^{2\ell}, \quad 0 < h < x. \quad (3.11.3)$$

Поскольку $a^{-p} < \int_{a-0.5}^{a+0.5} t^{-p} dt$ при любых $a > 0.5$ и $p > 1$, верна оценка

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+x)^{-2\ell} < \int_{x-0.5}^{+\infty} t^{-2\ell} dt = (2\ell-1)^{-1} (x-0.5)^{1-2\ell}, \quad x > 0.5. \quad (3.11.4)$$

Из (3.11.3) и (3.11.4) выводим неравенство

$$\ln \Gamma(x + h) - 2 \ln \Gamma(x) + \ln \Gamma(x - h) < \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{-1} (2\ell-1)^{-1} h^{2\ell} (x-0.5)^{1-2\ell}, \quad h > 0, \quad x > h + 0.5. \quad (3.11.5)$$

Оценим сверху сумму, стоящую в правой части (3.11.5), используя соотношение

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{2\ell(2\ell-1)} = \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{2\ell} \right) = \ln 2 - \frac{1}{2} < 0.2.$$

При $x > h + 0.5$ имеем соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{h^{2\ell}(x-0.5)^{1-2\ell}}{\ell(2\ell-1)} &= \frac{h^2}{x-0.5} + h \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{h}{x-0.5} \right)^{2\ell-1} \cdot \frac{1}{\ell(2\ell-1)} < \\ &< \frac{h^2}{x-0.5} + \frac{h^4}{(x-0.5)^3} \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell(2\ell-1)} < \frac{h^2}{x-0.5} + \frac{0.4h^4}{(x-0.5)^3}. \end{aligned} \quad (3.11.6)$$

Обозначим $x - 0.5$ через y . Тогда при условии $h^2 < y$, $h > 1$, из (3.11.6) и легко проверяемого неравенства

$$\frac{h^2}{y} + 0.4 \frac{h^4}{y^3} < \frac{h^2}{y(y-0.4)}, \quad h > 0, \quad y > 0.4, \quad h^2 < y,$$

получим, что

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{h^{2\ell}}{\ell(2\ell-1)(x-0.5)^{2\ell-1}} < \frac{h^2}{y-0.4} = \frac{h^2}{x-0.9}. \quad (3.11.7)$$

Из (3.11.7) и (3.11.5) при $h > 1$, $h^2 < x - 0.5$ находим неравенство

$$\ln \Gamma(x+h) - 2 \ln \Gamma(x) + \ln \Gamma(x-h) < h^2/(x-0.9). \quad (3.11.8)$$

Положим $h = 1/\rho$, $x = \mu + 1/\rho$. По условию теоремы $\mu + 1/\rho \geq 0.9 + (\rho^2 \ln 2)^{-1}$, т.е. $y = x - 0.5 > (\rho^2 \ln 2)^{-1} > h^2$. Поэтому неравенство (3.11.8) применимо к оценке сверху второй разности из (3.11.1), и мы получаем неравенство

$$\ln \Gamma(\mu) - 2 \ln \Gamma(\mu + 1/\rho) + \ln \Gamma(\mu + 2/\rho) < h^2/(\mu + 1/\rho - 0.9) \leq h^2 \rho^2 \ln 2 = \ln 2,$$

что противоречит неравенству (3.11.1). Следовательно, функция $E_\rho(z, \mu)$ имеет нули вне $\mathbb{R}$ при $\mu \geq 0.9 + (\rho^2 \ln 2)^{-1} - \rho^{-1}$. Теорема 3.1.4 доказана.

3.12. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.5

Лемма 3.12.1. Если $\rho \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $1 - \frac{1}{\rho} \leq \mu < -1$ или $0 < \rho \leq 1/3$, $-2 < \mu < -1$, то выполняется неравенство

$$\frac{4\Gamma^2(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + 2/\rho)} < 1. \quad (3.12.1)$$

Доказательство. Неравенство (3.12.1) равносильно следующему:

$$4\mu(\mu+1)(\mu+2) < \frac{\Gamma(\mu+2/\rho)\Gamma(\mu+3)}{\Gamma(\mu+1/\rho)\Gamma(\mu+1/\rho)}. \quad (3.12.2)$$

Заметим, что $\max\{4\mu(\mu+1)(\mu+2) \mid -2 \leq \mu \leq -1\} = 2/\sqrt{27}$. Следовательно, левая часть (3.12.2) меньше 1.6. Оценим снизу правую часть.

Если $1/3 \leq \rho < 1/2$, то $1 \leq \mu + 1/\rho < 2 < 1 < \mu + 2 < 2$. Поэтому ввиду двойного неравенства $0.8 < \Gamma(t) \leq 1$, $1 \leq t \leq 2$, верна оценка снизу $\Gamma(\mu+3)/\Gamma(\mu+1/\rho) > 0.8$. В то же время, обозначив $\mu + 1/\rho = \tau$, находим, что

$$\frac{\Gamma(\mu+2/\rho)}{\Gamma(\mu+1/\rho)} = \frac{\Gamma(\tau+1/\rho)}{\Gamma(\tau)} > \frac{\Gamma(\tau+2)}{\Gamma(\tau)} = \tau(\tau+1) \geq 2.$$

(Ввиду возрастания $\Gamma(x)$ на луче $x \geq 2$ и неравенств $3 \leq t+2 < t+1/\rho$ верно неравенство $\Gamma(t+1/\rho) > \Gamma(t+2)$.) Отсюда заключаем, что правая часть (3.12.2) превосходит 1.6, и неравенство (3.12.2) доказано.

Если $1/4 \leq \rho < 1/3$, то $3 - 1/\rho < 0$, и из теоремы Лагранжа о промежуточном значении производной выводим оценку ($\xi \in (\mu+3, m+1/\rho)$)

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(\mu+3) - \ln \Gamma(\mu + \frac{1}{\rho}) &= \left(3 - \frac{1}{\rho}\right) \psi'(\xi) \geq \left(3 - \frac{1}{\rho}\right) \max\{\psi^+(t) \mid \mu+3 \leq t \leq m + \frac{1}{\rho}\} \geq \\ &\geq \left(3 - \frac{1}{\rho}\right) \psi(3) \geq -\psi(3) > -1. \end{aligned}$$

Следовательно, правая часть (3.12.2) превосходит величину

$$\frac{\Gamma(\mu + 2/\rho)}{e\Gamma(\mu + 1/\rho)} = \frac{\Gamma(\tau + 1/\rho)}{e\Gamma(\tau)} \geq \frac{\tau + 3}{e\Gamma(\tau)} = \frac{\tau(\tau + 1)(\tau + 2)}{e} \geq \frac{6}{e} > 2,$$

что доказывает требуемое неравенство в рассматриваемом случае.

Если $\rho < 1/4$, то ввиду возрастания ψ имеем ($\tau = \mu + 1/\rho$) соотношение

$$\ln \Gamma(\mu + 3) - \ln \Gamma\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \geq \left(3 - \frac{1}{\rho}\right)\psi(\tau), \quad \ln \Gamma\left(\tau + \frac{1}{\rho}\right) - \ln \Gamma(\tau) \geq \frac{1}{\rho}\psi(\tau).$$

поэтому правая часть (3.12.2) превосходит $\exp(3\psi(\tau)) > \exp(3\psi(2)) = \exp(3(1 - \gamma)) > e$. Лемма полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.1.5 основано на тех же идеях, что и доказательство теорем 3.1.1 и 3.1.2. Начнем его с доказательства неравенств

$$E_\rho(-R_1; \mu) > 0, \quad E_\rho(-2R_1; \mu) < 0, \quad \text{где} \quad R_1 = \frac{\Gamma(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)}. \quad (3.12.3)$$

Напомним (это всюду здесь используется), что $\Gamma(\mu) > 0$ при $-2 < \mu < -1$. Имеем соотношение

$$E_\rho(-R_1; \mu) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k R_1^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}, \quad (3.12.4)$$

$$\Gamma(\mu)E_\rho(-2R_1; \mu) = -1 + \frac{4\Gamma^2(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + 2/\rho)} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k (2R_1)^k \Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + k/\rho)}. \quad (3.12.5)$$

Сумма знакопеременного ряда (3.12.4) положительна, поскольку его слагаемые по абсолютной величине убывают:

$$\frac{R_1^{k+1}}{\Gamma(\mu + (k+1)/\rho)} < \frac{R_1^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)} \Leftrightarrow \frac{\Gamma(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)} < \frac{\Gamma(\mu + (k+1)/\rho)}{\Gamma(\mu + k/\rho)}. \quad (3.12.6)$$

Ввиду возрастания последовательности отношений $\left\{ \frac{\Gamma(\mu + (k+1)/\rho)}{\Gamma(\mu + k/\rho)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ неравенство (3.12.6) достаточно доказать лишь при $k = 1$. Оно сразу же следует из леммы 3.12.1. Первое неравенство (3.12.3) доказано.

Сумма знакопеременного ряда в (3.12.5) отрицательна ввиду монотонности модулей его слагаемых; здесь надо проверить неравенство

$$\frac{2\Gamma(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)} < \frac{\Gamma(\mu + (k+1)/\rho)}{\Gamma(\mu + k/\rho)},$$

которое также следует из леммы 3.12.1. Поэтому

$$\Gamma(\mu)E_\rho(-2R_1; \mu) < -1 + \frac{4\Gamma^2(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + 2/\rho)}.$$

Последнее выражение согласно лемме 3.12.1 отрицательно. Неравенства (3.12.3) доказаны.

Как и в доказательстве теоремы 3.1.1 случаи $0 < \rho \leq 1/6$ и $1/6 < \rho < 1/2$ разбираются по-разному. Начнем со значений $\rho \in (1/6, 1/2)$. Установим справедливость соотношений

$$\operatorname{sgn} E_\rho(-\xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu); \mu) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2. \quad (3.12.7)$$

$$2R_1 < \xi_2^{1/\rho} \quad (3.12.8)$$

(во избежание громоздких формул аргументы ρ, μ у величин ξ_n, R_n , как правило, опускаем). Из (3.12.7) получим наличие по крайней мере одного корня функции $E_\rho(z; \mu)$ на каждом из интервалов $(-\xi_{n+1}^{1/\rho}; -\xi_n^{1/\rho}) \quad \forall n \geq 2$ а из (3.12.3), (3.12.7), (3.12.8) — наличие корня на интервалах $(-\xi_2^{1/\rho}; -2R_1)$, $(-2R_1, -R_1)$. Следовательно, при любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, на интервале $(-\xi_n^{1/\rho}, 0)$ действительной оси у функции $E_\rho(z; \mu)$ имеется не менее n корней. С другой стороны, по теоремам 2.1.4, 2.2.2 при любом достаточно большом n в круге $|z| \leq \xi_n^{1/\rho}$ всех корней у функции

Миттаг-Леффлера имеется ровно n . Это и означает, что все корни вещественны, отрицательны и просты.

Приступим к доказательству соотношений (3.12.8), (3.12.7). Неравенство (3.12.8) в развернутой записи выглядит так:

$$\frac{2\Gamma(\mu + 1/\rho)}{\Gamma(\mu)} < \left(\frac{\pi(2 + \rho(\mu - 1))}{\sin \pi \rho} \right)^{1/\rho}. \quad (3.12.9)$$

Из ограничений теоремы 3.1.5 на параметр μ следует оценка $2 + \rho(\mu - 1) \geq 1$. Имеем также неравенство

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = \frac{\mu(\mu + 1)(\mu + 3)}{\Gamma(\mu + 3)} \leq \frac{2}{\sqrt{27}\Gamma(\mu + 3)} < \frac{1}{2}, \quad \mu \in (-2, -1).$$

Здесь использована известная оценка $1/\Gamma(x) < 1.2$, $1 < x < 2$. Поэтому (3.12.9) можно заменить более сильным и в то же время более простым неравенством

$$\Gamma(\mu + 1/\rho) < \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} \right)^{1/\rho}.$$

Оно легко доказывается. Если $\frac{1}{4} < \rho < \frac{1}{2}$, то $1 \leq \mu + \frac{1}{\rho} < 3$ и $\Gamma(\mu + \frac{1}{\rho}) < 2$, а $(\pi \operatorname{cosec} \pi \rho)^{1/\rho} > \pi^{1/\rho} > \pi^2$. Если же $1/6 < \rho \leq 1/4$, то $\Gamma(\mu + \frac{1}{\rho}) \leq \Gamma(\frac{1}{\rho} - 1) < \Gamma(5) = 24$, а $(\pi \operatorname{cosec} \pi \rho)^{1/\rho} > \pi^4$.

Докажем равенства (3.12.7). Обозначим λ через $\mu + 1/\rho$. Имеем неравенства

$$\begin{aligned} 1 \leq \lambda < \frac{1}{\rho} - 1, & \quad \frac{1}{3} < \rho < \frac{1}{2}, \\ 1 \leq \frac{1}{\rho} - 2 < \lambda < \frac{1}{\rho} - 1, & \quad 0 < \rho \leq \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (3.12.10)$$

Ввиду тождеств

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + zE_\rho(z; \lambda), \quad \xi_n(\rho, \mu) = \xi_{n-1}(\rho, \lambda)$$

равенства (3.12.7) равносильны следующим:

$$\operatorname{sgn} \left[E_\rho(-\xi_m^{1/\rho}(\rho, \lambda); \lambda) - \frac{1}{\Gamma(\mu)\xi_m^{1/\rho}(\rho, \lambda)} \right] = (-1)^m \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.12.11)$$

В доказательстве теоремы 3.1.1 была установлена справедливость равенств

$$\operatorname{sgn} E_\rho(-\xi_m^{1/\rho}(\rho, \lambda); \lambda) = (-1)^m \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad 1/6 < \rho < 1/2. \quad (3.12.12)$$

Ясно, что при нечетных m равенства (3.12.12) сильнее, чем (3.12.11), а при четных m — наоборот. Поэтому в случае $1/6 < \rho < 1/2$ осталось вывести неравенства

$$E_\rho(-\xi_m^{1/\rho}(\rho, \lambda); \lambda) > \frac{1}{\Gamma(\mu)\xi_m^{1/\rho}(\rho, \lambda)} \quad \text{при любом четном } m. \quad (3.12.13)$$

Оценки остаточного члена в представлении функции $E_\rho(z; \lambda)$ (теоремы 1.5.3, 1.5.4), равенство при четных m главного члена в точке $z = -\xi_m^{1/\rho}$ выражению $2\rho\xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho)$, оценка второго члена в разделе 3.8 влекут за собой неравенства, верные при произвольных $\lambda \in (0, 1/\rho]$:

$$E_\rho(-\xi_m^{1/\rho}; \lambda) > \begin{cases} 2\rho\xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho) - 1.5\xi_m^{-1/\rho}, & 0.4 \leq \rho < 0.5, \\ 2\rho\xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho) - 0.74\xi_m^{-\lambda}, & 0.25 < \rho < 0.4, \\ 1.96\rho\xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho) - 0.74\xi_m^{-\lambda}, & \frac{1}{6} < \rho \leq \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (3.12.14)$$

Из (3.12.14), (3.12.10) и полученной выше оценки $0 < \frac{1}{\Gamma(\mu)} < \frac{1}{2}$, $-2 < \mu < -1$, видно, что неравенство (3.12.13) следует из неравенств

$$\begin{aligned} \xi_m^{-1/\rho} &< \rho \xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho), \quad 0.4 \leq \rho < 0.5, \quad 1 \leq \lambda < \frac{1}{\rho} - 1, \\ 0.5 \xi_m^{-1/\rho} + 0.74 \xi_m^{-\lambda} &< 1.96 \rho \xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho), \quad \frac{1}{6} < \rho < 0.4, \quad 1 \leq \lambda < \frac{1}{\rho} - 1. \end{aligned} \quad (3.12.15)$$

Умножим (3.12.15) на $\xi_m^{\lambda-1}$ и, воспользовавшись оценками $\xi_m > 1$ (см. п. 3.5–3.7), $\lambda - 1 - \frac{1}{\rho} \leq -2$, сведем задачу к доказательству следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \xi_m^{-2} &< \rho \exp(\xi_m \cos \pi \rho), \quad 0.4 \leq \rho < 0.5, \quad 1 \leq \lambda < \frac{1}{\rho} - 1, \\ 0.5 \xi_m^{-2} + 0.74 \xi_m^{-1} &< 1.96 \rho \xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi \rho), \quad \frac{1}{6} < \rho < 0.4, \quad 1 \leq \lambda < \frac{1}{\rho} - 1. \end{aligned} \quad (3.12.16)$$

Получим более точную оценку снизу $\xi_m = \xi_m(\rho, \lambda)$. Так как $\lambda \geq 1$, $m \geq 2$, то

$$\xi_m(\rho, \lambda) = \frac{\pi(m + \rho(\lambda - 1))}{\sin \pi \rho} \geq \frac{\pi m}{\sin \pi \rho} > 2\pi. \quad (3.12.17)$$

Из (3.12.17) и тривиальной оценки $\exp(\xi_m \cos \pi \rho) > 1$ сразу же получаем (3.12.16). Доказательство теоремы для значений $\rho \in (1/6, 1/2)$ завершено.

В случае $\rho \in (0, 1/6]$ неравенство (3.12.13) нужно доказать при любом четном $m \geq \left\lceil \frac{1}{3\rho} \right\rceil$. Тогда, рассуждая так же, как и выше, получим существование хотя бы одного корня $E_\rho(z; \mu)$ на каждом из интервалов

$$\left(-\xi_{n+1}^{1/\rho}(\rho, \mu), -\xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu) \right), \quad n \geq \left\lceil \frac{1}{3\rho} \right\rceil + 1 = M.$$

Требуется также доказать равенства (при $n = 1$ это уже было сделано в (3.12.3) и доказано также, что $E_\rho(-R_1(\rho, \mu); \mu) > 0$)

$$\operatorname{sgn} E_\rho \left(-\frac{R_n(\rho, \mu)}{2}; \mu \right) = (-1)^{n-1}, \quad 2 \leq n \leq M, \quad (3.12.18)$$

$$\operatorname{sgn} E_\rho(-2R_n(\rho, \mu); \mu) = (-1)^n, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad (3.12.19)$$

Это вместе с неравенствами

$$0 < R_1 < 2R_1 < \frac{1}{2}R_2 < 2R_2 < \frac{1}{2}R_3 < \dots < 2R_{M-1} < \frac{1}{2}R_M < \xi_M^{1/\rho} \quad (3.12.20)$$

дает существование (знаки функции E_ρ в точках $-\frac{1}{2}R_M$ и $-\xi_M^{1/\rho}$ различны) не менее M корней на интервале $(-\xi_M^{1/\rho}, 0)$. Тогда получаем, что на интервале $(-\xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu), 0)$ при любом $n \geq M$ функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет не менее n различных корней. А после применения уже цитированной в этой главе теоремы из главы 2, гласящей, что в круге $|z| \leq \xi_n^{1/\rho}(\rho, \mu)$, $0 < \rho < 1/2$ (число $n \in \mathbb{N}$ — произвольное достаточно большое), функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет ровно n корней, заключаем, что других корней, кроме вещественных и отрицательных нет. На этом после проверки справедливости неравенств (3.12.20) доказательство теоремы 3.1.5 завершится.

Неравенство $R_M < \xi_M^{1/\rho}$ доказано в лемме 3.1.1, поскольку

$$R_M(\rho, \mu) = R_{M-1}(\rho, \lambda), \quad \xi_M(\rho, \mu) = \xi_{M-1}(\rho, \lambda), \quad \text{где } \lambda = \mu + \frac{1}{\rho}.$$

Неравенство $4R_N < R_{N+1}$ при $n = 1$ было доказано в лемме, а при $2 \leq n \leq M-1$ ($m = n-1$, $(m+1)\rho \leq 1/3$) согласно лемме 3.9.1 имеем неравенство

$$\frac{R_n(\rho, \mu)}{R_{n+1}(\rho, \mu)} = \frac{R_m(\rho, \lambda)}{R_{m+1}(\rho, \lambda)} < \exp \left(-\frac{1}{\rho(m + \rho\lambda)} \right) < \exp \left(-\frac{1}{\rho(m+1)} \right) < e^{-3} < \frac{1}{20}.$$

Докажем равенства (3.12.18). Из разложения в степенной ряд функции Миттаг-Леффлера находим, что

$$E_\rho\left(-\frac{R_n}{2}; \mu\right) = S_{n,0} + \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2} A_{n-1} \left(\frac{R_n}{2}\right)^{n-1} + (-1)^n A_n \left(\frac{R_n}{2}\right)^n\right) + S_{n,1}, \quad (3.12.21)$$

где

$$S_{n,0} = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k A_k \left(\frac{R_n}{2}\right)^k + \frac{(-1)^{n-1}}{2} A_{n-1} \left(\frac{R_n}{2}\right)^{n-1}, \quad S_{n,1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k A_k \left(\frac{R_n}{2}\right)^k.$$

Из определения $R_n = A_{n-1}/A_n$ заключаем, что выражение, стоящее в скобках в правой части (3.12.21), равно нулю. Следовательно,

$$E_\rho\left(-\frac{R_n}{2}; \mu\right) = S_{n,0} + S_{n,1}. \quad (3.12.22)$$

Модули слагаемых знакопеременной суммы $S_{n,1}$ убывают: отношение последующего к предыдущему равно $A_{k+1}(R_n/2)^{k+1} : A_k(R_n/2)^k = R_n/(2R_{k+1}) < R_n/R_{n+1} < 1$ ввиду возрастания последовательности R_n . Поэтому знак суммы $S_{n,1}$ равен знаку ее максимального по модулю слагаемого:

$$\operatorname{sgn} S_{n,1} = (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}. \quad (3.12.23)$$

Модули слагаемых знакопеременной суммы $S_{n,0}$ возрастают: аналогичным способом проверяется, что наибольшее из отношений предыдущего слагаемого к последующему равно $4R_{n-1}/R_n < 1$; как было доказано выше. Поэтому знак суммы $S_{n,0}$ равен знаку ее максимального по модулю слагаемого:

$$\operatorname{sgn} S_{n,0} = (-1)^{n-1}. \quad (3.12.24)$$

Из (3.12.22)–(3.12.24) выводим (3.12.18).

Докажем равенства (3.12.19). Опустив в разложении $E_\rho(-2R_n; \mu)$ часть

$$(-1)^{n-1} A_{n-1} (2R_n)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{2} A_n (2R_n)^n,$$

равную нулю, приходим к представлению

$$E_\rho(-2R_n; \mu) = \sigma_{n,0} + \sigma_{n,1}, \quad \text{где} \quad (3.12.25)$$

$$\sigma_{n,0} = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k A_k (2R_n)^k, \quad \sigma_{n,1} = \frac{(-1)^n}{2} A_n (2R_n)^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k A_k (2R_n)^k.$$

Возрастание модулей слагаемых суммы $\sigma_{n,0}$ легко проверяется, так что

$$\operatorname{sgn} \sigma_{n,0} = (-1)^{n-2} = (-1)^n. \quad (3.12.26)$$

Наибольшее из отношений модулей слагаемых (последующего к предыдущему) суммы $\sigma_{n,1}$ будет равно

$$\frac{4R_n}{R_{n+1}} < 4 \exp\left(-\frac{1}{\rho(n+\rho\mu)}\right) < 4 \exp\left(-\frac{1}{n\rho}\right) \leq 4e^{-2}.$$

(Были использованы лемма 3.9.1 и неравенство $-\frac{1}{n\rho} \leq -2 \Leftrightarrow 2n\rho \leq 1$; последнее следует из оценки $2\rho \left(1 + \left\lceil \frac{1}{3\rho} \right\rceil\right) \leq 2\rho \left(1 + \frac{1}{3\rho}\right) = 2\rho + \frac{2}{3} \leq 1$, $0 < \rho \leq \frac{1}{6}$). Это означает, что $4R_n/R_{n+1} < 1$, а значит, модули слагаемых $\sigma_{n,1}$ убывают и $\operatorname{sgn} \sigma_{n,1} = (-1)^n$. Отсюда и из (3.12.25), (3.12.26) получаем (3.12.19).

Осталось вывести неравенства (3.12.13) при любом четном $m \geq \left\lceil \frac{1}{3\rho} \right\rceil$. Тем же методом, что и в случае $1/6 < \rho \leq 1/4$, но используя на этот раз рассуждения, приведенные в п. 3.8, сводим задачу к доказательству неравенства

$$0.5\xi_m^{-1/\rho} + 0.74\xi_m^{-\lambda} < 1.92\rho\xi_m^{1-\lambda} \exp(\xi_m \cos \pi\rho), \quad m \geq \left\lceil \frac{1}{3\rho} \right\rceil.$$

Заменим это неравенство более сильным:

$$1.24 < 1.92\rho\xi_m^{1-\lambda}\exp(\xi_m\cos\pi\rho). \quad (3.12.27)$$

Поскольку $\lambda = \mu + 1/\rho \geq -2 + 1/\rho \geq 4 > 1$, то

$$\rho\xi_m = \frac{\pi\rho(m + \rho(\lambda - 1))}{\sin\pi\rho} > \frac{\pi\rho m}{\sin\pi\rho} > m.$$

А так как $\exp(\xi_m\cos\pi\rho) > 1$, то неравенство (3.12.27) выполняется. Теорема 3.1.5 доказана.

ГЛАВА 4

НЕАСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НУЛЕЙ

4.1. Вещественные корни

В этом пункте для вещественных μ решается задача о числе положительных (при $\rho \geq 1$) и отрицательных (при $\rho > 1$) корней функции $E_\rho(z; \mu)$. Мы намеренно здесь пишем «корень» вместо «нуль», чтобы избежать противоречивых словосочетаний «положительный нуль» и «отрицательный нуль».

4.1.1. Отрицательные корни.

Теорема 4.1.1. Пусть $\rho > 1$. Тогда:

1) при

$$\mu \in \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[-n + \frac{1}{\rho}, -n + 1 \right] \right) \cup [1, +\infty)$$

у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет отрицательных корней,

2) при

$$\mu \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(-n, -n + \frac{1}{\rho} \right)$$

функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет единственный отрицательный корень, и этот корень простой.

Случай $\rho = 1$ будет рассмотрен позже, в пункте 4.5.

Доказательство. Доказательство основано на формулах (1.1.14), (1.1.12) и (1.1.10), справедливых для $\rho > 1$, $\mu < 1 + 1/\rho$. При $z = -r$ запишем эти формулы в виде

$$E(r) := \frac{1}{\rho} r^{\rho(\mu-1)} E_\rho(-r; \mu) = \int_0^\infty e^{-(tr)^\rho} t^{\rho(1-\mu)} g(t) dt, \quad r > 0, \quad (4.1.1)$$

$$g(t) = \frac{t \sin \pi\mu + \sin \pi(\mu - 1/\rho)}{\pi(t^2 + 2t \cos \pi/\rho + 1)}, \quad t > 0.$$

Мы видим, что число $-r_0$ (где $r_0 > 0$) тогда и только тогда является отрицательным корнем функции $E_\rho(z; \mu)$, когда число r_0 является положительным корнем функции $E(r)$ той же кратности.

1) Если $-n + 1/\rho \leq \mu \leq -n + 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то либо у значений

$$\sin \pi\mu, \sin \pi(\mu - 1/\rho) \quad (4.1.2)$$

знаки совпадают, либо одно из них равно нулю. Значит, для таких μ функция $g(t)$ сохраняет знак на $\mathbb{R}_+$, а именно, $\text{sign } g(t) = (-1)^n$, $t > 0$. В силу (4.1.1)

$$\text{sign } E_\rho(x; \mu) = (-1)^n, \quad x < 0, \quad -n + \frac{1}{\rho} \leq \mu \leq -n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.1.3)$$

и функция $E_\rho(z; \mu)$ не обращается в нуль на отрицательной вещественной полуоси. В утверждении 1) осталось рассмотреть значения $\mu > 1$.

Пусть $1 < \mu < 1 + 1/\rho$. Тогда $E_\rho(0; \mu) > 0$. Из теоремы 1.2.1 следует, что $E_\rho(x; \mu) > 0$ также и в подходящей окрестности точки $-\infty$. Значит, либо у $E(r)$ положительных корней нет, либо их число (с учетом кратностей) четно.

Предположив, что r_0 — корень $E(r)$, рассмотрим функцию

$$G(t) = \int_t^\infty e^{-(r_0 t)^\rho} t^{\rho(1-\mu)} g(t) dt, \quad t \geq 0. \quad (4.1.4)$$

Тогда $G(0) = 0$. Так как $1 < \mu < 1 + 1/\rho$, то первое значение (4.1.2) отрицательно, а второе — положительно. Значит, $g(t)$ имеет единственный положительный корень t_0 , причем

$$g(t) > 0 \text{ при } 0 < t < t_0 \text{ и } g(t) < 0 \text{ при } t > t_0. \quad (4.1.5)$$

Из (4.1.4) следует, что

$$\text{sign } G'(t) = -\text{sign } g(t),$$

и потому $G(t)$ убывает на $[0, t_0]$ и возрастает на $[t_0, \infty)$. Но $G(0) = 0$ и $G(t) < 0$ при $t > t_0$. Поэтому $G(t) < 0$ при $t > 0$.

Из (4.1.1) следует, что

$$E'(r_0) = \rho r_0^{\rho-1} \int_0^\infty t^\rho dG(t).$$

Интегрируя здесь по частям, получаем формулу

$$E'(r_0) = -\rho^2 r_0^{\rho-1} \int_0^\infty t^{\rho-1} G(t) dt. \quad (4.1.6)$$

Отсюда и из отрицательности $G(t)$ вытекает, что производная функции $E(r)$ в ее возможном положительном корне обязательно положительна. А это невозможно, так как число положительных корней $E(r)$ четно. Значит, при $1 < \mu < 1 + 1/\rho$ у $E_\rho(z; \mu)$ отрицательных корней нет. При этом $E_\rho(x; \mu) > 0$, $x < 0$.

Последнее неравенство и формула (4.1.3) с $n = 0$ показывают, что

$$E_\rho(x; \mu) > 0 \text{ при } x < 0, \quad (4.1.7)$$

если $1/\rho \leq \mu < 1 + 1/\rho$. А отсюда из формулы

$$E_\rho(z; \mu) = \mu E_\rho(z; \mu + 1) + \frac{z}{\rho} E'_\rho(z; \mu + 1) \quad (4.1.8)$$

следует, что если $1/\rho \leq \mu < 1 + 1/\rho$, то производная функции $E_\rho(z; \mu + 1)$ в ее возможном отрицательном корне отрицательна. Но снова функция $E_\rho(z; \mu + 1)$ положительна и в нуле, и (по теореме 1.2.1) в окрестности точки $-\infty$. Следовательно, у функции $E_\rho(z; \mu + 1)$ нет отрицательных корней при $1/\rho \leq \mu < 1 + 1/\rho$, т. е. у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет отрицательных корней при $1 + 1/\rho \leq \mu < 2 + 1/\rho$, причем для таких μ верно свойство (4.1.7). Повтор этого рассуждения дает свойство (4.1.7) для $2 + 1/\rho \leq \mu < 3 + 1/\rho$ и так далее. В итоге получаем отсутствие отрицательных корней у функции $E_\rho(z; \mu)$ при $\mu > 1$, и утверждение 1) доказано.

2) Пусть $\mu \in (-n, -n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\text{sign } E_\rho(0; \mu) = \text{sign } \Gamma(\mu) = (-1)^n,$$

а по теореме 1.2.1

$$\text{sign } E_\rho(x; \mu) = \text{sign } \Gamma(\mu - 1/\rho) = (-1)^{n-1}, \quad x < -R$$

при достаточно большом $R > 0$. Значит, в нуле и в окрестности точки $-\infty$ функция $E_\rho(x; \mu)$ принимает значения разных знаков. Поэтому она имеет хотя бы один отрицательный корень. Надо доказать, что он единственный и простой.

Теперь значения (4.1.2) имеют разные знаки, и

$$\text{sign } g(t) = \text{sign } \sin \pi \mu = (-1)^n, \quad t > t_0,$$

где t_0 — единственный корень функции $g(t)$. Рассуждая так же, как в случае $1 < \mu < 1 + 1/\rho$, делаем вывод, что

$$\text{sign } G(t) = (-1)^n, \quad t > 0.$$

В силу (4.1.6) производная функции $E(r)$ во всех ее положительных корнях имеет один и тот же знак, что возможно только в случае единственного простого корня. Утверждение 1) верно. Теорема 4.1.1 доказана. $\square$

Замечание 4.1.1. Для дальнейшего будет важно, что (как мы убедились при доказательстве теоремы 4.1.1) при $\rho > 1$, $1 < \mu < 1 + 1/\rho$ верно свойство (4.1.7).

4.1.2. Положительные корни. Перед их исследованием нелишне напомнить вытекающие из определения факты: при $\mu \geq 0$ функция $E_\rho(x; \mu)$ положительна на полупрямой $x > 0$ и, следовательно, не имеет положительных корней, а при $\mu = -m$, $m \in \mathbb{Z}_+$, имеет в точке $x = 0$ корень: простой, если $\rho > 1$, и кратный кратности $m + 1$, если $\rho = 1$.

Теорема 4.1.2.

(I). Пусть $\rho > 1$, $\mu < 0$. Тогда:

- 1) если $\mu \in [-2n - 1, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет единственный положительный корень, являющийся простым,
- 2) если $\mu \in [-2n, -2n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$, то реализуется одна из следующих возможностей: множество положительных корней функции $E_\rho(z; \mu)$ пусто, состоит из двух простых точек, состоит из одной точки кратности 2; более точно, существуют последовательности ν_n, μ_n , $n \in \mathbb{N}$, такие, что $-2n + 1/\rho < \nu_n \leq \mu_n < -2n + 1$ и:
 - 1) при $-2n \leq \mu < \nu_n$ у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет положительных корней,
 - 2) при $\mu_n < \mu < -2n + 1$ функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет два простых положительных корня,
 - 3) при $\mu = \nu_n, \mu_n$ функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет положительный корень кратности два.

(II). Функция $E_1(z; \mu)$ имеет единственный положительный корень, являющийся простым, если $\mu \in (-2n - 1, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и не имеет положительных корней, если $\mu \in [-2n, -2n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. (I). Из представлений (1.1.16), (1.1.12) и (1.1.10), получаем формулу

$$E(r) = E(r; \mu) := \frac{1}{\rho} r^{\rho(\mu-1)} E_\rho(r; \mu) = e^{r^\rho} + \int_0^\infty e^{-(rt)^\rho} t^{\rho(1-\mu)} g(t) dt, \quad r > 0, \quad (4.1.9)$$

верную для $\rho > 1$, $\mu < 1 + 1/\rho$, где на этот раз

$$g(t) = \frac{t \sin \pi \mu - \sin \pi(\mu - 1/\rho)}{\pi(t^2 - 2t \cos \pi/\rho + 1)}, \quad t > 0. \quad (4.1.10)$$

1) Пусть $\mu \in (-2n - 1, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\Gamma(\mu) < 0$, $E_\rho(0, \mu) < 0$, и так как $E_\rho(+\infty; \mu) = +\infty$, что следует из определения, то функция $E(r)$ ($r > 0$) имеет хотя бы один корень.

Если $\mu = -2n - 1$, то $1/\Gamma(\mu) = E_\rho(0; \mu) = 0$. Но $\Gamma(\mu + 1/\rho) < 0$ (здесь важно условие $\rho > 1$) и, значит, $E'_\rho(0; \mu) < 0$. Отсюда $E_\rho(r; \mu) < 0$ при достаточно малых $r > 0$, и снова $E(r)$ имеет хотя бы один корень.

Надо доказать, что при $\mu \in [-2n - 1, -2n)$ у функции $E(r)$, $r > 0$, корень единственный и простой.

Сохраняем за $G(t)$ обозначение (4.1.4), где r_0 — (какой-нибудь) положительный корень $E(r)$. Утверждается, что $G(t) < 0$, $t > 0$.

Действительно, если $-2n - 1 \leq \mu \leq -2n - 1 + 1/\rho$, то значения

$$\sin \pi \mu, \quad -\sin \pi(\mu - 1/\rho) \quad (4.1.11)$$

неположительны и одновременно не обращаются в нуль. Значит, $g(t) < 0$, $t > 0$, и потому $G(t) < 0$, $t > 0$.

Если же $-2n - 1 + 1/\rho < \mu < -2n$, то в (4.1.9) положим $r = r_0$. Так как $E(r_0) = 0$, то получим, что $G(0) = -\exp(r_0^\rho) < 0$. Но теперь первое из значений (4.1.11) отрицательно, а второе положительно. Следовательно, подобно случаю $1 < \mu < 1 + 1/\rho$ в теореме 4.1.1, верны неравенства (4.1.5). А отсюда

следует (см. рассуждения после (4.1.5)), что $G(t) < 0$, $t > 0$. Заявленное утверждение о знаке $G(t)$ полностью доказано.

В силу (4.1.9)

$$E'(r) = E'(r; \mu) = \rho r^{\rho-1} \left(e^{r^\rho} - \int_0^\infty e^{-(rt)^\rho} t^{\rho(2-\mu)} g(t) dt \right). \quad (4.1.12)$$

Следовательно,

$$E'(r_0) = \rho r_0^{\rho-1} \left(e^{r_0^\rho} + \int_0^\infty t^\rho dG(t) \right),$$

и после интегрирования по частям имеем выражение

$$E'(r_0) = \rho r_0^{\rho-1} \left(e^{r_0^\rho} - \rho \int_0^\infty t^{\rho-1} G(t) dt \right).$$

Так как $G(t) < 0$, то отсюда следует, что производная функции $E(r)$ в ее положительном корне положительна. А это возможно только в случае единственного простого корня. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть $\mu \in [-2n, -2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu - 1 \in [-2n-1, -2n)$, и по утверждению 1) функция $E_\rho(z; \mu - 1)$ имеет единственный положительный корень, и корень этот простой. По формуле

$$E'(r; \mu) = \rho r^{\rho-1} E(r; \mu - 1), \quad (4.1.13)$$

которая следует из (4.1.12), (4.1.9) и (4.1.10), производная $E'(r; \mu)$ при $r > 0$ имеет единственный корень, и корень этот простой. Отсюда и из свойства

$$E(+0; \mu) = E(+\infty; \mu) = +\infty$$

вытекает, что у $E(r)$ либо нет корней, либо имеется два простых, либо один корень кратности два. Мы доказали первое предположение в утверждении 2).

Если $\mu \in [-2n, -2n+1/\rho]$, то числа (4.1.11) неотрицательны и одновременно не обращаются в нуль. Значит, $g(t) > 0$, $t > 0$, и из (4.1.9) следует, что при таких μ у $E_\rho(z; \mu)$ положительных корней нет.

Пусть $\mu \rightarrow -2n+1-0$, где n фиксировано. Тогда

$$E_\rho(z; \mu) \rightarrow E_\rho(z; -2n+1)$$

равномерно в каждом круге. Но функция $E_\rho(z; -2n+1)$ имеет простой корень в точке $z = 0$ и не имеет других корней в некоторой окрестности $U(0)$ нуля. По теореме Гурвица при всех μ , достаточно близких к $-2n+1$, и таких, что $\mu < -2n+1$, у $E_\rho(z; \mu)$ имеется один и только один корень в $U(0)$. По теореме 4.1.1 отрицательных корней у $E_\rho(z; \mu)$ при таких значениях μ нет. Если бы в $U(0)$ находился невещественный корень z_1 , то там же был бы и комплексно сопряженный корень $\bar{z}_1$ (в силу вещественности $E_\rho(x; \mu)$). Значит, в $U(0)$ должен быть простой положительный корень функции $E(r)$. Но в таком случае, в силу вывода, сделанного после формулы (4.1.13), $E(r)$ имеет два простых положительных корня, как только $\mu < -2n+1$ и μ достаточно близко к $-2n+1$. Обозначим через μ_n нижнюю грань таких μ .

Верно следующее промежуточное утверждение. Пусть при некотором $\mu_0 \in (-2n, -2n+1)$ функция $E_\rho(x; \mu_0)$ обладает одним из свойств:

- 1) она не имеет положительных корней,
- 2) она имеет два простых положительных корня.

Тогда для всех μ из некоторой (вещественной) окрестности точки μ_0 функция $E_\rho(x; \mu)$ обладает тем же свойством.

Действительно, обозначим

$$m(\mu) = \min(E_\rho(x; \mu) : x \in [0, +\infty)).$$

Так как

$$E_\rho(0; \mu_0) > 0, \quad E_\rho(+\infty; \mu_0) = +\infty,$$

то

$$m(\mu_0) > 0 \text{ и } m(\mu_0) < 0$$

соответственно в случаях 1) и 2). В силу непрерывности функции $m(\mu)$ последние неравенства сохраняются и в некоторой окрестности точки μ_0 , и сформулированное утверждение верно.

Докажем, что при $\mu = \mu_n$ функция $E_\rho(x; \mu)$ имеет двукратный положительный корень. В самом деле, если бы это было не так, то по выводу, сформулированному после формулы (4.1.13), функция $E_\rho(x; \mu_n)$ либо имела бы два положительных простых корня, либо не имела бы ни одного. По промежуточному утверждению это относилось бы и к функции $E_\rho(x; \mu)$ из некоторой окрестности точки μ_n . А это противоречило бы смыслу величины μ_n .

Точно так же, если мы обозначим через ν_n верхнюю грань тех $\mu > -2n$, для которых $E_\rho(z; \mu)$ не имеет положительных корней, то $E_\rho(z; \nu_n)$ имеет двукратный положительный корень и $-2n + 1/\rho < \nu_n$. Очевидно, $\nu_n \leq \mu_n$, и часть (I) теоремы 4.1.2 доказана.

(II). Пусть $\mu < 2$. Совершая в формулах (4.1.9) и (4.1.10) предельный переход при $\rho \rightarrow 1 + 0$, получаем, что формула (4.1.9) остается верной и при $\rho = 1$, а формула (4.1.10) переходит в формулу

$$g(t) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi(t+1)}.$$

Если $\mu \in [-2n, -2n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, то $g(t) \geq 0$, $t > 0$, и в силу (4.1.9) $E(r) > 0$, $r > 0$. Значит, для таких μ положительных корней у $E_\rho(z; \mu)$ нет.

Если $\mu \in (-2n-1, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то

$$E_1(0; \mu) < 0, \quad E_1(+\infty; \mu) = +\infty.$$

Поэтому у $E_1(x; \mu)$ есть хотя бы один положительный корень. То, что он единственный и простой, доказывается так же, как в утверждении 1) части (I), где все опиралось на отрицательность функции $G(t)$, $t > 0$. Но это свойство имеет место и теперь, так как $g(t) < 0$, $t > 0$, при указанных значениях μ . Часть (II) верна. Теорема 4.1.2 доказана. $\square$

Замечание 4.1.2. Утверждение 2) части (I) характеризует положительные корни при $\mu \in [-2n, -2n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, недостаточно полно. Мы рискуем высказать предположение, что на самом деле $\nu_n = \mu_n$.

4.1.3. Поведение вещественных корней. Пусть $\rho > 1$. При $\mu \in (-n, -n+1/\rho)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, у $E_\rho(z; \mu)$ по теореме 4.1.1 имеется единственный отрицательный корень; обозначим его через $x_-(\mu)$. При $\mu \in [-2n-1, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, у $E_\rho(z; \mu)$ по теореме 4.1.2 имеется единственный положительный корень, являющийся простым; обозначим его через $x_+(\mu)$. Два положительных простых корня $E_\rho(z; \mu)$ при $\mu \in (\mu_n, -2n+1)$ обозначаем $x_+^1(\mu)$, $x_+^2(\mu)$; пусть $x_+^1(\mu) < x_+^2(\mu)$. Через $x_+^*(\mu_n)$ обозначаем двукратный положительный корень $E_\rho(z; \mu)$ при $\mu = \mu_n$. Обозначение $x_+(\mu)$ сохраним и для $\rho = 1$.

Теорема 4.1.3. 1) Пусть $\rho > 1$. Тогда:

$$\begin{aligned} x_+(\mu) &\rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow -2n - 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ x_+(\mu) &\rightarrow x_+(-2n - 1) \text{ при } \mu \rightarrow -2n - 1 + 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ x_-(\mu) &\rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow -n + 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ x_-(\mu) &\rightarrow -\infty \text{ при } \mu \rightarrow -n + 1/\rho - 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ x_+^1(\mu), x_+^2(\mu) &\rightarrow x_+^*(\mu_n) \text{ при } \mu \rightarrow \mu_n + 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ x_+^1(\mu) &\rightarrow 0, x_+^2(\mu) \rightarrow x_+(-2n + 1) \text{ при } \mu \rightarrow -2n + 1 - 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2) Если $\rho = 1$, то

$$x_+(\mu) \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow -2n - 1 + 0 \text{ и при } \mu \rightarrow -2n - 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Точка $x = 0$ — простой корень функции $E_\rho(x; -2n)$. Поэтому при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ значения $E_\rho(\pm\varepsilon; -2n)$ имеют разные знаки. В силу непрерывности функции $E_\rho(\pm\varepsilon; \mu)$ (переменной μ) при всех μ , достаточно близких к $-2n$ и меньших $-2n$, значения $E_\rho(\pm\varepsilon; \mu)$ имеют разные знаки, и потому в ε -окрестности точки $x = 0$ найдется корень функции $E_\rho(x; \mu)$, очевидно, отличный от нуля. Но по теореме 4.1.1 для таких μ у $E_\rho(x; \mu)$ нет отрицательных корней. Значит, корень, о котором идет речь, есть $x_+(\mu)$ и $x_+(\mu) \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow -2n - 0$.

В случае $\mu \rightarrow -2n - 1 + 0$ окрестность точки $x = 0$ заменяется окрестностью точки $x_+(-2n - 1)$, и рассуждения аналогичны (и даже проще, так как теорема 4.1.1 здесь не нужна). Мы доказали два первых предельных соотношения.

По тем же соображениям для μ , достаточно близких к $-n$ и таких, что $\mu > -n$, в проколотой окрестности точки $x = 0$ находится корень $E_\rho(x; \mu)$. При четном n он не может быть положительным по теореме 4.1.2, а при нечетном n единственный положительный корень $E_\rho(x; \mu)$ лежит в окрестности точки $x_+(-2n - 1)$ по второму предельному соотношению теоремы 4.1.3. Значит, этот корень есть $x_-(\mu)$, и $x_-(\mu) \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow -n + 0$. Мы доказали третье предельное соотношение.

Пусть $\mu \rightarrow -n + 1/\rho - 0$. Тогда

$$E_\rho(x; \mu) \rightarrow E_\rho(x; -n + 1/\rho)$$

равномерно на каждом отрезке. По теореме 4.1.1 у функции $E_\rho(x; -n + 1/\rho)$ нет отрицательных корней; очевидно, и точка $x = 0$ не является ее корнем. Допустим, что найдутся $R > 0$ и последовательность $\mu_j \rightarrow -n + 1/\rho - 0$, такие, что

$$-R \leq x_-(\mu_j) < 0.$$

Тогда выделяя из последовательности $x_-(\mu_j)$ сходящуюся подпоследовательность и пользуясь равномерной сходимостью, заключаем, что ее предел x_- является корнем функции $E_\rho(x; -n + 1/\rho)$, что невозможно, так как $x_- \in [-R, 0]$. Это означает, что верно четвертое предельное соотношение теоремы 4.1.3.

Пятое предельное соотношение следует из теоремы Гурвица, шестое доказывается так же, как два первых. Часть 1 теоремы 4.1.3 доказана.

Часть 2 доказывается так же, как первое предельное соотношение части 1. Теорема 4.1.3 доказана. $\square$

Из теорем 4.1.1 и 4.1.2 вытекает

Следствие 4.1.1. При $\rho > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$ у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет вещественных корней кратности выше двух.

4.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ В УГЛАХ

4.2.1. Отсутствие нулей в правом угле. Пусть $\rho > 1/2$, μ вещественно и $\mu \leq 1 + 1/\rho$. Тогда по теореме 2.1.1 все достаточно большие по модулю нули функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат вне угла

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}. \quad (4.2.1)$$

Цель этого пункта состоит в том, чтобы описать по возможности наиболее широкое множество пар параметров $\rho > 1/2$ и $\mu \in \mathbb{R}$, таких, что все (!) нули функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат вне угла (4.2.1). Та же теорема 2.1.1 показывает, что условие $\mu \leq 1 + 1/\rho$ является необходимым.

Теорема 4.2.1.

(I). Пусть выполнено одно из условий:

- 1) $\rho > 1$, $\mu \in [1, 1 + 1/\rho]$,
- 2) $1/2 < \rho < 1$, $\mu \in [1/\rho - 1, 1] \cup [1/\rho, 2]$.

Тогда все корни функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат вне угла (4.2.1).

В частности, все корни классической функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(z; 1)$, $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$, лежат вне угла (4.2.1).

(II). Если $1/2 < \rho < 1$, $\mu = 0$, то все ненулевые корни функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат вне угла (4.2.1).

Случай $\rho = 1$ будет детально рассмотрен позже.

Лемма 4.2.1. Пусть $f(x)$, $x > 0$, — нетривиальная вещественнозначная функция класса $L^1(\mathbb{R}_+)$, не меняющая знака на $\mathbb{R}_+$. Тогда ее преобразование Лапласа

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zv} f(v) dv, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad (4.2.2)$$

непрерывно в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и обладает следующим свойством:

$$|F(z)| < |F(0)|, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, z \neq 0.$$

Доказательство леммы 4.2.1. Утверждение о непрерывности есть прямое следствие условия $f \in L^1$. В силу того, что $f(x)$ не меняет знака, неравенство

$$|F(z)| < |F(0)|, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

очевидно, и нам остается доказать, что

$$|F(iy)| < |F(0)|, \quad y \in \mathbb{R}, y \neq 0.$$

Предположим противное, т. е. $|F(iy)| = |F(0)|$ для некоторого $y \neq 0$. Тогда

$$F(iy) = F(0)e^{i\beta}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

и из (4.2.2) и из вещественности f следует, что

$$0 = \operatorname{Re}(F(0) - e^{-i\beta}F(iy)) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}_+} (1 - e^{-i(yv+\beta)})f(v)dv = \int_{\mathbb{R}_+} (1 - \cos(yv + \beta))f(v)dv.$$

Так как подынтегральная функция в последнем интеграле не меняет знака и нетривиальна, то мы получили противоречие. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.2.1. Будем пользоваться следующим представлением: если $\rho > 1/2$, $\mu < 1 + 1/\rho$, $\alpha = 1/\rho$, то

$$z^{\mu-1}E_\rho(z^\alpha; \mu) = \rho e^z + F_{\alpha\mu}(z), \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (4.2.3)$$

где

$$F_{\alpha\mu}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zv} v^{\alpha-\mu} \frac{\sin \pi(\alpha - \mu) + v^\alpha \sin \pi\mu}{v^{2\alpha} + 1 - 2v^\alpha \cos \pi\alpha} dv.$$

Так как обе части формулы (4.2.3) суть функции, аналитические в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, то достаточно доказать представление для $z = x > 0$.

Пусть произвольное $x > 0$ фиксировано. Тогда применяя сначала формулу (1.1.1), с $\alpha_2 = -\alpha_1 = \pi$, $\sigma > x$, $z = x^\alpha$, $\alpha = 1/\rho$, а затем теорему о вычетах, имеем равенство

$$E_\rho(x^\alpha; \mu) = \rho e^x x^{1-\mu} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^t t^{\alpha-\mu} dt}{t^\alpha - x^\alpha}, \quad x > 0,$$

где γ — проходимая во взаимно противоположных направлениях отрицательная вещественная полуось. Далее, полагая $t = -u$, записываем интеграл по γ сначала в виде двух интегралов по правой вещественной полупрямой, а затем, объединяя их, с помощью простой выкладки (похожей на ту, что применялась при доказательстве теоремы 1.1.2) и замены переменной $u = vx$ получаем требуемое представление.

Пусть

$$\rho > 1/2, \neq 1, \quad \mu \in [1, 2] \cap [1/\rho, 1 + 1/\rho)$$

или

$$1/2 < \rho < 1, \quad \mu = 0.$$

Тогда для функции

$$f(v) = \frac{1}{\pi} v^{\alpha-\mu} \frac{\sin \pi(\alpha - \mu) + v^\alpha \sin \pi\mu}{v^{2\alpha} + 1 - 2v^\alpha \cos \pi\alpha}, \quad v > 0,$$

выполнены все условия леммы 4.2.1. По этой лемме

$$|F_{\alpha\mu}(z)| < |F_{\alpha\mu}(0)|, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad z \neq 0.$$

Отсюда и из (4.2.3) следует, что

$$|z^{\mu-1}E_\rho(z^\alpha; \mu)| \geq |\rho e^z| - |F_{\alpha\mu}(z)| > \rho - |F_{\alpha\mu}(0)|, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, z \neq 0. \quad (4.2.4)$$

Для отыскания значения $F_{\alpha\mu}(0)$ воспользуемся той же формулой (4.2.3). А именно, подставим в нее $z = 0$, если $\mu \neq 0$, и перейдем в ней к пределу при $z \rightarrow 0$, если $\mu = 0$. С учетом того, что $E_\rho(0; \mu) = 1/\Gamma(\mu)$, а

$$E_\rho(z^\alpha; 0) \sim \frac{z^\alpha}{\Gamma(1/\rho)}, \quad z \rightarrow 0 \quad \left(\alpha = \frac{1}{\rho} > 1\right),$$

мы получаем, что

$$F_{\alpha\mu}(0) = -\rho \text{ для } \mu > 1 \text{ и } \mu = 0, \quad F_{\alpha\mu}(0) = 1 - \rho \text{ для } \mu = 1. \quad (4.2.5)$$

Так как результирующее неравенство (4.2.4) строгое, то отсюда следует, что у функции $E_\rho(z^\alpha; \mu)$ нет нулей на множестве $\operatorname{Re} z \geq 0, z \neq 0$, т. е. у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет нулей в угле (4.2.1) с выколотой точкой $z = 0$. Мы доказали часть (II) теоремы. А так как $E_\rho(0; \mu) \neq 0$ при $\mu \neq 0$, то мы доказали отсутствие нулей в угле (4.2.1) для тех пар рассматриваемых параметров ρ, μ , для которых $\mu \neq 0$.

Чтобы доказать часть (I) теоремы, относящуюся к условию 1, осталось рассмотреть значение $\mu = 1 + 1/\rho$ при $\rho > 1$. Для этого заметим, что из (4.2.4), (4.2.5) при $\mu = 1$ следует неравенство

$$|E_\rho(z, 1)| > \rho - |1 - \rho| = 1, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \quad z \neq 0.$$

Применяя его к правой части формулы

$$zE_\rho\left(z; 1 + \frac{1}{\rho}\right) = E_\rho(z, 1) - 1,$$

видим, что функция $E_\rho(z; \mu)$ не обращается в нуль в угле (4.2.1). Случай 1 рассмотрен полностью.

Рассмотрена и часть случая 2, относящаяся к значениям $\mu \in [1/\rho, 2]$. Чтобы распространить ее на недостающие значения $\mu \in [1/\rho - 1, 1]$, понадобится следующая «условная» лемма.

Лемма 4.2.2. Пусть $0 < \rho < 1, \mu > 1$. Тогда если все нули a_k функции $E_\rho(z; \mu)$ расположены вне угла

$$|\arg z| \leq \beta, \quad \pi/2 \leq \beta < \pi,$$

то вне этого угла расположены и все нули функции $E_\rho(z; \mu - 1)$.

Доказательство леммы 4.2.2 использует следующее вспомогательное предложение.

Пусть $G(z)$ — нетривиальная мероморфная функция вида

$$G(z) = \frac{\gamma_0}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{z - a_k},$$

где

$$\gamma_k \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{|a_k|} < \infty.$$

Тогда если последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ содержится в угле

$$A_{\eta, \delta} := (z : \eta < \arg z < \eta + \delta), \quad \eta \in [0, 2\pi), \quad 0 < \delta \leq \pi,$$

то функция $G(z)$ не обращается в нуль вне $A_{\eta, \delta}$.

Сначала проверим справедливость этого предложения в случае $\eta = 0, \delta = \pi$, т. е. когда $A_{\eta, \delta}$ есть открытая верхняя полуплоскость. Имеем равенство

$$\operatorname{Im} G(z) = -\gamma_0 \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} a_k}{|z - a_k|^2}.$$

Так как $\operatorname{Im} a_k > 0$ для $k \geq 1$, то $\operatorname{Im} G(z) > 0$, когда $\operatorname{Im} z \leq 0$, и в этом случае предложение верно.

С помощью поворота комплексной плоскости относительно начала убеждаемся, что предложение справедливо в случае $\delta = \pi$ и любого $\eta \in [0, 2\pi)$. А отсюда и из представления

$$A_{\eta, \delta} = A_{\eta, \pi} \cap A_{\eta + \delta + \pi, \pi}$$

следует, что предложение верно в общем случае.

Перейдем к непосредственному доказательству леммы 4.2.2. Используем известную формулу

$$E_\rho(z; \mu - 1) = (\mu - 1)E_\rho(z; \mu) + \frac{z}{\rho}E'_\rho(z; \mu)$$

(см. [4]). Полагая $\gamma = \rho(\mu - 1)$, запишем ее в виде

$$\rho E_\rho(z; \mu - 1) = z E_\rho(z; \mu) \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{E'_\rho(z; \mu)}{E_\rho(z; \mu)} \right). \quad (4.2.6)$$

Обозначим через $(a_k)_{k=1}^\infty$ множество всех нулей функции $E_\rho(z; \mu)$. Так как $E_\rho(z; \mu)$ есть целая функция порядка $\rho < 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|} < \infty$$

и по теореме Адамара

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{E'_\rho(z; \mu)}{E_\rho(z; \mu)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_k}.$$

По условию леммы

$$(a_k)_{k=1}^\infty \subset A_{\beta, 2(\pi - \beta)}.$$

Так как $\beta \geq \pi/2$, то $0 < 2(\pi - \beta) \leq \pi$. Кроме того, $\gamma > 0$. Поэтому к функции

$$G(z) = \frac{\gamma}{z} + \frac{E'_\rho(z; \mu)}{E_\rho(z; \mu)}$$

применимо вспомогательное предложение, по которому $G(z)$ не обращается в нуль в угле $|\arg z| \leq \beta$. В силу (4.2.6) функция $E_\rho(z; \mu - 1)$ не обращается в нуль в этом угле, и лемма 4.2.2 доказана.

Теперь недостающая часть случая 2) следует из его справедливости для $\mu \in [1/\rho, 2]$ и из леммы 4.2.2. Теорема 4.2.1 доказана. $\square$

4.2.2. Отсутствие нулей в левом угле. В этом пункте нас интересуют условия на пары параметров $\rho > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$, при которых у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет нулей в угле

$$\frac{\pi}{\rho} \leq |\arg z| \leq \pi. \quad (4.2.7)$$

Обозначим через A_ρ ($\rho > 1$) множество всех $\mu \in \mathbb{R}$, таких, что все ненулевые корни функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат вне угла (4.2.7).

Теорема 4.2.2. *Справедливы следующие включения:*

- 1) $A_\rho \subset \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[-n + \frac{1}{\rho}, -n + 1 \right] \right) \cup [1, +\infty)$,
- 2) $A_\rho \supset \left[1, 1 + \frac{1}{\rho} \right] \cup (-\mathbb{Z}_+) \cup \left(-\mathbb{Z}_+ + \frac{1}{\rho} \right)$,
- 3) $A_2 \supset \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[-n + \frac{1}{2}, -n + 1 \right] \right) \cup \left[1, \frac{3}{2} \right]$.

При фиксированных $R, \rho > 0$ введем обозначение

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{-Rt^\rho} \frac{t - x}{t^2 - 2tx + 1} dt, \quad x \leq 1, \quad (4.2.8)$$

где при $x = 1$ интеграл понимается как особый.

Лемма 4.2.3. *Функция $I(x)$ убывает при $x \leq 1$.*

Доказательство. Если $x < 1$, то $t^2 - 2tx + 1 > 0$, и интегрируя по частям, получаем, что

$$I(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} d \ln(t^2 - 2tx + 1) = \frac{R\rho}{2} \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} t^{\rho-1} \ln(t^2 - 2tx + 1) dt. \quad (4.2.9)$$

Очевидно, правая часть убывает на полупрямой $x \leq 1$. Но пока мы знаем только, что она совпадает с $I(x)$ при $x < 1$. Поэтому остается проверить, что формальная подстановка $x = 1$ в правую часть (4.2.9) дает особый интеграл $I(1)$. Обозначив $B(\varepsilon)$ через $\mathbb{R}_+ \setminus (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, по определению особого интеграла имеем равенство

$$I(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(\varepsilon)} e^{-Rt^\rho} \frac{dt}{t-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(\varepsilon)} e^{-Rt^\rho} d \ln |t-1|.$$

Снова интегрируем по частям. Получаем, что

$$\begin{aligned} I(1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((e^{-R(1-\varepsilon)^\rho} - e^{-R(1+\varepsilon)^\rho}) \ln \varepsilon + \frac{R\rho}{2} \int_{B(\varepsilon)} e^{-Rt^\rho} t^{\rho-1} \ln(t-1)^2 dt \right) = \\ &= \frac{R\rho}{2} \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} t^{\rho-1} \ln(t-1)^2 dt, \end{aligned}$$

причем последний интеграл существует в обычном смысле. Сравнивая это с (4.2.9), видим, что правая часть в (4.2.9) есть $I(1)$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.2.4. Пусть функция $H(z)$ является гармонической и ограниченной в угле $\theta_0 < \arg z = \theta < \theta_1$ и непрерывной при $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. Пусть, кроме того, на одной стороне угла $H = 0$, а на другой стороне $H > 0$. Тогда $H(z) > 0$ в этом угле.

Доказательство. Если данный угол есть полуплоскость $0 < \theta < \pi$, то лемма вытекает из представления функции $H(z)$ интегралом Пуассона от $H(x)$ и из положительности ядра Пуассона.

Общий случай сводится к этому конформным отображением угла на полуплоскость. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.2.2. 1) Это утверждение следует из теоремы 4.1.1.

Из теоремы 4.1.1, а также из комплексной сопряженности нулей, следует, что при доказательстве утверждений 2) и 3) достаточно рассматривать угол $\pi/\rho \leq \theta < \pi$ вместо угла (4.2.7).

Будем пользоваться теоремой 1.1.2, дающей при $\rho > 1$, $\mu < 1 + 1/\rho$ следующие представления:

$$E_\rho(z; \mu) = F_\rho(z; \mu), \quad \frac{\pi}{\rho} < |\arg z| \leq \pi, \quad (4.2.10)$$

$$E_\rho(z; \mu) = F_\rho(z; \mu) + \frac{\rho}{2} z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho}, \quad \arg z = \pm \frac{\pi}{\rho}, \quad (4.2.11)$$

$$E_\rho(z; \mu) = F_\rho(z; \mu) + \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{\rho}, \quad (4.2.12)$$

где

$$F_\rho(z; \mu) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-t^\rho} t^{\rho(1-\mu)} f_\rho(t; z, \mu) dt, \quad (4.2.13)$$

$$f_\rho(t; z, \mu) = \frac{e^{-i\pi\mu}}{ze^{-i\pi/\rho} - t} - \frac{e^{i\pi\mu}}{ze^{i\pi/\rho} - t}. \quad (4.2.14)$$

В дальнейшем пишем $f(t)$ вместо $f_\rho(t; z, \mu)$.

2) Пусть $\mu = m = 1, 0, -1, \dots$ Тогда по формуле (4.2.14)

$$(-1)^{m-1} f(t) = \frac{1}{ze^{i\pi/\rho} - t} - \frac{1}{ze^{-i\pi/\rho} - t},$$

$$(-1)^{m-1} \operatorname{Re} f(t) = \frac{r \cos(\theta + \pi/\rho) - t}{r^2 - 2tr \cos(\theta + \pi/\rho) + t^2} - \frac{r \cos(\theta - \pi/\rho) - t}{r^2 - 2tr \cos(\theta - \pi/\rho) + t^2},$$

и обозначив $a = \cos(\theta - \pi/\rho)$, $b = \cos(\theta + \pi/\rho)$, $R = r^\rho$, по формуле (4.2.13) имеем равенство

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1} \operatorname{Im} F_\rho(z; \mu) &= -\frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} \operatorname{Re} f(t) dt = \\ &= \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} \left(\frac{t-b}{t^2-2bt+1} - \frac{t-a}{t^2-2at+1} \right) dt = \frac{\rho}{2\pi} (I(b) - I(a)) \end{aligned}$$

в обозначениях (4.2.8), причем $a, b \leq 1$. Имеем формулу

$$a - b = 2 \sin \theta \sin \pi/\rho > 0 \text{ при } 0 < \theta < \pi.$$

По лемме 4.2.3

$$(-1)^{m-1} \operatorname{Im} F_\rho(z; \mu) > 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad r > 0. \quad (4.2.15)$$

Используя это и формулу (4.2.10), видим, что

$$(-1)^{m-1} \operatorname{Im} E_\rho(z; \mu) > 0, \quad \frac{\pi}{\rho} \leq \theta < \pi, \quad r > 0, \quad \mu \in (-\mathbb{Z}_+) \cup \{1\}, \quad (4.2.16)$$

и, значит, $(-\mathbb{Z}_+) \cup \{1\} \subset A_\rho$.

Из (4.2.16) и из (вытекающей из определения) формулы

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + z E_\rho\left(z; \mu + \frac{1}{\rho}\right) \quad (4.2.17)$$

сразу следует, что

$$\operatorname{Im} \left(z E_\rho\left(z; m + \frac{1}{\rho}\right) \right) \neq 0, \quad \frac{\pi}{\rho} \leq \theta < \pi, \quad r > 0,$$

т. е. $m + 1/\rho \in A_\rho$ для $m = 1, 0, -1, \dots$

Чтобы охватить остальное множество параметров $\mu \in (1, 1 + 1/\rho)$, при фиксированных $\rho > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$, $s \in (0, 1)$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$G(z) = G(z; \rho, \mu, s) := E_\rho(z; \mu) - z^s E_\rho\left(z; \mu + \frac{s}{\rho}\right),$$

которая аналитична при $y = \operatorname{Im} z > 0$ и непрерывна при $y \geq 0$. Из теоремы 1.2.1 следует ограниченность функции $G(z)$ при $y > 0$. Значит, гармоническая в полуплоскости $y > 0$ функция $H(z) = \operatorname{Im} G(z)$ ограничена в ней и непрерывна при $y \geq 0$.

Так как значения

$$E_\rho(x; \mu), \quad E_\rho(x; \mu + s/\rho)$$

вещественны при $x \in \mathbb{R}$, то

$$H(x) = 0 \text{ при } x > 0. \quad (4.2.18)$$

Далее,

$$\operatorname{sign} H(x) = -\operatorname{sign} \operatorname{Im} \left(|x|^s e^{i\pi s} E_\rho\left(x; \mu + \frac{s}{\rho}\right) \right) = -\operatorname{sign} E_\rho\left(x; \mu + \frac{s}{\rho}\right), \quad x < 0. \quad (4.2.19)$$

Фиксируем $\mu = m = 1$. По замечанию 4.1.1

$$E_\rho\left(x; 1 + \frac{s}{\rho}\right) > 0, \quad x < 0.$$

Значит,

$$H(x) < 0 \text{ при } x < 0. \quad (4.2.20)$$

Отсюда и из (4.2.18) по лемме 4.2.4 имеем неравенство

$$H(z) < 0, \quad y > 0. \quad (4.2.21)$$

По смыслу функции $G(z)$ это означает, что

$$\operatorname{Im} \left(z^s E_\rho\left(z; 1 + \frac{s}{\rho}\right) \right) > \operatorname{Im} E_\rho(z; 1), \quad y > 0, \quad (4.2.22)$$

если $0 < s < 1$. В силу (4.2.16) правая часть в (4.2.22) положительна в угле $\pi/\rho \leq \theta < \pi$. Значит, положительна и левая часть, т. е. функция $E_\rho(z; 1 + s/\rho)$ не обращается в нуль в этом угле, если $0 < s < 1$. Утверждение 2) доказано.

3) Благодаря утверждениям 2), 1), надо доказать, что у функции $E_2(x; \mu)$ нет корней в угле $\pi/2 \leq \theta < \pi$, если

$$\mu \in \left(-m + \frac{1}{2}, -m + 1\right), \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.2.23)$$

Пусть сначала $\mu = -m + 1/2$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда по формуле (4.2.14)

$$(-1)^m f(t) = \frac{i}{iz + t} - \frac{i}{iz - t}.$$

Значит, если $z = iy$, $y > 0$, то $\operatorname{Re} f(t) = 0$, и по формуле (4.2.13) $\operatorname{Im} F_\rho(z, \mu) = 0$ на положительной мнимой полуоси. Тогда в силу (4.2.11)

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im} E_2(z; \mu) = \operatorname{sign} \operatorname{Im}(e^{-z^2} z^{2(1-\mu)}) = \operatorname{sign} \sin \pi \left(\frac{1}{2} + m\right) = (-1)^m$$

на этой полуоси. Очевидно, $\operatorname{Im} E_2(x; \mu) = 0$ при $x \in \mathbb{R}$. По теореме 1.2.1 функция $E_2(z; \mu)$ ограничена в угле $\pi/2 < \theta < \pi$. Итак, гармоническая и ограниченная в угле $\pi/2 < \theta < \pi$ функция $\operatorname{Im} E_2(z; \mu)$ такова, что на одной стороне этого угла она есть тождественный нуль, а на другой стороне сохраняет знак $(-1)^m$. По лемме 4.2.4 всюду в угле $\pi/2 < \theta < \pi$ она сохраняет знак $(-1)^m$. Следовательно,

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im} E_2\left(z; -m + \frac{1}{2}\right) = (-1)^m, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.2.24)$$

Зафиксировав $m \in \mathbb{Z}_+$, рассмотрим вспомогательную функцию

$$G(z) = G\left(z; 2, -m + \frac{1}{2}, s\right), \quad 0 < s < 1.$$

Напомним, что верно свойство (4.2.18).

Пусть сначала m четно. Тогда в силу (4.1.3)

$$E_2\left(x; -m + \frac{1+s}{2}\right) > 0, \quad x < 0,$$

и, значит, по формуле (4.2.19) имеет место свойство (4.2.20). Отсюда и из (4.2.18) по лемме 4.2.4 следует свойство (4.2.21). Поэтому

$$\operatorname{Im}\left(z^s E_2\left(z; -m + \frac{1+s}{2}\right)\right) > \operatorname{Im} E_2\left(z; -m + \frac{1}{2}\right), \quad y > 0.$$

Благодаря (4.2.24) левая часть положительна в угле $\pi/2 \leq \theta < \pi$. Мы доказали, что все значения μ из множества (4.2.23) с четным m принадлежат множеству A_2 .

Если m нечетно, то по свойству (4.3.4)

$$E_2\left(x; -m + \frac{1+s}{2}\right) < 0, \quad x < 0,$$

и, следовательно, формула (4.2.19) на этот раз дает неравенство

$$H(x) > 0 \text{ при } x < 0, \quad 0 < s < 1.$$

Отсюда и из (4.2.18) по лемме 4.2.4 имеем неравенство

$$H(z) > 0, \quad y > 0.$$

Но теперь

$$\operatorname{Im} E_2\left(z; -m + \frac{1}{2}\right) < 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi,$$

в силу (4.2.24). Значит,

$$\operatorname{Im}\left(z^s E_2\left(z; -m + \frac{1+s}{2}\right)\right) < \operatorname{Im} E_2\left(z; -m + \frac{1}{2}\right) < 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi,$$

и утверждение 3) доказано полностью. Теорема 4.2.2 доказана. $\square$

Теорема 4.2.3. При $\rho > 1$, $\mu \in [1, 1 + 1/\rho]$ все корни функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат на множестве

$$\frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| < \frac{\pi}{\rho}, \quad 2\pi n < |\operatorname{Im} z^\rho| < (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.2.25)$$

В частности, при $\rho > 1$ все корни классической функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(z; 1)$ лежат на множестве (4.2.25).

Доказательство. При $\rho > 1$, $1 \leq \mu \leq 1 + 1/\rho$ все корни функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат вне угла (4.2.1) (по теореме 4.2.1) и вне угла (4.2.7) (по теореме 4.2.2), и нам остается доказать второе двойное неравенство в (4.2.25). В силу комплексной сопряженности корней достаточно рассмотреть угол $\pi/(2\rho) < \theta < \pi/\rho$.

Пусть $\mu = m = 1$. Тогда из формулы (4.2.12) и неравенства (4.2.15) соответственно следует, что

$$\operatorname{Im} E_\rho(z; 1) = \operatorname{Im} F_\rho(z; 1) + \rho \operatorname{Im} e^{z^\rho} > \rho e^{\operatorname{Re} z^\rho} \sin(\operatorname{Im} z^\rho), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{\rho},$$

$$\operatorname{Im} E_\rho(z; 1) > 0, \quad 2\pi n < \operatorname{Im} z^\rho < (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{\rho}, \quad (4.2.26)$$

и для $\mu = 1$ теорема 4.2.3 верна. Теперь объединяя (4.2.26) сначала с формулой (4.2.17), а затем с неравенством (4.2.22), получаем утверждение теоремы для $\mu = 1 + 1/\rho$ и $\mu \in (1, 1 + 1/\rho)$. Теорема 4.2.3 доказана. $\square$

Следствие 4.2.1. При $\rho > 1$, $1 \leq \mu \leq 1 + 1/\rho$ у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет корней в круге $|z| \leq \pi^{1/\rho}$.

4.3. СЛУЧАЙ $\rho = 1/2$

В этом пункте мы покажем, что при $\mu \in (1, 2) \cup (2, 3)$ все нули функции $E_{1/2}(z; \mu)$ отрицательны и просты, и укажем интервалы, в которых заключены эти нули. Если же значения параметра μ близки к значениям 2 или 3, то будут указаны более точные интервалы, содержащие нули с малыми номерами. Но начнем мы со случая $\mu > 3$: покажем, что у функции $E_{1/2}(z; \mu)$ нет вещественных нулей, а затем уточним этот факт, доказав отсутствие нулей внутри некоторой (вполне определенной) параболы, содержащей отрицательную вещественную полуось.

4.3.1. Случай $\mu > 3$. Все основано на следующих формулах, которые доказаны в [4]:

$$E_{1/2}(-z^2; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^1 (1-t)^{\mu-2} \cos zt dt, \quad \mu > 1, \quad (4.3.1)$$

$$z E_{1/2}(-z^2; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu-2)} \int_0^1 (1-t)^{\mu-3} \sin zt dt, \quad \mu > 2. \quad (4.3.2)$$

Лемма 4.3.1 ([22, 40, 41]). Пусть функция $f(t)$, $t > 0$, неотрицательна, не возрастает и $tf(t)/(t+1) \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Пусть, кроме того, $f(t)$ убывает на некотором интервале. Тогда функция

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \sin yt dt, \quad y \in \mathbb{R},$$

положительна на полупрямой $y > 0$ и, в частности, не имеет ненулевых корней.

Введем обозначение

$$x_\mu = \sqrt{(\mu-3)(\mu-2)} + \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\mu-3}{\mu-2}}, \quad \mu > 3. \quad (4.3.3)$$

Теорема 4.3.1. Пусть $\mu > 3$. Тогда:

- 1) у функции $E_{1/2}(z; \mu)$ нет вещественных нулей,

2) у функции $E_{1/2}(z; \mu)$ нет нулей на множестве

$$0 \leq \operatorname{Re} \sqrt{z} \leq x_\mu, \quad (4.3.4)$$

т. е. в левой криволинейной полуплоскости, ограниченной параболой

$$x = x_\mu^2 - \frac{y^2}{4x_\mu^2}.$$

Доказательство. 1) То, что у $E_{1/2}(z; \mu)$ нет неотрицательных корней, следует из определения функции Миттаг-Леффлера. Покажем, что у $E_{1/2}(z; \mu)$ нет и отрицательных корней.

Вводя обозначение

$$f(t) = (1-t)^{\mu-3}, \quad 0 < t < 1; \quad f(t) = 0, \quad t \geq 1,$$

видим, что при $\mu > 3$ для $f(t)$ выполнены все условия леммы 4.3.1. По ней и по формуле (4.3.2) у функции $E_{1/2}(z; \mu)$ нет отрицательных корней. Утверждение 1) доказано.

2) Доказательство этой части также основано на формуле (4.3.2), которую здесь удобней использовать в виде

$$\Gamma(\mu-2)zE_{1/2}(z^2; \mu) = \int_0^1 (1-t)^{\mu-3} \operatorname{sh} zt dt, \quad \mu > 2.$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma(\mu-2) \operatorname{Im}(zE_{1/2}(z^2; \mu)) = \int_0^1 (1-t)^{\mu-3} \operatorname{ch} xt \sin ytdt, \quad z = x + iy, \quad \mu > 2. \quad (4.3.5)$$

При фиксированном $x \geq 0$ положим $f_x(t) = 0$ при $t \geq 0$ и

$$f_x(t) = (1-t)^{\mu-3} \operatorname{ch} xt, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Тогда правая часть в (4.3.5) имеет вид функции $F(y)$ из леммы 4.3.1. Для функции $f_x(t)$ выполнены все условия этой леммы, кроме, быть может, монотонности. Поэтому, как только при некотором x функция $f_x(t)$ окажется убывающей в интервале $(0, 1)$, то по лемме 4.3.1 функция $E_{1/2}(z^2; \mu)$ не будет иметь нулей на прямой $\operatorname{Re} z = x$ с выколотой точкой x . Но по доказанному утверждению 1) при $\mu > 3$ вещественная точка не может быть нулем этой функции. Следовательно в случае убывания $f_x(t)$ функция $E_{1/2}(z; \mu)$ не имеет нулей на прямой $\operatorname{Re} z = x$.

Так как

$$(f_x(t))' = (1-t)^{\mu-3} \left(-\frac{\mu-3}{1-t} \operatorname{ch} xt + x \operatorname{sh} xt \right), \quad 0 < t < 1,$$

то условие $(f_x(t))' \leq 0$ невозрастания функции $f_x(t)$ равносильно условию

$$x \operatorname{th} xt \leq \frac{\mu-3}{1-t}, \quad 0 < t < 1. \quad (4.3.6)$$

Очевидно, условие (4.3.6) выполняется при всех малых $x > 0$ и не выполняется при всех достаточно больших. Правая часть в (4.3.6) есть функция, строго выпуклая в интервале $(0, 1)$, а левая часть при фиксированном $x > 0$ есть функция строго вогнутая на нем. Отсюда и из непрерывной зависимости левой части от x следует существование единственного значения $x = x_\mu > 0$, такого, что графики этих функций касаются друг друга при некотором значении $t = t_\mu \in (0, 1)$, а при $t \neq t_\mu$, $0 < t < 1$, в (4.3.6) имеет место строгое неравенство. Это означает, что при $0 \leq x \leq x_\mu$ функция $f_x(t)$ убывает в интервале $(0, 1)$, и, значит, у функции $E_{1/2}(z^2; \mu)$ нет нулей в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq x_\mu$. Следовательно, у функции $E_{1/2}(z; \mu)$ нет нулей на множестве (4.3.4), и нам остается только вычислить значение x_μ .

Упомянутое касание графиков равносильно равенству (4.3.6) при некотором значении $t \in (0, 1)$ и равенству производных при том же значении t , т. е. равносильно системе уравнений

$$x \operatorname{th} xt = \frac{\mu-3}{1-t}, \quad \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 xt} = \frac{\mu-3}{(1-t)^2}. \quad (4.3.7)$$

Для отыскания $x = x_\mu$ следует исключить из этой системы.

Возводя обе части первого уравнения в квадрат, складывая полученное почленно со вторым уравнением и применяя формулу $1 - \operatorname{th}^2 t = 1/\operatorname{ch}^2 t$, получаем, что

$$x^2 = \frac{(\mu - 3)(\mu - 2)}{(1 - t)^2}.$$

Отсюда последовательно находим выражения

$$xt = x - \sqrt{(\mu - 3)(\mu - 2)}, \quad \frac{\mu - 3}{1 - t} = \sqrt{\frac{\mu - 3}{\mu - 2}} x,$$

и подставляя эти выражения в первое уравнение (4.3.7), получаем, что

$$\operatorname{th}(x - \sqrt{(\mu - 3)(\mu - 2)}) = \sqrt{\frac{\mu - 3}{\mu - 2}}.$$

И так как решение системы (4.3.7) существует и единственно, то оно вычисляется по формуле (4.3.3). Теорема доказана. $\square$

Заметим, что утверждение 1) теоремы 4.3.1 содержится в утверждении 2). Мы приводим его доказательство по той причине, что оно гораздо проще доказательства утверждения 2).

4.3.2. Нули финитных косинус- и синус-преобразований Фурье. Пусть $f \in L^1(0, 1)$; рассмотрим соответствующие косинус- и синус-преобразования Фурье

$$U(z) = \int_0^1 f(t) \cos zt dt, \quad (4.3.8)$$

$$V(z) = \int_0^1 f(t) \sin zt dt. \quad (4.3.9)$$

Интегралы в формулах (4.3.1), (4.3.2) имеют вид $U(z)$ и $V(z)$ соответственно. Поэтому естественно воспользоваться известными результатами о распределении нулей функций $U(z)$ и $V(z)$, в существенном принадлежащими По́йа. Мы сформулируем их в виде теорем А и В; в них под *исключительной функцией* понимается ступенчатая функция с разрывами в рациональных точках.

Введем последовательности интервалов

$$\left(\pi \left(n - \frac{1}{2} \right), \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.3.10)$$

$$(\pi n, \pi(n + 1)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.3.11)$$

$$\left(\pi \left(n - \frac{1}{2} \right), \pi n \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.3.12)$$

$$(\pi(2n - 1), 2\pi n), (2\pi n, \pi(2n + 1/2)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.3.13)$$

Известны следующие результаты.

Теорема А. Пусть функция $f(t)$ положительна и не убывает в интервале $(0, 1)$ (и не является исключительной функцией). Тогда все корни функции $U(z)$ (функции $V(z)$) вещественны и просты, причем все положительные корни функции $U(z)$ (функции $V(z)$) располагаются по одному в интервалах (4.3.10) (в интервалах (4.3.11)).

Теорема В. Пусть функция $f(t)$ положительна, возрастает и выпукла в интервале $(0, 1)$ (и ее правая производная не является исключительной функцией). Тогда все корни функции $V(z)$ (функции $U(z)$) вещественны и просты, причем все положительные корни располагаются по одному в интервалах (4.3.13) (в интервалах (4.3.12)).

Теорема А и часть теоремы В, касающаяся нулей функции $U(z)$, принадлежат По́я (см. [41]), а часть теоремы В, касающаяся нулей функции $V(z)$ — второму автору [44].

Для $\mu \in (1, 2)$ рассмотрим формулу (4.3.1), а для $\mu \in (2, 3)$ — формулу (4.3.2). Эти формулы показывают, что функции $E_{1/2}(-z^2; \mu)$ и $zE_{1/2}(-z^2; \mu)$ имеют вид $U(z)$ и $V(z)$ соответственно, где с точностью до коэффициента

$$f(t) = (1-t)^{\mu-2} \text{ при } 1 < \mu < 2 \quad (4.3.14)$$

и

$$f(t) = (1-t)^{\mu-3} \text{ при } 2 < \mu < 3. \quad (4.3.15)$$

В обоих случаях для $f(t)$ выполнены условия теоремы В. По ней все корни функции

$$E_{1/2}(-z^2; \mu), \quad \operatorname{Re} z \geq 0$$

положительны, просты и располагаются по одному в интервалах (4.3.12) (в интервалах (4.3.13)). В силу четности функции достаточно рассмотреть правую полуплоскость. Значит, справедлива

Теорема 4.3.2. *При $1 < \mu < 2$ и $2 < \mu < 3$ все корни z_n функции $E_{1/2}(z; \mu)$ отрицательны и просты и точки $(-z_n)^{1/2}$ располагаются по одному в интервалах (4.3.12) и (4.3.13) соответственно.*

В главе 3 доказаны более сильные утверждения. Но они стали результатом кропотливого труда, в то время как теорема 4.3.2 есть непосредственное следствие известных результатов. Кроме того, она стимулирует дополнительный анализ формул (4.3.1) и (4.3.2), позволяющий более точно локализовать нули с малыми номерами. Мы сделаем это в общем случае, т. е. для функций $U(z)$ и $V(z)$, а затем, используя формулы (4.3.1) и (4.3.2), применим полученные утверждения к функции $E_{1/2}(-z^2; \mu)$.

Считаем, что функция $f(t)$ положительна и не убывает в интервале $(0, 1)$, т. е. выполнены условия теоремы А (читатель заметил, что эта теорема, в отличие от теоремы В, до сих пор не использовалась). Обозначим через u_n (v_n), $n \in \mathbb{N}$, положительные нули функции $U(z)$ (функции $V(z)$), занумерованные в порядке их возрастания, т. е.

$$\pi(n-1/2) < u_n < \pi(n+1/2), \quad \pi n < v_n < \pi(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введем обозначение

$$I = I_f := \int_{1/2}^1 (f(t) - f(1-t)) dt.$$

Прием, который мы собираемся провести в доказательстве, дает эффект (по сравнению с теоремой 4.3.2) при условии, что величина I не слишком велика, а $f(+0) > 0$.

Теорема 4.3.3. *Пусть функция $f(t)$ не убывает в интервале $(0, 1)$ и $f(+0) = 1$. Тогда:*

1) *если при некотором $N \in \mathbb{N}$*

$$I < \frac{1}{\pi(N+1/2)}, \quad (4.3.16)$$

то

$$\pi n - \arcsin(\pi n I) < u_n < \pi n + \arcsin(\pi(n+1/2)I), \quad n = \overline{1, N}, \quad (4.3.17)$$

2) *если, кроме того, функция f возрастает и выпукла в $(0, 1)$ и при некотором $N \in \mathbb{N}$*

$$I < \frac{1}{\pi N}, \quad (4.3.18)$$

то

$$\pi n - \arcsin(\pi n I) < u_n < \pi n, \quad n = \overline{1, N}.$$

Теорема 4.3.4. *Пусть функция $f(t)$ не убывает в интервале $(0, 1)$ и не является исключительной функцией. Пусть $f(+0) = 1$. Тогда:*

1) если при некотором $N \in \mathbb{N}$

$$2I < \frac{1}{\pi N}, \quad (4.3.19)$$

то

$$2\pi n - \arccos(1 - 2\pi n I) < v_{2n-1} < 2\pi n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (4.3.20)$$

2) если при некотором $n \in \mathbb{N}$

$$2I < \frac{1}{\pi(N + 1/2)},$$

то

$$2\pi n < v_{2n} < 2\pi n + \arccos(1 - \pi(2n + 1)I), \quad n = \overline{1, N}. \quad (4.3.21)$$

3) если, кроме того, функция f возрастает и выпукла в $(0, 1)$ и при некотором $N \in \mathbb{N}$

$$2I < \frac{1}{\pi(N + 1/4)}, \quad (4.3.22)$$

то

$$2\pi n < v_{2n} < 2\pi n + \arccos(1 - \pi(2n + 1/2)I), \quad n = \overline{1, N}.$$

Отметим, что в силу условий, наложенных на I , все величины теоремы 4.3.4, записанные в виде арккосинуса, находятся в интервале $(0, \pi/2)$.

В доказательстве будет использовано следующее неравенство Стеффенсена.

Теорема С ([3]). Пусть функция $f(t)$ интегрируема, положительна и не убывает в интервале $(0, 1)$, а

$$0 \leq g(t) \leq 1, \quad 0 < t < 1 \quad \text{и} \quad g \in L^1(0, 1).$$

Тогда

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \leq \int_{1-c}^1 f(t)dt,$$

где

$$c = \int_0^1 g(t)dt.$$

Предположим, что функция f — та же, что в теореме С, а

$$-a \leq G(t) \leq a \quad (a > 0), \quad 0 < t < 1, \quad G \in L^1(0, 1). \quad (4.3.23)$$

Тогда для функций f и g , где

$$g(t) = \frac{G(t) + a}{2a},$$

выполнены условия теоремы С; по ней

$$\int_0^1 f(t) \frac{G(t) + a}{2a} dt \leq \int_{1-c}^1 f(t) dt,$$

где

$$c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^1 G(t) dt. \quad (4.3.24)$$

Мы видим, что верна

Лемма 4.3.2. Пусть функция $f(t)$ интегрируема, положительна и не убывает в интервале $(0, 1)$, а функция $G(t)$ удовлетворяет условиям (4.3.23). Тогда

$$\int_0^1 f(t)G(t)dt \leq a \left(2 \int_{1-c}^1 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \right),$$

где c вычисляется по формуле (4.3.24).

Доказательство теоремы 4.3.3. Из формулы (4.3.8), в которой положим $z = x$, вычтем почленно формулу

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos xtdt.$$

Получим, что в нулях функции U , вещественных по теореме А, справедливо неравенство

$$-\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 (f(t) - 1) \cos xtdt.$$

Пусть n нечетно. Если $x = u_n = \pi n$, то доказывать нечего. Пусть $x = u_n \neq \pi n$. Тогда по теореме А

$$\sin x \geq 0 \quad \text{при} \quad x \leq \pi n, \quad (4.3.25)$$

и следовательно, в формуле

$$\frac{\sin(\pm(\pi n - x))}{x} = \int_0^1 (f(t) - 1)(\mp \cos xt)dt, \quad x = u_n \leq \pi n, \quad (4.3.26)$$

обе части положительны. Функции

$$f(t) - 1 \quad \text{и} \quad \mp \cos xt$$

удовлетворяют условиям леммы 4.3.2 с $a = 1$. По этой лемме

$$\frac{\sin(\pm(\pi n - x))}{x} \leq 2 \int_{1-c}^1 (f(t) - 1)dt - \int_0^1 (f(t) - 1)dt, \quad (4.3.27)$$

где

$$c = \frac{1}{2} \left(1 + \int_0^1 \mp \cos xtdt \right) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sin x}{x} \right). \quad (4.3.28)$$

Из (4.3.25) следует, что $c \leq 1/2$, и значит,

$$\frac{\sin(\pm(\pi n - x))}{x} \leq \left(2 \int_{1/2}^1 - \int_0^1 \right) (f(t) - 1)dt = I. \quad (4.3.29)$$

Нами доказана оценка (4.3.29) для нечетных n .

Если n четно, то в (4.3.25) неравенства для $\sin x$ меняются на противоположные. Поэтому в правой части (4.3.26) знаки $\mp$ меняются местами; при этом обе части в (4.3.26) положительны. После применения леммы 4.3.2 получаем неравенство (4.3.27), где c вычисляется по формуле (4.3.28), в которой знаки $\mp$ также меняются местами. С учетом знака синуса, видим, что снова $c \leq 1/2$. Значит, оценка (4.3.29) верна и для четных n .

Из (4.3.29) следует, что

$$0 < \sin(\pi n - x) < \pi n I, \quad \text{если} \quad \pi \left(n - \frac{1}{2} \right) < x < \pi n, \quad (4.3.30)$$

$$0 < \sin(x - \pi n) < \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) I, \quad \text{если} \quad \pi n < x < \pi \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

С учетом условия (4.3.16) эти неравенства и дают требуемые неравенства (4.3.17). Утверждение 1) доказано.

Если f выпукла, то по теореме В $x = u_n \in (\pi(n - 1/2), \pi n)$, и с учетом (4.3.18) утверждение 2) следует из (4.3.30). Теорема 4.3.3 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.3.4. Теперь из формулы (4.3.9), в которой положим $z = x$, вычтем почленно формулу

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \int_0^1 \sin xt dt.$$

Получим, что в корнях функции V , вещественных по теореме А,

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \int_0^1 (f(t) - 1)(-\sin xt) dt.$$

По теореме А здесь обе части положительны. По лемме 4.3.2 при $x = v_n$ будем иметь

$$\frac{1 - \cos x}{x} \leq 2 \int_{1-c}^1 (f(t) - 1) dt - \int_0^1 (f(t) - 1) dt,$$

где

$$c = \frac{1}{2} \left(1 + \int_0^1 (-\sin xt) dt \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 - \cos x}{x} \right).$$

Значит, $c \leq 1/2$, и потому

$$\frac{1 - \cos x}{x} \leq I, \quad x = v_n. \quad (4.3.31)$$

Так как по теореме А

$$\pi(2n - 1) < v_{2n-1} < 2\pi n < v_{2n} < \pi(2n + 1), \quad (4.3.32)$$

то из (4.3.31) следует, что

$$\cos(2\pi n - x) > 1 - 2\pi n I, \quad \text{если } x = v_{2n-1},$$

$$\cos(x - 2\pi n) > 1 - \pi(2n + 1)I, \quad \text{если } x = v_{2n}.$$

Значит, соответственно верны неравенства

$$2\pi n - x < \arccos(1 - 2\pi n I), \quad x = v_{2n-1},$$

$$x - 2\pi n < \arccos(1 - \pi(2n + 1)I), \quad x = v_{2n}.$$

Вместе с (4.3.32) они дают требуемые неравенства (4.3.20) и (4.3.21). Утверждения 1) и 2) доказаны.

Если f возрастает и выпукла, то в силу теоремы В вместо правого неравенства (4.3.32) имеем неравенство

$$v_{2n} < 2\pi n + \frac{\pi}{2}.$$

Внося это изменение в только что проведенные рассуждения, получаем утверждение 3). Теорема 4.3.4 доказана. $\square$

Переходим к интересующим нас следствиям. Они основаны на формулах (4.3.1) и (4.3.2), показывающих, что функции

$$\Gamma(\mu - 1)E_{1/2}(-z^2; \mu), \quad \Gamma(\mu - 2)zE_{1/2}(-z^2; \mu)$$

имеют вид $U(z)$ и $V(z)$ (см. (4.3.8), (4.3.9)), где соответствующие функции $f(t)$ задаются формулами (4.3.14) и (4.3.15). В этих формулах мы ограничились значениями μ не случайно: при сделанных ограничениях функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теорем 4.3.3 и 4.3.4 соответственно и является выпуклой в $(0, 1)$. Следовательно, для применения этих теорем нам остается выразить величину I и содержащиеся в теоремах 4.3.3, 4.3.4 условия на I , через параметр μ .

Имеем следующие соотношения

$$I = \frac{2^{2-\mu} - 1}{\mu - 1} \quad \text{при } 1 < \mu < 2,$$

$$I = \frac{2^{3-\mu} - 1}{\mu - 2} \quad \text{при } 2 < \mu < 3.$$

Значит, если $1 < \mu < 2$, то условие (4.3.18) принимает вид

$$\frac{2^{2-\mu} - 1}{\mu - 1} < \frac{1}{\pi N}, \quad (4.3.33)$$

а если $2 < \mu < 3$, то условия (4.3.19), (4.3.22) принимают соответственно вид

$$\frac{2^{3-\mu} - 1}{\mu - 2} < \frac{1}{2\pi N}, \quad \frac{2^{3-\mu} - 1}{\mu - 2} < \frac{1}{\pi(2N + 1/2)}. \quad (4.3.34)$$

Обозначив через $x_n = x_n(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, нули функции $E_{1/2}(z; \mu)$ и учитывая, что

$$(-x_n)^{1/2} = u_n \quad \text{при } 1 < \mu < 2, \quad (-x_n)^{1/2} = v_n \quad \text{при } 2 < \mu < 3,$$

из теорем 4.3.3, 4.3.4 получаем следующие утверждения о нулях x_n с малыми номерами.

Следствие 4.3.1. Пусть $1 < \mu < 2$. Тогда если при некотором $N \in \mathbb{N}$ выполняется условие (4.3.33), то

$$\pi n - \arcsin \left(\pi n \frac{2^{2-\mu} - 1}{\mu - 1} \right) < (-x_n)^{1/2} < \pi n, \quad n = \overline{1, N}.$$

Следствие 4.3.2. Пусть $2 < \mu < 3$. Тогда:

1) если при некотором $N \in \mathbb{N}$ выполнено первое условие (4.3.34), то

$$2\pi n - \arccos \left(1 - 2\pi n \frac{2^{3-\mu} - 1}{\mu - 2} \right) < (-x_{2n-1})^{1/2} < 2\pi n, \quad n = \overline{1, N},$$

2) если при некотором $N \in \mathbb{N}$ выполнено второе условие (4.3.34), то

$$2\pi n < (-x_n)^{1/2} < 2\pi n + \arccos \left(1 - \pi \left(2n + \frac{1}{2} \right) \frac{2^{3-\mu} - 1}{\mu - 2} \right), \quad n = \overline{1, N}.$$

Следствия 4.3.1, 4.3.2 позволяют судить о скорости приближения точек $(-x_n)^{1/2}$ к положительным корням функций $\sin z$ и $1 - \cos z$ соответственно при $\mu \rightarrow 2 - 0$ и $\mu \rightarrow 3 - 0$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \rho_n(\mu) &= \pi n - (-x_n(\mu))^{1/2} \quad \text{при } 1 < \mu < 2, \\ \rho_{2n-1}(\mu) &= 2\pi n - (-x_{2n-1}(\mu))^{1/2}, \quad \rho_{2n}(\mu) = (-x_{2n}(\mu))^{1/2} - 2\pi n \quad \text{при } 2 < \mu < 3. \end{aligned}$$

Так как

$$\arcsin x \sim x, \quad \arccos(1 - x) \sim \sqrt{2x}, \quad x \rightarrow +0,$$

то из следствий 4.3.1, 4.3.2 получаем

Следствие 4.3.3. При любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\mu \rightarrow 2-0} \frac{\rho_n(\mu)}{2 - \mu} &\leq \pi n \ln 2, \\ \overline{\lim}_{\mu \rightarrow 3-0} \frac{\rho_n(\mu)}{\sqrt{3} - \mu} &\leq \sqrt{2\pi \left(n + \frac{3 - (-1)^n}{4} \right) \ln 2}. \end{aligned}$$

Условия (4.3.33), (4.3.34) содержат трансцендентность. Если воспользоваться неравенством

$$2^x - 1 < x, \quad 0 < x < 1,$$

то эти условия можно заменить на более грубые, но зато более простые условия применимости следствий 4.3.1, 4.3.2:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{\pi N + 1} &< \mu < 2, \\ 3 - \frac{1}{2\pi N + 1} &< \mu < 3, \quad 3 - \frac{1}{\pi(2N + 1/2) + 1} < \mu < 3. \end{aligned}$$

4.4. ОТСУТСТВИЕ КРАТНЫХ НУЛЕЙ

Результаты главы 2 показывают, что, за исключением единственного случая $\rho = 1/2$, $\mu = 3$, число кратных нулей функции $E_\rho(z; \mu)$ не более чем конечно.

Сведений о кратных нулях у нас пока совсем немного.

Во-первых, все нули функции $E_{1/2}(z; 3)$, отвечающей указанному исключительному случаю, двукратны.

Во-вторых, полное описание допускает случай нулевого кратного корня. Действительно, из определения следует, что точка $z = 0$ является корнем функции $E_\rho(z; \mu)$ кратности s тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = \frac{1}{\Gamma(\mu + 1/\rho)} = \dots = \frac{1}{\Gamma(\mu + s/\rho)} = 0, \quad \frac{1}{\Gamma(\mu + (s+1)/\rho)} \neq 0.$$

Эти условия равносильны тому, что

$$\mu, \mu + \frac{1}{\rho}, \dots, \mu + \frac{s}{\rho} \in -\mathbb{Z}_+, \quad \mu + \frac{s+1}{\rho} \notin -\mathbb{Z}_+.$$

Ясно, что последнее возможно только в случае $\rho = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, причем за счет выбора μ мы можем добиться сколь угодно высокой кратности нулевого корня. Таким образом, справедливо

Предложение 4.4.1.

- 1) Кратный нулевой корень у функции $E_\rho(z; \mu)$ возможен только в случае $\rho = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Если $\rho = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, то функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет в точке $z = 0$ корень кратности s тогда и только тогда, когда $\mu = -s/\rho$.

В-третьих, по теореме 4.1.2 для каждого $\rho > 1$ существует последовательность $\mu_n < 0$, $\mu_n \rightarrow -\infty$, такая, что у функции $E_\rho(z; \mu_n)$ имеется двукратный положительный корень, а по следствию 4.1.1 при $\rho > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$ у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет вещественных нулей кратности выше двух.

Следующая лемма дает подход к вопросу о кратных нулях функций Миттаг-Леффлера в случае натуральных ρ .

Лемма 4.4.1. Пусть z_0 — корень функции $E_n(z; \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{C}$. Для того, чтобы он был кратным, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{1}{\Gamma(\mu - 1)} + \frac{z_0}{\Gamma(\mu - 1 + 1/n)} + \dots + \frac{z_0^{n-1}}{\Gamma(\mu - 1 + (n-1)/n)} = 0. \quad (4.4.1)$$

Доказательство. Доказательство основано на формуле

$$E_\rho(z; \mu) = \mu E_\rho(z; \mu + 1) + \frac{z}{\rho} E'_\rho(z; \mu + 1) \quad (4.4.2)$$

и формуле (4.2.17), которую для удобства ссылок перепишем здесь в следующем виде:

$$E_\rho(z; \mu - 1) = \frac{1}{\Gamma(\mu - 1)} + z E_\rho\left(z; \mu - 1 + \frac{1}{\rho}\right). \quad (4.4.3)$$

В нашем случае $\rho = n$. Запишем формулу (4.4.3), заменяя μ на $\mu + 1/n$:

$$E_n\left(z; \mu - 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\Gamma(\mu - 1 + 1/n)} + z E_n\left(z; \mu - 1 + \frac{2}{n}\right).$$

Левую часть этой формулы подставим в правую часть формулы (4.4.3). Получим выражение

$$E_n(z; \mu - 1) = \frac{1}{\Gamma(\mu - 1)} + \frac{z}{\Gamma(\mu - 1 + 1/n)} + z^2 E_n\left(z; \mu - 1 + \frac{2}{n}\right). \quad (4.4.4)$$

Теперь повторим прием, заменяя в (4.4.3) μ на $\mu + 2/n$. Тем самым мы найдем выражение для $E_n(z; \mu - 1 + 2/n)$, которое подставим в правую часть (4.4.4). И так далее. После n шагов будем иметь равенство

$$E_n(z; \mu - 1) = \frac{1}{\Gamma(\mu - 1)} + \frac{z}{\Gamma(\mu - 1 + 1/n)} + \dots + \frac{z^{n-1}}{\Gamma(\mu - 1 + (n-1)/n)} + z^n E_n(z; \mu). \quad (4.4.5)$$

Пусть z_0 — корень функции $E_n(z; \mu)$.

Тогда последнее слагаемое в (4.4.5) обращается в нуль, а формула (4.4.2) показывает, что корень функции $E_n(z; \mu)$ тогда и только тогда является кратным, когда он является корнем функции $E_n(z; \mu - 1)$. Таким образом, кратность корня z_0 у $E_n(z; \mu)$ равносильна обращению в нуль левой части в (4.4.1), и лемма доказана. $\square$

Теорема 4.4.1.

1) У функции

$$E_1(z; \mu), \mu \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}),$$

нет кратных корней.

2) У функции

$$E_n(z; \mu), 1 < n \in \mathbb{N}, 1 \leq \mu < 1 + 1/n,$$

нет кратных корней. В частности, у классической функции Миттаг-Леффлера $E_n(z; 1)$ целого порядка нет кратных корней.

3) Число кратных корней функции

$$E_n(z; \mu), 1 < n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{C},$$

не превосходит $n - 1$.

4) У функции $E_2(z; \mu)$ при $\mu \in \mathbb{C}$ нет корней кратности выше двух, при $\mu \in \mathbb{R}$ нет кратных неположительных корней, а при $\mu \geq 0$ нет кратных корней.

5) У функции $E_3(z; \mu)$ при $\mu \in \mathbb{R}$ нет корней кратности выше двух.

6) У функции $E_{1/2}(z; \mu)$, $\mu \in \mathbb{C}$, нет ненулевых корней кратности выше двух.

Доказательство. 1) При $n = 1$ условие (4.4.1) означает, что $1/\Gamma(\mu - 1) = 0$. Это возможно только при $\mu = 1, 0, -1, \dots$. Но в этом случае $E_1(z; \mu)$ имеет явный вид (см. начало главы 2), из которого следует, что при $\mu = 1, 0$ кратных корней у $E_1(z; \mu)$ нет. А значения $\mu \in -\mathbb{N}$ (когда $z = 0$ — корень кратности $1 - \mu$) мы исключили. Утверждение 1) доказано.

2) Так как $1 \leq \mu \leq 1 + 1/n$, и функция $\Gamma(x)$ убывает на $(0, 1]$, то необходимое условие (4.4.1) кратного корня есть уравнение

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} = 0$$

с монотонными коэффициентами $0 < a_0 < \dots < a_{n-1}$. Хорошо известно (см. [8, гл.4, §3] или [12, отдел 3, гл.1, §2]), что все корни такого уравнения лежат в круге $|z| < 1$. Но по следствию 4.2.1 у $E_n(z; \mu)$ нет корней в этом круге. Значит, у функции $E_n(z; \mu)$ нет кратных корней.

3) Следует из того, что порядок уравнения (4.4.1) не выше, чем $n - 1$.

4) Если $\mu \in \mathbb{R}$, то по теореме 4.1.1 возможный отрицательный корень функции $E_2(z; \mu)$ является простым. Если бы был не вещественный кратный корень, то и комплексно сопряженное число было бы кратным корнем. Это означает, что у функции $E_2(z; \mu)$ было бы не менее двух кратных корней, что противоречит утверждению 3). Случай $\mu \in \mathbb{R}$ рассмотрен. Из него следует и случай $\mu \geq 0$, так как $E_2(x; \mu) > 0$ при $x > 0, \mu \geq 0$.

Пусть z_0 — корень функции $E_2(\mu)$ кратности выше двух. В силу (4.4.2) z_0 — кратный корень функции $E_2(z; \mu - 1)$. По лемме 4.4.1 и по предложению 4.4.1 z_0 есть нетривиальное решение следующей системы

$$\frac{1}{\Gamma(\mu - 1)} + \frac{z_0}{\Gamma(\mu - 1/2)} = 0, \quad \frac{1}{\Gamma(\mu - 2)} + \frac{z_0}{\Gamma(\mu - 3/2)} = 0.$$

По уже доказанной части $\mu \neq 2, 3/2$. Первое из этих уравнений записывается в виде

$$\frac{1}{(\mu - 2)\Gamma(\mu - 2)} + \frac{z_0}{(\mu - 3/2)\Gamma(\mu - 3/2)} = 0.$$

Сравнивая это со вторым уравнением, видим, что указанная система не может иметь нетривиального решения. Случай $\mu \in \mathbb{C}$ разобран.

5) Пусть z_0 — корень функции $E_\rho(z; \mu)$ кратности выше двух. Тогда по формуле (4.3.33) z_0 — кратный корень функции $E_\rho(z; \mu - 1)$. Значит, по лемме 4.4.1, наряду с условием (4.4.1), должно

выполняться условие

$$\frac{1}{\Gamma(\mu - 2)} + \frac{z_0}{\Gamma(\mu - 2 + 1/n)} + \dots + \frac{z_0^{n-1}}{\Gamma(\mu - 2 + (n-1)/n)} = 0.$$

При $n = 3$ оба эти условия означают, что z_0 — общий корень двух квадратных уравнений. Из свойства $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ вытекает, что коэффициенты этих уравнений не являются пропорциональными, поэтому данные уравнения могут иметь не более одного общего корня z_0 . По теореме 4.1.1 и теореме 4.1.2 $z_0 \notin \mathbb{R}$, но тогда и число $\bar{z}_0$ в силу вещественности μ должно быть общим корнем, что невозможно. Утверждение 5) верно.

6) Пусть z_0 — корень функции $E_{1/2}(z; \mu)$ кратности выше двух. Дважды применяя формулу (4.4.2), делаем вывод, что z_0 — корень функции $E_{1/2}(z; \mu - 2)$. Тогда формула (4.4.3) с $\rho = 1/2$ показывает, что должно выполняться условие

$$\frac{1}{\Gamma(\mu - 2)} = 0,$$

что возможно только при $\mu = 2, 1, 0, -1, \dots$. Но при таких μ функция $E_{1/2}(z; \mu)$ имеет явный вид (см. начало главы 2), показывающий, что кратный корень может быть только в точке $z = 0$. Утверждение 6) верно. Теорема доказана. $\square$

4.5. Нули функции $E_1(z; \mu)$, неполной гамма-функции, функции ошибок

Благодаря формуле

$$E_1(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu - 1)} \int_0^1 e^{zt} (1-t)^{\mu-2} dt, \quad \mu > 1, \quad (4.5.1)$$

случай $\rho = 1$ допускает более детальный анализ нулей, который и проводится в этом пункте. В качестве следствий получены утверждения о распределении двух функций, выражающихся через $E_1(z; \mu)$: неполной гамма-функции и функции ошибок (интеграла вероятностей).

4.5.1. Нули функции $E_1(z; \mu)$. Следующая лемма ценой некоторого видоизменения формулы (4.5.1) позволяет расширить множество значений параметра μ .

Лемма 4.5.1. *Справедливо следующее представление*

$$\Gamma(\mu) e^{-z} E_1(z; \mu) = 1 + (1 - \mu) \int_0^1 (1 - e^{-zt}) t^{\mu-2} dt, \quad \mu > 0.$$

Доказательство. Так как обе части равенства — целые функции, то доказательство достаточно провести для $z = x > 0$. По формуле (4.5.1) имеем выражение

$$E_1(x; \mu + 1) = \frac{e^x}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 e^{-tx} t^{\mu-1} dt. \quad (4.5.2)$$

Интегрирование по частям дает равенство

$$x \int_0^1 e^{-tx} t^{\mu-1} dt = -(e^{-x} - 1) + (\mu - 1) \int_0^1 (e^{-tx} - 1) t^{\mu-2} dt.$$

Комбинируя его, известную формулу

$$E_1(x; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + x E_1(x; \mu + 1)$$

и формулу (4.5.2), получаем равенство

$$\begin{aligned} E_1(x; \mu) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} + \frac{e^x}{\Gamma(\mu)} (- (e^{-x} - 1) + (\mu - 1) \int_0^1 (e^{-tx} - 1) t^{\mu-2} dt) = \\ &= \frac{e^x}{\Gamma(\mu)} (1 + (\mu - 1) \int_0^1 (e^{-tx} - 1) t^{\mu-2} dt). \end{aligned}$$

А это эквивалентно требуемой формуле при $z = x > 0$, и лемма доказана. $\square$

Лемма 4.5.2. При $\mu > 0$ верна формула

$$\operatorname{Im}(e^{-z} E_1(z; \mu)) = \frac{1 - \mu}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 e^{-xt} t^{\mu-2} \sin y t dt, \quad z = x + iy. \quad (4.5.3)$$

Непосредственно вытекает из леммы 4.5.1.

Основной результат этого пункта составляет следующая теорема.

Теорема 4.5.1.

1) При $\mu > 2$ все корни функции $E_1(z; \mu)$ лежат на множестве

$$\operatorname{Re} z > \mu - 2, \quad |\operatorname{Im} z| > \pi.$$

2) При $1 < \mu < 2$ все корни функции $E_1(z; \mu)$ лежат на множестве

$$\operatorname{Re} z < \mu - 2, \quad |\operatorname{Im} z| > \pi. \quad (4.5.4)$$

3) При $0 < \mu < 1$ все корни функции $E_1(z; \mu)$, за исключением единственного отрицательного корня, лежат на множестве (4.5.4).

4) При $\mu \in (-n, -n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, у функции $E_1(z; \mu)$ существует единственный отрицательный корень.

Заметим, что положительные корни функции $E_1(z; \mu)$ охарактеризованы в теореме 4.1.2, и напомним, что при $\mu = 1, 0, -1, \dots$ эта функция имеет явный вид (см. начало главы 2).

Доказательство. 1)–3). Пусть $\mu > 0$. Тогда при $0 < y \leq \pi$ ($-\pi \leq y < 0$) подынтегральная функция в формуле (4.5.3) положительна (отрицательна) в интервале $(0, 1)$. Следовательно, по формуле (4.5.3) функция $E_1(z; \mu)$ не имеет корней на множестве

$$0 < |\operatorname{Im} z| \leq \pi.$$

Из формулы (4.5.1) следует отсутствие вещественных нулей у функции $E_1(z; \mu)$, $\mu > 1$.

Пусть $0 < \mu < 1$. Из определения функции Миттаг-Леффлера следует, что неотрицательных корней у функции $E_1(z; \mu)$ нет. Утверждение о единственности отрицательного корня будет доказано в части 4) (мы пользуемся еще недоказанным утверждением 4), но порочного круга от этого не будет).

Таким образом, для доказательства утверждений 1)–3) осталось показать распределение невещественных корней в соответствующих полуплоскостях. Здесь все решают представления (4.5.1), (4.5.3) и лемма 4.3.1.

Пусть $\mu \in (0, 1) \cup (1, 2)$. При фиксированном $x \in \mathbb{R}$ положим

$$f(t) = e^{-xt} t^{\mu-2}, \quad 0 < t < 1; \quad f(t) = 0, \quad t \geq 1.$$

Покажем, что при $x \geq \mu - 2$ функция $f(t)$ удовлетворяет условиям леммы 4.3.1.

Условие $tf(t)/(t+1) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ очевидно. Далее,

$$f'(t) = e^{-xt} t^{\mu-3} (-xt + (\mu - 2)), \quad 0 < t < 1.$$

Если $x \geq 0$, то $f'(t) < 0$ на $(0, 1)$, так как $\mu - 2 < 0$. Если $x < 0$, то $-xt + \mu - 2 < -x + \mu - 2$, когда $t \in (0, 1)$. Значит, $f'(t) < 0$ на $(0, 1)$ также и при $\mu - 2 \leq x < 0$. Итак, $f(t)$ убывает на $(0, 1)$. В

итоге при $x \geq \mu - 2$ все условия леммы 4.3.1 выполнены. Применяя эту лемму к интегралу (4.5.3), получаем, что

$$E_1(z; \mu) \neq 0 \text{ при } x = \operatorname{Re} z \geq \mu - 2, y \neq 0.$$

Таким образом, утверждения 2)–3) доказаны.

Пусть $\mu > 2$. Из (4.5.1) следует, что

$$\Gamma(\mu - 1) \operatorname{Im} E_1(z; \mu) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \sin ytdt,$$

где на этот раз

$$f(t) = e^{xt}(1-t)^{\mu-2}, \quad 0 < t < 1; \quad f(t) = 0, \quad t \geq 1.$$

Если мы убедимся в убывании функции $f(t)$ на $(0, 1)$ при $x \leq \mu - 2$, то по лемме 4.3.1 у функции $E_1(z; \mu)$ не будет корней в полуплоскости $\operatorname{Re} z = x \leq \mu - 2$, и утверждение 1) также будет доказано.

Имеем выражение

$$f'(t) = e^{xt}(1-t)^{\mu-3}(x(1-t) - (\mu - 2)),$$

откуда видно, что при $x \leq \mu - 2$ производная функции $f(t)$ отрицательна на $(0, 1)$. Функция $f(t)$ убывает на $(0, 1)$. Мы доказали утверждение 3).

4) Пусть $\mu \in (-n, -n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. По определению функции Миттаг-Леффлера и по теореме 1.2.1 имеем равенство

$$E_1(0, \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}, \quad \operatorname{sign} E_1(-\infty; \mu) = \operatorname{sign} \Gamma(\mu - 1).$$

Так как значения $\Gamma(\mu)$, $\Gamma(\mu - 1)$ имеют разные знаки, то отсюда следует, что у функции $E_1(x; \mu)$ есть хотя бы один отрицательный корень. По теореме 4.4.1 он является простым. Докажем его единственность.

Предположим противное: у функции $E_1(x; \mu)$ имеется по крайней мере два отрицательных корня x_1, x_2 . По теореме 4.4.1 оба они просты. Так как

$$E_\rho(z; \mu) \rightarrow E_1(z; \mu), \quad \rho \rightarrow 1 + 0,$$

равномерно в каждом круге, то по теореме Гурвица при ρ , достаточно близких к 1, $\rho > 1$, в малых окрестностях точек x_1, x_2 содержится ровно по одному корню функции $E_\rho(z; \mu)$. Из парности комплексно сопряженных корней следует, что оба они вещественны. А это противоречит теореме 4.1.1. Мы доказали единственность отрицательного корня. Утверждение 4) верно. Теорема доказана. $\square$

В главе 5 с помощью другого подхода утверждение 2) теоремы 4.5.1 будет существенно усилено.

4.5.2. Нули неполной гамма-функции и функции ошибок. Рассмотрим *неполную гамма-функцию*

$$\gamma(\alpha, z) = \int_0^z e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (4.5.5)$$

переменной z . Эта функция аналитична всюду, за возможным исключением точки ветвления $z = 0$; главная ветвь определяется с помощью разреза по отрицательной вещественной полуоси. После разложения e^{-t} в степенной ряд и почленного интегрирования получаем представление

$$\gamma(\alpha, z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!(n + \alpha)},$$

позволяющее распространить $\gamma(\alpha, z)$ на все значения $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Отсюда следует, что модифицированная неполная гамма-функция

$$\gamma^*(\alpha, z) = \frac{\gamma(\alpha, z)}{z^\alpha \Gamma(\alpha)}$$

является целой (в том числе, и по α) и справедлива формула

$$\gamma^*(\alpha, z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)}$$

([11, гл. 2, § 5]). Значит, при всех $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\gamma^*(\alpha, z) = e^{-z} E_1(z; 1 + \alpha). \quad (4.5.6)$$

Это представление позволяет применить к функции $\gamma^*(\alpha, z)$ доказанные теоремы о нулях функции $E_\rho(z; \mu)$ при $\rho = 1$, $\mu = 1 + \alpha$. Исключим из рассмотрения вырожденный случай $\alpha \in -\mathbb{Z}_+$, когда $\gamma^*(\alpha, z) = z^{-\alpha}$.

Следствие 4.5.1. Пусть $\alpha \notin -\mathbb{Z}_+$. Тогда все нули w_n функции $\gamma^*(\alpha, w)$ просты и их можно пронумеровать так, что $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ и

$$w_n = 2\pi ni + (\alpha - 1) \ln 2\pi in + \ln \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + (1 - \alpha)^2 \frac{\ln 2\pi in}{2\pi in} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (4.5.7)$$

Следствие 4.5.1 вытекает из формулы (4.5.6), теоремы 2.2.1, теоремы 4.2.2 и теоремы 4.1.1.

Следствие 4.5.2.

1) При $\alpha > 1$ все корни функции $\gamma^*(\alpha, w)$ лежат на множестве

$$\operatorname{Re} w > \alpha - 1, \quad |\operatorname{Im} w| > \pi.$$

2) При $0 < \alpha < 1$ все корни функции $\gamma^*(\alpha, w)$ лежат на множестве

$$\operatorname{Re} w < \alpha - 1, \quad |\operatorname{Im} w| > \pi. \quad (4.5.8)$$

3) При $-1 < \alpha < 0$ все корни функции $\gamma^*(\alpha, w)$, за исключением единственного отрицательного корня, лежат на множестве (4.5.8).

4) При $\alpha \in (-n - 1, -n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ функция $\gamma^*(\alpha, w)$ имеет единственный отрицательный корень.

Следствие 4.5.2 вытекает из формулы (4.5.6) и теоремы 4.5.1.

В заключение этого пункта рассмотрим функцию ошибок (интеграл вероятностей)

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (4.5.9)$$

Это целая функция. Она имеет простой корень $z = 0$ и не имеет других вещественных корней. Из (4.5.5) и (4.5.9) вытекает формула

$$\operatorname{erf} z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right)$$

(см. также ([11, гл. 2, § 2]), показывающая вместе с определением $\gamma^*(\alpha, z)$, что все ненулевые корни функции $\operatorname{erf} z$ совпадают с корнями функции $\gamma^*(1/2, z^2)$. По следствию 4.5.2 корни функции $\gamma^*(1/2, z^2)$ лежат на множестве

$$\operatorname{Re} z^2 < -1/2, \quad |\operatorname{Im} z^2| > \pi.$$

Это множество лежит в углах

$$|\pm \pi/2 - \arg z| < \pi/4$$

и состоит из пересечения двух криволинейных секторов, симметричных друг другу относительно вещественной оси и ограниченных ветвями гиперболы

$$y^2 - x^2 = 1/2 \quad (z = x + iy),$$

с внешностью гиперболического креста $|xy| \leq \pi$.

Рассмотрим отображение $w = z^2$ угла

$$|\pi/2 - \arg z| < \pi/4 \quad (4.5.10)$$

на полуплоскость $\operatorname{Re} w < 0$, в которой по следствию 4.5.2 лежат корни w_n функции $\gamma^*(1/2, w)$; напомним, что эти корни просты.

Обозначим через z_n^+ корни функции $\operatorname{erf} z$ в угле (4.5.10). Тогда $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, и в силу формулы (4.5.7) с $\alpha = 1/2$ имеем, что

$$(z_n^+)^2 = 2\pi ni - \frac{1}{2} \ln 2\pi in - \ln \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\ln 2\pi in}{8\pi in} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

В силу нечетности $\operatorname{erf} z$ в симметричном угле $|\pi/2 + \arg z| < \pi/4$ располагается симметричная цепь z_n^- корней $\operatorname{erf} z$. Других корней, кроме точки $z = 0$, у $\operatorname{erf} z$ нет. Так как $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, то мы доказали

Следствие 4.5.3. *Все корни функции $\operatorname{erf} z$ просты. Ненулевые корни образуют две цепи z_n^+ и z_n^- , $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, симметричные друг другу относительно вещественной оси и расположенные в пересечении гиперболических секторов $y^2 - x^2 > 1/2$ с внешностью гиперболического креста $|xy| \leq \pi/2$. При этом*

$$(z_n^\pm)^2 = 2\pi ni - \frac{1}{2} \ln 2\pi in - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{\ln 2\pi in}{8\pi in} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

Теорема 4.2.1 принадлежит Островскому и Переселковой (см. [40]). Остальные результаты этой главы принадлежат второму автору (см. [19, 20, 24, 25]).

ГЛАВА 5

НУЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА И ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В этой главе исследуется распределение нулей функций, в определенном смысле родственных функции Миттаг-Леффлера при $\rho = 1$. Именно, здесь мы будем рассматривать *преобразования Лапласа* функций, сосредоточенных в интервале $(0, 1)$, т. е. целые функции вида

$$F(z) = \int_0^1 e^{zt} f(t) dt, \quad f \in L^1(0, 1), \quad (5.1.1)$$

и *вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера)*

$$\Phi(a, c; z) := 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+s-1)}{c(c+1) \dots (c+s-1)} \frac{z^s}{s!}, \quad c \notin -\mathbb{Z}_+ \quad (5.1.2)$$

(см., например, [11, 27, 35]), как функцию переменной z при фиксированных значениях параметров $a, c \in \mathbb{C}$.

Эти функции часто встречаются в различных разделах анализа, например, в спектральной теории, в теории дифференциально-разностных уравнений, при исследовании негармонических рядов Фурье и т. д. Классы функций (5.1.1) и (5.1.2) весьма обширны. Класс (5.1.1), в частности, содержит в себе функции $E_1(z; \mu)$, $\operatorname{Re} \mu > 1$, благодаря формуле

$$E_1(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^1 e^{zt} (1-t)^{\mu-2} dt, \quad \operatorname{Re} \mu > 1 \quad (5.1.3)$$

(см. (1.4.22)). А известное интегральное представление

$$\Phi(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad 0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c \quad (5.1.4)$$

(см. [11, 27, 35]), показывает, что

$$\Phi(1, c; z) = \Gamma(c) E_1(z; c), \quad \operatorname{Re} c > 1.$$

Отметим еще, что модифицированная функция Бесселя выражается через функцию Куммера при $c = 2a$ (см. [27]).

5.2. Нули финитных преобразований ЛАПЛАСА

Отправной точкой здесь послужила следующая теорема Пойа из [41] (см. также [22]).

Теорема А. Пусть функция $f(t)$ интегрируема, положительна и не убывает в интервале $(0, 1)$. Тогда все нули функции (5.1.1) лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$; если при этом $f(t)$ не является ступенчатой функцией вида

$$f(t) = c_i, \quad t_i < t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n; \quad t_0 = 0, \quad t_{n+1} = 1, \quad 0 < c_i < c_{i+1},$$

где числа t_i рациональны, то все нули функции (5.1.1) лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$.

В классе функций f , удовлетворяющих условиям этой теоремы, мы выделяем достаточно широкий подкласс и для него доказываем более подробные утверждения о распределении нулей функций (5.1.1), а именно, утверждения о принадлежности всех нулей функции (5.1.1) вполне определенным собственным подмножествам множества $\operatorname{Re} z < 0$. Дополнительное условие, задающее упомянутый подкласс, состоит в том, что функция f логарифмически выпукла в некоторой левой окрестности точки $t = 1$. Для этого подкласса найден вид (левой) криволинейной полуплоскости, а при условии $f(+0) > 0$ — вид криволинейной полосы, содержащей все нули функции (5.1.1). В обоих случаях описание множества, содержащего нули, в известном смысле является точным. Кроме того, будет доказано, что если f логарифмически выпукла на всем интервале $(0, 1)$, то независимо от монотонности f , все нули функции (5.1.1) лежат на объединении горизонтальных полос $(2n - 1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

5.2.1. Распределение нулей в криволинейных полуплоскостях и полосах.

Определение. Функцию f , положительную в интервале (a, b) , называют логарифмически выпуклой в этом интервале, если функция $\ln f$ выпукла в (a, b) .

Для дважды дифференцируемой положительной функции ее логарифмическая выпуклость в (a, b) равносильна условию

$$(f'(t))^2 \leq f(t)f''(t), \quad t \in (a, b)$$

(см. [12]). В общем случае критерий логарифмической выпуклости дает

Лемма 5.2.1. Пусть функция f положительна в интервале (a, b) . Тогда для ее логарифмической выпуклости в этом интервале необходимо и достаточно, чтобы функция

$$f_x(t) := e^{xt} f(t)$$

была выпуклой в (a, b) при всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Как в необходимой, так и в достаточной частях леммы мы имеем дело с непрерывными функциями f , $\ln f$. Воспользуемся тем, что для функции $\varphi \in C(a, b)$ выпуклость φ в (a, b) равносильна условию

$$\varphi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{\varphi(t_1) + \varphi(t_2)}{2} \quad (5.2.1)$$

для всех точек $t_1, t_2 \in (a, b)$ (см. [29]). Получим, что логарифмическая выпуклость функции f в (a, b) равносильна условию

$$f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(t_1)f(t_2)} \quad (5.2.2)$$

для всех $t_1, t_2 \in (a, b)$.

Пусть функция f логарифмически выпукла в (a, b) . Тогда верно свойство (5.2.2). Умножая (5.2.2) почленно на $\exp(x(t_1 + t_2)/2)$, получаем неравенство

$$f_x\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \sqrt{f_x(t_1)f_x(t_2)}.$$

Теперь применение к правой части неравенства Коши дает для функции $\varphi = f_x$ свойство (5.2.1), означающее выпуклость функции f_x .

Пусть наоборот, функция f_x выпукла в (a, b) . Тогда для $\varphi = f_x$ верно свойство (5.2.1), которое записывается в виде

$$f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(e^{x(t_1 - t_2)/2}f(t_1) + e^{x(t_2 - t_1)/2}f(t_2)). \quad (5.2.3)$$

По условию при фиксированных t_1, t_2 это неравенство выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$, а, в частности, и для значения x , при котором достигается минимум правой части. Дифференцированием находим, что для этого значения x слагаемые в правой части (5.2.3) совпадают. Но тогда их полусумма равна их среднему геометрическому, и мы получаем свойство (5.2.2), означающее логарифмическую выпуклость функции f . Лемма доказана. $\square$

Лемма 5.2.2 ([30]). *Если функция φ выпукла в интервале $(0, 2\pi)$ (в интервале $(\pi/2, 5\pi/2)$), то*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos t dt \geq 0 \quad \left(\text{соответственно} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \varphi(t) \sin t dt \geq 0 \right).$$

Напомним, что $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z, r = |z|, \theta = \arg z$, обозначим

$$\Phi_u(z) = \int_u^1 e^{-zt} g(t) dt. \quad (5.2.4)$$

Лемма 5.2.3. *Пусть функция g имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a_0, 1]$, $0 \leq a_0 < 1$, причем $g(1 - 0) \neq 0$. Тогда при любом фиксированном $b_0 \in (a_0, 1)$ для $u \in [a_0, b_0]$ верна оценка*

$$|\Phi_u(z)| \geq C \frac{e^{-x}}{r} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (5.2.5)$$

где $C > 0$ от $u \in [a_0, b_0]$ не зависит.

Доказательство. Считаем, что $g(1) = g(1 - 0)$; по условию $g(1) \neq 0$. Пользуясь непрерывностью функции $g(t)$ в точке 1 слева, фиксируем $\delta \in (0, 1 - b_0)$ столь малым, чтобы

$$\operatorname{var}(g(t) : 1 - \delta \leq t \leq 1) \leq \frac{|g(1)|}{2}. \quad (5.2.6)$$

Интегрируем по частям:

$$\Phi_u(z) = -\frac{1}{z} \left(e^{-z} g(1) - e^{-zu} g(u) - \int_u^1 e^{-zt} dg(t) \right). \quad (5.2.7)$$

Последний интеграл разобьем на слагаемые K_1 и K_2 , отвечающие соответственно отрезкам $[u, 1 - \delta]$ и $[1 - \delta, 1]$. При $x \leq 0$ с учетом (5.2.6) для них получаем оценки

$$|K_1| \leq V e^{-(1-\delta)x}, \quad |K_2| \leq \frac{|g(1)|}{2} e^{-x}.$$

Эти оценки вместе с неравенством треугольника, примененным к (5.2.7), дают неравенство

$$|\Phi_u(z)| \geq \frac{|g(1)|}{2} \frac{e^{-x}}{r} (1 - M_1 e^{(1-\delta)x} - M_2 e^{\delta x}), \quad x \leq 0,$$

означающее справедливость леммы 5.2.3. $\square$

Теорема 5.2.1. *Пусть выполнены условия теоремы А и пусть, кроме того, функция $f(t)$ логарифмически выпукла на некотором интервале $(1 - a, 1)$, $0 < a \leq 1$. Тогда все нули функции (5.1.1) с достаточно большим модулем лежат на множестве*

$$x \leq -\ln \left(y^2 \int_0^{\pi/(2|y|)} t f(1 - t) dt \right) + C, \quad |y| > y_0,$$

где C — некоторая постоянная.

Заметим, что содержательность теоремы 5.2.1 (в сравнении с теоремой А) проявляется в случае $f(1-0) = +\infty$, когда

$$y^2 \int_0^{\pi/(2|y|)} t f(t) dt > \frac{\pi^2}{8} f\left(1 - \frac{\pi}{2|y|}\right) \rightarrow +\infty, \quad y \rightarrow \pm\infty. \quad (5.2.8)$$

Доказательство. Так как $F(\bar{z}) = \bar{F}(z)$, то достаточно рассматривать $y > 0$. Имеем выражение

$$e^{-z} F(z) = \int_0^1 e^{-zt} f(1-t) dt =: G(z), \quad (5.2.9)$$

$$V(z) := -\operatorname{Im} G(z) = \int_0^1 e^{-xt} f(1-t) \sin y t dt.$$

Оценим снизу $|V(z)|$ при достаточно больших y и при $x < 0$ (напомним, что по теореме А при $x \geq 0$ нулей у $F(z)$ нет). Обозначим

$$N = N(y) := \max \left(n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{2y} + \frac{2\pi n}{y} \leq a \right),$$

$$a_N := \frac{\pi}{2y} + \frac{2\pi N}{y}$$

и заметим, что $a_N \leq a$. Кроме того, так как

$$\frac{\pi}{2y} + \frac{2\pi(N+1)}{y} > a,$$

то $a_N > a - 2\pi/y$ и поэтому

$$\frac{a}{2} < a_N \leq a \quad (5.2.10)$$

при достаточно больших y . Пусть

$$V(z) = \left(\int_0^{\pi/(2y)} + \int_{\pi/(2y)}^{a_N} + \int_{a_N}^1 \right) e^{-xt} f(1-t) \sin y t dt =: V_1 + V_2 + V_3.$$

Так как $x < 0$, то

$$V_1 > \frac{2}{\pi} y \int_0^{\pi/(2y)} t f(1-t) dt.$$

Далее, по условию функция $f(1-t)$ логарифмически выпукла на $(0, a)$. По лемме 5.2.1 функция $e^{-xt} f(1-t)$ выпукла на $(0, a)$, и значит, по лемме 5.2.2 $V_2 \geq 0$. А так как

$$\begin{aligned} V_3 &= -\operatorname{Im} \int_{a_N}^1 e^{-zt} f(1-t) dt = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \int_{a_N}^1 f(1-t) d e^{-zt} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \left(f(+0) - f(1-a_N) e^{-za_N} - \int_{a_N}^1 e^{-zt} df(1-t) \right) \right), \end{aligned}$$

то с учетом (5.2.10) при $x < 0$ имеем соотношения

$$|V_3| \leq A \frac{e^{-x}}{r} \leq A \frac{e^{-x}}{y}, \quad A = 3f\left(1 - \frac{a}{2}\right).$$

У функции $G(z)$, а значит, и у функции $F(z)$, нет нулей там, где $V_1 + V_2 > |V_3|$. Поэтому из полученных оценок для V_i , $i = 1, 2, 3$ следует, что у $F(z)$ нет нулей там, где

$$\frac{2}{\pi}y \int_0^{\pi/(2y)} t f(1-t) dt > \frac{A}{y} e^{-x}, \quad y > y_0 > 0.$$

Логарифмируя, получаем утверждение теоремы. Теорема 5.2.1 доказана. $\square$

Из теоремы 5.2.1 и из содержащегося в (5.2.8) неравенства с учетом теоремы А вытекает

Следствие 5.2.1. Пусть выполнены условия теоремы 5.2.1. Тогда все нули функции (5.1.1) лежат на объединении множества

$$x \leq \min \left(0, -\ln f \left(1 - \frac{\pi}{2|y|} \right) + C \right), \quad |y| > \frac{\pi}{2},$$

где C — некоторая постоянная, с полуполосой $x < 0$, $|y| \leq \pi/2$.

Обозначим через $(z_n)_{n=1}^\infty$, $|z_{n+1}| \geq |z_n|$, последовательность всех нулей функции (5.1.1) (хорошо известно, см., например, [7], что функция (5.1.1) имеет бесконечное множество нулей). Заинтересуемся условиями на функцию f , при которых

$$\operatorname{Re} z_n \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.2.11)$$

В статье [43] доказано, что в условиях теоремы А все нули функции (5.1.1) тогда и только тогда лежат в некоторой вертикальной полосе $-\infty < h \leq \operatorname{Re} z \leq 0$, когда

$$0 < f(+0) \leq f(1-0) < +\infty.$$

Значит, для справедливости условия (5.2.11) необходимо выполнение хотя бы одного из следующих условий:

$$f(+0) = 0, \quad f(1-0) = +\infty.$$

Следствие 5.2.1 показывает, что в условиях теоремы 5.2.1 второе из них является и достаточным.

Следствие 5.2.2. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 5.2.1. Тогда если

$$f(1-0) = +\infty,$$

то для нулей функции (5.1.1) выполняется соотношение (5.2.11).

Гарантируемая теоремой 5.2.1 правая граница для нулей функции (5.1.1) зависит от поведения функции f в левой окрестности точки 1. Сейчас мы займемся отысканием левой границы для нулей. Она уже зависит также и от поведения функции f в правой окрестности точки 0. Мы примем условие

$$f(+0) > 0. \quad (5.2.12)$$

Теорема 5.2.2. Пусть выполнены условия теоремы 5.2.1 и пусть, кроме того, выполнено условие (5.2.12). Тогда найдутся постоянные $C \in \mathbb{R}$, $H, y_0 > 0$, такие, что все нули функции (5.1.1) лежат на объединении множества

$$x \geq -\ln \left(|y| \int_0^{\pi/(2|y|)} f(1-t) dt \right) + C, \quad |y| > y_0,$$

с множеством $-H \leq x < 0$, $|y| \leq y_0$.

Доказательство. Пусть $G(z)$ и a_N — те же, что в доказательстве теоремы 5.2.1. Достаточно рассматривать $y \geq 0$. Сначала покажем, что в любом секторе вида $\cos \theta \leq -\delta < 0$ содержится не более конечного числа нулей функции $G(z)$. Для этого обозначим через J_1, J_2 части интеграла в (5.2.9), отвечающие интервалам $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1)$ соответственно. Тогда

$$|J_1| \leq e^{-x/2} \|f\|_1, \quad x \leq 0,$$

а так как $J_2 = \Phi_{1/2}$ в обозначении (5.2.4), то для J_2 по лемме 5.2.3 (с $g(t) = f(1-t)$) верна оценка (5.2.5). Значит, если H достаточно велико, то по неравенству треугольника для $x \leq H < 0$ получаем оценку

$$|G(z)| \geq C_1 \frac{e^{-x}}{r} - C_2 e^{-x/2} \geq C_1 \frac{e^{-x}}{r} (1 - C_3 r e^{x/2}).$$

Последняя скобка положительна, если $\cos \theta \leq -\delta < 0$, а r достаточно велико, и промежуточное утверждение, касающееся сектора, доказано.

Таким образом, для отыскания левой границы для нулей можно рассматривать вместо левой полуплоскости только множество

$$x < H, \quad y > \frac{r}{2}, \quad (5.2.13)$$

где H достаточно велико. Можно считать, что $a < 1$. Положим

$$G(z) = \left(\int_0^{a_N} + \int_{a_N}^1 \right) e^{-zt} f(1-t) dt =: G_1(z) + G_2(z).$$

С учетом (5.2.10) по лемме 5.2.3 имеем оценку (5.2.5) для $\Phi_{a_N}(z) = G(z)$. Значит, на множестве (5.2.13) при достаточно большом H верна оценка

$$|G_2(z)| \geq B \frac{e^{-x}}{y}, \quad B > 0. \quad (5.2.14)$$

Пусть теперь $G_1 = U - iV$, где

$$U = \int_0^{a_N} e^{-xt} f(1-t) \cos ytdt, \quad V = \int_0^{a_N} e^{-xt} f(1-t) \sin ytdt.$$

Запишем

$$V = \int_0^{\pi/y} + \int_{\pi/y}^{3\pi/(2y)} + \int_{3\pi/(2y)}^{a_N - \pi/y} + \int_{a_N - \pi/y}^{a_N} =: V_1 + V_2 + V_3 + V_4.$$

Тогда $V_2 < 0$ в силу отрицательности $\sin yt$, а последовательное применение лемм 5.2.1, 5.2.2 дает неравенство $V_3 \leq 0$. Благодаря невозрастанию функции $f(1-t)$ и тому, что $-x/y \leq M_1 < +\infty$ на множестве (5.2.13), имеем двойное неравенство

$$0 < V_1 < 2e^{-\pi x/y} \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t) dt < C \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t) dt.$$

Далее, учитывая (5.2.10) и монотонность функции f , а также обозначая I_N через $(a_N - \pi/y, a_N)$ и C_1 — через $3f(1-a/2)$, при $y > y_0$ получаем, что

$$|V_4| = \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \int_{I_N} f(1-t) de^{-zt} \right) \right| \leq \frac{1}{r} |f(1-a_N) e^{-za_N} - f \left(1 - a_N + \frac{\pi}{y} \right) e^{-z(a_N - \pi/y)} - \int_{I_N} e^{-zt} df(1-t)| < C_1 \frac{e^{-ax}}{y}. \quad (5.2.15)$$

Но

$$V = \int_0^{\pi/(2y)} + \int_{\pi/(2y)}^{a_N} > 0, \quad (5.2.16)$$

так как в первом слагаемом подынтегральная функция положительна, а ко второму, благодаря лемме 5.2.1, применима лемма 5.2.2. И поскольку $V_2, V_3 \leq 0$, то

$$0 < V = (V_1 + V_4) + (V_2 + V_3) \leq V_1 + V_4 \leq V_1 + |V_4|,$$

т. е.

$$|V| \leq C \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t)dt + C_1 \frac{e^{-ax}}{y}. \quad (5.2.17)$$

Аналогично поступаем с функцией U . Записываем

$$U = \int_0^{\pi/(2y)} + \int_{\pi/(2y)}^{\pi/y} + \int_{\pi/y}^{a_N-3\pi/(2y)} + \int_{a_N-3\pi/(2y)}^{a_N} =: U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

и замечаем, что $U_2 < 0$ в силу отрицательности $\cos yt$, а $U_3 \leq 0$ по леммам 5.2.1, 5.2.2. Далее, на множестве (5.2.13) справедливо неравенство

$$0 < U_1 < e^{-\pi x/(2y)} \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t)dt < C \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t)dt,$$

а для $|U_4|$ верна оценка (5.2.15), т. е.

$$|U_4| < C \frac{e^{-ax}}{y}.$$

Подобно (5.2.16), верно неравенство

$$U = \int_0^{a_N-\pi/(2y)} + \int_{a_N-\pi/(2y)}^{a_N} > 0,$$

и значит, для $|U|$ мы получаем оценку (5.2.17). В итоге оценка (5.2.17) верна для $|G_1|$.

Теперь вспоминая, что $G = G_1 + G_2$, и пользуясь оценкой (5.2.17) для $|G_1|$ и оценкой (5.2.14), находим неравенство

$$|G(z)| \geq B \frac{e^{-x}}{y} - C_2 \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t)dt - C_3 \frac{e^{-ax}}{y}.$$

Отсюда следует, что если H достаточно велико, то при $x < -H$ у функции $G(z)$, а значит, и у функции $F(z)$ нет нулей на множестве

$$\left(z = x + iy : \frac{B}{2} e^{-x} > C_2 y \int_0^{\pi/(2y)} f(1-t)dt, \quad y > y_0 \right).$$

Это доказывает теорему 5.2.2. □

Следствием теоремы 5.2.1, теоремы 5.2.2 и теоремы А является следующее утверждение.

Следствие 5.2.3. Пусть выполнены условия теоремы 5.2.2. Тогда найдутся постоянные $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $H, y_0 > 0$, такие, что все нули функции (5.1.1) лежат в криволинейной полосе, являющейся объединением множества

$$-\ln \left(|y| \int_0^{\pi/(2|y|)} f(1-t)dt \right) + C_1 \leq x \leq -\ln \left(y^2 \int_0^{\pi/(2|y|)} t f(1-t)dt \right) + C_2 < 0, \quad (5.2.18)$$

где $|y| > y_0$, с множеством $-H \leq x < 0$, $|y| \leq y_0$.

Замечание 5.2.1. Благодаря следствию 5.2.1, множество (5.2.18) в следствии 5.2.3 может быть заменено множеством

$$-\ln \left(|y| \int_0^{\pi/(2|y|)} f(1-t)dt \right) + C_1 \leq x \leq -\ln f \left(1 - \frac{\pi}{2|y|} \right) + C_2 < 0.$$

Для функции f , правильно меняющейся в окрестности точки 1, асимптотика входящих в (5.2.18) интегралов вычисляется, что дает возможность упростить вид множества (5.2.18).

Функция g , положительная и измеримая в правой окрестности точки 0, называется *правильно меняющейся функцией* порядка $\alpha \in \mathbb{R}$, если для всех $\lambda > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{g(\lambda t)}{g(t)} = \lambda^\alpha.$$

Правильно меняющаяся функция порядка $\alpha = 0$ называется *медленно меняющейся* функцией. Правильно меняющаяся функция g порядка α имеет вид

$$g(t) = t^\alpha l(t), \quad (5.2.19)$$

где $l(t)$ — медленно меняющаяся функция. Для любой медленно меняющейся функции $l(t)$ найдется эквивалентная ей при $t \rightarrow +0$ непрерывно дифференцируемая функция $l_0(t)$ с условием

$$l'_0(t) = o\left(\frac{l_0(t)}{t}\right), \quad t \rightarrow +0. \quad (5.2.20)$$

Приведенные определения и факты взяты из [26].
Обозначим

$$g_1(u) = \frac{1}{u} \int_0^u g(t) dt, \quad g_2(u) = \frac{1}{u^2} \int_0^u t g(t) dt, \quad 0 < u < 1.$$

Лемма 5.2.4. Пусть функция g интегрируема на $(0, 1)$ и является правильно меняющейся функцией порядка $\alpha > -1$. Тогда при $u \rightarrow +0$

$$g_1(u) \sim \frac{1}{1+\alpha} g(u), \quad g_2(u) \sim \frac{1}{2+\alpha} g(u).$$

Доказательство. По условию верно представление (5.2.19), где $l(t)$ — медленно меняющаяся функция. Так как замена функции g на её эквивалентную не влияет на асимптотику функций g_1, g_2 , то мы можем считать, что для $l(t)$ выполнено свойство (5.2.20). По правилу Лопиталья

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +0} \frac{g_1(u)}{g(u)} &= \lim_{u \rightarrow +0} \frac{1}{u^{1+\alpha} l(u)} \int_0^u t^\alpha l(t) dt = \\ &= \lim_{u \rightarrow +0} \frac{u^\alpha l(u)}{(1+\alpha)u^\alpha l(u) + u^{1+\alpha} l'(u)} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{1}{1+\alpha + (ul'(u)/l(u))}, \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

откуда с учетом свойства (5.2.20) следует требуемая асимптотика для g_1 . При замене g_1 на g_2 в (5.2.21) α заменяется на $1+\alpha$, и все повторяется. Лемма доказана. $\square$

Следствие 5.2.4. Пусть выполнены условия теоремы 5.2.2 и пусть, кроме того, функция $f(1-t)$ является правильно меняющейся функцией порядка $\alpha \in (-1, 0]$. Тогда все нули функции (5.1.1) лежат в криволинейной полосе, являющейся объединением множества $\{-H \leq x < 0, |y| \leq y_0\}$ с множеством

$$\left| x + \ln f\left(1 - \frac{1}{|y|}\right) \right| \leq C, \quad |y| > y_0,$$

где H, y_0, C — некоторые положительные числа.

Действительно, обозначив

$$g(t) = f(1-t), \quad u = \pi/(2|y|)$$

и применяя лемму 5.2.4, видим, что выражения под знаками логарифмов в (5.2.18) асимптотически пропорциональны соответственно выражениям $g_1(u)$ и $g_2(u)$. Поэтому следствие 5.2.4 вытекает из следствия 5.2.3 и из определения правильно меняющейся функции, позволяющего заменить в результирующем множестве $f(1 - \pi/(2|y|))$ на $f(1 - 1/|y|)$.

Пример

$$f(1-t) = g(t) = \frac{1}{t \ln^2 t},$$

когда функции

$$g_1(u) = \frac{1}{u|\ln u|}, \quad g_2(u) \sim \frac{1}{u \ln^2 u}, \quad u \rightarrow +0,$$

уже не являются асимптотически пропорциональными, показывает, что в случае $\alpha = -1$ мы вынуждены довольствоваться замечанием 5.2.1.

5.2.2. Распределение нулей в горизонтальных полосах.

Теорема 5.2.3. Пусть функция f интегрируема и логарифмически выпукла в интервале $(0, 1)$. Тогда все нули функции (5.1.1) лежат на объединении горизонтальных полос

$$(2n - 1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть

$$G(z) = e^{-z}F(z) = \int_0^1 e^{-zt}f(1-t)dt =: U(z) - iV(z).$$

Достаточно показать, что у функции $G(z)$ нет нулей в полосах

$$2\pi n \leq y \leq (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть сначала

$$\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \leq y \leq (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.2.22)$$

Если $n = 0$, то $\sin yt > 0$ при $0 < t < 1$, и так как $f > 0$, то $V > 0$.

Если $n \geq 1$, то запишем

$$V(z) = \left(\int_0^{\pi/(2y)} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\pi(1/2+2k)/y}^{\pi(5/2+2k)/y} + \int_{\pi(1/2+2n)/y}^1 \right) e^{-xt}f(1-t)\sin yt \, dt =: I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} V_k + I_2.$$

Как в I_1 , так и в I_2 , имеем неравенство $\sin yt > 0$; для I_1 это очевидно, а если рассматривается I_2 , то $\pi(1/2 + 2n)/y < t < 1$, и значит,

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < yt < \pi + 2\pi n$$

(мы учли правое неравенство (5.2.22)). И так как $f > 0$, то $I_1 + I_2 > 0$.

Теперь последовательное применение лемм 5.2.1 и 5.2.2 дает неравенство $V_k \geq 0$ на множестве (5.2.22), и значит, на этом множестве нет нулей функции $G(z)$.

Остается рассмотреть полосы

$$2\pi n \leq y < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.2.23)$$

Здесь аналогичную работу проделываем уже с функцией $U(z)$.

Если $n = 0$, то $\cos yt > 0$ для $0 < t < 1$, и потому $U > 0$.

При $n \geq 1$ запишем

$$U(z) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{2\pi(k-1)/y}^{2\pi k/y} + \int_{2\pi n/y}^1 \right) e^{-xt}f(1-t)\cos yt \, dt =: \sum_{k=1}^n U_k + J.$$

Снова $U_k \geq 0$ по лемме 5.2.1 и по лемме 5.2.2, а $J > 0$ из-за положительности подынтегральной функции: действительно, если $2\pi n/y < t < 1$, то в силу правого неравенства (5.2.23) имеем соотношение

$$2\pi n < yt < y \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Значит, $U > 0$ на множестве (5.2.23), и на этом множестве у функции $G(z)$ также нет нулей. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы А и теоремы 5.2.3 вытекает

Следствие 5.2.5. Пусть функция f интегрируема, не убывает и логарифмически выпукла в интервале $(0, 1)$. Тогда все нули функции (5.1.1) лежат на объединении полуполос

$$\operatorname{Re} z < 0, \quad (2n - 1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вернемся к формуле (5.1.3), которая показывает, что при $\mu > 1$ функция $E_1(z; \mu)$ имеет вид (5.1.1), где

$$f(t) = (1 - t)^{\mu-2} / \Gamma(\mu - 1).$$

Если $1 < \mu < 2$, то для этой функции выполнены все условия теоремы 5.2.3. Кроме того, по теореме 4.3.4 в этом случае все нули функции $E_1(z; \mu)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \mu - 2$. Таким образом, из теоремы 4.3.4 и теоремы 5.2.3 получаем

Следствие 5.2.6. При $1 < \mu < 2$ все нули функции $E_1(z; \mu)$ лежат на объединении полуполос

$$\operatorname{Re} z < \mu - 2, \quad (2n - 1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Материал этого пункта взят из статьи [21].

5.3. Нули вырожденной гипергеометрической функции

В этом пункте мы найдем асимптотику нулей вырожденной гипергеометрической функции (см. формулу (5.1.2)) для всех значений параметров a и c , при которых множество нулей бесконечно, и укажем способ нумерации всех нулей, согласованный с асимптотикой. В качестве частного случая рассмотрим важный для приложений подкласс функций типа синуса. Также будут получены неасимптотические свойства нулей, а именно, распределение их в левой и правой полуплоскостях и в горизонтальных полосах.

5.3.1. Асимптотика нулей и ее согласование с их нумерацией. Если $a \in -\mathbb{Z}_+$, то ряд в (5.1.2) обрывается, т. е. $\Phi(a, c; z)$ есть многочлен. Далее, если $c - a \in -\mathbb{Z}_+$, то $\Phi(c - a, c, z)$ есть многочлен, и формула Куммера (см. [11])

$$e^{-z} \Phi(a, c; z) = \Phi(c - a, c; -z) \quad (5.3.1)$$

показывает, что функция $\Phi(a, c; z)$ имеет не более конечного числа нулей. Поэтому при исследовании нулей функции (5.1.2) мы принимаем условие $a, c, c - a \notin -\mathbb{Z}_+$.

Теорема 5.3.1. Пусть $a, c \in \mathbb{C}$, $a, c, c - a \notin -\mathbb{Z}_+$. Тогда:

1) Все нули z_n функции $\Phi(a, c; z)$ просты и для них верна асимптотическая формула

$$z_n = 2\pi i n + \left((c - 2a) \ln 2\pi |n| + \ln \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c - a)} \pm i \frac{\pi}{2} (c - 2) \right) \left(1 + \frac{c - 2a}{2\pi i n} \right) + \frac{2a(a - c) - c}{2\pi i n} + O\left(\frac{\ln |n|}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (5.3.2)$$

2) Нумерация всех нулей функции $\Phi(a, c; z)$ согласована с асимптотикой (5.3.2) при помощи множества индексов $T = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Доказательство. 1) Так как функция $w = \Phi(a, c; z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$ является решением уравнения

$$zw'' + (c - z)w' - aw = 0 \quad (5.3.3)$$

(см. [11, гл. 7, §9]), то отсутствие кратных нулей у нее доказывается так же, как и для функции Бесселя ([11, гл. 7, §6]), т. е. на основании единственности решения задачи Коши. А именно, пусть z_0 — кратный нуль функции $w = \Phi$. Тогда

$$w(z_0) = w'(z_0) = 0. \quad (5.3.4)$$

Но функция $w \equiv 0$ также является решением уравнения (5.3.3) с начальным условием (5.3.4). По теореме о единственности решения задачи Коши отсюда $\Phi \equiv 0$. Полученное противоречие и доказывает простоту всех нулей функции $\Phi(a, c; z)$.

Для вывода формулы (5.3.2) исходим из известной асимптотики (см. [27, 35])

$$\begin{aligned} \Phi(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} \left(1 - \frac{a(1+a-c)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right) + \\ + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z \left(1 + \frac{(1-a)(c-a)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

где

$$-\pi < \arg z \leq \pi, \quad -\pi < \arg(-z) \leq \pi. \quad (5.3.6)$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$\gamma = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)}, \quad A = 2a(a-c) - c.$$

Если $a, c-a \notin -\mathbb{Z}_+$, то γ имеет смысл и $\gamma \neq 0$. Так как

$$\left(1 - \frac{a(a-c+1)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right) / \left(1 + \frac{(1-a)(c-a)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right) = 1 + \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

то формула (5.3.5) дает следующее уравнение для достаточно больших по модулю нулей z_n функции $\Phi(z) = \Phi(a, c; z)$:

$$z^{a-c} (-z)^a e^z = -\gamma \left(1 + \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right). \quad (5.3.7)$$

Отсюда следует, что такие нули расположены на множестве

$$\arg z \mp \frac{\pi}{2} = O\left(\frac{\ln|z|}{|z|}\right), \quad |z| > r_0.$$

Если $0 < \arg z < \pi$ (соответственно $-\pi < \arg z < 0$), то по условию (5.3.6) $-\pi < \arg(-z) < 0$ (соответственно $0 < \arg(-z) < \pi$). Поэтому

$$(-z)^a = z^a e^{\mp i\pi a}, \quad \operatorname{Im} z \gtrless 0. \quad (5.3.8)$$

Учитывая это и полагая $-1 = e^{\mp i\pi}$ соответственно в случаях $\operatorname{Im} z \gtrless 0$, уравнение (5.3.7) записываем в виде

$$e^{z+(2a-c)\ln z} = \gamma e^{\mp i\pi(1-a)} \left(1 + \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right). \quad (5.3.9)$$

Отсюда следует, что при достаточно больших $|n|$ справедливо соотношение

$$z_n + (2a-c)\ln z_n = 2\pi i n \mp i\pi(1-a) + \ln \gamma + \frac{A}{z_n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Дважды итерируя эту формулу, получаем требуемую формулу (5.3.2). Утверждение 1) доказано.

2) Шаг 1. Считая r_0 достаточно большим и обозначив $K(r_0) = \{z : |z| > r_0\}$, введем множества

$$\begin{aligned} P_+ &= \{z : |z^{a-c}(-z)^a e^z| > 2|\gamma|\} \cap K(r_0), \\ P_- &= \left\{z : |z^{a-c}(-z)^a e^z| < \frac{1}{2}|\gamma|\right\} \cap K(r_0), \\ P &= \left\{z : \frac{1}{2}|\gamma| \leq |z^{a-c}(-z)^a e^z| \leq 2|\gamma|\right\} \cap K(r_0), \end{aligned}$$

являющиеся соответственно правой и левой криволинейными полуплоскостями и объединением двух криволинейных полуполос, расположенных в верхней и нижней полуплоскостях. Ясно, что $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| \leq r_0\} = P_+ \cup P_- \cup P$. Нам нужны удобные оценки $|\Phi(z)|$ на этих множествах. Для их получения перейдем к функции

$$\Phi_1(z) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} (-z)^a \Phi(a, c; z).$$

Из (5.3.5) следует, что

$$\Phi_1(z) = z^{a-c} (-z)^a e^z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) + \gamma \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (5.3.10)$$

На множествах P_+, P_- оценки для $|\Phi_1(z)|$ получаются сразу из (5.3.10), из неравенства треугольника и из определения этих множеств. Действительно, при достаточно большом r_0 из (5.3.10) получаем неравенства

$$|\Phi_1(z)| \leq \frac{3}{2}|z^{a-c}(-z)^ae^z| + 2|\gamma|, \quad (5.3.11)$$

$$|\Phi_1(z)| \geq \frac{3}{4}|z^{a-c}(-z)^ae^z| - \frac{5}{4}|\gamma|, \quad (5.3.12)$$

$$|\Phi_1(z)| \geq -\frac{5}{4}|z^{a-c}(-z)^ae^z| + \frac{3}{4}|\gamma|. \quad (5.3.13)$$

Значит, если $z \in P_+$, то из (5.3.11), (5.3.12) следуют оценки

$$\frac{1}{8}|z^{a-c}(-z)^ae^z| \leq |\Phi_1(z)| \leq \frac{5}{2}|z^{a-c}(-z)^ae^z|, \quad z \in P_+, \quad (5.3.14)$$

а если $z \in P_-$, то из (5.3.11) и (5.3.13) следуют оценки

$$\frac{1}{8}|\gamma| \leq |\Phi_1(z)| \leq \frac{11}{4}|\gamma|, \quad z \in P_-. \quad (5.3.15)$$

Если $z \in P$, то (5.3.11) дает оценку сверху

$$|\Phi_1(z)| \leq 5|\gamma|, \quad z \in P. \quad (5.3.16)$$

Однако оценку снизу мы не сможем получить столь же просто, как на множествах P_+, P_- ; этому препятствует то обстоятельство, что множество P содержит нули функции $\Phi_1(z)$. Поэтому мы прибегнем к отображению

$$w = z + (2a - c) \ln z. \quad (5.3.17)$$

Из (5.3.8) следует, что

$$\operatorname{Re} w = \operatorname{Re}(z + (2a - c) \ln z) = \ln |z^{a-c}(-z)^ae^z| \mp \pi \operatorname{Im} a$$

соответственно при $\operatorname{Im} z \geq 0$; значит, образы компонент множества P при достаточно больших $|\operatorname{Im} z|$ будут совпадать с полуполосами

$$\ln \frac{|\gamma|}{2} \mp \pi \operatorname{Im} a \leq \operatorname{Re} w \leq \ln(2|\gamma|) \mp \pi \operatorname{Im} a, \quad \operatorname{Im} w \geq 0, \quad |\operatorname{Im} w| > v_0. \quad (5.3.18)$$

В силу (5.3.10) образ $\Psi(w)$ функции $\Phi_1(z)$ при отображении (5.3.17) будет иметь вид

$$\Psi(w) = e^w e^{\mp i\pi a} (1 + o(1)) + \gamma(1 + o(1)), \quad \operatorname{Im} w \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} w \geq 0.$$

Очевидно, что в полуполосах (5.3.18), но вне кружков фиксированного радиуса δ с центрами в нулях функции $\Psi(w)$ (т. е. в точках $w_n = 2\pi in + \ln \gamma \mp i\pi(1 - a) + o(1)$, $n \rightarrow \pm\infty$) верна оценка

$$|\Psi(w)| \geq C(\delta) > 0.$$

Так как δ можно взять сколь угодно малым, то отсюда следует существование последовательности $r_k \uparrow +\infty$, такой, что

$$|\Phi_1(z)| \geq C_0 > 0, \quad z \in P, \quad |z| = r_k. \quad (5.3.19)$$

Теперь на основании оценок (5.3.14)–(5.3.16) и (5.3.19) напомним результирующие оценки для функции $\Phi(z)$:

$$|\Phi(z)| \asymp e^x r^{\operatorname{Re}(a-c)}, \quad z = x + iy = re^{i\theta} \in P_+, \quad (5.3.20)$$

$$|\Phi(z)| \asymp r^{-\operatorname{Re} a}, \quad z \in P_-, \quad (5.3.21)$$

$$|\Phi(z)| \asymp r^{-\operatorname{Re} a}, \quad z \in P, \quad r = r_k \uparrow +\infty. \quad (5.3.22)$$

Шаг 2. Из определения множества P_+ следует, что на его границе

$$x \asymp \ln r \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(2a - c) \neq 0$$

и

$$x = O(1) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(2a - c) = 0$$

(то и другое — для $r > r_0$). Поэтому обозначив через $r \exp(i\theta_r^\pm)$ точки пересечения границы множества P_+ с окружностью $|z| = r > r_0$, $\theta_r^\pm \geq 0$, имеем соотношения

$$\cos \theta_r^\pm = \frac{x}{r} = O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Применяя формулы приведения $\cos \theta = \sin(\pi/2 \mp \theta)$, получаем, что

$$\theta_r^\pm = \pm \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.3.23)$$

Шаг 3. Завершающий шаг доказательства основан на формуле Иенсена

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\Phi(re^{i\theta})| d\theta, \quad (5.3.24)$$

где $n(t)$ — число нулей функции $\Phi(z) = \Phi(a, c; z)$ в круге $|z| < t$. Запишем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln |\Phi(re^{i\theta})| d\theta = \int_{\theta_r^-}^{\theta_r^+} + \int_{\theta_r^+}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\theta_r^-} =: J_1 + J_2 + J_3. \quad (5.3.25)$$

С помощью оценки (5.3.20) и соотношений (5.3.23) имеем соотношения

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\theta_r^-}^{\theta_r^+} (r \cos \theta + \operatorname{Re}(a - c) \ln r) d\theta + O(1) = \\ &= r(\sin \theta_r^+ - \sin \theta_r^-) + (\theta_r^+ - \theta_r^-) \operatorname{Re}(a - c) \ln r + O(1) = \\ &= 2r + \pi \operatorname{Re}(a - c) \ln r + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для оценки J_2, J_3 применяем соотношения (5.3.21), (5.3.22) и формулы (5.3.23). Получаем, что

$$\begin{aligned} J_2 + J_3 &= \left(\int_{\theta_r^+}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\theta_r^-} \right) (-\operatorname{Re} a \ln r + O(1)) d\theta = \\ &= \left(\pi + O\left(\frac{\ln r}{r}\right) \right) (-\operatorname{Re} a \ln r + O(1)) = -\pi \operatorname{Re} a \ln r + O(1), \end{aligned}$$

где $r = r_k$ — последовательность, участвующая в оценке (5.3.22). Подставляя найденные оценки для J_k в формулу (5.3.25), а затем полученное — в (5.3.24), приходим к следующей асимптотике:

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{r}{\pi} - \frac{\operatorname{Re} c}{2} \ln r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (5.3.26)$$

С другой стороны, левую часть в (5.3.26) мы оценим с помощью формулы (5.3.2).

В силу (5.3.2) найдется целое m такое, что если Z — последовательность всех нулей функции $\Phi(z)$, то

$$Z = Z_+ \cup Z_-, \quad Z_+ = (z_n^+)_{n=m}^{+\infty}, \quad Z_- = (z_n^-)_{n=-1}^{-\infty}, \quad Z_+ \cap Z_- = \emptyset, \quad (5.3.27)$$

и соотношение (5.3.2) будет верно для $z_n^\pm$ при $n \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, нумерация (5.3.27) согласована с асимптотикой (5.3.2), и нам остается доказать, что $m = 1$.

Из (5.3.2) следует, что

$$|z_n| = ((\operatorname{Im} z_n)^2 + (\operatorname{Re} z_n)^2)^{1/2} = |\operatorname{Im} z_n| \left(1 + O\left(\left(\frac{\operatorname{Re} z_n}{\operatorname{Im} z_n}\right)^2\right) \right) = |\operatorname{Im} z_n| + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

Учитывая это и снова пользуясь формулой (5.3.2), получаем соотношение

$$\begin{aligned} |z_n^\pm| &= 2\pi|n| \pm \operatorname{Im}(c - 2a) \ln |n| + \pi \left(\frac{\operatorname{Re} c}{2} - 1 \right) \pm \\ &\quad \pm (\operatorname{Im}(c - 2a) \ln 2\pi + \arg \gamma) + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

Воспользуемся леммой 2.2.2: если положительная последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=m}^{+\infty}$ имеет вид

$$\lambda_n = a_1 n + a_2 \ln n + a_3 + o(1), \quad n \rightarrow +\infty, \quad a_1 > 0, \quad a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

а $\Lambda(t)$ — число точек λ_n в интервале $(0, t)$, то

$$\int_0^r \frac{\Lambda(t)}{t} dt = \frac{r}{a_1} - \frac{a_2}{2a_1} \ln^2 r + \left(\frac{1}{2} - m - \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} \ln a_1 \right) \ln r + o(\ln r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.3.29)$$

Применим эту лемму к последовательностям $|Z_+| = (|z_n^+|)_{n=m}^{+\infty}$ и $|Z_-| = (|z_n^-|)_{n=1}^{\infty}$ с содержащимися в (5.3.28) параметрами

$$a_1 = 2\pi, \quad a_2 = \pm \operatorname{Im}(c - 2a), \quad a_3 = \pi \left(\frac{\operatorname{Re} c}{2} - 1 \right) \pm (\operatorname{Im}(c - 2a) \ln 2\pi + \arg \gamma). \quad (5.3.30)$$

Это означает, что соотношение (5.3.29) запишем сначала для $\Lambda = |Z_+|$, а затем — для $\Lambda = |Z_-|$, причем в последнем случае мы должны положить $m = 1$ в связи с нумерацией (5.3.27). После чего сложим почленно полученные соотношения. В правой части взаимно уничтожатся те члены, которые отвечают слагаемым в (5.3.30) с разными знаками, и мы получим, что

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{r}{\pi} + \left(1 - m - \frac{\operatorname{Re} c}{2} \right) \ln r + o(\ln r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Сопоставляя это с формулой (5.3.26), видим, что $m = 1$. Теорема доказана. $\square$

В связи с формулой (5.3.2) стоит отметить, что выбор значения $\ln(\Gamma(a)/\Gamma(c-a))$ в ней не важен. Действительно, замена одного значения другим повлечет лишь перенумерацию последовательности нулей при помощи того же множества индексов, после которой асимптотика (5.3.2) не изменится.

5.3.2. Функции типа синуса и их обобщения. Обозначим через S_α , $\alpha \in \mathbb{R}$, класс целых функций экспоненциального типа, для которых выполняется оценка

$$|F(z)| \asymp |z|^{-\alpha} e^{\pi |\operatorname{Im} z|}, \quad \text{когда } |\operatorname{Im} z| \geq h = h(F) > 0. \quad (5.3.31)$$

Класс S_0 состоит из так называемых *функций типа синуса*, введенных в анализ Б. Я. Левиным (см. [6]). Классы S_α , и в особенности класс S_0 , играют важную роль в негармоническом анализе (об этом см. [22]).

Преобразование Фурье—Стилтьеса конечной меры, сосредоточенной на отрезке $[-\pi, \pi]$, т. е. функция

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma(t), \quad \operatorname{var} \sigma(t) < +\infty, \quad (5.3.32)$$

тогда и только тогда является функцией типа синуса, когда $\sigma(t)$ имеет скачки в обеих точках $\pm\pi$; в этом случае нули z_n функции $F(z)$ удовлетворяют условию

$$z_n = n + O(1), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (5.3.33)$$

В ряде работ строились функции типа синуса, не являющиеся преобразованиями Фурье—Стилтьеса, т. е. не представимые в виде (5.3.32); во всех случаях нули построенной функции также удовлетворяли условию (5.3.33). Все указанные результаты содержатся в [22].

Известно (см. [22]), что целая функция вида

$$F(z) = \int_{\pi}^{\pi} e^{izt} \frac{k(t) dt}{(\pi^2 - t^2)^{1-\beta}}, \quad 0 < \operatorname{Re} \beta < 1, \quad \operatorname{var} k(t) < +\infty, \quad k(\pm\pi \mp 0) \neq 0, \quad (5.3.34)$$

принадлежит классу $S_{\operatorname{Re} \beta}$ и ее нули также имеют вид (5.3.33).

Оказывается, что при определенных условиях на a и c функция

$$F(z) = e^{-i\pi z} \Phi(a, c; 2\pi iz) \quad (5.3.35)$$

принадлежит классу $S_{\operatorname{Re} a}$ и обладает рядом дополнительных свойств. Верна

Теорема 5.3.2. Пусть $a, c \in \mathbb{C}$, $a, c, c - a \notin -\mathbb{Z}_+$ и

$$\operatorname{Re} c = 2 \operatorname{Re} a. \quad (5.3.36)$$

Тогда:

- 1) функция (5.3.35) принадлежит классу $S_{\operatorname{Re} a}$,
- 2) для нулей функции (5.3.35) верна асимптотика

$$z_n = n + \left(\frac{\operatorname{Im}(c-2a)}{2\pi} \ln 2\pi|n| - \frac{i}{2\pi} \ln \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)} \pm \frac{c-2}{4} \right) \left(1 + \frac{\operatorname{Im}(c-2a)}{2\pi n} \right) - \frac{2a(c-a)-c}{4\pi^2 n} + O\left(\frac{\ln|n|}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad (5.3.37)$$

- 3) нумерация всех нулей функции (5.3.35) согласована с асимптотикой (5.3.37) при помощи множества индексов $T = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,
- 4) если, кроме того,

$$c \neq 2a, \quad (5.3.38)$$

то функция (5.3.35) при $\operatorname{Re} a = 0$ не является преобразованием Фурье—Стилтьеса, а при $0 < \operatorname{Re} a < 1$ не может быть представлена в виде (5.3.34).

Доказательство. Из формулы (5.3.5), во-первых, следует, что целая функция (5.3.35) имеет экспоненциальный тип. Во-вторых, эта формула вместе с условием (5.3.36) показывает, что если положительное h достаточно велико, то верны оценки

$$|\Phi(z)| \asymp |z|^{-\operatorname{Re} a}, \quad \text{когда } \operatorname{Re} z \leq -h,$$

$$|\Phi(z)| \asymp |z|^{-\operatorname{Re} a} e^{\operatorname{Re} z}, \quad \text{когда } \operatorname{Re} z > h > 0.$$

Значит, для функции (5.3.35) выполняется оценка (5.3.31) с $\alpha = \operatorname{Re} a$, т. е. функция (5.3.35) принадлежит классу $S_{\operatorname{Re} a}$, и утверждение 1) доказано.

Утверждения 2) и 3) сразу следуют из теоремы 5.3.1; надо только в левой части формулы (5.3.2) z_n заменить на $2\pi i z_n$.

Наконец, если выполнено условие (5.3.38), то формула (5.3.37), по которой

$$z_n - n \sim C \ln|n|, \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad C \neq 0,$$

несовместима с необходимым условием (5.3.33) представимости функции $F(z)$ в виде (5.3.32) при $\operatorname{Re} a = 0$ и в виде (5.3.34) при $0 < \operatorname{Re} a < 1$. Утверждение 4) также верно. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, теорема 5.3.2 дает целый класс функций типа синуса, асимптотика нулей которых не укладываются в формулу (5.3.33). Дальнейшее исследование таких функций типа синуса проведено в работе [34].

5.3.3. Неасимптотические свойства нулей вырожденной гипергеометрической функции.

Теорема 5.3.3.

- 1) Пусть $1 \leq a < c \leq a+1$, причем $c \neq 2$, если $a = 1$. Тогда все нули функции $\Phi(a, c; z)$ лежат в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z < -(\sqrt{a-1} + \sqrt{1-(c-a)})^2. \quad (5.3.39)$$

- 2) Пусть $0 < a \leq 1$, $c \geq 1+a$, причем $c \neq 2$, если $a = 1$. Тогда все нули функции $\Phi(a, c; z)$ лежат в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > (\sqrt{c-a-1} + \sqrt{1-a})^2.$$

- 3) Пусть $0 < a \leq 1$, $a < c \leq 1+a$, причем $c \neq 2$, если $a = 1$. Тогда все нули функции $\Phi(a, c; z)$ лежат в горизонтальных полосах

$$(2n-1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.3.40)$$

Доказательство. Верна формула

$$\Phi(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re} a, \operatorname{Re}(c-a) > 0, \quad (5.3.41)$$

(см. [11, 27, 35]), что дает возможность применить теорему Поля [41], которая будет сейчас сформулирована, и результаты первой части этой главы о нулях преобразования Лапласа

$$F(z) = \int_0^1 e^{zt} f(t) dt, \quad f \in L^1(0, 1). \quad (5.3.42)$$

Теорема А ([22, 41]). Пусть функция $f(t)$ положительна, дифференцируема, отлична от тождественной постоянной в интервале $(0, 1)$ и пусть, кроме того,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \geq -h, \quad 0 < t < 1,$$

при некотором $h \in \mathbb{R}$. Тогда все нули функции (5.3.42) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < h$.

Таким образом, имея в виду формулу (5.3.41), нам надо найти минимум функции $f'(t)/f(t)$ на $(0, 1)$, где

$$f(t) = t^\alpha (1-t)^\beta, \quad \alpha = a-1 > -1, \quad \beta = c-a-1 > -1, \quad (5.3.43)$$

причем случай $\alpha = \beta = 0$ исключен условием теоремы ($c \neq 2$, если $a = 1$). В этом случае все нули функции $\Phi(a, c; z)$ попадают на границу полуплоскости (5.3.39).

Имеем формулу

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\alpha - (\alpha + \beta)t}{t(1-t)}. \quad (5.3.44)$$

Для ограниченности снизу функции (5.3.44) на интервале $(0, 1)$ необходима неотрицательность числителя при $t = 0, 1$, что накладывает условие $\beta \leq 0 \leq \alpha$. Итак (см. (5.3.43)), мы рассматриваем значения

$$-1 < \beta \leq 0 \leq \alpha. \quad (5.3.45)$$

Если $\alpha + \beta = 0$ (т. е. $c = 2$), то $\alpha > 0$, и минимум функции (5.3.44) на $(0, 1)$ равен $4\alpha = 4(a-1)$. По теореме А все нули функции $\Phi(a, c; z)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 4(1-a)$, что совпадает с (5.3.39) при $c = 2$.

Если $\alpha = 0$ (т. е. $a = 1$), то $\beta < 0$, и минимум функции (5.3.44) на $[0, 1)$ равен $-\beta$. По теореме А все нули функции $\Phi(a, c; z)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \beta$, что при $a = 1$ совпадает с (5.3.39).

Пусть $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\left(\frac{f'(t)}{f(t)} \right)' = \frac{-(\alpha + \beta)t^2 + 2\alpha t - \alpha}{t^2(1-t)^2} = -\frac{\alpha}{t^2} - \frac{\beta}{(1-t)^2}. \quad (5.3.46)$$

Средняя часть этой формулы обращается в нуль в точках

$$t_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\beta}}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{-\beta}}.$$

Ясно, что $t_1 \in (0, 1]$, $t_2 \geq 1$ и что минимум функции (5.3.44) на $(0, 1]$ достигается в точке t_1 . Подставляя это значение в правую часть (5.3.44), получаем неравенство

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \geq (\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\beta})^2, \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда и из теоремы А следует утверждение 1). При этом следует учесть, что условие (5.3.45) переходит в условие $1 \leq a < c \leq a+1$.

Утверждение 2) вытекает из утверждения 1) и из формулы (5.3.1).

Для доказательства утверждения 3) воспользуемся теоремой 5.2.3, утверждающей, что если функция $f(t) \neq C$, положительна и логарифмически выпукла в $(0, 1)$, то все нули функции (5.3.42) лежат в полосах (5.3.40). Для этого нам остается выяснить множество параметров $\alpha, \beta > -1$, при которых функция (5.3.43) логарифмически выпукла в $(0, 1)$, т. е. функция $\ln f(t)$ выпукла в $(0, 1)$. Так как $(\ln f(t))''$ есть правая часть формулы (5.3.46), то функция $\ln f(t)$ выпукла для тех и только тех значений $\alpha, \beta > -1$, для которых

$$\alpha(1-t)^2 + \beta t^2 \leq 0 \quad (5.3.47)$$

при $t \in (0, 1)$ а по непрерывности — и при $t \in [0, 1]$. Подставляя сюда значения $t = 0, 1$, получаем необходимое условие $\alpha, \beta \leq 0$. Ясно, что оно и достаточно для выполнения условия (5.3.47). Остается вспомнить связь (5.3.43) между парами параметров α, β и a, b . Утверждение 3) доказано. Теорема 5.3.3 верна.

В связи с теоремой 5.3.3 отметим статьи Г.Е. Цветкова [31, 32] о нулях функции Уиттекера $M_{k,m}(z)$. Эта функция связана с функцией Куммера формулой

$$M_{k,m}(z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} \Phi\left(\frac{1}{2} + m - k, 1 + 2m; z\right).$$

Это дает возможность переформулировать результаты упомянутых статей для функции $\Phi(a, c; z)$ следующим образом.

Если $0 < c < 2a$ (соответственно $c > \max(0, 2a)$), то у функции $\Phi(a, c; z)$ нет комплексных нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq c - 2a$ (соответственно $\operatorname{Re} z \leq c - 2a$) — см. [31].

Если $1 < c < 2a$ (соответственно $c > \max(1, 2a)$), то функция $\Phi(a, c; z)$ имеет комплексные нули только в полуплоскости $\operatorname{Re} z < c - 2a$ (соответственно $\operatorname{Re} z > c - 2a$) — см. [32].

Как видим, результат из [31] охватывает более широкое множество параметров a и c по сравнению с теоремой 5.3.3. Зато теорема 5.3.3 более точно указывает полуплоскость нулей. Действительно, если $1 < a < c < a + 1$, то

$$-(\sqrt{a-1} + \sqrt{1-(c-a)})^2 < c - 2a,$$

поэтому полуплоскость (5.3.39) из теоремы 5.3.3 является собственным подмножеством полуплоскости $\operatorname{Re} z < c - 2a$, фигурирующей в [31, 32]. $\square$

Изложение материала этого пункта следует статье [23].

ГЛАВА 6

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ КОРНИ ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ПОРЯДКА

$$\rho \in (1/2, 1)$$

6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из теоремы 2.1.1 следует, что при любых $\rho > 1/2$, $\mu \in \mathbb{C}$ множество действительных корней функции либо пусто, либо конечно. В связи с этим ставится

Задача. При любых $\rho \in (1/2, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$ найти или возможно точнее оценить величину $N(\rho, \mu)$, равную по определению количеству действительных корней функции $E_\rho(z; \mu)$.

При $\rho \geq 1$ такая задача почти полностью решена в главе 4. Для значения $\mu = 2$ задача была поставлена А.М. Нахушевым в статье [10] в 1977 г., но решение (не окончательное) получила лишь в 2006 г. в статье А.Ю. Попова [14]. Первая известная авторам публикация, содержащая результаты по этой задаче, появилась в 2005 г.

Теорема 6.1.1 (А.В. Псху [16]).

- 1) Существует убывающая на отрезке $[1/2, 1]$ функция f такая, что при любых $\rho \in [1/2, 1]$ и $\mu > f(\rho)$ функция $E_\rho(z; \mu)$ не имеет действительных корней. С другой стороны, при любом $\mu \in (0, f(\rho))$ функция $E_\rho(z; \mu)$ на некотором промежутке действительной оси принимает отрицательные значения и, следовательно, имеет хотя бы один вещественный корень. При любом $\rho \in [1/2, 1]$ функция $E_\rho(z; f(\rho))$ неотрицательна на $\mathbb{R}$, но имеет по крайней мере один вещественный корень четной кратности.
- 2) Справедливо двойное неравенство

$$\frac{1}{\rho} < f(\rho) < \frac{3}{2\rho}, \quad \frac{1}{2} < \rho < 1. \quad (6.1.1)$$

Значения $\mu \leq 0$ Псху не рассматривал. Впрочем, при

$$\mu \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(-2n - 3 + \frac{1}{\rho}, -2n \right] \quad (6.1.2)$$

наличие на $\mathbb{R}$ корня у $E_{\rho}(z; \mu)$ очевидно: при таких μ либо

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = E_{\rho}(0; \mu) \leq 0,$$

либо

$$\frac{1}{\Gamma(\mu - 1/\rho)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xE_{\rho}(x; \mu)) < 0,$$

а так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} E_{\rho}(x; \mu) = +\infty$ при любом $\mu \in \mathbb{R}$, то получаем наличие действительного корня у функции Миттаг-Леффлера (было использовано тождество $\operatorname{sgn}(1/\Gamma(t)) = (-1)^n$, $-n < t < 1 - n$, $n \in \mathbb{N}$). Значительно сложнее доказать существование действительного корня $E_{\rho}(z; \mu)$ при отрицательных μ , не входящих в множество (6.1.2), т. е. при

$$\mu \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (-2m, -2m - 1 + 1/\rho]. \quad (6.1.3)$$

У нас есть основание полагать, что $E_{\rho}(z; \mu)$ имеет хотя бы один корень на $\mathbb{R}$, какова бы ни была пара $(\rho, \mu) \in (1/2, 1) \times (-\infty, 0]$, но доказать это утверждение в полном объеме пока не удалось.

Теорема 6.1.2. Если $\rho \in (1/2, 3/4]$, то $E_{\rho}(z; \mu)$ имеет хотя бы один действительный корень при любом $\mu < 0$, а если $\rho \in (3/4, 1]$, то наличие действительного корня гарантировано при любом $\mu \leq -(1 - \rho)^{-2}$.

Дальнейшие результаты связаны с уменьшением зазора в двусторонней оценке (6.1.1). Следуя Нахушеву, введем параметр $\alpha = 2 - 1/\rho$. Тогда неравенство (6.1.1) переписывается в следующей форме:

$$2 - \alpha < f(\rho) < 3 - 1.5\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Этот результат нами усилен.

Теорема 6.1.3. Справедливы двойные неравенства

$$3 - 3\alpha + 0.7\alpha^2 < f(\rho) < 3 - 2\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1/2 \Leftrightarrow 1/2 < \rho \leq 2/3, \quad (6.1.4)$$

$$\frac{1}{\rho} + h(\rho) < f(\rho) < \frac{4}{3\rho}, \quad \frac{2}{3} < \rho < 1, \quad (6.1.5)$$

где $h(\rho) = \exp[-\pi \operatorname{ctg}(\pi(1 - \rho))]$.

Из (6.1.4) сразу же находим, что $f(\rho) = 3 + O(\rho - 1/2)$, $\rho \rightarrow 1/2+$, откуда следует непрерывность функции f в точке $1/2$ (результаты главы 5 влекут за собой равенство $f(1/2) = 3$). Однако непрерывность f в точке 1 пока не доказана (ниже в конце п. 6.5 доказано, что $f(1) = 1$).

Нами впервые обнаружен следующий феномен. Каково бы ни было значение параметра $\mu < 3$, величина $N(\rho, \mu)$ стремится к $+\infty$ при $\rho \rightarrow 1/2+$. Если же $\mu \geq 3$, то согласно (6.1.1) имеем равенство $N(\rho, \mu) = 0$ при любом $\rho > 1/2$.

Теорема 6.1.4. При любом $\mu < 3$ и $\rho \rightarrow 1/2+$ (тогда $\varepsilon = \rho - 1/2 \rightarrow 0+$) верна асимптотика

$$N(\rho, \mu) = \frac{3 - \mu}{\pi^2 \varepsilon} \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + O \left(\ln \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right), \quad \mu \notin \mathbb{Z},$$

$$N(\rho, \mu) = \frac{4 - \mu}{\pi^2 \varepsilon} \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + O \left(\ln \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right), \quad \mu \in \mathbb{Z}.$$

Более детально в связи с цитированной работой [10] исследован случай $\mu = 2$. Поскольку число $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным значением краевой задачи¹

$$y''(x) + \lambda y^{(\alpha)}(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1), \quad (6.1.6)$$

¹ $y^{(\alpha)}(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x (x - t)^{-\alpha} y(t) dt \right)$, $0 < \alpha < 1$, — производная Римана-Лиувилля функции $y(x)$ порядка α .

тогда и только тогда, когда $E_\rho(-\lambda, 2) = 0$, то рассмотрим корни функции $E_\rho(-z, 2)$ и расположим их последовательность $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\lambda_n(\alpha)\}_{n \in \mathbb{N}}$ в порядке неубывания модулей. Каждый элемент этой последовательности встречается в ней столько раз, какова кратность соответствующего корня. Далее под «с.з.» будет пониматься собственное значение задачи (6.1.6).

Теорема 6.1.5. *Справедливы следующие утверждения.*

- 1) При $0.45 \leq \alpha \leq 1$ действительных с. з. нет.
- 2) При $0 < \alpha \leq 0.364$ имеется не менее двух действительных с. з.
- 3) Если при $\alpha \in (0.346, 0.45)$ есть вещественные с. з., то они заведомо лежат на интервале $(-32, -3)$.
- 4) Если $0 < \alpha \leq 1/3$, то все действительные с. з. расположены на интервале $(\Gamma(4 - \alpha), R^{2-\alpha}(\alpha))$, где

$$R(\alpha) = 2 \left[\ln \left(\frac{2}{\alpha} \right) + \ln \ln \left(\frac{2}{\alpha} \right) \right] \operatorname{cosec}(\pi \varepsilon), \quad \varepsilon = \rho - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{4 - 2\alpha}.$$

- 5) Пусть $R_1(\alpha) = 2 \ln(1/\alpha) \operatorname{cosec}(\pi \varepsilon)$, $x_n(\alpha) = \pi(n + \rho) \sec(\pi \varepsilon)$. Тогда в случае $0 < \alpha \leq 1/6$ все с. з., лежащие в круге $|z| \leq R_1^{2-\alpha}(\alpha)$, вещественны, просты и удовлетворяют неравенствам

$$x_{n-1}^{2-\alpha}(\alpha) < \lambda_n(\alpha) < x_n^{2-\alpha}(\alpha). \quad (6.1.7)$$

- 6) При $\alpha \rightarrow 0+$ (тогда $\rho = (2 - \alpha)^{-1} \rightarrow 1/2+$) верна асимптотика

$$\mathcal{N}(\rho, 2) = 8\pi^{-2}\alpha^{-1} \ln(1/\alpha) + O(\alpha^{-1} \ln \ln(1/\alpha)).$$

- 7) Если $0 < \alpha \leq 0.1$, то для с. з., лежащих в круге $|\lambda| \leq \alpha^{-2}$ верны более точные оценки, чем (6.1.7):

$$\left(\frac{\pi(n + \varepsilon)}{\cos \pi \varepsilon} \right)^{2-\alpha} < \lambda_n(\alpha) < \left(\frac{\pi(n + 2\varepsilon)}{\cos \pi \varepsilon} \right)^{2-\alpha}, \quad (6.1.8)$$

$$\left(\frac{\pi n}{\cos \pi \varepsilon} \right)^{2-\alpha} < \lambda_n(\alpha) < \left(\frac{\pi(n + \varepsilon)}{\cos \pi \varepsilon} \right)^{2-\alpha}.$$

В частности, вне зависимости от четности n имеем неравенство

$$(\pi n)^{2-\alpha} < \lambda_n(\alpha) < (\pi n)^2. \quad (6.1.9)$$

Мы не будем приводить здесь доказательства теоремы 6.1.5. Желающие могут ознакомиться с ним по публикации [14]. Мы докажем лишь утверждение 1) (в [14] доказано отсутствие действительных с. з. при $\alpha \geq 0.5$). Отметим, что утверждение 2) сразу же следует из оценки снизу (6.1.4), а утверждение 6) — следствие теоремы 6.1.4.

При $\alpha = 0$ задача (6.1.6) является классической задачей Штурма—Лиувилля, все ее с. з. вещественны: $\lambda_n = (\pi n)^2$. Последнее подтверждается тождеством $E_{1/2}(-z; 2) \equiv \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$. Таким образом, из (6.1.9) при любом фиксированном n следует предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha) = \lambda_n(0) = (\pi n)^2.$$

Более внимательный анализ двойного неравенства (6.1.9) дает более сильное утверждение. Если $h(\alpha)$ — произвольная положительная возрастающая на интервале $0 < \alpha < 0.1$ функция, $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} h(\alpha) = 0$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \max \left\{ |\lambda_n(\alpha) - (\pi n)^2| \mid 1 \leq n \leq h(\alpha) (\alpha \ln(1/\alpha))^{-1/2} \right\} = 0. \quad (6.1.10)$$

Действительно, так как при $n = O(\exp(1/\alpha))$ имеем соотношение $n^\alpha - 1 = O(\alpha \ln n)$, $\alpha \rightarrow 0+$, и

$$(\pi n)^2 - (\pi n)^{2-\alpha} = (\pi n)^2 (1 - (\pi n)^{-\alpha}) = O(n^2 \alpha \ln(\pi n)) = O(\alpha n^2 \ln n). \quad (6.1.11)$$

Из (6.1.11) и условия $n \leq h(\alpha) (\alpha \ln(1/\alpha))^{-1/2}$ следует оценка $(\pi n)^2 - (\pi n)^{2-\alpha} = O(h(\alpha))$, доказывающая (6.1.10).

Возникает вопрос. Верна ли общая теорема о том, что корни семейства функций $E_\rho(z; \mu)$, занумерованные соответствующим образом, сходятся к корням функции $E_{\rho_0}(z; \mu)$, если параметр μ постоянен, а $\rho \rightarrow \rho_0$. Можно привести примеры пар (ρ_0, μ) , когда это утверждение не имеет места: $\mu > 3$, $\rho \rightarrow 1/2-$ или $\rho_0 = 1$, $\mu = 1, 0, -1, \dots$. Однако есть основания полагать, что в остальных случаях такая теорема верна. Данный вопрос еще ждет своего исследования.

В заключение отметим один аспект задачи Нахушева, не отраженный в теореме 6.1.5. Чему равно число α_0 такое, что при $\alpha < \alpha_0$ среди с. з. есть вещественное, а при $\alpha > \alpha_0$ все с. з. лежат вне $\mathbb{R}$? Такое число существует согласно первой части теоремы 6.1.1 ввиду убывания функции f ($\alpha_0 = \sup \left\{ 2 - \frac{1}{\rho} \mid f(\rho) > 2 \right\}$) и ввиду нашего неравенства (6.1.4), показывающего, что множество значений $\rho \in (1/2, 1)$ таких, что $f(\rho) > 2$, непусто. Из теоремы 6.1.5 мы видим, что $0.36 < \alpha_0 < 0.45$, но без помощи компьютера не можем оценить α_0 точнее. Утверждение 3) теоремы 6.1.5 дает возможность использовать для нахождения α_0 вычислительную технику. Действительно для определения первых двух цифр десятичной дроби числа α_0 оказалось достаточным вычислить с высокой точностью функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(x; 2)$, $\rho = (2 - \alpha)^{-1}$, на отрезке $-32 \leq x \leq -3$, для значений параметра $\alpha \in \{0.37, 0.38, 0.39, 0.40, 0.41, 0.42, 0.43, 0.44\}$. Компьютерные вычисления дали оценку $0.4 < \alpha_0 < 0.41$, которую, по нашему мнению, затратив некоторые усилия, можно доказать и «теоретическим» методом.

6.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1.2

Согласно теореме 1.1.3 (положим в ней $m = 0$) функция

$$F_\rho(x; \mu) \equiv x^{\mu-1} E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu) \quad \text{при} \quad 1/3 < \rho < 1, \quad \mu \leq 1/\rho, \quad x > 0 \quad (6.2.1)$$

допускает представление

$$F_\rho(x; \mu) = 2\rho \exp(x \cos \pi\rho) \cos(x \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) + \omega_\rho(x; \mu), \quad (6.2.2)$$

где $\omega_\rho(x; \mu) = \frac{1}{\pi} \left(I_1(x; \rho, \mu) \sin \pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) + I_2(x; \rho, \mu) \sin \pi\mu \right)$,

$$I_1(x; \rho, \mu) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1} e^{-xt} dt}{t^{2/\rho} + 2t^{1/\rho} \cos(\pi/\rho) + 1}, \quad I_2(x; \rho, \mu) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1} e^{-xt} dt}{t^{1/\rho} + 2 \cos(\pi/\rho) + t^{-1/\rho}}, \quad (6.2.3)$$

$s = -\mu + 1 + 1/\rho$.

Сперва рассмотрим случай $1/2 < \rho \leq 2/3$. По теореме 1.5.3 имеем неравенство

$$|\omega_\rho(x; \mu)| < 0.48x^{-s}\Gamma(s). \quad (6.2.4)$$

Ввиду (6.1.3) достаточно доказать теорему для значений параметра $\mu \leq -3 + 1/\rho$. Тогда $s \geq 4$ и длина отрезка $\Delta_s = [s, 3s]$, равная $2s$, превосходит $4\pi/\sqrt{3}$. В одной из точек произвольного полуинтервала длины $2\pi \operatorname{cosec}(\pi\rho)$ функция $\cos(x \sin \pi\rho - \gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, принимает значение -1 . А так как в рассматриваемом случае $\operatorname{cosec}(\pi\rho) \leq 2/\sqrt{3}$, то из (6.2.2) и (6.2.4) заключаем, что

$$\exists x \in \Delta_s : F_\rho(x; \mu) < -2\rho \exp(\cos \pi\rho) + 0.48x^{-s}\Gamma(s) < 0.5x^{-s}\Gamma(s) - e^{-0.5x}.$$

Здесь были использованы неравенства $2\rho > 1$, $-0.5 \leq \cos \pi\rho < 0$ при $1/2 < \rho \leq 2/3$. При $s \geq 2$ верно неравенство¹ $\Gamma(s) < 2(s/e)^s$. Применив его, мы вправе написать:

$$\exists x \in \Delta_s : F_\rho(x; \mu) < x^{-s} e^{-s} s^s - e^{-0.5x} = x^{-s} (e^{-s} s^s - x^s e^{-0.5x}).$$

Нетрудно убедиться в том, что минимум функции $x^s e^{-0.5x}$ на отрезке Δ_s достигается в точке $x = s$, а это значит, что выражение $s^s e^{-s} - x^s e^{-0.5x}$ не больше $s^s e^{-s} - s^s e^{-0.5s} < 0$. Таким образом, функция $F_\rho(x; \mu)$ в некоторой точке $x \in \Delta_s \subset (0, +\infty)$ принимает отрицательное значение. Следовательно, отрицательное значение на $(-\infty, 0)$ принимает $E_\rho(z; \mu)$. А так как $\lim_{z \rightarrow +\infty, z \in \mathbb{R}} E_\rho(z; \mu) = +\infty$ при любом $\mu \in \mathbb{R}$, то это доказывает наличие у функции Миттаг-Леффлера вещественного корня.

¹ Оно равносильно следующему: $\varphi(s) \equiv \ln \Gamma(s) - s \ln s + s < \ln 2$. Поскольку функция φ убывает на $(0, +\infty)$: $\varphi'(s) = \psi(s) - \ln(s) < 0$ ($\forall s > 0$), то неравенство достаточно проверить только при $s = 2$. Имеем выражение $\varphi(2) = 2 - \ln 4 < \ln 2$.

Теперь рассмотрим случай $2/3 < \rho \leq 3/4$. Поскольку минимумы знаменателей подынтегральных выражений в (6.2.3) равны соответственно $\sin^2(\pi/\rho) \geq 0.5$ и $2 + 2 \cos(\pi/\rho) \geq 2 - \sqrt{2}$ и сумма их обратных величин не превосходит $3 + 1/\sqrt{2}$, то

$$|\omega_\rho(x; \mu)| \leq x^{-s} \Gamma(s) (3 + 1/\sqrt{2})/\pi < 1.186 x^{-s} \Gamma(s). \quad (6.2.5)$$

В одной из точек произвольного отрезка длины $6 \operatorname{cosec}(\pi\rho)$ функция $\cos(x \sin \pi\rho - \gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, принимает значение не большее $\cos 3 < -0.9899$. Поскольку $s \geq 4$, $\operatorname{cosec}(\pi\rho) \leq \sqrt{2}$, то длина отрезка $\Delta'_s = [s/\sqrt{2}, 2\sqrt{2}s]$, равная $(3/\sqrt{2})s$, не меньше $6 \operatorname{cosec}(\pi\rho)$. Следовательно,

$$\exists x \in \Delta'_s : F_\rho(x; \mu) \leq 1.186 x^{-s} \Gamma(s) + (\cos 3) 2\rho \exp(x \cos \pi\rho). \quad (6.2.6)$$

Легко проверяется убывание функции $\rho \exp(x \cos \pi\rho)$ по переменной ρ на отрезке $1/2 \leq \rho \leq 3/4$ при любом фиксированном $x \geq 1$, поэтому $2\rho \exp(x \cos \pi\rho) \geq 1.5 \exp(-x/\sqrt{2})$ ($\forall x \geq 1$). Отсюда и из (6.2.6) находим, что

$$\begin{aligned} \exists x \in \Delta'_s : F_\rho(x; \mu) &\leq 1.186 x^{-s} \Gamma(s) - \cos(\pi - 3) 1.5 \exp(-x/\sqrt{2}) = \\ &= x^{-s} \cos(\pi - 3) \left[1.186 \sec(\pi - 3) \Gamma(s) - 1.5 x^s \exp(-x/\sqrt{2}) \right] < \\ &< x^{-s} \cos(\pi - 3) \left[1.2 \Gamma(s) - 1.5 x^s \exp(-x/\sqrt{2}) \right] = \\ &= 1.5 x^{-s} \cos(\pi - 3) \left[0.8 \Gamma(s) - x^s \exp(-x/\sqrt{2}) \right]. \end{aligned}$$

Осталось доказать отрицательность функции

$$g(s, x) = 0.8 \Gamma(s) - x^s \exp(-x/\sqrt{2}) \quad \text{при } x \in \Delta'_s, \quad s \geq 4.$$

Непосредственно проверяется справедливость соотношений

$$0.8 \Gamma(s) < 1.1 s^s e^{-s} \quad \forall s \geq 4, \quad \min_{x \in \Delta'_s} \left[x^s \exp(-x/\sqrt{2}) \right] = s^s e^{-s} (\sqrt{8}/e)^s,$$

которая влечет за собой оценку

$$\begin{aligned} g(s, x) &< 1.1 s^s e^{-s} - s^s e^{-s} (\sqrt{8}/e)^s = s^s e^{-s} \left(1.1 - (\sqrt{8}/e)^s \right) \leq \\ &\leq s^s e^{-s} \left(1.1 - (\sqrt{8}/e)^4 \right) = s^s e^{-s} (1.1 - 64e^{-4}) < 0. \end{aligned}$$

Теорема 6.1.2 в случае $1/2 < \rho \leq 3/4$ доказана.

В случае $3/4 < \rho < 1$ оценим модуль функции $\omega_\rho(x; \mu)$ точнее, используя наличие множителей $\sin \pi(\mu - 1/\rho)$ и $\sin(\pi\mu)$ при интегралах I_1, I_2 в ее представлении. Имеем неравенства

$$\begin{aligned} |\omega_\rho(x; \mu)| &\leq \frac{x^{-s} \Gamma(s)}{\pi} \left[\frac{|\sin \pi(\mu - 1/\rho)|}{\sin^2(\pi/\rho)} + \frac{|\sin \pi\mu|}{4 \cos^2(\pi/(2\rho))} \right] \leq \\ &\leq \frac{x^{-s} \Gamma(s)}{\pi \sin^2(\pi/\rho)} \left[\left| \sin \pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right| + |\sin \pi\mu| \right]. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что при $\mu \in (-2m, -2m - 1 + 1/\rho)$, $m \in \mathbb{N}$, оба синуса $\sin \pi\mu$ и $\sin \pi(\mu - 1/\rho)$ положительны, а их сумма не превосходит $2 \sin(\beta/2)$, где $\beta = 1/\rho - 1$. Следовательно,

$$|\omega_\rho(x; \mu)| \leq \frac{x^{-s} \Gamma(s)}{\sin(\pi\beta) \cos(\pi\beta/2)}.$$

В частности при $3/4 < \rho \leq 5/6$ имеем оценку

$$|\omega_\rho(x; \mu)| \leq \frac{x^{-s} \Gamma(s)}{\pi \sin(\pi/5) \cos(\pi/10)} < 0.6 x^{-s} \Gamma(s).$$

Поскольку $s = 1 - \mu + 1/\rho > |\mu| + 2$, а $|\mu| \geq (1 - \rho)^{-2} > 16$ при $3/4 < \rho \leq 5/6$, то $s \geq 18 \Rightarrow s\sqrt{3}/2 > 4\pi$. Поэтому рассуждая так же, как и выше, находим, что

$$\exists x \in [s\sqrt{3}/2, s\sqrt{3}] : \cos(x \sin \pi\rho - \pi\rho(\mu - 1)) = -1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \exists x \in [s\sqrt{3}/2, s\sqrt{3}] : F_\rho(x; \mu) &< 0.6x^{-s}\Gamma(s) - 2\rho \exp(x \cos \pi\rho) \leq \\ &\leq 0.6x^{-s}\Gamma(s) - 1.5 \exp(-x\sqrt{3}/2) = 0.6x^{-s} \left(\Gamma(s) - 2.5x^s \exp(-x\sqrt{3}/2) \right). \end{aligned}$$

А так как

$$\begin{aligned} \Gamma(s)s^se^{-s} \quad \text{при} \quad s \geq 8, \quad \min \left\{ x^s \exp(-x\sqrt{3}/2) \mid s\sqrt{3}/2 \leq x \leq s\sqrt{3} \right\} = \\ = s^s(\sqrt{3})^s \exp(-3s/2) > s^se^{-s}, \end{aligned}$$

то получаем, что в некоторой точке функция $F_\rho(x; \mu)$ принимает отрицательное значение. Отсюда (см. рассуждение выше) следует наличие действительного корня $E_\rho(z; \mu)$.

Обозначим $\varepsilon = 1 - \rho$. При $5/6 < \rho < 1 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < 1/6 \Leftrightarrow 0 < \beta < 1/5$ ввиду соотношений

$$\sin(\pi\beta) \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) > \sin\left(\frac{\pi\beta}{\beta+1}\right) = \sin(\pi\varepsilon) > 3\varepsilon \quad (6.2.7)$$

(справедливость их мы обоснуем в конце параграфа, чтобы не разбивать изложение) имеем неравенства

$$|\omega_\rho(x; \mu)| \leq \frac{x^{-s}\Gamma(s)}{3\pi\varepsilon} < \frac{x^{-s}s^se^{-s}}{\pi\sqrt{s\varepsilon}}.$$

В конце параграфа будет доказано неравенство $\Gamma(s) < es^{s-0.5}e^{-s} \quad \forall s > 1$. А так как $s > |\mu| \geq \varepsilon^{-2}$, то приходим к оценке

$$|\omega_\rho(x; \mu)| < \pi^{-1}s^s(xe)^{-s}. \quad (6.2.8)$$

Имеем также $\sqrt{s} > 3 \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)$. Следовательно,

$$\exists x \in [s - \sqrt{s}, s + \sqrt{s}] : \cos(x \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) \leq \cos 3 < -0.989.$$

Отсюда и из (6.2.8), (6.2.2) находим, что

$$\begin{aligned} \exists x \in [s - \sqrt{s}, s + \sqrt{s}] : F_\rho(x; \mu) &< \pi^{-1}s^s(xe)^{-s} - 1.97\rho \exp(x \cos \pi\rho) < \\ &< \pi^{-1}s^s(xe)^{-s} - 1.97(5/6)e^{-x} = \pi^{-1}x^{-s} (s^se^{-s} - (5\pi \cdot 1.97/6)x^se^{-x}) < \\ &< \pi^{-1}x^{-s} (s^se^{-s} - 4x^se^{-x}). \quad (6.2.9) \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что минимум функции x^se^{-x} на отрезке $[s - \sqrt{s}, s + \sqrt{s}]$ достигается в точке $x = s - \sqrt{s}$ и равен

$$\begin{aligned} (s - \sqrt{s})^s \exp(-s + \sqrt{s}) &= s^se^{-s} \exp\left[\sqrt{s} + s \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right] = \\ &= s^se^{-s} \exp\left[-\frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{s^{1-k/2}}{k}\right] > s^se^{-s-1}. \quad (6.2.10) \end{aligned}$$

Из (6.2.9) и (6.2.10) видно, что на отрезке $[s - \sqrt{s}, s + \sqrt{s}]$ есть точка, в которой функция F принимает отрицательное значение. Следовательно, отрицательное значение на $(-\infty, 0)$ принимает функция Миттаг-Леффлера, а это и требовалось доказать. Теорема 6.1.2 полностью доказана.

В заключительной части параграфа докажем несколько неравенств, связанных с гамма-функцией и использовавшихся в доказательстве теоремы 6.1.2. В силу формулы Стирлинга при $s \rightarrow +\infty$ имеем неравенство

$$\Gamma(s) \sim \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \Leftrightarrow \ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1). \quad (6.2.11)$$

Нам же требуется неасимптотическая оценка гамма-функции сверху. Асимптотики (6.2.11), напротив, дают оценку Γ -функции снизу:

$$\Gamma(s) > \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \Leftrightarrow \ln \Gamma(s) > \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \quad \forall s > 0. \quad (6.2.12)$$

Для полноты изложения приведем доказательство данного неравенства, тем более, что его идея (убывание функции $g(s) = \ln \Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s$) используется в дальнейшем. Легко сообразить, что убывание $g(s)$ вместе с предельным соотношением $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0.5 \ln(2\pi)$ доказывает неравенство $g(s) > 0.5 \ln(2\pi)$ ($\forall s > 0$), которое равносильно (6.2.12). Имеем равенство $g'(s) = \psi(s) - \ln s + 1/(2s)$. Для доказательства отрицательности g' заметим, что $\lim_{s \rightarrow +\infty} g'(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} (\psi(s) - \ln s) = 0$ (см. лемму 3.4.1). Следовательно, возрастание $g'(s)$ (в частности, положительность $g''(s)$) повлечет за собой справедливость требуемого утверждения. Имеем соотношения

$$g''(s) = \psi'(s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+s)^2} - \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2}.$$

И теперь ясно, что положительность $g''(s)$ вытекает из следующей леммы, примененной к функции $\varphi_s(t) = (s+t)^{-2}$.

Лемма 6.2.1. Пусть $\varphi \in C^1[0, +\infty)$ — положительная, убывающая и выпуклая вниз функция, $I = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt < +\infty$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) > I + \frac{\varphi(0)}{2}.$$

Справедливость леммы видна из интегрального представления суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) = I + \frac{\varphi(0)}{2} + \int_0^{+\infty} \sigma(x) d\varphi'(x), \quad \text{где } \sigma(x) = \frac{\{x\} - \{x\}^2}{2}.$$

Оценка сверху $\Gamma(s)$ получается так. Ввиду убывания $g(s)$ имеем неравенство $g(s) < g(y)$, $0 < y < s$. После потенцирования это неравенство приобретает вид

$$\Gamma(s) < \frac{\Gamma(y)e^y}{y^{y-1/2}} s^{s-1/2} e^{-s}, \quad 0 < y < s. \quad (6.2.13)$$

Полагая в (6.2.13) $y = 1$, $y = 2$, $y = 4$, $y = 8$, получаем все оценки сверху $\Gamma(s)$, использованные в доказательстве теоремы 6.1.2. Оценка (6.2.13) тем «ближе» к асимптотике (6.2.11), чем больше y , поскольку

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \Gamma(y)e^y y^{1/2-y} = \sqrt{2\pi}.$$

Наконец докажем, как было обещано, соотношения (6.2.7). Неравенство

$$\sin(\pi\varepsilon) > 3\varepsilon \Leftrightarrow \frac{\sin \pi\varepsilon}{\pi\varepsilon} > \frac{3}{\pi}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{6},$$

следует из убывания на $(0, \pi)$ функции $t^{-1} \sin t$, равной $3/\pi$ в точке $t = \pi/6$. Неравенство

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi\beta}{\beta+1}\right) < \sin(\pi\beta) \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) &\Leftrightarrow \sin \pi\beta \left(1 - \cos \frac{\pi\beta}{2}\right) < \sin(\pi\beta) - \sin\left(\frac{\pi\beta}{\beta+1}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin(\pi\beta) \sin^2\left(\frac{\pi\beta}{4}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\beta - \frac{\beta}{\beta+1}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\beta + \frac{\beta}{\beta+1}\right)\right) \end{aligned}$$

можно усилить, заменив $\sin^2\left(\frac{\pi\beta}{4}\right)$ большей величиной $\pi^2\beta^2/16$, а $\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\beta + \frac{\beta}{\beta+1}\right)\right)$ — меньшей, а именно — постоянной $1/2$. Таким образом, осталось доказать, что

$$\frac{5\beta^2}{8} \sin(\pi\beta) < \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi\beta^2}{2(\beta+1)}\right).$$

Снова усилим неравенство, заменив $\sin\left(\frac{\pi\beta^2}{2(\beta+1)}\right)$ меньшей величиной $\frac{3\beta^2}{2(\beta+1)}$. Получим неравенство

$$\frac{5}{8} \sin(\pi\beta) < \frac{3}{4(\beta+1)} \Leftrightarrow (\beta+1) \sin(\pi\beta) < \frac{6}{5}.$$

Последнее неравенство при $0 < \beta < 1/5$ очевидно.

6.3. НЕСКОЛЬКО НЕРАВЕНСТВ

Здесь доказываются различные неравенства, которые потребуются в дальнейших параграфах. Первая лемма — наиболее «трудоемкая».

Лемма 6.3.1. Обозначим $v(\alpha) = 2\alpha - 0.7\alpha^2$, $\varepsilon(\alpha) = \alpha/(4 - 2\alpha)$. Тогда функция

$$g(\alpha) = v(\alpha) \ln(2\pi) + \ln \Gamma(1 - v(\alpha)) + \ln(1 + 2\varepsilon(\alpha)) - 2\pi \sin(\pi\varepsilon(\alpha))$$

положительна на полуинтервале $0 < \alpha \leq 1/2$.

Сознаемся сразу в том, что для облегчения доказательства (себе и читателям) мы использовали вычислительную технику. А именно, с ее помощью была установлена справедливость четырех численных неравенств

$$g(0.3), \quad g(0.35) > 0.075, \quad g(0.4), \quad g(0.45) > 0.13. \quad (6.3.1)$$

Разумеется, (6.3.1) можно доказать и без компьютера, используя тейлоровы разложения синуса, натурального логарифма и

$$\ln \Gamma(1 - z) = \gamma z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{k} z^k, \quad |z| < 1, \quad \text{где} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \gamma - \text{постоянная Эйлера}. \quad (6.3.2)$$

Разложение (6.3.2) следует из равенств $\psi^{(m)}(1) = (-1)^{m-1} m! \zeta(m+1)$, $m \in \mathbb{N}$, $\psi(1) = -\gamma$, (см. [15, с. 775]). Однако, приводить здесь многостраничные выкладки, доказывающие (6.3.1), по нашему мнению, неразумно.

Доказательство леммы 6.3.1. Имеем равенство

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= v'(\alpha) (\ln(2\pi) - \psi(1 - v(\alpha))) + \varepsilon'(\alpha) \left(\frac{2}{1 + 2\varepsilon(\alpha)} - 2\pi^2 \cos(\pi\varepsilon(\alpha)) \right) = \\ &= (2 - 1.4\alpha) (\ln(2\pi) - \psi(1 - v(\alpha))) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-2} \left(\frac{1}{1 + 2\varepsilon(\alpha)} - \pi^2 \cos(\pi\varepsilon(\alpha)) \right). \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Наметим план действий. Из (6.3.1) видно (значения функции оценены на сетке с шагом 0.05), что для доказательства положительности $g(\alpha)$ на полуинтервале $0.4 < \alpha \leq 0.5$ достаточно проверить справедливость неравенства

$$g'(\alpha) > -2.6, \quad 0.4 < \alpha < 0.5, \quad (6.3.4)$$

а положительность функции g на интервале $0.3 < \alpha < 0.4$ будет следовать из неравенства

$$g'(\alpha) > -1.5, \quad 0.3 < \alpha < 0.4. \quad (6.3.5)$$

Затем будет показано, что минорантой $g'(\alpha)$ на интервале $0 < \alpha < 0.3$ является многочлен $g_1(\alpha) = 0.359 - 3.42\alpha + 3.99\alpha^2$. Тогда, поскольку $g(0) = 0$, имеем выражение

$$g(\alpha) \geq \int_0^{\alpha} g_1(t) dt = 0.395\alpha - 1.71\alpha^2 + 1.33\alpha^3 = 0.1\alpha P(\alpha),$$

где $P(\alpha) = 3.95 - 17.1\alpha + 13.3\alpha^2$. Нетрудно убедиться в том, что полином P убывает на отрезке $0 \leq \alpha \leq 0.3$, а значит, на интервале $0 < \alpha < 0.3$ превосходит свое значение в точке 0.3,

равное 0.17. Это завершит доказательство положительности функции g . Таким образом, осталось лишь проверить истинность неравенств (6.3.4), (6.3.5) и $g'(\alpha) \geq g_1(\alpha)$, $0 < \alpha < 0.3$.

Неравенство (6.3.4) ввиду (6.3.3) переписывается так:

$$\left(\pi^2 \cos(\pi \varepsilon(\alpha)) - \frac{1}{1 + 2\varepsilon(\alpha)} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-2} < 5.2 + (4 - 2.8\alpha) [\ln(2\pi) - \psi(1 - v(\alpha))]. \quad (6.3.6)$$

Легко проверяется, что функция $\pi^2 \cos(\pi \varepsilon) - (1 + 2\varepsilon)^{-1}$ убывает на отрезке $1/46 \leq \varepsilon \leq 1/2$, а функция $-\psi(1 - v(\alpha))$ возрастает на интервале $0 < \alpha < 1/2$. А так как $\varepsilon(0.4) = 1/8$, то мы можем подставить в левую часть (6.3.6) число $1/8$ вместо $\varepsilon(\alpha)$, в правую часть $\psi(1 - v(0.4)) = \psi(0.312)$ и в результате этого получить более сильное, чем (6.3.6), но и более простое неравенство

$$\left(\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{1.25} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-2} < 5.2 + (4 - 2.8\alpha) (\ln(2\pi) - \psi(0.312)), \quad (6.3.7)$$

которое при $0.4 < \alpha < 0.5$ сейчас будет доказано. Верны численные оценки

$$\pi^2 < 9.87, \quad \cos(\pi/8) < 0.93, \quad \ln(2\pi) > 1.8378, \quad -\psi(0.312) > -\psi(1/3) > 3$$

ввиду тождества $\psi(z) + 1/z = \psi(z + 1)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ и отрицательности функции ψ на полуинтервале $(0, 1.46]$ имеем соотношения $-\psi(t) = 1/t - \psi(t + 1) > 1/t$, $0 < t \leq 0.46$. Используя эти оценки, мы еще более упростим и усилим (6.3.7):

$$8.4 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-2} < 5.2 + 4.8(4 - 2.8\alpha) \Leftrightarrow 13.44\alpha + 8.4 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-2} < 24.4, \quad 0.4 < \alpha < 0.5.$$

Поскольку левая часть последнего неравенства — возрастающая функция, то она меньше своего значения в точке $\alpha = 0.5$, а это значение меньше 22. Таким образом, неравенство (6.3.4) доказано.

Аналогичным методом доказываем неравенство (6.3.5). Переписываем его в равносильной форме:

$$\left(\pi^2 \cos(\pi \varepsilon(\alpha)) - \frac{1}{1 + 2\varepsilon(\alpha)} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-2} < 3 + (4 - 2.8\alpha) (\ln(2\pi) - \psi(1 - v(\alpha))).$$

Как и выше, используя монотонность соответствующих функций и соотношения $\varepsilon(0.3) = 3/34$, $\cos(3\pi/34) < 0.962$, $v(0.3) = 0.537$, $-\psi(0.463) > 2$, усиливаем и одновременно упрощаем это неравенство:

$$8.65 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-1} < 3 + 3.83(4 - 2.8\alpha) \Leftrightarrow 10.724\alpha + 8.65 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-1} < 18.32, \quad 0.3 < \alpha < 0.4.$$

Левая часть последнего неравенства — возрастающая функция переменной α и в точке $\alpha = 0.4$ меньше 18. Неравенство (6.3.5) доказано.

Выведем оценку снизу $g'(\alpha)$ при $0 < \alpha < 0.3$. Согласно (6.3.2) имеем соотношение

$$-\psi(1 - v) = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(k + 1)v^k, \quad |v| < 1.$$

Отсюда и из неравенств $\gamma > 0.5772$, $\zeta(2) = \pi^2/6 > 1.644$, $\zeta(3) > 1.2$, $\zeta(s) > 1$ при любом $s > 1$, $v(\alpha) = \alpha(2 + 0.7\alpha) > 1.79\alpha$ при $0 < \alpha < 0.3$, получаем оценку снизу

$$\ln(2\pi) - \psi(1 - v(\alpha)) > 2.415 + 1.644 \cdot 1.79\alpha + 1.2 \cdot 1.79^2\alpha^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (1.79\alpha)^k. \quad (6.3.8)$$

Поскольку $\cos t < 1 - t^2/2 + t^4/24$ при любом $t > 0$, то при $0 < t < \pi\varepsilon(0.3) = 3\pi/34$ верна оценка

$$\cos t < 1 - t^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{t^2}{24} \right) < 1 - t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{9\pi^2}{24 \cdot 34^2} \right) < 1 - 0.496t^2.$$

Следовательно, учитывая неравенство $\varepsilon > \alpha/4$, имеем оценку

$$-\pi^2 \cos(\pi \varepsilon(\alpha)) > \pi^2 (-1 + 0.496\pi^2 \varepsilon^2(\alpha)) > -\pi^2 + 0.496\pi^4 \alpha^2/16 > -\pi^2 + 3\alpha^2.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+2\varepsilon(\alpha)} - \pi^2 \cos(\pi\varepsilon(\alpha)) \right) &> \frac{1}{2} \left(1 - \pi^2 + 3\alpha^2 + \frac{1}{1+2\varepsilon(\alpha)} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \pi^2 + 3\alpha^2 - \frac{\alpha}{2} \right) > -4.435 + \frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{4}. \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Из (6.3.3), (6.3.8), (6.3.9) выводим оценку снизу производной

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &> (2 - 1.4\alpha) \left[2.415 + 2.942\alpha + 3.844\alpha^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (1.79)^k \alpha^k \right] - \\ &\quad - 4.435 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-2} + \left(\frac{3\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{4} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^{-2}. \end{aligned}$$

А так как $2 - 1.4\alpha > 2 - 1.4 \cdot 0.3 = 1.58$, $(1 - \alpha/2)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)2^{-k}\alpha^k$, то

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &> 0.395 - 3.381\alpha + 1.58 \left(2.942\alpha + 3.844\alpha^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (1.79)^k \alpha^k \right) - \\ &\quad - 4.435 \left(\alpha + 0.75\alpha^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (k+1)2^{-k}\alpha^k \right) - 0.25\alpha + 1.25\alpha^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (11k-12)2^{-k-1}\alpha^k. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Поскольку последовательность $a_k = 1.58 \cdot 1.79^k$ возрастает, а $b_k = 4.435(k+1)2^{-k}$ убывает при $k \geq 1$, то коэффициенты разложения правой части (6.3.10) по степеням α положительны начиная со 2-го. Поэтому, отбросив все степени α , начиная с 3-й, получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &> 0.395 + (-3.381 + 1.58 \cdot 2.942 - 4.435 - 0.25)\alpha + \\ &\quad + (1.58 \cdot 3.844 - 4.435 \cdot 0.75 + 1.25)\alpha^2 > 0.395 - 3.42\alpha + 3.99\alpha^2, \end{aligned}$$

которую и требовалось доказать. Лемма полностью доказана.

Лемма 6.3.2. Пусть $h(\rho) = \exp[-\pi \operatorname{ctg}(\pi(1-\rho))]$. Тогда справедливы неравенства

$$h(\rho) < \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{3} < \rho < \frac{3}{4}, \quad h(\rho) < \frac{1}{23}, \quad \frac{3}{4} \leq \rho < 1, \quad 2.042h(\rho) < \frac{1}{\rho} - 1, \quad \frac{2}{3} < \rho < 1. \quad (6.3.11)$$

Доказательство. Формула для $h(\rho)$ показывает, что эта функция является убывающей. Следовательно

$$\begin{aligned} h(\rho) &< h\left(\frac{2}{3}\right) = \exp\left(-\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}\right) = \exp\left(-\pi/\sqrt{3}\right) < \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{3} < \rho < \frac{3}{4}, \\ h(\rho) &\leq h\left(\frac{3}{4}\right) = \exp\left(-\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}\right) = e^{-\pi} < \frac{1}{23}, \quad \frac{3}{4} \leq \rho < 1. \end{aligned}$$

Для доказательства последнего неравенства леммы положим $t = 1 - \rho$ и воспользуемся оценкой $1/\rho = (1-t)^{-1} > 1+t$. Поэтому осталось проверить, что

$$2 \exp(-\pi \operatorname{ctg}(\pi t)) < t \Leftrightarrow 2 < t \exp(\pi \operatorname{ctg} \pi t), \quad 0 < t < 1/3.$$

Поскольку функция $\varphi(t) = t \exp(\pi \operatorname{ctg} \pi t)$ убывает на интервале $0 < t < 1$, то при $0 < t < 1/3$ имеем соотношения $\varphi(t) > \varphi(1/3) = (1/3) \exp(\pi/\sqrt{3}) > 2.042$, что и требовалось доказать. Лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 6.3.3. При любом $\alpha \in (0, 1/2]$ верно неравенство $\Gamma(1-\alpha) < e^{1.15\alpha}$, а если $0 < \alpha \leq 1/4$, то $\Gamma(1-\alpha) < e^{0.9\alpha}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi_c(\alpha) = \ln \Gamma(1 - \alpha) - c\alpha$ (c — постоянная). Поскольку $\varphi_c''(\alpha) = \psi'(1 - \alpha) > 0$, то максимум этой функции на любом отрезке $\subset [0, 1]$ достигается на одном из концов этого отрезка. А так как $\varphi_{0.9}(1/4) < 0$, $\varphi_{1.15}(1/2) < 0$, $\varphi_c(0) = 0$, то функция $\varphi_{0.9}(\alpha)$ отрицательна на полуинтервале $0 < \alpha \leq 1/4$, а функция $\varphi_{1.15}(\alpha)$ отрицательна на полуинтервале $0 < \alpha \leq 1/2$. Это и влечет за собой справедливость леммы. $\square$

Лемма 6.3.4. Если $\rho \in [1/2, 1]$, $\mu < 0$, то

$$E_\rho(x; \mu) > 0 \quad \forall x \geq (1 - \mu)^2.$$

Доказательство. Пусть сначала $-1 < \mu < 0$. Поскольку $\rho \leq 1$, то все слагаемые ряда Маклорена $E_\rho(x; \mu)$, кроме свободного члена, положительны. Следовательно, при $x \geq 1$ имеем оценку

$$E_\rho(x; \mu) > \frac{1}{\Gamma(\mu)} + \frac{x}{\Gamma(\mu + 1/\rho)} \geq \frac{1}{\Gamma(\mu)} + \frac{1}{\Gamma(\mu + 1/\rho)} \geq \frac{1}{\Gamma(\mu)} + \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} = \frac{1 + \mu}{\Gamma(\mu + 1)} > 0.$$

Неравенство $\frac{1}{\Gamma(\mu + 1/\rho)} \geq \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)}$ доказывается так. Полагаем $\mu + 1 = t$, $h = 1/\rho - 1$. Тогда $t \in (0, 1)$, $h \in [0, 1]$. Надо показать, что $\frac{1}{\Gamma(t)} \leq \frac{1}{\Gamma(t + h)}$. Если $t + h \in (1, 2)$, то $\frac{1}{\Gamma(t + h)} > 1$, а $\frac{1}{\Gamma(t)} < 1$. Если же $t + h \leq 1$, то требуемое неравенство следует из возрастания $\frac{1}{\Gamma(t)}$ на отрезке $0 \leq t \leq 1$.

Пусть теперь $\mu \leq -1$. Обозначим через N наименьшее натуральное число такое, что $\mu + N/\rho \geq 0$. Тогда все слагаемые ряда Маклорена функции E_ρ , начиная с $\frac{x^N}{\Gamma(\mu + N/\rho)}$, положительны и, тем самым, верна оценка

$$E_\rho(x; \mu) > \frac{x^N}{\Gamma(\mu + \frac{N}{\rho})} + \frac{x^{N+1}}{\Gamma(\mu + \frac{N+1}{\rho})} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{|\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})|}.$$

Ввиду тождества $\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi}$ имеем неравенство $\frac{1}{|\Gamma(s)|} \leq \frac{\Gamma(1-s)}{\pi}$ ($\forall s < 0$). Поэтому, обозначив $B_k(x) = x^k \Gamma(1 - (\mu + k/\rho))$, находим, что

$$E_\rho(x; \mu) > \frac{x^N}{\Gamma(\mu + \frac{N}{\rho})} + \frac{x^{N+1}}{\Gamma(\mu + \frac{N+1}{\rho})} - \frac{N}{\pi} \max_{0 \leq k \leq N-1} B_k(x). \quad (6.3.12)$$

Докажем возрастание последовательности $B_k(x) = \exp(\varphi_x(k))$, где

$$\varphi_x(t) = t \ln x + \ln \Gamma\left(1 - \left(\mu + \frac{t}{\rho}\right)\right).$$

Имеем формулу $\varphi'_x(t) = \ln x - \frac{1}{\rho} \psi\left(1 - \left(\mu + \frac{t}{\rho}\right)\right)$. Ввиду возрастания функции ψ и оценки $\psi(t) < \ln(t)$ верно неравенство $\frac{1}{\rho} \psi\left(1 - \left(\mu + \frac{t}{\rho}\right)\right) \leq \frac{1}{\rho} \psi(1 - \mu) < \frac{1}{\rho} \ln(1 - \mu) \leq 2 \ln(1 - \mu) \leq \ln x$. Таким образом, $\varphi'_x(t) > 0$ и возрастание $B_k(x)$ доказано. В силу выбора N имеем соотношения $-2 \leq -\frac{1}{\rho} \leq \mu + \frac{N-1}{\rho} < 0$, откуда

$$B_k(x) \leq x^{N-1} \Gamma\left(1 - \left(\mu + \frac{N-1}{\rho}\right)\right) \leq 2x^{N-1}. \quad (6.3.13)$$

Из (6.3.12), (6.3.13) выводим оценку

$$E_\rho(x; \mu) > \frac{x^N}{\Gamma(\mu + \frac{N}{\rho})} + \frac{x^{N+1}}{\Gamma(\mu + \frac{N+1}{\rho})} - \frac{2Nx^{N-1}}{\pi}.$$

Так как $\mu + \frac{N-1}{\rho} < 0$, то $\mu + \frac{N}{\rho} < 2$. Если $1 \leq \mu + \frac{N}{\rho} < 2$, то $\frac{1}{\Gamma(\mu + \frac{N}{\rho})} \geq 1$ и

$$E_\rho(x; \mu) > x^N - \frac{2Nx^{N-1}}{\pi} \geq x^N - \frac{2(2-\mu)x^{N-1}}{\pi} = x^N \left(1 - \frac{4-2\mu}{\pi x}\right). \quad (6.3.14)$$

Имеем соотношение $x \geq (1-\mu)^2 \Rightarrow 2x \geq 2-4\mu+2\mu^2 \geq 4-4\mu > 4-2\mu$ (напоминаем, что $\mu \leq -1$). Поэтому $\frac{4-2\mu}{\pi x} < 0$ и положительность $E_\rho(x; \mu)$ доказана. Если $0 \leq \mu + \frac{N}{\rho} < 1$, то $1 \leq \mu + \frac{N+1}{\rho} \leq 3$ и $\frac{x^{N+1}}{\Gamma(\mu + \frac{N+1}{\rho})} \geq \frac{x^{N+1}}{2} > x^N$ и снова получаем (6.3.14). Лемма доказана. $\square$

6.4. НАЛИЧИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ У ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ПРИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА $\mu > 1/\rho$

В этом параграфе рассматривается следующая зависимость параметра μ от порядка ρ функции Миттаг-Леффлера (как и в п. 6.1 $\alpha = 2 - 1/\rho$):

$$\mu(\rho) = \begin{cases} 3 - 3\alpha + 0.7\alpha^2, & \frac{1}{2} < \rho \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{\rho} + h(\rho), & \frac{2}{3} < \rho < 1, \end{cases} \quad \text{где } h(\rho) = \exp(-\pi \operatorname{ctg} \pi(1-\rho)). \quad (6.4.1)$$

Доказывается, что функция $E_\rho(z; \mu(\rho))$ в некоторой точке на $(-\infty, 0)$ принимает отрицательное значение. А так как $E_\rho(z; 0) = 1/\Gamma(\mu) > 0$ при $\mu > 0$ и в силу асимптотики

$$E_\rho(z; \mu) \sim \frac{-1}{z\Gamma(\mu - 1/\rho)}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad z \rightarrow -\infty, \quad \rho > 1/2, \quad \mu \in \left\{\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho} - 1, \frac{1}{\rho} - 2, \dots\right\},$$

функция $E_\rho(z; \mu(\rho))$ принимает положительные значения при всех достаточно больших по модулю отрицательных z , то заключаем, что $E_\rho(z; \mu(\rho))$ имеет не менее двух действительных корней. Заметим, что в случае $1/2 < \rho \leq 2/3 \Leftrightarrow 0 < \alpha \leq 1/2$ из (6.4.1) следует равенство (из него сразу видно, что $\mu(\rho) > 1/\rho$)

$$\mu(\rho) - \frac{1}{\rho} = 1 - 2\alpha + 0.7\alpha^2. \quad (6.4.2)$$

Выводится также граница для возможных действительных корней функции $E_\rho(z; \mu)$, когда μ принимает значения, превосходящие $\mu(\rho)$.

Интересно было бы доказать следующее утверждение (оно представляется нам весьма правдоподобным). Если множество вещественных корней функции $E_\rho(z; \mu)$ при каких-либо значениях параметров $\rho \in [2/3, 1)$ и $\mu > 1/\rho$ непусто, то этих корней, с учетом кратности, ровно два. Если параметр ρ «близок» к $1/2$, то, как видно из теоремы 6.1.4, такое утверждение, вообще говоря, не имеет места: количество вещественных корней $E_\rho(z; \mu)$ может оказаться достаточно большим.

Утверждение 6.4.1. Положим $x_\rho = \pi(1 + \rho(\mu(\rho) - 1)) \operatorname{cosec}(\pi\rho)$. Тогда при любом $\rho \in (1/2, 1)$ справедливо неравенство

$$E_\rho(-x_\rho^{1/\rho}; \mu(\rho)) < 0 \Leftrightarrow F_\rho(x_\rho; \mu(\rho)) < 0. \quad (6.4.3)$$

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что

$$\cos(x \sin(\pi\rho) - \pi\rho(\mu - 1)) = -1 \quad \text{при} \quad x = \pi(1 + \rho(\mu - 1)) \operatorname{cosec}(\pi\rho).$$

Поэтому согласно теореме 1.1.3 имеем формулу

$$F_\rho(x_\rho; \mu(\rho)) = -2\rho \exp(x_\rho \cos \pi\rho) + \frac{x_\rho^{\mu(\rho)-1-1/\rho}}{\Gamma(\mu(\rho) - 1/\rho)} - \frac{1}{\pi} \left[I_1 \sin \left(\pi \left(\mu(\rho) - \frac{2}{\rho} \right) \right) + I_2 \sin \left(\pi \left(\mu(\rho) - \frac{1}{\rho} \right) \right) \right], \quad (6.4.4)$$

где I_1, I_2 — положительные функции переменной x и параметров ρ, μ .

Разберем вначале случай $1/2 < \rho \leq 2/3$. Выразим через параметр α величины $\mu(\rho) - 1/\rho - 1 = -2\alpha + 0.7\alpha^2$ (см. (6.4.2)), $\mu(\rho) - 2/\rho = -1 - \alpha + 0.7\alpha^2$. Подставив эти выражения в (6.4.4) и обозначив $v(\alpha)$ через $2\alpha - 0.7\alpha^2$, находим, что

$$F_\rho(x_\rho; \mu(\rho)) = -2\rho \exp(x_\rho \cos \pi\rho) + \frac{x_\rho^{-v(\alpha)}}{\Gamma(1-v(\alpha))} - \frac{I_1 \sin \pi(\alpha - 0.7\alpha^2) + I_2 \sin(\pi v(\alpha))}{\pi}.$$

Поскольку $0 < \alpha - 0.7\alpha^2 < 1/2$, $0 < v(\alpha) < 1$ при $0 < \alpha \leq 0.5$, то

$$\sin \pi(\alpha - 0.7\alpha^2) > 0, \quad \sin \pi v(\alpha) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \alpha \leq 0.5,$$

и мы приходим к следующей оценке сверху:

$$F_\rho(x_\rho; \mu(\rho)) < -2\rho \exp(x_\rho \cos \pi\rho) + x_\rho^{-v(\alpha)}/\Gamma(1-v(\alpha)).$$

Таким образом, осталось доказать неравенство ($\varepsilon = \rho - 1/2$)

$$\begin{aligned} x_\rho^{-v(\alpha)}/\Gamma(1-v(\alpha)) &\leq (1+2\varepsilon) \exp(-x_\rho \sin \pi\varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq v(\alpha) \ln x_\rho + \ln \Gamma(1-v(\alpha)) + \ln(1+2\varepsilon) - x_\rho \sin(\pi\varepsilon), \quad 0 < \alpha \leq 1/2. \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Очевидно, что $x_\rho > \pi$. Покажем, что $x_\rho < 2\pi$. Поскольку ввиду (6.4.2)

$$\mu(\rho) - 1 = \frac{1}{\rho} - v(\alpha) \Rightarrow \rho(\mu(\rho) - 1) = 1 - \rho v(\alpha) = 1 - \frac{2\alpha - 0.7\alpha^2}{2 - \alpha},$$

то

$$\begin{aligned} x_\rho &= \pi \left(2 - \frac{2\alpha - 0.7\alpha^2}{2 - \alpha} \right) \operatorname{cosec}(\pi\rho) = \pi \left(2 - \alpha - \frac{0.3\alpha^2}{2 - \alpha} \right) \sec(\pi\varepsilon) = \\ &= \pi(2 - \alpha - 0.6\varepsilon\alpha) \sec(\pi\varepsilon) < \pi(2 - \alpha) \sec(\pi\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, осталось доказать, что $2 - \alpha < 2 \cos(\pi\varepsilon) \Leftrightarrow 4 \sin^2(\pi\varepsilon/2) < \alpha$. Поскольку $\varepsilon = \alpha/(4 - 2\alpha) \leq \alpha/3$ при $0 < \alpha \leq 1/2$, то $4 \sin^2(\pi\varepsilon/2) < \pi^2 \varepsilon^2 < \pi^2 \alpha^2/9 < (10/9)\alpha^2 \leq 0.5\alpha \frac{10}{9} < \alpha$, что и требуется.

Заметим далее, что если в правой части (6.4.5) заменить x_ρ на переменную x , то получится функция, убывающая на луче $3 \leq x < +\infty$. Действительно, ее производная по x равна $v(\alpha)/x - \sin \pi\varepsilon < 2\alpha/x - 3\varepsilon \leq (2/3)\alpha - 3\varepsilon < 0$, т. к. $\varepsilon > \alpha/4$. Следовательно, правая часть (6.4.5) превосходит величину, получающуюся после замены в ней x_ρ на 2π . Это соображение приводит к задаче доказательства более простого, но более сильного, чем (6.4.5) неравенства

$$0 \leq v(\alpha) \ln(2\pi) + \ln \Gamma(1-v(\alpha)) + \ln(1+2\varepsilon) - 2\pi \sin \pi\varepsilon, \quad 0 < \alpha \leq 1/2.$$

Оно уже доказано в лемме 6.3.1 и тем самым доказательство утверждения 6.4.1 в случае $1/2 < \rho \leq 2/3$ завершено. $\square$

Разберем оставшийся случай $2/3 < \rho < 1$. Проверим, что и в этом случае оба синуса в представлении (6.4.4) положительны, а значит, верно неравенство

$$F_\rho(x_\rho; \mu(\rho)) < -2\rho \exp(x_\rho \cos \pi\rho) + \frac{x_\rho^{\mu(\rho)-1-1/\rho}}{\Gamma(\mu(\rho)-1/\rho)}.$$

Действительно, $\sin \left(\pi \left(\mu(\rho) - \frac{1}{\rho} \right) \right) = \sin(\pi h(\rho)) > 0$, поскольку $0 < h(\rho) < 1$,

$$\sin \left(\pi \left(\mu(\rho) - \frac{2}{\rho} \right) \right) = \sin \left(\pi \left(h(\rho) - \frac{1}{\rho} \right) \right) = \sin \pi \left(\frac{1}{\rho} - 1 - h(\rho) \right) > 0,$$

так как $0 < \frac{1}{\rho} - 1 - h(\rho) < 1$ (левое неравенство доказано в лемме 6.3.2, а правое очевидно, т. к.

$\frac{1}{\rho} - 1 < 1$ при $\rho > 1/2$ и тем более $\frac{1}{\rho} - h(\rho) - 1 < 1$).

Таким образом, задача свелась к выводу неравенства $(1 - \rho = t)$

$$\frac{x_\rho^{h(\rho)-1}}{\Gamma(h(\rho))} < 2\rho \exp(-x_\rho \cos \pi t), \quad \frac{2}{3} < \rho < 1. \quad (6.4.6)$$

Имеем выражение

$$\begin{aligned} x_\rho &= \pi \left(1 + \rho \left(\frac{1}{\rho} + h(\rho) - 1 \right) \right) \operatorname{cosec}(\pi \rho) = \\ &= \pi(2 + \rho h(\rho) - \rho) \operatorname{cosec}(\pi t) = \pi(1 + t + \rho h(\rho)) \operatorname{cosec}(\pi t). \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Согласно лемме 6.3.2 верна оценка $\rho h(\rho) < t/2.042 < 0.49t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x_\rho \cos \pi t &< \pi(1 + 1.49t) \operatorname{ctg} \pi t = -\ln h(\rho) + 1.49\pi t \operatorname{ctg} \pi t, \\ \exp(-x_\rho \cos \pi t) &> h(\rho) \exp(-1.49\pi t \operatorname{ctg} \pi t) > h(\rho)e^{-1.49}. \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

Из (6.4.6), (6.4.8) видно, что осталось доказать неравенство

$$\frac{x_\rho^{h(\rho)-1}}{\Gamma(h(\rho))} < 2\rho e^{-1.49} h(\rho) \Leftrightarrow e^{1.49} x_\rho^{h(\rho)-1} < 2\rho \Gamma(1 + h(\rho)), \quad \frac{2}{3} < \rho < 1. \quad (6.4.9)$$

Из леммы 6.3.2 видно, что $0 < h(\rho) < 1/6$, а значит

$$x_\rho^{h(\rho)-1} < x_\rho^{-5/6}, \quad \Gamma(1 + h(\rho)) > \Gamma(1 + 1/6), \quad 2\rho > 4/3 \quad (6.4.10)$$

(ввиду убывания $\Gamma(s)$ на интервале $1 < s < 1.4$ и неравенства $x_\rho > 1$). Заменяя в (6.4.9) правую часть на меньшую, а левую часть на большую в соответствии с (6.4.10), приходим к задаче доказательства неравенства

$$e^{1.49} x_\rho^{-5/6} < (4/3)\Gamma(1 + 1/6),$$

которое после логарифмирования принимает вид

$$1.49 - (5/6) \ln x_\rho < \ln(4/3) + \ln \Gamma(1 + 1/6). \quad (6.4.11)$$

Оценим правую часть (6.4.11) снизу, а левую — сверху. Поскольку $\ln(4/3) > 0.287$, $\ln \Gamma(1 + y) = y\psi(\xi)$, $1 < \xi < 1 + y$ ($y > 0$), а функция ψ возрастает и $\psi(1) = -\gamma > -0.58$, то

$$\ln(4/3) + \ln \Gamma(1 + 1/6) > 0.287 - 0.58/6 > 0.19. \quad (6.4.12)$$

С другой стороны из (6.4.7) ввиду убывания функции $(1 + t) \operatorname{cosec}(\pi t)$ на интервале $0 < t < 0.4$ находим, что

$$x_\rho > \pi(1 + t) \operatorname{cosec}(\pi t) > \pi \left(1 + \frac{1}{3} \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} > 4.8, \quad 0 < t < \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$1.49 - (5/6) \ln x_\rho < 1.49 - (5/6) \ln 4.8 < 0.185. \quad (6.4.13)$$

Из (6.4.13), (6.4.12) получаем (6.4.11), что завершает доказательство утверждения 1).

Утверждение 6.4.2. Положим $M(\rho) = 36 \cos^{-4}(\pi \rho)$ при $1/2 < \rho \leq 3/4$, $M(\rho) = 6/h(\rho)$ при $3/4 < \rho < 1$. Тогда при любом $\mu \in [\mu(\rho), 1.5/\rho)$ функция $E_\rho(z; \mu)$ положительна на $\mathbb{R} \setminus (-M(\rho), -1)$. В частности ее действительные корни (если они есть) лежат только на интервале $(-M(\rho), -1)$.

В утверждении 6.4.2 нет резона рассматривать значения параметра $\mu \geq 1.5/\rho$: в следующем параграфе будет доказано, что в случае $\mu \geq 1.5/\rho$, $1/2 < \rho < 1$, функция $E_\rho(z; \mu)$ положительна на всей действительной оси. Затем эта граница параметра μ будет снижаться дальше.

Заметим еще, что двусторонняя оценка возможных корней в утверждении 2) достаточно грубая; ее уточнение требует отдельного исследования.

Доказательство утверждения 6.4.2. Положительность функции $E_\rho(z; \mu)$ при $z \in \mathbb{R}$, таких что $z \geq -\Gamma(\mu + 1/\rho)/\Gamma(\mu)$, доказана в главе 3 (следствие из леммы 3.3.1). А если $\mu \geq q \geq 1$, то $\Gamma(\mu + q)/\Gamma(q) \geq \Gamma(q + 1)/\Gamma(q) = q \geq 1$. Отсюда (напомним, что $\mu(\rho) > 1/\rho$) видна положительность $E_\rho(z; \mu)$ на луче $[-1, +\infty)$.

Доказать положительность $E_\rho(z; \mu)$ при $z \in \mathbb{R}$, $z \leq -M(\rho)$, сложнее. Начнем с разбора случая $1/2 < q \leq 2/3$. Надо проверить положительность функции $F_\rho(x; \mu) = x^{\mu-1} E_\rho(-x^{1/\rho}; \mu)$ на луче $x \geq M^\rho(\rho)$. Из теоремы 1.5.2 выводим оценку

$$F_\rho(x; \mu) \geq -2\rho \exp(x \cos \pi\rho) + \frac{x^{\mu-1-1/\rho}}{\Gamma(\mu-1/\rho)} + \omega_\rho(x; \mu), \quad \text{где}$$

$$|\omega_\rho(x; \mu)| \leq \frac{3\Gamma(1-\mu+2/\rho)}{2\pi} x^{\mu-1-2/\rho} < \frac{\Gamma(1-\mu+2/\rho)}{2} x^{\mu-1-2/\rho}.$$

Поскольку $\mu > 1/\rho$, то $1-\mu+2/\rho < 1+1/\rho < 3 \Rightarrow \Gamma(1-\mu+2/\rho) < 2$ (очевидно, что $1-\mu+2/\rho > 1$, т. к. $\mu < 1.5/\rho$). Следовательно, $|\omega_\rho(x; \mu)| \leq x^{\mu-1-2/\rho} \leq x^{\mu-1-1/\rho}/M(\rho)$ и мы приходим к оценке

$$F_\rho(x; \mu) > -2\rho \exp(x \cos \pi\rho) + x^{\mu-1-1/\rho} \left[\frac{1}{\Gamma(\mu-1/\rho)} - \frac{1}{M(\rho)} \right]. \quad (6.4.14)$$

Дадим численную оценку снизу выражения $\frac{1}{\Gamma(\mu-1/\rho)} - \frac{1}{M(\rho)}$ при $\mu(\rho) \leq \mu \leq 1.5/\rho$, $1/2 < \rho \leq 2/3$. Поскольку функция $1/\Gamma(t)$ возрастает на интервале $0 < t < 1$ и превосходит t , то

$$\frac{1}{\Gamma(\mu-1/\rho)} \geq \frac{1}{\Gamma(\mu(\rho)-1/\rho)} = \frac{1}{\Gamma(1-2\alpha+0.7\alpha^2)} \geq \frac{1}{\Gamma(7/40)} > \frac{7}{40}.$$

А так как $M(\rho) = 36 \cos^{-4}(\pi\rho) \geq 36 \cdot 16$, то

$$\frac{1}{\Gamma(\mu-1/\rho)} - \frac{1}{M(\rho)} > \frac{7}{40} - \frac{1}{36 \cdot 16} > 0.17. \quad (6.4.15)$$

Из (6.4.14), (6.4.15), заключаем, что для доказательства положительности $F_\rho(x; \mu)$ на луче $x \geq M^\rho(\rho)$ достаточно установить справедливость неравенства

$$2\rho \exp(x \cos \pi\rho) < 0.17 x^{\mu-1-1/\rho} \Leftrightarrow x^{v(\alpha)} \exp(x \cos \pi\rho) < 0.17/(2\rho)$$

при $1/2 < q \leq 2/3$, $x \geq M^\rho(\rho) \geq M^{1/2}(\rho) = 6 \cos^{-2}(\pi\rho)$. Усилим и упростим одновременно последнее неравенство. Так как $v(\alpha) < 1$, то левая его часть не превосходит $x \exp(x \cos \pi\rho)$, а правая больше $0.17 : (4/3) > 0.1$. Поэтому осталось проверить, что

$$x \exp(x \cos \pi\rho) < 0.1 \quad \text{при} \quad x \geq 6 \cos^{-2}(\pi\rho), \quad 1/2 < \rho \leq 2/3.$$

Функция $x \exp(x \cos \pi\rho)$ убывает на луче $x \geq |\sec(\pi\rho)|$, а значит при рассматриваемых значениях x не превосходит своего значения в точке $x = 6 \cos^{-2} \pi\rho$:

$$x \exp(x \cos \pi\rho) \leq 6 \sec^2(\pi\rho) \exp(6 \sec \pi\rho) = (1/6) u^2 e^{-u} \leq (1/6) \max_{u \geq 0} (u^2 e^{-u}) = (2/3) e^{-2} < 0.1.$$

Требуемое неравенство доказано.

Теперь пусть $2/3 < \rho \leq 3/4$. В этой ситуации по аналогии с (6.2.5) имеем оценку

$$|\omega_\rho(x; \mu)| \leq 1.19 \Gamma(1-\mu+2/\rho) x^{\mu-1-2/\rho} < 1.19 \Gamma(2.5) x^{1-\mu-2/\rho} < 1.6 x^{1-\mu-1/\rho} / M(\rho).$$

Поэтому получаем оценку

$$F_\rho(x; \mu) > -2\rho \exp(x \cos \pi\rho) + x^{\mu-1-1/\rho} \left[\frac{1}{\Gamma(\mu-1/\rho)} - \frac{1.6}{M(\rho)} \right].$$

Как и выше, убеждаемся в возрастании правой части по μ при рассматриваемых значениях этого параметра и приходим к оценке

$$F_\rho(x; \mu) > -2\rho \exp(x \cos \pi\rho) + x^{-1} \left[\frac{1}{\Gamma(h(\rho))} - \frac{1.6}{M(\rho)} \right].$$

По аналогии с предыдущими рассуждениями (здесь уже $h(\rho) \geq h(3/4) = e^{-\pi}$, $M(\rho) \geq 36 \cos^{-4}(3\pi/4) = 36.4$) имеем соотношения

$$\frac{1}{\Gamma(h(\rho))} - \frac{1.6}{M(\rho)} \geq h(\rho) - \frac{1.6}{9 \cdot 16} \geq e^{-\pi} - \frac{1}{90} > \frac{1}{24} - \frac{1}{90} > \frac{1}{36}.$$

Таким образом, требуется доказать неравенство

$$2\rho \exp(x \cos \pi \rho) < \frac{1}{36x} \Leftrightarrow 6x \exp(x \cos \pi \rho) < \frac{1}{12\rho}, \quad x \geq \frac{6}{\cos^2(\pi \rho)}, \quad 2/3 < \rho \leq 3/4.$$

Ввиду убывания функции $x \exp(x \cos \pi \rho)$ при $x \geq |\sec(\pi \rho)|$ верна оценка

$$6x \exp(x \cos \pi \rho) \leq 36 \sec^2(\pi \rho) \exp(6 \sec \pi \rho) = u^2 e^{-u} < 36e^{-6} < 0.1, \quad x \geq 6 \sec^2(\pi \rho).$$

В то же время имеем неравенство $1/(12\rho) \geq (1/12) \cdot (4/3) = 1/9 > 0.1$, и требуемое доказано.

Наконец, $3/4 < \rho < 1$. Согласно теореме 1.4.2 ($m = 1$) имеем формулу

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho) - \frac{1}{z\Gamma(\mu - 1/\rho)} + R(z; \rho, \mu), \quad \text{где} \quad (6.4.16)$$

$$|R(z; \rho, \mu)| \leq 2^{1+b/2} \Gamma(b+1) |z|^{-2}, \quad b = 2/\rho - \mu.$$

Напомним, что в данном представлении функции Миттаг-Леффлера при определении не целой степени z берется главная ветвь аргумента, а на луче $(-\infty, 0)$ можно считать либо $z = |z|e^{\pi i}$, либо $z = |z|e^{-\pi i}$. Разрыв экспоненциально малого слагаемого в приближенном представлении E_ρ не приносит никакого противоречия. Из (6.4.16), учитывая вещественность на $\mathbb{R}$ функции Миттаг-Леффлера ($\mu \in \mathbb{R}$), получаем оценку снизу

$$E_\rho(z; \mu) > \frac{1}{|z|\Gamma(h(\rho))} - \exp(|z|^\rho \cos \pi \rho) - 2^{1+b/2} \Gamma(b+1) |z|^{-2}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad z < -1.$$

Далее ввиду ограничений $\rho > 3/4$, $\cos \pi \rho < -1/\sqrt{2}$, $b \leq 1/\rho < 4/3$ имеем оценку

$$E_\rho(z; \mu) > \frac{h(\rho)}{|z|} - \exp\left(-\frac{|z|^{3/4}}{\sqrt{2}}\right) - 2^{5/3} \Gamma(1 + 4/3) |z|^{-2},$$

$$|z| E_\rho(z; \mu) > h(\rho) - |z| \exp\left(-\frac{|z|^{3/4}}{\sqrt{2}}\right) - 4.2 |z|^{-1}.$$

Отсюда видно, что для доказательства положительности $E_\rho(z; \mu)$ при $z \in \mathbb{R}$, $z \leq -6/h(\rho)$ достаточно проверить справедливость неравенства

$$|z| \exp\left(-\frac{|z|^{3/4}}{\sqrt{2}}\right) < \frac{1.8}{|z|}, \quad |z| \leq -6/h(\rho).$$

Обозначив $|z|^{3/4}/\sqrt{2} = u$, находим, что

$$|z|^2 \exp\left(-\frac{|z|^{3/4}}{\sqrt{2}}\right) = (u\sqrt{2})^{8/3} e^{-u} = \left(\frac{16}{u}\right)^{1/3} u^3 e^{-u} < \max_{u \geq 0} (u^3 e^{-u}) = 27e^{-u} < 1.8,$$

что и требовалось доказать (мы использовали, что $h(\rho) < 1/23$ при $3/4 < \rho < 1$ по лемме 6.3.2, а значит, $|z| > 100$, $u > 16$). Утверждение 6.4.2 полностью доказано. $\square$

6.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1.1

В этом параграфе встретится еще одна специальная функция — функция Райта (см.[46, 47]):

$$e_\beta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(-\beta n)}, \quad 0 < \beta < 1.$$

Нам потребуется следующие ее свойства, доказанные Райтом:

$$e_\beta(y) > 0 \quad \forall y \in (-\infty; 0), \quad e_\beta(y) = O(e^{Ay}), \quad y \rightarrow -\infty \quad \forall A > 0, \quad (6.5.1)$$

$$\int_0^{+\infty} s^{\nu-1} e_\beta(-s) ds = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\beta\nu)} \quad \forall \nu > 0. \quad (6.5.2)$$

Из (6.5.2) посредством замены $s = tx^{-\beta}$ переменной при любом $x > 0$ получаем, что

$$\int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e_\beta(-tx^{-\beta}) dt = x^{-\beta\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\beta\nu)}. \quad (6.5.3)$$

Ключевым моментом доказательства теоремы является следующее соображение.

Лемма 6.5.1. Если $\rho \geq 1/2$, $\mu > 0$ и функция $E_\rho(z; \mu)$ неотрицательна на $\mathbb{R}$, то

- 1) каково бы ни было число $\lambda > \mu$, функция $E_\rho(z; \lambda)$ положительна на $\mathbb{R}$.
- 2) каково бы ни было число $\beta \in (0, 1)$, функция $E_{\rho/\beta}(z; \beta\mu)$ положительна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. При любом $\lambda > 0$ функция $E_\rho(z; \lambda)$ положительна на $[0, +\infty)$ и здесь трудностей не возникает. Доказательство требует ее положительность на луче $(-\infty, 0)$. Исследуя функцию $E_\rho(z; \lambda)$ на этом луче, полезно перейти к функции $F_\rho(x; \lambda) \equiv x^{\lambda-1} E_\rho(-x^{1/\rho}; \lambda)$.

Рассмотрим оператор $D^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, задаваемый формулой

$$D^{-\varepsilon} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^{1-\varepsilon}},$$

определенный по крайней мере на $C[0, +\infty)$ и называемый интегралом порядка ε . Для нас важен результат действия этого оператора на функцию F_ρ :

$$D^{-\varepsilon} F_\rho(x; \mu) = F_\rho(x; \mu + \varepsilon). \quad (6.5.4)$$

Убедимся в справедливости равенства (6.5.4). Разложение функции Миттаг-Леффлера в степенной ряд дает (B — бета-функция)

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{F_\rho(t; \mu)}{(x-t)^{1-\varepsilon}} dt &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\mu-1+k/\rho}}{\Gamma(\mu+k/\rho)} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)} \int_0^1 \frac{(ux)^{\mu-1+k/\rho} d(ux)}{(x)^{1-\varepsilon}(1-u)^{1-\varepsilon}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\mu+\varepsilon-1+k/\rho}}{\Gamma(\mu+k/\rho)} B\left(\mu + \frac{k}{\rho}, \varepsilon\right) = x^{\mu+\varepsilon-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k/\rho} \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\mu+\varepsilon+k/\rho)} = \Gamma(\varepsilon) F_\rho(x; \mu + \varepsilon). \end{aligned}$$

А так как оператор $D^{-\varepsilon}$ ($\forall \varepsilon > 0$) переводит неотрицательные функции, не равные нулю тождественно ни в какой правой полукрестности нуля, в положительные, то, взяв $\varepsilon = \lambda - \mu > 0$, получаем первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения воспользуемся свойствами (6.5.1), (6.5.3) функции Райта. Из (6.5.3) находим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F_\rho(t; \mu) e_\beta^0(-tx^{-\beta}) dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\mu-1+k/\rho}}{\Gamma(\mu+k/\rho)} e_\beta^0(-tx^{-\beta}) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)} \int_0^{+\infty} t^{\mu-1+k/\rho} e_\beta^0(-tx^{-\beta}) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\beta\mu+\beta k/\rho}}{\Gamma(\beta\mu+\beta k/\rho)} = x F_{\rho/\beta}(x; \beta\mu). \quad (6.5.5) \end{aligned}$$

Здесь корректность перемены порядка операций суммирования и интегрирования требует обоснования. Ряд, представляющий $F_\rho(t; \mu)$ сходится к этой функции всюду на $(0, +\infty)$, но требуется также, чтобы мажоранта модуля частичных сумм этого ряда, умноженная на $e_\beta^0(-tx^{-\beta})$, была (при любом $x > 0$) суммируемой на $\mathbb{R}$. Модуль любой частичной суммы этого ряда не превосходит

$t^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k/\rho}}{\Gamma(\mu + k/\rho)} = t^{\mu-1} E_{\rho}(t^{1/\rho}; \mu) = O(e^t)$, $t > 0$. Зато функция Райта $e_{\beta}^0(-t)$ при $t \rightarrow +\infty$ стремится к нулю быстрее e^{-At} ($\forall A > 0$). Отсюда следует упомянутая суммируемость. Из (6.5.5) и положительности функции Райта на $(-\infty, 0)$ вытекает второе утверждение леммы. Лемма 6.5.1 полностью доказана. $\square$

Взяв $\rho = 1/2$, $\mu = 3$ ($E_{1/2}(z; 3) = z^{-1}(\operatorname{ch} \sqrt{z} - 1) \geq 0$ на $\mathbb{R}$), получим

Следствие 6.5.1 (из леммы 6.5.1). *Функция $E_{1/2}(z; \lambda)$ положительна на $\mathbb{R}$ при любом $\lambda > 3$. Функция $E_{\rho}(z; \lambda)$ положительна на $\mathbb{R}$ при любых $\rho > 1/2$, $\lambda \geq 1.5/\rho$.*

Теперь мы можем доказать теорему 6.1.1. Определим множество

$$B_{\rho} = \{\mu > 0 \mid \exists z \in \mathbb{R} : E_{\rho}(z; \mu) < 0\}.$$

Непустота множества B_{ρ} видна из утверждения 1) в пункте 6.4, а также из совсем просто проверяемого включения $1/\rho \in B_{\rho}$, $1/2 < \rho < 1$. Действительно, при любом $\rho > 1/2$, $\mu \in \mathbb{C}$, согласно теореме 1.2.1 верна асимптотика

$$E_{\rho}(z; \mu) = \frac{-1}{z\Gamma(\mu - 1/\rho)} - \frac{1}{z^2\Gamma(\mu - 2/\rho)} - O\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad z \in \mathbb{R}, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (6.5.6)$$

Поэтому при $\mu = 1/\rho$, $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$, выполняется эквивалентность

$$E_{\rho}\left(z; \frac{1}{\rho}\right) \sim \frac{-1}{z^2\Gamma(-1/\rho)}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (6.5.7)$$

Из (6.5.7) и положительности Γ -функции на интервале $(-2, -1)$ следует, что при всех достаточно больших по модулю отрицательных z функция $E_{\rho}\left(z; \frac{1}{\rho}\right)$ отрицательна. Следовательно, $1/\rho \in B_{\rho}$.

Итак множество B_{ρ} непусто, а следствие из леммы 6.5.1 показывает ограниченность B_{ρ} . Поэтому существует конечная положительная функция $f(\rho) = \sup B_{\rho}$, $1/2 < \rho < 1$. Из леммы 6.5.1 следует импликация

$$\mu \in B_{\rho} \Rightarrow [\mu, +\infty) \cap B_{\rho} = \emptyset, \quad \mu > 0,$$

которая доказывает включение $(0, f(\rho)) \subset B_{\rho}$. В силу непрерывности (и даже голоморфности) функции Миттаг-Леффлера по параметру μ неравенство $E_{\rho}(z_0; \mu_0) < 0$, $z_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$, влечет за собой неравенство $E_{\rho}(z_0; \mu) < 0$ при всех μ , лежащих в некоторой окрестности U точки μ_0 . Это означает, что $U \subset B_{\rho}$ и поэтому $f(\rho)$ — граничная точка B_{ρ} — не принадлежит множеству B_{ρ} .

Таким образом, при $\mu \in (0, f(\rho))$ функция $E_{\rho}(z; \mu)$ принимает в некоторых точках действительной оси отрицательные значения, функция $E_{\rho}(z; f(\rho))$ неотрицательна на $\mathbb{R}$, а при $\lambda > f(\rho)$ имеем неравенство $E_{\rho}(z; \lambda) > 0$ ($\forall z \in \mathbb{R}$).

Докажем, что $E_{\rho}(z; f(\rho))$ все же имеет действительный корень. Согласно утверждению 2) из п. 6.4 при $\mu \geq \mu(\rho)$ все отрицательные значения $E_{\rho}(z; \mu)$ (если они есть) сосредоточены на отрезке $[-M(\rho), -1]$. При $\mu(\rho) \leq \mu < f(\rho)$ они есть и, следовательно, обозначив $m_{\rho}(\mu)$ через $\min\{E_{\rho}(z; \mu) \mid -M(\rho) \leq z \leq -1\} < 0$, $\mu(\rho) \leq \mu < f(\rho)$, получим, что $m_{\rho}(f(\rho)) = \lim_{\mu \rightarrow f(\rho)-0} m_{\rho}(\mu) \leq 0$.

Это и доказывает наличие действительного корня функции $E_{\rho}(z; f(\rho))$.

Осталось вывести двустороннюю оценку (6.1.1) и доказать убывание $f(\rho)$. Включение $1/\rho \in B_{\rho}$ означает справедливость неравенства $1/\rho < f(\rho)$, а следствие из леммы 6.5.1 сразу же дает неравенство $f(\rho) \leq 1.5/\rho$. Но в случае $1/2 < \rho < 1$ функция $E_{\rho}(z; f(\rho))$ имеет корень, поэтому при этих ρ неравенство строгое: $f(\rho) < 1.5/\rho$. Вторая часть леммы 6.5.1 означает справедливость неравенства

$$f(\rho) \leq \frac{\rho_0}{\rho} f(\rho_0), \quad \frac{1}{2} \leq \rho_0 < \rho, \quad (6.5.8)$$

которое влечет за собой убывание f . Теорема 6.1.1 полностью доказана.

Прделанные рассуждения позволяют другим способом передоказать теорему о том, что при $\rho > 1$, $\mu \geq 1/\rho$, у функции $E_{\rho}(z; \mu)$ нет действительных корней, а при $0 < \mu < 1 < \rho$ — есть. Покажем вначале, что $f(1) = 1$. Действительно, если $\mu \in (0, 1)$, то из (6.5.6) находим, что $E_1(z; \mu) \sim -(z\Gamma(\mu - 1))^{-1}$, $z \rightarrow -\infty$, $z \in \mathbb{R}$. Это влечет за собой отрицательность $E_1(z; \mu)$

при всех достаточно больших по модулю отрицательных z . В то же время функция $E_1(z; \mu) \equiv e^z$ положительна на $\mathbb{R}$. Здесь, в отличие от случая $1/2 < \rho < 1$, когда второй параметр функции Миттаг-Леффлера равен $\sup B_1$, вещественного корня нет. Причина в том, что вещественный корень $E_1(z; \mu)$ по мере приближения μ слева к 1 стремится к $-\infty$. То же явление, как мы увидим, имеет место и при $\rho > 1$.

Из (6.5.8), взяв $\rho_0 = 1$, находим, что $f(\rho) \leq 1/\rho$. С другой стороны, при $0 < \mu < 1/\rho$ из (6.5.6) следует эквивалентность

$$E_\rho(z; \mu) \sim - \left(z \Gamma \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right)^{-1}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad z \rightarrow -\infty,$$

влекущая за собой наличие у функции $E_\rho(z; \mu)$ отрицательных значений. Следовательно, $f(\rho) = 1/\rho$ при $\rho \geq 1$. В заключение этого параграфа заметим, что, по нашему мнению, функция $f(\rho)$ при $1/2 < \rho < 1$ вряд ли является элементарной.

6.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1.3

Оценки снизу функции $f(\rho)$ следуют из утверждения 1) п. 6.4. Для доказательства оценок сверху достаточно проверить положительность функции $F_\rho(x; 3-2\alpha)$ на луче $x > \left(\frac{\Gamma(3-2\alpha+1/\rho)}{\Gamma(3-2\alpha)} \right)^\rho$. Напомним, что по лемме 3.1.1 функция $E_\rho(z; \mu)$ в случае $\mu > 0$ положительна на луче $z \geq -\frac{\Gamma(\mu+1/\rho)}{\Gamma(\mu)}$ действительной оси. Таким образом, мы проверим положительность $E_\rho(z; 3-2\alpha)$ при всех $z \in \mathbb{R}$ и тем самым докажем оценку $f(\rho) < 3-2\alpha$, $1/2 < \rho \leq 2/3$. В частности $f(2/3) < 2$. Отсюда и из (6.5.8) находим, что $f(\rho) < \frac{(2/3)f(2/3)}{\rho} < \frac{4/3}{\rho}$, $\rho > 2/3$, что доказывает оценку сверху (6.1.5).

Нижняя граница переменной x , равная $\left(\frac{\Gamma(3-2\alpha+1/\rho)}{\Gamma(3-2\alpha)} \right)^\rho$, достаточно сложна. Выведем неравенство

$$\left(\frac{\Gamma(\mu+1/\rho)}{\Gamma(\mu)} \right)^\rho > 2, \quad \mu = 3-2\alpha, \quad \frac{1}{2} < \rho \leq \frac{2}{3}, \quad (6.6.1)$$

и после этого будем доказывать положительность функции $F_\rho(x; 3-2\alpha)$ при $x > \pi/2$. Прологарифмировав (6.6.1) получим равносильное неравенство

$$\ln 2 < \rho \left(\ln \Gamma \left(\mu + \frac{1}{\rho} \right) - \ln \Gamma(\mu) \right) = \rho \int_{\mu}^{\mu+1/\rho} \psi(t) dt.$$

В силу возрастания ψ последнее интегральное среднее не меньше своего значения, соответствующего минимальному значению параметра $\mu = 2$: $\rho \int_2^{\mu+1/\rho} \psi(t) dt$. Имеем соотношение

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \int_2^{\mu+1/\rho} \psi(t) dt \right) = \int_2^{\mu+1/\rho} \psi(t) dt - \frac{1}{\rho} \psi \left(2 + \frac{1}{\rho} \right) < 0$$

опять-таки ввиду возрастания ψ . Таким образом, минимум левой части (6.6.1) равен $\left(\frac{\Gamma(2+3/2)}{\Gamma(2)} \right)^{2/3} = (\Gamma(3.5))^{2/3} > 3^{2/3} > 2$, что и требовалось проверить.

Для доказательства положительности функции $F_\rho(x; 3-2\alpha)$ при $x \geq 2$ воспользуемся теоремой 1.5.2, взяв $m = 1$, $\mu = 3-2\alpha$. Учитывая равенства $\rho(\mu-1) = \rho(2-2\alpha) = \rho(2-\alpha) - \rho\alpha = 1 - \rho\alpha$, $\mu - 1/\rho = 1 - \alpha$, $\mu - 2/\rho = -1$ и обозначив $\rho - 1/2$ через ε , получим представление

$$F_\rho(x; 3-2\alpha) = -2\rho \exp(-x \sin \pi\varepsilon) \cos(x \cos \pi\varepsilon + \pi\rho\alpha) + x^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha) + \omega_\rho(x), \quad (6.6.2)$$

в котором остаточный член $\omega_\rho(x)$ оценивается так:

$$|\omega_\rho(x)| \leq \frac{\Gamma(2)}{\pi x^2} \frac{\sin \pi \alpha}{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)} < \frac{\alpha}{2x^2}. \quad (6.6.3)$$

Дадим двустороннюю оценку аргумента косинуса в (6.6.2) при $2 \leq x \leq 4$. Рассмотрим функцию двух переменных $\varphi(x, \rho) = x \cos(\pi \varepsilon) + \pi \rho \alpha$. Поскольку $\partial \varphi / \partial x > 0$, максимум этой функции в прямоугольнике $\{(x, \rho) | 2 \leq x \leq 4, \quad 1/2 \leq \rho \leq 2/3\}$ достигается при $x = 4$, а минимум — при $x = 2$. Далее имеем соотношения

$$\frac{\partial \varphi(x, \rho)}{\partial \rho} = \pi(2 - x \sin \pi \varepsilon) \Rightarrow \frac{\partial \varphi(2, \rho)}{\partial \rho} > 0, \quad \frac{\partial \varphi(4, \rho)}{\partial \rho} \geq 0, \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} \leq \rho \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{6}.$$

Следовательно, в данном прямоугольнике выполняется неравенство

$$2 = \varphi\left(2, \frac{1}{2}\right) \leq \varphi(x; \rho) \leq \varphi\left(4, \frac{2}{3}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}.$$

Отсюда заключаем, что первое слагаемое в правой части (6.6.2), равное $-2\rho e^{-x \sin \pi \varepsilon} \cos(\varphi(x, \rho))$, положительно, и выполняется неравенство

$$F_\rho(x; 3 - 2\alpha) > \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} - \frac{\alpha}{2x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} - \frac{1}{4x^2} > 0, \quad 2 \leq x \leq 4.$$

При $x \geq 4$ из (6.6.2), (6.6.3) находим, что

$$F_\rho(x; 3 - 2\alpha) > \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} - 2\rho \exp(-x \sin \pi \varepsilon) - \frac{\alpha}{2x^2}.$$

Следовательно,

$$x^\alpha \Gamma(1 - \alpha) F_\rho(x; 3 - 2\alpha) > 1 - 2\rho \Gamma(1 - \alpha) x^\alpha \exp(-x \sin \pi \varepsilon) - \frac{\alpha \Gamma(1 - \alpha)}{2x^{2-\alpha}}.$$

Сделаем небольшие огрубления этой оценки снизу, одновременно упростив ее. Поскольку $2\rho = 1 + 2\varepsilon < e^{2\varepsilon}$, $\Gamma(1 - \alpha) \leq \sqrt{\pi}$, $\sin(\pi \varepsilon) \geq 3\varepsilon$ (при $0 < \varepsilon \leq 1/6$), $x^{2-\alpha} \geq x^{1.5} \geq 8$ (при $x \geq 4$), то

$$x^\alpha \Gamma(1 - \alpha) F_\rho(x; 3 - 2\alpha) \geq 1 - \Gamma(1 - \alpha) x^\alpha e^{2\varepsilon - 3\varepsilon x} - 0.12\alpha.$$

Функция $x^\alpha e^{-3\varepsilon x}$ убывает на луче $x \geq \frac{\alpha}{3\varepsilon} = \frac{4 - 2\alpha}{3}$. Поэтому при $x \geq 4$ имеем неравенство $x^\alpha e^{-3\varepsilon x} \leq 4^\alpha e^{-12\varepsilon} < e^{1.4\alpha - 12\varepsilon}$. Это означает, что осталось доказать положительность функции

$$g(\alpha) = 1 - \Gamma(1 - \alpha) e^{1.4\alpha - 10\varepsilon} - 0.12\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 0.5, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \alpha/(4 - 2\alpha).$$

При $0 < \alpha \leq 1/4$, воспользовавшись оценками $\varepsilon > \alpha/4$, $\Gamma(1 - \alpha) < e^{0.9\alpha}$ (лемма 6.3.3), находим, что $g(\alpha) > 1 - e^{-0.2\alpha} - 0.12\alpha$. А так как $1 - e^{-t} > t - t^2/2$ ($\forall t > 0$), то $g(\alpha) > 0.08\alpha - 0.02\alpha^2 > 0$ при $0 < \alpha \leq 1/4$. В случае $1/4 < \alpha \leq 1/2$, применив оценки $\varepsilon > \alpha/3.5$, $\Gamma(1 - \alpha) < e^{1.15\alpha}$ (лемма 6.3.3), снова получим, что $g(\alpha) > 1 - e^{-0.2\alpha} - 0.12\alpha > 0$ при $1/4 < \alpha \leq 1/2$, что и требовалось доказать. Теорема 6.1.3 доказана.

6.7. План доказательства теоремы 6.1.4

В этом параграфе изложены основные этапы доказательства теоремы 6.1.4. Обозначим $1 - \mu$ через s и определим последовательность

$$x_n = x_n(\rho, \mu) = \pi(n - \rho s) \sec(\pi \varepsilon), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.7.1)$$

Она поможет осуществить локализацию вещественных корней, необходимую для подсчета их количества. Основой доказательства станет представление функции $F_\rho(z; \mu) = z^{\mu-1} E_\rho(-z^{1/\rho}; \mu)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ по теореме 1.5.2. А именно, взяв в этой теореме $m = 1$, получим ($\varepsilon = \rho - 1/2$) равенство

$$F_\rho(x; \mu) = 2\rho \exp(-x \sin(\pi \varepsilon)) \cos(x \cos(\pi \varepsilon) + \pi \rho s) + \frac{z^{-s-1/\rho}}{\Gamma(\mu - 1/\rho)} + \omega_\rho(z; \mu), \quad (6.7.2)$$

где $\omega_\rho(z; \mu)$ — голоморфная в $\operatorname{Re} z > 0$ функция переменной z ,

$$|\omega_\rho(z; \mu)| \leq \frac{(|z|/x)^s \Gamma(s+2/\rho)}{\pi x^{s+2/\rho}} \left[\left| \sin \left(\pi \left(\mu - \frac{2}{\rho} \right) \right) \right| + \frac{1}{2} \left| \sin \left(\pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right) \right| \right]. \quad (6.7.3)$$

Из (6.7.2) видно, что показатель степени z во втором слагаемом, равный $-s-1/\rho = \mu-3+\alpha$ ($\alpha = 2-1/\rho \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 1/2$), отрицателен и отделен от нуля, как только $\mu < 3$. Поэтому экспонента (хотя ее показатель тоже отрицателен, но стремится к нулю при $\rho \rightarrow 1/2+$) превалирует над $\frac{z^{-s-1/\rho}}{\Gamma(\mu-1/\rho)}$, по крайней мере, пока $x = \operatorname{Re} z$ не дойдет до величины

$$R_1(\varepsilon) = b \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon) \ln \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon), \quad (6.7.4)$$

где $b = 3 - \mu$, если $\mu \notin \mathbb{Z}$ и $b = 4 - \mu$, если $\mu \in \mathbb{Z}$. Наоборот, как только $x \geq R(\varepsilon)$,

$$R(\varepsilon) = b \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon) (\ln \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon) + 2 \ln \ln \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)), \quad (6.7.5)$$

первое слагаемое становится значительно меньше второго, и вещественных корней нет.

Асимптотика количества вещественных корней выводится следующим образом. Обозначим через $n(\varepsilon)$ наибольшее значение n такое, что $x_n(\rho, \mu) \leq R_1(\varepsilon)$, а номер n_0 , зависящий только от μ , но не от ρ , выберем позднее. На сторонах трапеций

$$T_n = \left\{ z = x + iy \mid x_n \leq x \leq x_{n+1}, \quad -x \leq y \leq x \right\}, \quad n_0 \leq n \leq n(\varepsilon) - 1, \quad (6.7.6)$$

как будет доказано в следующем параграфе, выполняется неравенство

$$\left| \frac{z^{-s-1/\rho}}{\Gamma(\mu-1/\rho)} \right| + |\omega_\rho(z; \mu)| < 2\rho |\exp(-z \sin(\pi\varepsilon)) \cos(z \cos \pi\varepsilon + \pi\rho s)|. \quad (6.7.7)$$

Оно влечет за собой совпадение количества корней (с учетом кратности) функций $F_\rho(z; \mu)$ и $\exp(-z \sin(\pi\varepsilon)) \cos(z \cos(\pi\varepsilon) + \pi\rho s)$ внутри каждой такой трапеции. Корни последней функции легко находятся:

$$\cos(z \cos(\pi\varepsilon) + \pi\rho s) = 0 \Leftrightarrow z = \sec(\pi\varepsilon) \left(\pi n + \frac{\pi}{2} - \pi\rho s \right) = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Все эти корни простые. Таким образом, внутри каждой трапеции T_n , $n_0 \leq n \leq n(\varepsilon) - 1$, функция $F_\rho(z; \mu)$ имеет единственный корень. В силу действительности на $\mathbb{R}$ функции F_ρ и симметричности трапеций T_n относительно $\mathbb{R}$ этот корень — вещественный. Таким образом, на отрезке $x_{n_0} \leq x \leq x_{n(\varepsilon)}$ имеется ровно $n(\varepsilon) - n_0$ корней функции $F_\rho(x; \mu)$. Из (6.7.1) и (6.7.4) видно, что

$$n(\varepsilon) = \frac{R_1(\varepsilon)}{\pi} \cos(\pi\varepsilon) + O(1) = \frac{b \operatorname{ctg}(\pi\varepsilon)}{\pi} \ln \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon) + O(1) = \frac{b}{\pi^2 \varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

является главным членом асимптотики количества вещественных корней $E_\rho(z; \mu)$, которую мы доказываем.

В п. 6.8 будет доказано, что при $x \geq R(\varepsilon)$ функция $F_\rho(x; \mu)$ знакопостоянна при всех ρ , достаточно близких к $1/2$ справа, и, следовательно, корней не имеет. Следующим этапом вывода асимптотики $N(\rho; \mu)$ является оценка количества корней $F_\rho(x; \mu)$ на отрезке $x_{n(\varepsilon)} = R_1(\varepsilon) + O(1) \leq x \leq R(\varepsilon)$. Длина этого отрезка есть $O(\varepsilon^{-1} \ln \ln \varepsilon^{-1})$, $\varepsilon \rightarrow 0+$. Доказывается, что на сторонах прямоугольника

$$\Pi(\varepsilon) = \left\{ x + iy \mid x_{n(\varepsilon)} \leq x \leq x_{m(\varepsilon)}, \quad |y| \leq \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon) \right\},$$

который разбивается пополам данным отрезком, модуль логарифмической производной $F'_\rho(z; \mu)/F_\rho(z; \mu)$ не превосходит 2 (при всех ρ , достаточно близких к $1/2$ и фиксированном μ). Поэтому количество корней функции $F_\rho(z; \mu)$ в $\Pi(\varepsilon)$, а тем более на «средней линии» данного прямоугольника, не превосходит периметра $\Pi(\varepsilon)$, деленного на π , т. е. $O(\varepsilon^{-1} \ln \ln \varepsilon^{-1})$, что является остаточным членом асимптотики.

Последним этапом доказательства теоремы 6.1.4 является оценка сверху количества «небольших» по модулю корней $E_\rho(z; \mu)$, т. е. корней, лежащих на луче $[-x_{n_0}^{1/\rho}, +\infty)$. На самом деле

(см. лемму 6.3.4) они лежат на отрезке $[-x_{n_0}^{1/\rho}, s^2] \subset [-x_{n_0}^2, s^2]$. В качестве n_0 берем наименьший из номеров n , таких, что $x_n \geq A^2(s)$, где (напомним, что $s = 1 - \mu$)

$$A(s) = 2^{s+4}(s+3)^2, \quad s \geq 0, \quad A(s) = 2A(0)/b - 2 < s < 0.$$

Поскольку расстояние между двумя соседними элементами последовательности x_n равно $\pi \sec(\pi\varepsilon)$, то $x_{n_0} \leq A^2(s) + 4 < \sqrt{2}A(s) \Rightarrow x_{n_0}^2 < 2A^4(s)$ и осталось оценить сверху количество корней функции $E_\rho(z; \mu)$ на отрезке $[-2A^4(s), s^2]$. Интуитивно ясно, что количество корней на этом отрезке ограничено сверху величиной, зависящей только от s (т. е. от μ), но не от ρ . Но все же требуется строгое доказательство. Оно проводится так. Поскольку количество корней произвольной целой функции, не равной нулю тождественно, на любом компакте конечно (или корней нет совсем), то при всех значениях $\delta \in (0, 1]$ кроме, может быть, конечного их числа, на сторонах прямоугольника $K_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid -2A^4(s) - \delta \leq \operatorname{Re} z \leq s^2 + \delta, \quad |\operatorname{Im} z| \leq \delta\}$ функция $E_{1/2}(z; \mu)$ корней не имеет. А так как семейство функций $E_\rho(z; \mu)$ сходится к $E_{1/2}(z; \mu)$ при $\rho \rightarrow 1/2$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$ (в частности в прямоугольнике K_δ), то при всех значениях ρ достаточно близких к $1/2$, количество корней $E_\rho(z; \mu)$ и $E_{1/2}(z; \mu)$ в K_δ совпадает. Таким образом, количество корней функции $E_\rho(z; \mu)$, лежащих на луче $[-x_{n_0}^{1/\rho}, +\infty)$ не превосходит количества корней функции $E_{1/2}(z; \mu)$, лежащих в прямоугольнике K_1 , т. е. $O(1)$ при фиксированном значении μ и $\rho \rightarrow 1/2+$.

Изложенные соображения позволяют сделать следующий вывод. Теорема 6.1.4 будет полностью доказана, если

- 1) доказать знакопостоянство функции $F_\rho(x; \mu)$ при $x \geq R(\varepsilon)$;
- 2) на сторонах трапеций T_n , определенных в (6.7.6), вывести неравенство (6.7.7);
- 3) доказать оценку $|F'_\rho(z; \mu)/F_\rho(z; \mu)| \leq 2$ на сторонах прямоугольника $\Pi(\varepsilon)$.

Это будет осуществлено в следующем параграфе.

В заключение этого параграфа раскроем секрет выбора n_0 (или, что то же самое, величины $A(s)$). Величина $A(s)$ взята такой, что выполняется неравенство

$$|\omega_\rho(z; \mu)| \leq \frac{|z|^{-s-1/\rho-5/4}}{|\Gamma(\mu-1/\rho)|}, \quad \operatorname{Re} z \geq A^2(s), \quad |\operatorname{Im} z| \leq \operatorname{Re} z. \quad (6.7.8)$$

Докажем это неравенство в случае $\mu \leq 1$ ($s \geq 0$). Для $\mu \in (1, 3)$ доказательство аналогично. Предварительно заметим, что в силу тождества $\frac{1}{\Gamma(w)\Gamma(1-w)} = \frac{\sin(\pi w)}{\pi}$ и обозначений $\alpha = 2 - 1/\rho$, $s = 1 - \mu$ верно равенство

$$\frac{1}{\Gamma(\mu-1/\rho)} = \frac{\sin(\pi(\mu-1/\rho))}{\pi} \Gamma(s+2-\alpha). \quad (6.7.9)$$

Нетрудно также проверить, что неравенство

$$\left| \sin \left(\pi \left(\mu - \frac{2}{\rho} \right) \right) \right| \leq 2 \left| \sin \left(\pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right) \right| \quad (6.7.10)$$

выполняется как при $\mu \in \mathbb{Z}$ ($\forall \alpha \in (0, 1/2]$), так и при $\mu \notin \mathbb{Z}$ (при любом ρ , достаточно близком к $1/2$). Соотношения (6.7.3), (6.7.9), (6.7.10) вместе с ограничением $|z| \leq x\sqrt{2}$ дают соотношения

$$\begin{aligned} |\omega_\rho(z; \mu)| &\leq \frac{2^{s/2}\Gamma(s+4-2\alpha)}{\pi x^{s+2/\rho}} \cdot \frac{5}{2} \left| \sin \left(\pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right) \right| = \\ &= \frac{2.5 \cdot 2^{s/2}(s+3-2\alpha)(s+2-2\alpha)\Gamma(s+2-2\alpha)}{\pi x^{s+2/\rho}} \left| \sin \left(\pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right) \right| < \\ &< \frac{2^{2+s/2}(s+3)^2\Gamma(s+2-\alpha)}{\pi x^{s+2/\rho}} \left| \sin \left(\pi \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right) \right| = \frac{2^{2+s/2}(s+3)^2}{x^{s+2/\rho} \left| \Gamma \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right|} = \\ &= \frac{2^{2+s/2}(s+3)^2}{|z|^{s+2/\rho} \left| \Gamma \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right|} \left| \frac{z}{x} \right|^{s+2/\rho} \leq \frac{2^{s+4}(s+3)^2}{|z|^{s+2/\rho} \left| \Gamma \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right|} \equiv \frac{A(s)|z|^{-s-2/\rho}}{\left| \Gamma \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right) \right|}. \end{aligned}$$

А так как $|z| \geq A^2(s)$ и $1/\rho > 7/4$ (мы ограничиваемся значением ρ из интервала $1/2 < \rho < 4/7$, поскольку $\rho \rightarrow 1/2+$), то, заменив в последнем выражении $A(s)$ на $|z|^{1/2}$, приходим к (6.7.8).

Покажем, что такое же, как и (6.7.8), неравенство верно и для производной $\omega'_\rho(z; \mu)$, но в чуть меньшей области. А именно,

$$|\omega'_\rho(z; \mu)| \leq \frac{|z|^{-s-1/\rho-5/4}}{\left| \Gamma\left(\mu - \frac{1}{\rho}\right) \right|}, \quad \operatorname{Re} z \geq A^2(s) + 2, \quad |\operatorname{Im} z| \leq \operatorname{Re} z - 3. \quad (6.7.11)$$

Отметим сперва неравенство, которое непосредственно следует из определения $A(s)$:

$$2(s+4)A^{-2}(s) < \ln 2. \quad (6.7.12)$$

Далее воспользуемся тем, что если $z \in \mathbb{C}$, $R > 0$, функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна в круге

$$K = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - z| \leq R\} \quad \text{и} \quad \max_{\zeta \in K} |\varphi(\zeta)| = M,$$

то

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=R} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta \implies |\varphi'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Взяв $R = 2$, получим неравенство

$$|\omega'_\rho(z; \mu)| \leq \frac{1}{2} \max_{|\zeta-z|=2} |\omega_\rho(\zeta; \mu)|. \quad (6.7.13)$$

Из (6.7.8), (6.7.13), применив в заключительном переходе (6.7.12), находим, что

$$\begin{aligned} |\omega'_\rho(z; \mu)| &\leq \frac{1}{2} \frac{(|z| - 2)^{-s-1/\rho-5/4}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} = \frac{1}{2} \frac{|z|^{-s-1/\rho-5/4}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} \left(\frac{|z|}{|z| - 2} \right)^{s+1/\rho+5/4} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{|z|^{-s-1/\rho-5/4}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} \exp\left(\frac{2(s+1/\rho+5/4)}{|z| - 2}\right) \leq \frac{1}{2} \frac{|z|^{-s-1/\rho-5/4}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} \exp\left(\frac{2(s+4)}{A^2(s)}\right) < \frac{|z|^{-s-1/\rho-5/4}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

6.8. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 6.1.4

В этом и следующем параграфах применяем обозначение $v = \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)$.

Представление (6.7.2) показывает, что знакопостоянство функции $F_\rho(x; \mu)$ при $x \geq R(\varepsilon)$ следует из неравенства

$$2\rho \exp(-x/v) < \frac{x^{-s-1/\rho}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} - |\omega_\rho(x; \mu)|; \quad x \geq R(\varepsilon). \quad (6.8.1)$$

Отметим, что величина $\frac{1}{\Gamma(\mu - 1/\rho)} = \frac{1}{\Gamma(\mu - 2 + \alpha)}$ сохраняет постоянный знак при фиксированном $\mu \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых положительных α . Из (6.7.8) видно, что неравенство (6.8.1) можно заменить следующим более сильным и доказывать именно его:

$$2 \exp(-x/v) < \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{x^{-s-1/\rho}}{|\Gamma(\mu - 2 + \alpha)|}, \quad x \geq R(\varepsilon).$$

Если число μ не целое, то при $\rho \rightarrow 1/2+$ величина $\frac{1}{|\Gamma(\mu - 2 + \alpha)|}$ отделена от нуля. Это соображение сводит задачу к доказательству неравенства

$$Cx^{s+2} \exp(-x/v) < 1, \quad x \geq R(\varepsilon), \quad C = C(s), \quad (6.8.2)$$

когда параметр ε достаточно близок к нулю. Имеем соотношение

$$R(\varepsilon) \sim bv \ln v, \quad \varepsilon \rightarrow 0+, \quad (6.8.3)$$

функция $x^{s+2} \exp(-x/v)$ убывает на луче $x \geq (s+2)v$. Следовательно (если параметр ε мал), неравенство (6.8.2) достаточно доказать только при $x = R(\varepsilon)$. Напомним, что $b = s+2$ (в случае $\mu \in \mathbb{Z}$), справедливо соотношение

$$R(\varepsilon)/v = b(\ln v + 2 \ln \ln v) \Rightarrow \exp(-R(\varepsilon)/v) = v^{-b}(\ln v)^{-2b}.$$

Поэтому левая часть неравенства (6.8.2) при $x = R(\varepsilon)$ равна $CR^b(\varepsilon)v^{-b}(\ln v)^{-2b} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ ввиду (6.8.3), а значит, действительно меньше 1.

Если $\mu \in \mathbb{Z}$, то $|\Gamma(\mu - 2 + \alpha)| \asymp \alpha^{-1} \asymp v$, $\varepsilon \rightarrow 0+$, и требуется доказать неравенство

$$C_1 v x^{s+2} \exp(-x/v) < 1, \quad x \geq R(\varepsilon), \quad C_1 = C_1(s). \quad (6.8.4)$$

Как и в только что рассмотренном случае, достаточно доказать (6.8.4) при $x = R(\varepsilon)$. Но здесь $b = s+3$ и поэтому после увеличения левой части (6.8.4) (замены v на $R(\varepsilon)$) снова придем к неравенству $C_1 R^b(\varepsilon) \exp(-R(\varepsilon)/v) < 1$, которое было доказано выше.

Перейдем к доказательству неравенства (6.7.7). Как и выше, $x = \operatorname{Re} z$. Поскольку на прямых $\operatorname{Re} z = \pi(n - \gamma) \sec \theta$, $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, модуль функции $\cos(z \cos \theta + \pi \gamma)$ не меньше 1 и верны соотношения $2\rho > 1$, $-s - 1/\rho = \mu - 3 + \alpha < 0$ (параметр $\mu < 3$ фиксирован, $\alpha \rightarrow 0+$), $|z| \geq x$, то неравенство (6.7.7) с учетом (6.7.8) и границ для $\operatorname{Re} z$ может быть заменено следующим более сильным:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{x^{-s-1/\rho}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} < \exp\left(-\frac{x}{v}\right), \quad A^2(s) \leq x \leq R_1(\varepsilon). \quad (6.8.5)$$

Это неравенство обеспечивает выполнение (6.7.7) так же и на боковых сторонах трапеций, поскольку на них модуль косинуса превосходит 1 в силу оценок

$$|\cos(\xi + i\eta)| \geq |\operatorname{sh} \eta| \geq |\eta|, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(z \cos \pi \varepsilon) = x \cos(\pi \varepsilon) > x/2 \geq A^2(0)/2 \geq 144^2/2.$$

Доказательство (6.8.5) начнем для значения параметра $\mu \in (2, 3)$, тогда $b = 3 - \mu \in (0, 1)$. В этой ситуации, если параметр ρ близок к $1/2$ справа, имеем, что

$$0 < \mu - 1/\rho < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\Gamma(\mu - 1/\rho)} < 1.$$

А так как $x \geq 4A^2(0)b^{-2} = 288^2 b^{-2}$, то $1 + 1/x < \exp(10^{-4}b^2)$, а значит, когда $\mu \in (2, 3)$, неравенство (6.8.5) можно заменить более сильным, но более простым

$$\exp(10^{-4}b^2)x^{\alpha-b} \exp(x/v) < 1 \Leftrightarrow 10^{-4}b^2 + (\alpha - b) \ln x + x/v < 0, \quad A^2(s) \leq x \leq R_1(\varepsilon). \quad (6.8.6)$$

Несложно проверяется выпуклость вниз функции $-b \ln x + x/v$, а также справедливость неравенства

$$\alpha \ln x \leq \alpha \ln R_1(\varepsilon) \leq 4v^{-1} \ln v \quad \text{при} \quad v > b \quad (6.8.7)$$

(напомним, что $R_1(\varepsilon) = bv \ln v$, $v = \operatorname{cosec}(\pi \varepsilon)$). Как известно, выпуклая вниз функция достигает максимума на отрезке в одном из концов этого отрезка. Сказанное убеждает в том, что для доказательства (6.8.6) достаточно проверить истинность двух неравенств:

$$10^{-4}b^2 + 4v^{-1} \ln v - 2b \ln A(s) + A^2(s)/v < 0, \quad (6.8.8)$$

$$10^{-4}b^2 + 4v^{-1} \ln v - b \ln R_1(\varepsilon) + R_1(\varepsilon)/v < 0. \quad (6.8.9)$$

Поскольку $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (4v^{-1} \ln v + A^2(s)/v) = 0$, то при всех достаточно малых ε левая часть (6.8.8) меньше, чем $10^{-3}b^2 - 2b \ln A(s) < 10^{-3}b^2 - 2b \ln A(0) < 10^{-3}b^2 - 8b < 0$. Таким образом, неравенство (6.8.8) выполняется. Имеем далее соотношение $-b \ln R_1(\varepsilon) + R_1(\varepsilon)/v = -b \ln(b \ln v) \rightarrow -\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, а значит, неравенство (6.8.9) также выполняется.

Докажем (6.8.5) в случае $\mu < 2$, $\mu \in \mathbb{Z}$. Из (6.7.9) находим неравенство

$$\frac{1}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} \leq \frac{\Gamma(s + 2 - \alpha)}{\pi}.$$

Отсюда видно, что неравенство (6.8.5) можно заменить следующим более сильным неравенством:

$$x^{\alpha-b} \Gamma(b - \alpha) \exp(x/v) < \pi x/(x + 1), \quad A^2(s) \leq x \leq R_1(\varepsilon). \quad (6.8.10)$$

Учитывая нижнюю границу для x и оценку сверху (6.8.7) для x^α , получаем усиление (и упрощение) неравенства (6.8.10), которое и докажем:

$$x^{-b} \exp(x/v) < e, \quad 1 < b < 2, \quad x^{-b} \Gamma(b) \exp(x/v) < e, \quad b > 2, \quad A^2(s) \leq x \leq R_1(\varepsilon). \quad (6.8.11)$$

Прологарифмировав (6.8.11) и воспользовавшись выпуклостью функции $x/v - b \ln x$, придем к задаче доказательства следующих неравенств:

$$-b \ln x + x/v < 1, \quad 1 < b < 2, \quad -b \ln x + \ln \Gamma(b) + x/v < 1, \quad b > 2, \quad x = A^2(s), \quad x = R_1(\varepsilon). \quad (6.8.12)$$

Как отмечалось выше, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-b \ln R_1(\varepsilon) + R_1(\varepsilon)/v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} -b \ln(b \ln v) = -\infty$ вне зависимости от значения $b > 0$. Поэтому неравенства (6.8.12) в точке $x = R_1(\varepsilon)$ при всех достаточно малых положительных ε выполняются. При $x = A^2(s)$ первое неравенство (6.8.12), когда ε мало, очевидно: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} A^2(s)/v = 0$, $-b \ln x < 0$. Покажем справедливость неравенства $-b \ln A^2(s) + \ln \Gamma(b) < 0$; этого будет достаточно для доказательства второго неравенства при $x = A^2(s)$. При $b > 2$ согласно выбору $A(s)$ имеем неравенство $A^2(s) > 4^b$. Поэтому $-b \ln A^2(s) + \ln \Gamma(b) < -b^2 + \ln \Gamma(b) = -b^2 + b \ln b = b(-b + \ln b) \leq -b$. Таким образом, неравенства (6.8.12) полностью доказаны.

Рассмотрим целые значения $\mu \leq 2$. Тогда $|\sin(\pi(\mu - 1/\rho))| = |\sin(\pi(\mu - 2 + \alpha))| = \sin(\pi\alpha) \leq \pi\alpha$ и из (6.7.9) находим неравенство

$$\frac{1}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} \leq \alpha \Gamma(s + 2 - \alpha). \quad (6.8.13)$$

В данном случае $b = s + 3$ и потому согласно (6.8.13) неравенство (6.8.5) можно заменить следующим:

$$(1 + 1/x) \alpha \Gamma(b - 1 - \alpha) x^{1+\alpha-b} \exp(x/v) < 1, \quad A^2(s) \leq x \leq R_1(\varepsilon). \quad (6.8.14)$$

Прологарифмировав (6.8.14), применив (6.8.7), оценку $\ln(1 + 1/x) < 1/x$ и воспользовавшись выпуклостью вниз функции $(1 - b) \ln x + x/v$, сводим задачу к доказательству неравенства

$$1/x + 4v^{-1} \ln v + \ln \alpha + \ln \Gamma(b - 1 - \alpha) + (1 - b) \ln x + x/v < 0; \quad (6.8.15)$$

$$x = A^2(s), \quad x = R_1(\varepsilon), \quad b \in \mathbb{Z}, \quad b \geq 2.$$

При $x = A^2(s)$ справедливость неравенства (6.8.15) при всех достаточно малых положительных ε очевидна, поскольку его левая часть стремится к $-\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ за счет слагаемого $\ln \alpha$. При $x = R_1(\varepsilon)$ имеем выражение

$$\ln \alpha + (1 - b) \ln x + x/v = -\ln v + O(1) + (1 - b) \ln(v \ln v) + b \ln v = (1 - b) \ln \ln v + O(1).$$

Это выражение стремится к $-\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, а остальные слагаемые левой части (6.8.15) при $x = R_1(\varepsilon)$ и $\varepsilon \rightarrow 0+$ ограничены. Неравенство (6.8.15) доказано.

Перейдем к заключительной части доказательства теоремы 6.1.4 — оценке модуля логарифмической производной функции $F_\rho(z; \mu)$ на сторонах прямоугольника

$$\Pi(\varepsilon): |F'_\rho(z; \mu)/F_\rho(z; \mu)| \leq 2. \text{ Определим}$$

$$\Phi_\rho(z; \mu) = 2\rho \exp(-z \sin \pi\varepsilon) \cos(z \cos(\pi\varepsilon) + \pi\rho s).$$

Тогда

$$F_\rho(z; \mu) = \Phi_\rho(z; \mu) + \frac{z^{-s-1/\rho}}{\Gamma(\mu - 1/\rho)} + \omega_\rho(z; \mu), \quad F'_\rho(z; \mu) = \Phi'_\rho(z; \mu) - \frac{(s + 1/\rho)z^{-s-1/\rho-1}}{\Gamma(\mu - 1/\rho)} + \omega'_\rho(z; \mu),$$

$$\Phi'_\rho(z; \mu) = -2\rho \exp(-z \sin \pi\varepsilon) \sin(z \cos(\pi\varepsilon) + \pi\rho s + \pi\varepsilon).$$

План дальнейших действий таков. На левой вертикальной стороне $\operatorname{Re} z = x_{n(\varepsilon)}$ прямоугольника $\Pi(\varepsilon)$ доказывается неравенство

$$\frac{|z|^{-s-1/\rho}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} + |\omega_\rho(z; \mu)| + |\omega'_\rho(z; \mu)| < \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{x}{v}\right). \quad (6.8.16)$$

Арифметическая же природа последовательности x_n такова, что на прямых $\operatorname{Re} z = x_n$ имеем неравенство

$$|\Phi'_\rho(z; \mu)| \leq |\Phi_\rho(z; \mu)| = \exp(-x/v) \operatorname{ch}(y \cos(\pi\varepsilon)), \quad z = x + iy.$$

Отсюда и из (6.8.16) сразу следуют неравенства

$$|F_\rho(z; \mu)| \geq (2/3)|\Phi_\rho(z; \mu)|, \quad |F'_\rho(z; \mu)| \leq (4/3)|\Phi_\rho(z; \mu)|,$$

которые дают требуемую оценку сверху модуля логарифмической производной. Похожее на (6.8.16) неравенство

$$\frac{|z|^{-s-1/\rho}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} + |\omega_\rho(z; \mu)| + |\omega'_\rho(z; \mu)| < \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{x}{v}\right) \operatorname{sh}(v \cos \pi\varepsilon) \quad (6.8.17)$$

выводится на горизонтальных сторонах $x_{n(\varepsilon)} \leq \operatorname{Re} z \leq x_{m(\varepsilon)}$, $\operatorname{Im} z = \pm v$ прямоугольника $\Pi(\varepsilon)$. Из (6.8.17) так же как и выше, учитывая оценки

$$|\Phi_\rho(z; \mu)| \geq 2\rho \exp(-x/v) |\operatorname{sh}(y \cos \pi\varepsilon)|, \quad |\Phi'_\rho(z; \mu)| \leq |\operatorname{cth}(y \cos \pi\varepsilon) \Phi_\rho(z; \mu)| \quad (6.8.18)$$

($z = x + iy$), выводим неравенство $|F'_\rho(z; \mu)/F_\rho(z; \mu)| \leq 2$ на горизонтальных сторонах $\Pi(\varepsilon)$ (если $0 < \varepsilon \leq 1/6$, то $\operatorname{cth}(v \cos \pi\varepsilon) = \operatorname{cth}(\operatorname{ctg} \pi\varepsilon) \leq \operatorname{cth} \sqrt{3} < 1.1$).

Оценка сверху модуля логарифмической производной функции F_ρ на правой вертикальной стороне $l_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z = x_{m(\varepsilon)}, |\operatorname{Im} z| \leq v\}$ прямоугольника $\Pi(\varepsilon)$ осуществляется на основе иных соображений. Обозначим $\frac{z^{-s-1/\rho}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|}$ через $Z_\rho(z; \mu)$. На $\mathbb{R}_+$ функция $Z_\rho(z; \mu)$ действительна и ее знак равен знаку $\frac{1}{\Gamma(\mu - 1/\rho)}$, который обозначим через $\delta \in \{-1, 1\}$. Напомним еще раз, что число $\mu < 3$ фиксировано, $\alpha = 2 - 1/\rho \rightarrow 0+$ и поэтому знак $\frac{1}{\Gamma(\mu - 1/\rho)} = \frac{1}{\Gamma(\mu - 2 + \alpha)}$ (когда параметр α положителен и достаточно мал) постоянен и равен 1, если целая часть μ четна, и -1 в противном случае. Функция $\Phi_\rho(z; \mu)$ вещественна и знакопостоянна на вертикальных прямых $x_n + iy$, $n \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn} \Phi_\rho(x_n + iy; \mu) = (-1)^n$. Остаток от деления $m(\varepsilon)$ на 2 как раз таков, что $\operatorname{sgn} \Phi_\rho(x_{m(\varepsilon)} + iy; \mu) = \delta$. Таким образом,

$$|\Phi_\rho(z; \mu)| = \delta |\Phi_\rho(z; \mu)|, \quad z \in l_\varepsilon. \quad (6.8.19)$$

Когда переменная z «движется» вверх или вниз от $\mathbb{R}$ по вертикали, функция $Z_\rho(z; \mu)$, конечно, перестает быть действительной, но все же $|\operatorname{Re} Z_\rho(z; \mu)|$ незначительно меньше $|Z_\rho(z; \mu)|$, пока $\arg z$ невелик. При $z \in l_\varepsilon$ имеем соотношение $|\arg z| \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{x_{m(\varepsilon)}}\right) = O\left(\frac{1}{\ln v}\right)$. Поэтому

$$\operatorname{Re} Z_\rho(z; \mu) = \delta \frac{|z|^{-s-1/\rho}}{|\Gamma(\mu - 1/\rho)|} (1 + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0+, \quad \text{равномерно по } z \in l_\varepsilon. \quad (6.8.20)$$

Соотношения (6.8.19), (6.8.20) и (6.7.8) влекут за собой асимптотическое равенство

$$|\operatorname{Re} F_\rho(z; \mu)| = |\Phi_\rho(z; \mu)| + |Z_\rho(z; \mu)| (1 + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0+, \quad \text{равномерно по } z \in l_\varepsilon.$$

А так как $|Z'_\rho(z; \mu)| + |\omega'_\rho(z; \mu)| = o(|Z_\rho(z; \mu)|)$, $\varepsilon \rightarrow 0+$, равномерно по $z \in l_\varepsilon$ и при $z \in l_\varepsilon$ имеем неравенство $|\Phi'_\rho(z; \mu)| \leq |\Phi_\rho(z; \mu)|$, то приходим к требуемой оценке $|F'_\rho/F_\rho|$ на стороне l_ε .

Выведем неравенства (6.8.16), (6.8.17). Поскольку модули остаточного члена ω_ρ и его производной по порядку меньше модуля функции Z_ρ , $|z| \geq x$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} R^\alpha(\varepsilon) = 1$, то достаточно доказать неравенства

$$\frac{4x^{-s-2}}{|\Gamma(\mu - 2 + \alpha)|} \exp\left(\frac{x}{v}\right) < 1, \quad x = x_{n(\varepsilon)},$$

$$\frac{x^{-s-2}}{|\Gamma(\mu - 2 + \alpha)|} \exp\left(\frac{x}{v}\right) < 0.1 \exp(\operatorname{ctg} \pi\varepsilon), \quad x_{n(\varepsilon)} \leq x \leq x_{m(\varepsilon)},$$

которые после логарифмирования принимают вид

$$-b \ln x_{n(\varepsilon)} + x_{n(\varepsilon)}/v < C, \quad -b \ln x + x/v < C + \operatorname{ctg}(\pi\varepsilon), \quad x_{n(\varepsilon)} \leq x \leq x_{m(\varepsilon)}, \quad \mu \in \mathbb{Z},$$

$$-\ln v + (1-b) \ln x_{n(\varepsilon)} + x_{n(\varepsilon)}/v < C, \quad -\ln v + (1-b) \ln x + x/v < C + \operatorname{ctg} \pi\varepsilon,$$

$$x_{n(\varepsilon)} \leq x \leq x_{m(\varepsilon)}, \quad \mu \in \mathbb{Z}.$$

Справедливость этих неравенств непосредственно проверяется тем же способом, которым доказывались аналогичные неравенства. Доказательство теоремы 6.1.4 завершено.

6.9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1) ТЕОРЕМЫ 6.1.5

В связи с убыванием функции $f(\rho)$ из теоремы 6.1.1 достаточно проверить отсутствие с. з. при $\alpha = 0.45$, т. е. положительность на $\mathbb{R}$ функции $E_\rho(z; 2)$, $\rho = (2 - \alpha)^{-1} = 1/1.55 = 20/31$. Так как при $z \geq -\Gamma(4 - \alpha)$ корней нет, то остается доказать положительность функции $F_\rho(x; 2)$ при $x \geq (\Gamma(3.35))^\rho$. Но $(\Gamma(3.35))^{20/31} > 2\pi/3$ и поэтому доказываем положительность функции $F_{\frac{20}{31}}(x; 2)$ при $x \geq \frac{2\pi}{3}$.

Взяв в теореме 1.1.3 $m = 1$, $\mu = 2$, $\rho = 20/31$, обозначив $F(x) = F_{\frac{20}{31}}(x; 2)$ и проделав необходимые тождественные преобразования, получим представление

$$F(x) = \frac{40}{31} \exp \left[-x \sin \left(\frac{9\pi}{62} \right) \right] \sin \left[x \cos \left(\frac{9\pi}{62} \right) - \frac{9\pi}{62} \right] + \frac{x^{-0.55}}{\Gamma(0.45)} - \omega(x), \quad (6.9.1)$$

в котором

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi} \left[I_1(x) \sin \left(\frac{\pi}{10} \right) + I_2(x) \cos \left(\frac{\pi}{20} \right) \right], \quad 0 < I_k(x) < \frac{\Gamma(2.1)}{kx^{2.1}}, \quad k = 1, 2. \quad (6.9.2)$$

Представление (6.9.1), численные оценки величин из (6.9.2), и оценка $1/\Gamma(0.45) > 0.508$ приводят к неравенству

$$F(x) > \frac{40}{31} \exp \left[-x \sin \left(\frac{9\pi}{62} \right) \right] \sin \left[x \cos \left(\frac{9\pi}{62} \right) - \frac{9\pi}{62} \right] + 0.508x^{-0.55} - 0.27x^{-2.1}. \quad (6.9.3)$$

Из (6.9.3) сразу следует положительность $F(x)$, если $\sin \left[x \cos \left(\frac{9\pi}{62} \right) - \frac{9\pi}{62} \right] > 0$, $x > 1$. Эти неравенства выполняются при $2\pi/3 \leq x \leq 4$, поэтому $F(x) > 0$ на этом отрезке.

Если $4 < x \leq 4.5$, то $\sin \left(x \cos \left(\frac{9\pi}{62} \right) - \frac{9\pi}{62} \right) > -\frac{1}{2}$. Отсюда и из (6.9.3), учитывая численную оценку $\sin \left(\frac{9\pi}{62} \right) > 0.44$, получаем неравенство

$$F(x) > 0.508x^{-0.55} - 0.27x^{-2.1} - (20/31) \exp(-0.44x).$$

А так как

$$e^{-t} < 1/(et) \Rightarrow (40/31) \exp(-0.44x) < 20/(31 \cdot 0.44ex) < 0.6/x,$$

то при $x \in (4, 4.5]$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} F(x) &> 0.5x^{-0.55} - 0.27x^{-2.1} - 0.6x^{-1} = 0.5x^{-0.55}(1 - 0.54x^{-1.55} - 1.2x^{-0.45}) > \\ &> 0.5x^{-0.55}(1 - 0.54 \cdot 4^{-1.55} - 1.2 \cdot 4^{-0.45}) > 0, \end{aligned}$$

поскольку $1 - 0.54 \cdot 4^{-1.55} - 1.2 \cdot 4^{-0.45} > 0.2$.

Наконец, при $x > 4.5$ имеем соотношение

$$\begin{aligned} F(x) &> 0.508x^{-0.55} - 0.27x^{-2.1} - (40/31) \exp(-0.44x) = \\ &= 0.508x^{-0.55} [1 - (0.27/0.508)x^{-1.55} - (40/(0.508 \cdot 31))x^{0.55}e^{-0.44x}]. \end{aligned}$$

Отсюда и из численных оценок $0.27/0.508 < 0.532$, $40/(0.508 \cdot 31) < 2.55$ находим ($x > 4.5$), что

$$F(x) > 0.508x^{-0.55}G(x), \quad \text{где} \quad G(x) = 1 - 0.532x^{-1.55} - 2.55x^{0.55}e^{-0.44x}.$$

Ввиду возрастания $G(x)$ на луче $x > 4.5$ верна оценка

$$G(x) > 1 - 0.532 \cdot (4.5)^{-1.55} - 2.55 \cdot (4.5)^{0.55} e^{-1.98} > 0.1,$$

что и доказывает положительность функции F . Утверждение 1) теоремы 6.1.5 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматлит, 1961.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье. — М.: Наука, 1967.
3. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. — М.: Мир, 1965.
4. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
5. *Евграфов М. Е.* Асимптотические оценки и целые функции — М.: Наука, 1979.
6. *Левин Б. Я.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа// Матем. физика и функц. анал., ФТИНТ АН УССР. — 1969. — 1. — С. 136–146.
7. *Левин Б. Я.* Целые функции (курс лекций). — М.: МГУ, 1971.
8. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, Т. 1. — М.: Наука, 1967.
9. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций — М.: Наука, 1978.
10. *Нахушев А. М.* Задача Штурма—Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными произвольными в младших членах// ДАН СССР. — 1977. — 234, № 2. — С. 308–311.
11. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. — М.: Наука, 1978.
12. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа, Ч. 1. — М.: Наука, 1978.
13. *Попов А. Ю.* О спектральных значениях одной краевой задачи и нулях функции Миттаг-Леффлера// Дифф. уравн. — 2002. — 38, № 5. — С. 611–621.
14. *Попов А. Ю.* О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной// Фунд. и прикл. мат. — 2006. — 12, № 6, С. 137–155.
15. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды — М.: Физматлит, 2003.
16. *Псху А. В.* О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера// Мат. заметки. — 2005. — 77, № 4. — С. 592–599.
17. *Седлецкий А. М.* Базисы из экспонент в пространствах E_p на выпуклых многоугольниках// Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1978. — 42, №5. — С. 1101–1119.
18. *Седлецкий А. М.* Асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг-Леффлера// Anal. Math. — 1994. — 20. — С. 117–132.
19. *Седлецкий А. М.* О нулях функции типа Миттаг-Леффлера// Мат. заметки. — 2000. — 68, №5. — С. 710–724.
20. *Седлецкий А. М.* Неасимптотические свойства нулей функции типа Миттаг-Леффлера// Мат. заметки. — 2004. — 75, №3. — С. 405–420.
21. *Седлецкий А. М.* О нулях преобразований Лапласа// Мат. заметки. — 2004. — 76, №6. — С. 883–892.
22. *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. — М.: Физматлит, 2005.
23. *Седлецкий А. М.* Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции// Мат. заметки. — 2007. — 82, №2. — С. 262–271.
24. *Седлецкий А. М.* Асимптотика нулей функции типа Миттаг-Леффлера порядка $1/2$ // Вестн. МГУ Сер. матем. и мех. — 2007. — № 1. — С. 22–28.
25. *Седлецкий А. М.* Локализация малых нулей финитных синус- и косинус-преобразований Фурье// Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Мат., мех. — 2009. — № 4. — С. 35–41.
26. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции — М.: Наука, 1985.
27. *Слейтер Л.* Вырожденные гипергеометрические функции. — М.: ВЦ АН СССР, 1966.
28. *Тихонов И. В.* Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений. Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. — М.: МГУ, 2008.
29. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
30. *Харди Г. Г., Рогозинский В. В.* Ряды Фурье. — М.: Физматгиз, 1959.
31. *Цветков Г. Е.* О корнях функций Whittaker'a// ДАН СССР. — 1941. — 32, №1. — С. 10–12.
32. *Цветков Г. Е.* О комплексных корнях функции Whittaker'a// ДАН СССР. — 1941. — 33, №4. — С. 290–291.
33. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. — М.: Наука, 1967.

34. Юхименко А. А. Об одном классе функций типа синуса// Мат. заметки. — 2008. — 83, №6. — С. 933–940.
35. Янке Э., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.
36. Anh V. V. and Leonenko N. N. Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data// J. Statist. Phys. — 2001. — 104, № 5-6. — С. 1349–1387.
37. Beghin L. and Orsingher E. Fractional Poisson processes and related planar random motions// Electron. J. Probab. — 2009. — 14, № 61. — С. 1790–1827.
38. Mikusinski J. G. Sur les fonctions $k_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{n+k\nu}}{(n+k\nu)!} (k = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots, k-1)$ // Ann. Soc. Polon. Math. — 1948. — С. 46–51.
39. Mittag-Leffler M. G. Sur la fonction nouvelle $E_{1/\alpha}(x)$ // C. R. Acad. Sci., Paris (2). — 1903. — 137. — С. 554–558.
40. Ostrovskii I. V., Peresvolkova I. N. Nonasymptotic results on distribution of zeros of the function $E_{\rho}(z; \mu)$ // Anal. Math. — 1997. — 23. — С. 283–296.
41. Polya G. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen// Math. Z. — 1918. — 2. — С. 352–383.
42. Polya G. Bemerkung über die Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_{1/\alpha}(x)$ // Tôhoku Math. J. — 1921. — 19. — С. 241–248.
43. Sedletskii A. M. On zeros of Laplace transforms of finite measure// Integral Transforms Spec. Funct. — 1993. — 1. — С. 51–59.
44. Sedletskii A. M. Addition to Polya's theorem on zeros of Fourier sine-transforms// Integral Transforms Spec. Funct. — 2000. — 9. — С. 65–68.
45. Wiman A. Über die Nullstellen der Funktionalen $E_{\alpha}(z)$ // Acta Math. — 1905. — 29. — С. 217–234.
46. Wright E. M. On the coefficient of power series having exponential singularities// J. London Math. Soc. — 1933. — 8, № 29. — С. 71–79.
47. Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one// Quart. J. Math., Oxford Ser. — 1940. — 11. — С. 36–48.

Антон Юрьевич Попов, Анатолий Мечиславович Седлецкий

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119992, Москва, Ленинские горы

E-mail: sedlet@mail.ru