С. В. Конягин, А. Ю. Попов, О восстановлении функций по значениям n-х разностей с шагом $1/n$, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2011, том 17, номер 3, 178–185

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 3 2011

УДК 517.537, 517.962

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ПО ЗНАЧЕНИЯМ n-Х РАЗНОСТЕЙ С ШАГОМ $1/n$ [1]

С. В. Конягин, А. Ю. Попов

В статье решена задача о восстановлении функций, аналитических в специального вида областях, содержащих отрезок $[0,1]$, по значениям n-х разностей с шагом $1/n$, взятых в точке 0.

Ключевые слова: аналитическая функция, базис в пространстве аналитических функций.

S. V. Konyagin, A. Yu. Popov. On the reconstruction of functions by the values of the nth differences with step $1/n$.

We study the problem of the reconstruction of functions by the values of the nth differences with step $1/n$ taken at the point 0. The problem is solved for functions that are analytic in special domains containing the interval $[0,1]$.

Keywords: analytic function, basis in the space of analytic functions.

В работе рассматривается задача о восстановлении функции f, аналитической в некоторой окрестности отрезка $[0,1]$, по значениям n-х разностей с шагом $1/n$, взятых в точке 0:

$$\ell_n(f) = \Delta^n_{1/n} f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big), \qquad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Первоначальная постановка задачи, принадлежащая Л. Брутману и Е. Пассоу [4], такова. Верно ли, что если $f \in C[0,1]$, то равенства

$$\ell_n(f) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \tag{2}$$

влекут за собой тождество

$$f(x) \equiv 0, \qquad 0 \le x \le 1? \tag{3}$$

Ответ на этот вопрос пока не известен даже для $f \in C^\infty[0,1]$. Б. Боянов доказал (устное сообщение) справедливость импликации (2)$\Rightarrow$(3) в предположении аналитичности функции f в эллипсе

$$\Big\{ z = x + iy\colon \quad \frac{(x-0.5)^2}{(17/16)^2} + \frac{y^2}{(15/16)^2} < 1 \Big\}.$$

Мы улучшаем этот результат, показывая, что для положительного ответа на вопрос Л. Брутмана и Е. Пассоу достаточно потребовать аналитичности функции f в некоторой окрестности круга $K_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-0.5| \le 0.5\}$ или даже эллипса $K_2 = \{z = x+iy\colon\ 4(x-0.5)^2 + 9y^2 \le 1\}$. Весьма вероятно, что импликация (2)$\Rightarrow$(3) верна для функций, аналитических всего лишь в какой-нибудь сколь угодно малой окрестности отрезка $[0,1]$, но доказать это мы не можем.

Нетрудно убедиться в том, что система линейных функционалов (1) обладает биортогональной системой полиномов $\{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$, $\deg P_n = n$, т. е. такой, что $\ell_n(P_k) = \delta_{n,k}$, где $\delta_{n,k}$ —

[1] Исследования С. В. Конягина поддержаны грантом РФФИ (проект 11-01-00329). Исследования А. Ю. Попова — грантом РФФИ (проект 09-01-00225) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-7322.2010.1).

символ Кронекера. Высказанное утверждение является общим фактом, верным для произвольной системы линейных функционалов $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенных на пространстве всех многочленов, и таких, что

$$L_n(z^k) = 0 \quad \forall k < n, \qquad L_n(z^n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Действительно, поскольку $L_0(\mathbf{1}) \neq 0$, то в качестве P_0 берем константу $c_0 = 1/L_0(\mathbf{1})$. По условию $L_n(c_0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Теперь предположим, что для $m \in \mathbb{N}_0$ уже построен набор $\{P_k(z)\}_{k=0}^{m}$ многочленов таких, что $\deg P_k = k$, $L_n(P_k) = \delta_{n,k}$. Тогда полагаем

$$P_{m+1}(z) = \frac{z^{m+1} - \sum\limits_{k=0}^{m} L_k(z^{m+1}) P_k(z)}{L_{m+1}(z^{m+1})}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) сразу видно, что $L_n(P_{m+1}) = 0$ при $n > m+1$ и $L_{m+1}(P_{m+1}) = 1$. При $n \leq m$ ввиду биортогональности построенных многочленов системе функционалов $\{L_n\}$

$$L_n(P_{m+1}) = \frac{L_n(z^{m+1}) - \sum\limits_{k=0}^{m} L_k(z^{m+1}) L_n(P_k(z))}{L_{m+1}(z^{m+1})} = \frac{L_n(z^{m+1}) - \sum\limits_{k=0}^{m} \delta_{n,k} L_k(z^{m+1})}{L_{m+1}(z^{m+1})} = 0$$

(по свойству символа Кронекера $\sum_{k=0}^{m} \delta_{n,k} L_k(z^{m+1}) = L_n(z^{m+1})$ при всех $n \leq m$). Таким образом, для системы многочленов, задаваемой рекуррентными формулами (5), имеем

$$L_n(P_k) = \delta_{n,k} \quad \text{для всех} \quad n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Мы решаем задачу о разложении функции f в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n(f) P_n(z) \tag{6}$$

по полиномам, биортогональным системе функционалов (1). Перед тем как сформулировать результат, введем несколько обозначений. Положим

$$W(\zeta) = (\zeta - 1)^{-1} \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta} \right)^{\zeta} \equiv (\zeta - 1)^{-1} \exp\left(\zeta \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta} \right), \qquad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,1].$$

Поскольку отображение $\xi = (\zeta - 1)/\zeta$ переводит $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, то мы определяем $\ln((\zeta-1)/\zeta) = \ln \xi$ как главную ветвь логарифма, делая разрез по лучу $(-\infty, 0]$. Этим функция $W(\zeta)$ корректно определена и, как легко видеть, голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [0,1]$. Имеем

$$\lim_{\zeta \to 1} W(\zeta) = \lim_{\zeta \to 0} W(\zeta) = 1, \qquad W(\infty) = 0.$$

Через D_R, $0 \leq R \leq 1$, обозначим область в $\mathbb{C}$, являющуюся дополнением к компакту на сфере Римана $\{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : |W(\zeta)| \leq R\}$. Очевидно, что $D_0 = \mathbb{C}$ и области D_R убывают по R в смысле вложения.

Несложно доказывается

Лемма 1. *При любом $R \in [0,1]$ область D_R является звездообразной относительно точки $\zeta = 0.5$ и имеет аналитическую границу. Если $0 < R_1 < R_2 \leq 1$, то замыкание D_{R_2} лежит в D_{R_1}. Область D_1 содержится как в круге K_1, так и в эллипсе K_2, границы которых имеют с границей D_1 только две общие точки $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$.*

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Если $R \in [0,1)$, то любая функция f, аналитическая в D_R, разлагается в ряд* (6)*, равномерно сходящийся к ней на любом компакте внутри D_R.*

Следствие 1. *Если функция f аналитична в какой-нибудь окрестности $\overline{D}_1$, то она разлагается в ряд* (6)*, равномерно сходящийся в $\overline{D}_1$ и, в частности, на* $[0,1]$.

Следствие 1 вместе с леммой 1 влечет за собой усиление цитированного результата Б. Боянова, сформулированного в начале статьи.

У нас есть основания предполагать, что следствие 1 является почти окончательным результатом. По нашему мнению, всякий равномерно сходящийся на $[0,1]$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$ равномерно сходится также на любом компакте внутри D_1, а значит, его сумма голоморфна в D_1. Однако доказать это мы не умеем.

Следствие 2. *Для функций f, аналитических в некоторой окрестности $\overline{D}_1$, справедлива импликация* (2)$\Rightarrow$(3).

Замечание. В данной задаче интерполирования функций конечными разностями произведение шага разности на ее порядок постоянно. Если рассматривать более общие последовательности разностей $\Delta_{h_n}^n f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(kh_n)$, где $h_n = O(1/n)$, то аналог следствия 2 не будет верен даже для целых функций конечного экспоненциального типа. Несложно проверить, что для функции $g(z) = \sin(2\pi z)$ справедливы равенства $\Delta_{1/n}^n g(0) = 0$, если n четно; $\Delta_{1/(2n)}^n g(0) = 0$, если n нечетно. Таким образом, из равенства нулю всех конечных разностей n-го порядка ($n \in \mathbb{N}_0$) функции g, взятых в точке 0, шаг которых равен то $1/n$, то $1/(2n)$, вовсе не следует, что сама функция g является тождественным нулем, даже если она целая.

Перед доказательством теоремы проведем подготовительную работу. Переформулируем теорему в терминах базисности некоторых систем функций. Это позволит применить развитый аппарат теории базисов в пространствах аналитических функций. Напомним сперва несколько фундаментальных фактов из теории таких пространств.

Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$ (необязательно ограниченная, в частности, случай $D = \mathbb{C}$ не исключается). Обозначим $A(D)$ пространство функций, аналитических в области D, в котором задана стандартная топология. Под сказанным понимается следующее. Пусть $F = \{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — какая-либо система компактов в $\mathbb{C}$, являющихся замыканием своей внутренности, такая что 1) $F_n \subset \operatorname{int} F_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, 2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = D$. Через $AC(F_n)$ обозначим (банахово) пространство функций, непрерывных на F_n и голоморфных внутри F_n, с нормой $\|f\|_{F_n} = \max\{|f(z)|\colon z \in F_n\}$. Проективный предел пространств $AC(F_n)$ и будет $A(D)$. Доказано [1, гл. 3], что заданная таким способом топология в $A(D)$ не зависит от выбора системы F, обладающей перечисленными свойствами. Пространство $A^*(D)$ всех линейных непрерывных функционалов на $A(D)$ с топологией равномерной сходимости по системе ограниченных в $A(D)$ множеств (необходимые определения см. в [1, гл. 3]), как обычно, отождествляется с пространством всех функций $\gamma(z)$, аналитических в некоторой окрестности ∞, $\gamma(\infty) = 0$, и допускающих аналитическое продолжение в некоторую окрестность замкнутого множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ или, что то же самое, в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_n$ для некоторого $n = n(\gamma)$. Иначе говоря, $A^*(D)$ — индуктивный предел топологических пространств $\{A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Мы пишем A_0 вместо A в знак того, что берутся функции из $A(\overline{\mathbb{C}} \setminus F_n)$, обращающиеся в нуль на бесконечности. Пространство функций, аналитических в односвязной области, мы уже определили. Здесь, правда, области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_n$ лежат на сфере Римана, но, как легко понять, никаких трудностей это не привносит. При таком отождествлении действие функционала $\gamma \in A^*(D) = A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D)$ на функцию $f \in A(D)$ задается формулой

$$\langle f, \gamma \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\gamma} f(\zeta)\gamma(\zeta)\, d\zeta. \tag{7}$$

Интеграл в (7) берется по какой-либо простой замкнутой спрямляемой кривой, лежащей одновременно в D и в области голоморфности функции γ. При определенных указанным способом топологиях в $A(D)$ и в $A^*(D) = A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D)$ эти пространства являются рефлексивными, то есть сопряженными друг к другу. Мы напомнили фрагменты известной теории, изложенные в [1, гл. 3].

Нетрудно понять, что теорема 1 может быть записана в следующей эквивалентной форме.

Теорема 2. *Система полиномов* $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, *биортогональная к системе функционалов* (1), *образует базис в каждом из пространств* $A(D_R)$, $0 \le R < 1$.

А так как в рефлексивном пространстве Фреше X базисность какой-либо системы его элементов равносильна базисности биортогональной к ней системы в X^* [2, гл. 6], то приходим к следующему предложению, равносильному теореме 1.

Теорема 3. *Система функционалов* (1) *образует базис в каждом из пространств* $A^*(D_R) = A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_R)$, $0 \le R < 1$.

Пока эффект от этих переформулировок не ощущается. Но если найти, какими функциями γ_n, аналитическими в окрестности бесконечно удаленной точки, задаются рассматриваемые в статье функционалы ℓ_n, и прояснить, что означает базисность системы $\{\gamma_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ в пространствах $A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_R)$, то, как будет видно из дальнейшего, теорема 1 трансформируется так, что в ее доказательстве окажется возможным использовать известные методы теории функций.

Нетрудно убедиться в том, что для любых $n \in \mathbb{N}_0$, λ, $h \in \mathbb{C}$, $h \ne 0$, и функции f, голоморфной в некоторой окрестности O отрезка $[\lambda, \lambda + nh]$, справедливо равенство

$$\Delta_h^n f(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(\lambda + kh) = \frac{n! h^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\zeta - \lambda - kh)}. \tag{8}$$

Интегрирование в (8) ведется по любому простому замкнутому спрямляемому контуру C, охватывающему отрезок $[\lambda, \lambda + nh]$ и лежащему в O. Действительно, по теореме о вычетах имеем

$$\frac{n! h^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\zeta - \lambda - kh)} = n! h^n \sum_{k=0}^{n} \frac{f(\lambda + kh)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} (\lambda + kh - \lambda - jh)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n! f(\lambda + kh)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} (k - j)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(\lambda + kh).$$

Из (7) и (8) с учетом сделанных выше замечаний заключаем, что теорема 1 эквивалентна следующему утверждению.

Теорема 4. *Система функций*

$$\gamma_n(\zeta) = \prod_{k=0}^{n} (\zeta - k/n)^{-1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{9}$$

образует базис в каждом из пространств $A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_R)$, $0 \le R < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пространства вида $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus D)$ (D — область в $\mathbb{C}$) сложно устроены: они не только ненормируемы, но даже неметризуемы. Проще доказывать базисность систем функций в пространствах Фреше вида $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D})$. Поэтому мы начнем со сведения задачи к доказательству базисности системы (9) в пространствах именно такого вида. Исходя из определения топологии в пространстве $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus D_R)$, мы должны установить, что, каковы бы ни были число $R\in[0,1)$ и функция γ, голоморфная в некоторой окрестности множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus D_R$ (а значит, и в окрестности $\overline{\mathbb{C}}\setminus D_{R_1}$ при каком-либо $R_1>R$), она разлагается в ряд

$$\gamma(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\gamma_n(\zeta), \tag{10}$$

сходящийся равномерно хотя бы на одном из компактов в $\overline{\mathbb{C}}$, внутренность которого содержит в себе $\mathbb{C}\setminus D_R$ (например, на $\overline{\mathbb{C}}\setminus D_{0.5(R+R_1)}$). Кроме того, последовательность коэффициентов $\{b_n\}$ в разложении (10) определяется по функции γ единственным образом. Теперь представим себе, что мы уже доказали базисность системы функций (9) во всех пространствах $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_\rho)$, $0<\rho<1$ (здесь через $\overline{D}_\rho$ обозначены замыкания множеств D_ρ). Под $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_\rho)$ в соответствии с принятыми выше терминологией и обозначениями понимаются пространства функций, аналитических на открытых и односвязных на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ областях $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_\rho$ и обращающихся в нуль на бесконечности. В них рассматривается стандартная топология, о которой мы рассказали выше. Тогда, естественно, всякая функция $\gamma\in A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus D_{R_1})$ единственным способом разлагается в ряд (10), сходящийся равномерно на любом компакте внутри $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_{R_1}$, что и требовалось! Итак, мы будем доказывать базисность системы (9) в пространствах $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_R)$ для всех $R\in(0,1]$. Исходя из приведенных выше определений, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Пусть U — односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$, $\infty\in U$, $\zeta_0\in\mathbb{C}\setminus U$. Через V обозначим образ U при отображении $z=(\zeta-\zeta_0)^{-1}$ (предполагается, что U находится в ζ-плоскости, а V — в z-плоскости). Тогда множество $A(V)$ состоит в точности из функций $\{f(z)=z^{-1}\gamma(\zeta_0+z^{-1})\colon \gamma\in A_0(U)\}$. Если наделить $A(V)$ и $A_0(U)$ стандартными топологиями, о которых было говорено выше, то данное отображение является заодно и топологическим изоморфизмом между пространствами $A(V)$ и $A_0(U)$.

Из сказанного выше вытекает, что базисность системы функций (9) в пространствах $A_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_R)$, $0<R\leqslant 1$, равносильна базисности системы функций

$$F_n(z)=z^{-1}\gamma_n(0.5+z^{-1})\equiv z^{-1}\prod_{k=0}^{n}(0.5+z^{-1}-k/n)^{-1}=z^n\prod_{k=0}^{n}(1+z(0.5-k/n))^{-1} \tag{11}$$

в пространствах $A(G_R)$, $0<R\leqslant 1$, где области G_R в z-плоскости суть образы областей $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_R$ в ζ-плоскости при отображении $z=(\zeta-0.5)^{-1}$.

Зададим области G_R в более простой аналитической форме. Для этого вспомним, что множество D_R определялось как дополнение к компакту на сфере Римана $\{\zeta\in\overline{\mathbb{C}}\colon\ |W(\zeta)|\leqslant R\}$. Следовательно, $G_R=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |W(0.5+z^{-1})|<R\}$. Имеем

$$\begin{aligned}W(0.5+z^{-1})&=(0.5+z^{-1}-1)^{0.5+z^{-1}-1}(0.5+z^{-1})^{-0.5-z^{-1}}\\&=\Bigl(\frac{z^{-1}-0.5}{z^{-1}+0.5}\Bigr)^{1/z}((z^{-1}-0.5)(z^{-1}+0.5))^{-1/2}\\&=z(1-0.25z^2)^{-1/2}\Bigl(\frac{1-0.5z}{1+0.5z}\Bigr)^{1/z}\equiv 2w(0.5z),\end{aligned}$$

где

$$w(s)=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\Bigl(\frac{1-s}{1+s}\Bigr)^{1/(2s)},\qquad s\in\mathbb{C}\setminus((-\infty,-1]\cup[1,+\infty)). \tag{12}$$

Под $\big((1-s)/(1+s)\big)^{1/(2s)}$ мы понимаем функцию

$$\exp\Big(\frac{1}{2s}\ln\frac{1-s}{1+s}\Big)=\exp\Big(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{2n}}{2n+1}\Big),\qquad |s|<1,$$

а вне круга $|s|<1$ функция $\ln\big((1-s)/(1+s)\big)$ определяется как однозначное аналитическое продолжение главной ветви этого логарифма в $\mathbb{C}\setminus\big((-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\big)$.

Таким образом,

$$G_R=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |w(0.5z)|<0.5R\},\qquad 0<R\leqslant 1. \tag{13}$$

Найдем асимптотику функций $F_n(z)$ при $n\to\infty$ и $z\in\mathbb{C}\setminus\big((-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\big)$. Воспользуемся квадратурной формулой (см. [3, гл. 9, § 5])

$$0.5g(0)+\sum_{k=1}^{n-1}g(k/n)+0.5g(1)=n\int_0^1 g(t)dt+O(M/n),$$

справедливой для любой функции $g\in C^2[0,1]$, где $M=\max\{|g''(t)|:\ t\in[0,1]\}$, а постоянная в O абсолютная. Полагая в ней

$$g(t)=g(z,t)=\ln(1+z(0.5-t))$$

$\big($под $\ln(1+\lambda z)$, $\lambda\in[-1/2,1/2]$, мы понимаем главную ветвь логарифма, разрез делается по $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\big)$ и учитывая, что на любом компакте K, лежащем в области $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-2]\cup[2,+\infty))$, функция $\partial^2g(z,t)/\partial t^2$ ограничена по абсолютной величине некоторой постоянной (своей для каждого такого компакта K), получаем асимптотическое равенство

$$\ln\prod_{k=0}^{n}(1+z(0.5-k/n))=\sum_{k=0}^{n}\ln(1+z(0.5-k/n))$$

$$=0.5\ln(1+0.5z)+0.5\ln(1-0.5z)+n\int_0^1\ln(1+z(0.5-t))\,dt+O(1/n) \tag{14}$$

равномерно на K. Вычислив интеграл

$$\int_0^1\ln(1+z(0.5-t))\,dt=-1-z^{-1}\ln\frac{1-0.5z}{1+0.5z}+0.5\ln(1-0.25z^2),$$

на основании соотношений (11) и (12) приходим к асимптотике

$$F_n(z)=(1-0.25z^2)^{-1/2}\Big(ez(1-0.25z^2)^{-1/2}\Big(\frac{1-0.5z}{1+0.5z}\Big)^{1/z}\Big)^n\exp(O(1/n))$$

$$=(1-0.25z^2)^{-1/2}(2ew(0.5z))^n(1+O(1/n))\qquad(n\to\infty), \tag{15}$$

равномерной по z на любом компакте внутри $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-2]\cup[2,+\infty))$.

Теперь нам потребуется еще одно вспомогательное утверждение, которое для сохранения связности изложения мы докажем ниже.

Лемма 2. *При любых $R\in(0,1]$ области G_R являются звездообразными относительно точки $z=0$, а функция $w(z/2)$ является в них однолистной.*

Лемма 2 позволяет сделать замену переменной $w = w(z/2)$ в области $G_1 = \bigcup_{R\in(0,1)} G_R$. Из (13) видно, что области G_R при таком отображении перейдут в круг $\{w \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 0.5R\}$, в G_1 у отображения w имеется обратное $z = \phi(w)$, $\phi \in A(|w| < 0.5)$. В итоге наша задача свелась к доказательству базисности систем функций (числовые множители $(2e)^{-n}$ на свойство системы образовывать базис не влияют)

$$\Phi_n(w) = (2e)^{-n} F_n(\phi(w)), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

в пространствах функций $A(|w| < 0.5R)$, $\ 0 < R \le 1$. Функции $\Phi_n(w)$ в силу (15) представимы в виде

$$\Phi_n(w) = b_n(w)w^n, \qquad b_n(w) = (1 - 0.25\phi^2(w))^{-1/2}(1 - O(1/n)) \qquad (n \to \infty). \tag{16}$$

Множитель $(1 - 0.25\phi^2(w))^{-1/2} \equiv (1 - 0.25z^2)^{-1/2}$ не имеет нулей в круге $|w| < 0.5$ и (что особенно важно!) $\Phi_n(0) = 1$. Для того чтобы убедиться в справедливости последнего утверждения, заметим, что остаток $O(1/n)$ в (14), представляющий из себя при каждом n некоторую n-ю функцию от z, обращается в нуль в точке $z = 0$, а множитель $1 + O(1/n)$ в (15) и в (16) не что иное, как экспонента от этого остатка. Поэтому $b_n(0) = (1 - 0.25\phi^2(0))^{-1/2} = 1$.

Теперь воспользуемся теоремой Ю. А. Казьмина о базисности близких систем [5]. Пусть заданы положительное число r и две последовательности функций $\{a_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$, предкомпактные в пространстве $A(|w| < r)$ и удовлетворяющие условиям $a_n(0) = b_n(0) = 1$ и $\lim_{n\to\infty}(a_n(w) - b_n(w)) = 0$ в топологии $A(|w| < r)$.

Тогда либо обе системы функций

$$\{w^n a_n(w)\}_{n=0}^{\infty}, \qquad \{w^n b_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$$

образуют базис в $A(|w| < r)$, либо ни одна из них не обладает этим свойством.

Положив $a_n(w) = a(w) = (1 - 0.2\phi^2(w))^{-1/2}$ (функции $b_n(w)$ определены в (16)) убеждаемся в том, что все условия цитированной теоремы Ю. А. Казьмина выполнены. Следовательно, достаточно доказать базисность системы $\{a(w)w^n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространствах $A(|w| < r)$, $0 < r \le 0.5$. Но базисность такой системы сразу следует из необращения в нуль функции $a(w)$: оператор умножения на нее непрерывен и обратим, а свойства системы образовывать базисность сохраняется при действии на функции этой системы непрерывным обратимым оператором. Тем самым теорема 1 будет полностью доказана, если доказать лемму 2. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Обозначим $w_1(z) = w(z/2)$. Функция w_1 определена на множестве $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -2] \cup [2, +\infty))$. При этом функцию w_1 можно доопределить на $[2, +\infty)$ так, чтобы она стала непрерывной во множестве

$$Q = \{z:\ \Re z \ge 0,\ \Im z \ge 0\}.$$

В качестве f возьмем ветвь функции $\ln w_1$ такую, что f действительна на $(0, 2]$. Мы имеем

$$\Im f(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & z \in (0, +i\infty), \\ 0, & z \in (0, 2], \\ \pi\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{z}\Big), & z \in [2, +\infty). \end{cases} \tag{17}$$

Далее,

$$f'(z) = \frac{1}{z^2} \ln \frac{2+z}{2-z},$$

где берется ветвь логарифма, действительная при $z \in (0, 2]$. Покажем, что

$$\Re(zf'(z)) > 0 \qquad (z \in Q \setminus \{0\}). \tag{18}$$

Обозначим $g(z)=\ln((2+z)/(2-z))=z^2f'(z)$. Если $z\in Q\setminus\{0\}$, то

$$\Im\frac{g(z)}{z}=\int\limits_0^1\Im g'(tz)\,dt=\int\limits_0^1\Im\frac{4}{4-(tz)^2}\,dt\ge 0,$$

причем неравенство строгое, если $\Im z>0$. Далее, $\Re g(z)\ge 0$, $\Im g(z)\ge 0$ для любого $z\in Q$. Таким образом, если arg обозначает значение аргумента из $(-\pi,\pi]$, то для любого $z\in Q$ мы имеем

$$0\le\arg z\le\frac{\pi}{2},\qquad 0\le\arg\frac{g(z)}{z}\le\pi,\qquad 0\le\arg g(z)\le\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что $\arg(g(z)/z)<\pi/2$, и (18) доказано.

Пусть $R>0$, $0\le\varphi\le\pi/2$. Из равенства

$$\frac{d\Im(f(Re^{i\varphi}))}{d\varphi}=\Re(Re^{i\varphi}f'(Re^{i\varphi}))$$

и неравенства (18) вытекает, что функция $\Im(f(Re^{i\varphi}))$ как функция от φ строго возрастает на $[0,\pi/2]$; поэтому в силу (17)

$$0\le\Im(f(Re^{i\varphi}))<\pi/2\qquad(\varphi\in[0,\pi/2]),$$

т. е. $w_1(z)\in Q$ для любого $z\in Q$. Далее, из (18) следует, что $|w_1(z)|$ возрастает вдоль любого луча $Re^{i\varphi}$, где $\varphi\in[0,\pi/2]$ фиксировано, а $R\in[0,+\infty)$. Кроме того, $\lim_{R\to+\infty}|w_1(Re^{i\varphi})|=1$. Поэтому для любого $t\in(0,1/2]$ существует ровно одно $R=R_t(\varphi)$ такое, что $|w_1(Re^{i\varphi})|=t$, причем $R_t(0)\le R_{1/2}(0)=2$. В силу непрерывности функции w_1 функция R_t непрерывна на $[0,\pi/2]$, и мы имеем кривую Γ'_t, соединяющую точки $R_t(0)$ и $iR_t(\pi/2)$ и содержащуюся в Q. Отражая Γ'_t относительно мнимой, действительной осей и нуля, мы получим (вместе с Γ'_t) четыре дуги замкнутой кривой Γ_t. При движении по каждой из этих дуг против часовой стрелки аргумент $w_1(z)$ возрастает на $\pi/2$. Для каждого $R\in(0,1]$ границей области G_R является $(1/2)\Gamma_{R/2}$. Ясно, что область G_R является звездообразной относительно точки $z=0$. В силу принципа максимума для любого w, $|w|<1$, уравнение $w(z)=1$ имеет единственное решение во множестве $\{z:\,z\in G_1\}$. Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маркушевич А.И.** Избранные главы теории аналитических функций. М.: Наука, 1976. 192 с.
2. **Эдвардс Р.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1072 с.
3. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 808 с.
4. **Brutman L., Passow E.** On a divided differences problem // East J. Approx. 1997. Vol. 3, no. 4. P. 495–501.
5. **Казьмин Ю.А.** Теорема о базисности близких систем и ее приложения // Мат. заметки. 1988. Т. 44, вып. 1. С. 80–88.

Поступила 10.01.2011

Конягин Сергей Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: konyagin@mi.ras.ru

Попов Антон Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: mysfed@rambler.ru